JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 11, 207–220 (1972)

Résultats de dualité dans les problèmes aux limites linéaires elliptiques

M. S. BAOUENDI*

Department of Mathematics, Purdue University, Lafayette, Ind., USA

ET

G. GEYMONAT

Istituto Matematico, Politecnico, Torino, Italie

Received April, 1970

1. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ tel que $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ soit une variété à bord de classe C^∞.

Soit donné dans $\bar{\Omega}$ l'opérateur[1]

$$A = A(x; D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

avec coefficients à valeurs complexes $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$. On suppose que A est *proprement elliptique*[2] d'ordre $2m$.

Soient donnés les opérateurs différentiels d'ordre $m_j \leqslant 2m - 1$

$$B_j(x; D) = \sum_{|\mu| \leqslant m_j} b_{j\mu}(x)\, D^\mu$$

avec coefficients à valeurs complexes $b_{j\mu} \in C^\infty(\bar{\Omega})$; aux $B_j(x; D)$ on associe les opérateurs "frontières"

$$B_j : C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(\Gamma)$$
$$u \to [B_j(x; D)u]|_\Gamma$$

* Le premier auteur a partiellement effectué ce travail quand il était professore visitatore du Consiglio Nazionale delle Ricerche; le deuxième auteur a effectué le travail avec l'aide du contrat n. 115.3083.0.5179 du Consiglio Nazionale delle Ricerche.

[1] Avec les notations usuelles $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$.

[2] Pour la définition classique, voir par ex. [5], chap. 2.

ou les opérateurs obtenus par prolongement par continuité, par ex.[3]

$$B_j : H^{k+2m}(\Omega) \to H^{k+2m-m_j-1/2}(\Gamma), \qquad k \text{ entier} \geqslant 0.$$

On suppose que les opérateurs $\{B_1, ..., B_m\}$ recouvrent[2] l'opérateur A, i.e. que

$$\{A, \mathbf{B}\} = \{A, B_1, ..., B_m\}$$

soit un problème elliptique régulier dans $\bar{\Omega}$.

Si l'on suppose que le système $\{B_1, ..., B_m\}$ est normal,[2] alors, d'après un résultat de Aronszajn–Milgram, il existe des systèmes normaux $\{S_1, ..., S_m\}$, $\{C_1, ..., C_m\}$, $\{T_1, ..., T_m\}$ tels que $\{\mathbf{B}, \mathbf{S}\}$ et $\{\mathbf{C}, \mathbf{T}\}$ soient des systèmes de Dirichlet[2] et que[4] l'on ait la formule de Green classique:

$$\begin{aligned}(Au, v)_\Omega - (u, A^*v)_\Omega &= \sum_{j=1}^m (S_j u, C_j v)_\Gamma - \sum_{j=1}^m (B_j u, T_j v)_\Gamma \\ &= (\mathbf{S}u, \mathbf{C}v)_\Gamma - (\mathbf{B}u, \mathbf{T}v)_\Gamma \qquad (1.1)\end{aligned}$$

pour toutes $u, v \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$, où l'on a désigné par $(\varphi, \psi)_\Omega$, resp. $(\varphi, \psi)_\Gamma$, le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, resp. $L^2(\Gamma)$.

Le résultat suivant est maintenant classique (pour une démonstration voir par ex. Lions–Magenes [5] chap. 2)

THÉORÈME 1.1. *Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé l'opérateur $\mathscr{P}$:*

$$H^{k+2m}(\Omega) \to H^k(\Omega) \times \prod_{j=1}^m H^{k+2m-m_j-1/2}(\Gamma)$$
$$u \mapsto \mathscr{P}u = (Au, B_1 u, ..., B_m u)$$

admet un indice indépendant de $k \in \mathbb{N}$ et

$$\ker \mathscr{P} = \{u \in \mathscr{D}(\bar{\Omega}); Au = 0, \mathbf{B}u = 0\} = N.$$

De même l'opérateur Q:

$$H^{k+2m}(\Omega) \to H^k(\Omega) \times \prod_{j=1}^m H^{k+2m-n_j-1/2}(\Gamma)$$
$$u \mapsto Qu = (A^*u, C_1 u, ..., C_m u)$$

[3] $H^s(\Omega)$ et $H^s(\Gamma)$ sont les espaces de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$ dans Ω, resp. Γ; pour la définition et les propriétés essentielles voir Hörmander [4], chap. 2, et Lions-Magenes [5], chap. 1.

[4] Ordre $S_j = \mu_j \leqslant 2m - 1$, ordre $c_j = 2m - \mu_j - 1 = n_j$; ordre $T_j = 2m - m_j - 1 = \nu_j$; $j = 1, ..., m$.

admet un indice indépendant de $k \in \mathbb{N}$ *et*

$$\ker Q = \{u \in \mathscr{D}(\bar{\Omega});\ A^*u = 0, \mathbf{C}u = 0\} = N^*.$$

De plus

$$\operatorname{Im} \mathscr{P} = \Big\{(f, \boldsymbol{\varphi}) \in H^k(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-m_j-1/2}(\Gamma);$$

$$\text{pour tout } v \in N^*,\ (f, v)_\Omega + (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{T}v)_\Gamma = 0\Big\};$$

$$\operatorname{Im} Q = \Big\{(f, \boldsymbol{\varphi}) \in H^k(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-n_j-1/2}(\Gamma);$$

$$\text{pour tout } u \in N,\ (f, u)_\Omega + (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{S}u)_\Gamma = 0\Big\};$$

et donc

$$\text{indice } \mathscr{P} = \dim N - \dim N^* = -\text{ indice } Q.$$

Dans cet article nous étudions une nouvelle méthode de dualité, au sens de Lions-Magenes, avec laquelle on construit un problème aux limites

$$\begin{aligned} &u \in H^{-k}(\Omega) \\ &Au = f \in H^{-k-2m}(\Omega) \\ &K^*u = \mathbf{g} \in \prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma) \end{aligned} \tag{1.2}$$

qui est *équivalent* au problème

$$\begin{aligned} &u \in H^{-k}(\Omega) \\ &Au = f \\ &\mathbf{B}u = \boldsymbol{\varphi} \end{aligned} \tag{1.3}$$

dès que les opérateurs B_j sont définis au sens des théorèmes de traces selon Lions–Magenes.

Dans le n. 2 nous construirons l'opérateur K^* et prouverons que l'indice du problème (1.2) est égal à *indice* $\mathscr{P}$.

Dans le n. 3 nous donnerons une nouvelle présentation des théorèmes de traces de Lions–Magenes et dans le n. 5 nous prouverons l'équivalence des problèmes (1.2) et (1.3).

Dans un autre travail (*) nous prouverons les résultats analogues dans le cas analytique.

(*) Note ajoutée pendant la correction des épreuves. Voir Transposition des problèmes aux limites elliptiques, à paraître dans Symposia Mathematica, Academic Press, 1971.

Les résultats obtenus peuvent évidemment se généraliser au cas L^p avec $1 < p < +\infty$ et aux systèmes elliptiques pour lesquels on a la formule de Green (1.1) (voir par ex. [3],...).

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans la note [1].

Nous désirons remercier MM. P. Grisvard et B. Malgrange pour les nombreuses discussions sur ce sujet.

2. Dualité

Proposition 2.1. *Il existe un opérateur linéaire continu à indice*

$$K : \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma) \to H_0^k(\Omega)$$

tel que l'opérateur $\mathscr{M}$:

$$H_0^{k+2m}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma) \to H_0^k(\Omega)$$

$$(u, \varphi) \mapsto \mathscr{M}(u, \varphi) = A^*u + K\varphi$$

soit à indice et

$$\text{indice } \mathscr{M} = \text{indice } Q.$$

Démonstration. Soit R le relèvement vérifiant:

$$R \in \mathscr{L}\left(\prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma); H^{k+2m}(\mathbb{R}^n)\right),^{5}$$

$$\mathbf{T}R\varphi = \varphi, \qquad \mathbf{C}R\varphi = 0, \qquad A^*[(R\varphi)|_\Omega] \in H_0^k(\Omega).^{6} \tag{2.1}$$

L'existence de ce relèvement est donnée par les théorèmes de traces (voir par ex. [5], chap. 2).

On pose alors

$$K\varphi = A^*[(R\varphi)|_\Omega].$$

L'application

$$(u, \varphi) \mapsto u + (R\varphi)|_\Omega \tag{2.2}$$

[5] Si E, F sont des espaces de Banach, $\mathscr{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires et continues de E dans F.

[6] On écriva parfois $R\varphi$ au lieu de $(R\varphi)|_\Omega$.

est un isomorphisme de $\ker \mathscr{M}$ sur N^*. En effet pour $(u, \boldsymbol{\varphi}) \in \ker \mathscr{M}$

$$\begin{aligned} A^*(u + R\boldsymbol{\varphi}) &= 0 & & \\ C_j(u + R\boldsymbol{\varphi}) &= 0 & j &= 1,\dots, m \\ T_j(u + R\boldsymbol{\varphi}) &= \varphi_j & j &= 1,\dots, m \end{aligned}$$

et donc elle est bien définie et injective. Soit $w \in N^*$ et l'on pose

$$u = w - R\mathbf{T}w \in H_0^{k+2m}(\Omega)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T}w \in [C^\infty(\Gamma)]^m \subset \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma),$$

alors $u + R\boldsymbol{\varphi} = w$ et donc l'application (2.2) est surjective.

Il en résulte ainsi

$$\dim \ker \mathscr{M} = \dim \ker Q = \dim N^*.$$

On a

$$\operatorname{Im} \mathscr{M} = N^\perp = \{f \in H_0{}^k(\Omega);\ \text{pour tout } v \in N,\ (f, v)_\Omega = 0\}.$$

En effet pour $(u, \boldsymbol{\varphi}) \in H_0^{k+2m}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma)$ et $v \in N$, en utilisant la formule de Green (1.1), on a

$$(A^*u + K\boldsymbol{\varphi}, v)_\Omega = (A^*(u + R\boldsymbol{\varphi}), v)_\Omega = 0,$$

ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im} \mathscr{M} \subset N^\perp$.

Pour montrer l'inclusion inverse, soit $f \in H_0{}^k(\Omega)$ telle que $(f, v)_\Omega = 0$ pour tout $v \in N$. Soit $w \in H^{k+2m}(\Omega)$ une solution du problème

$$\begin{aligned} A^*w &= f & & \\ C_jw &= 0 & j &= 1,\dots, m \end{aligned}$$

donnée par le Théorème 1.1. On pose alors

$$u = w - R\mathbf{T}w \in H_0^{k+2m}(\Omega)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T}w \in \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma)$$

et l'on a bien

$$A^*u + K\boldsymbol{\varphi} = f,$$

ce qui démontre l'inclusion voulue $N^\perp \subset \operatorname{Im} \mathscr{M}$.

On a donc

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{M} = \dim N = \operatorname{codim} \operatorname{Im} Q. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque 2.1. L'opérateur K est un pseudo-noyau de Poisson au sens de [2].

Par transposition du résultat précédent on obtient facilement le résultat suivant:

THÉORÈME 2.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'opérateur $\mathscr{M}^*$:*

$$H^{-k}(\Omega) \to H^{-k-2m}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma)$$

$$u \mapsto \mathscr{M}^* u = (Au, K^*u)$$

est à indice; de plus:

$$\text{indice } \mathscr{M}^* = \text{indice } \mathscr{P}.$$

$$\ker \mathscr{M}^* = N = \ker \mathscr{P},$$

$$\operatorname{Im} \mathscr{M}^* = \Big\{(f, \varphi) \in H^{-k-2m}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma);$$

$$\text{pour tout } v \in N^* \langle f, v - R\mathbf{T}v\rangle_\Omega + \langle \varphi, \mathbf{T}v\rangle_\Gamma = 0\Big\}.^{7}$$

3. THÉORÈME DE TRACES

Soit $\tilde{A} = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} \tilde{a}_\alpha(x) D^\alpha$ avec $\tilde{a}_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $a_\alpha(x) = \tilde{a}_\alpha(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$; on suppose que $\tilde{A}$ est proprement elliptique dans $\mathbb{R}^n$.

Soit F un espace vectoriel topologique séparé localement convexe vérifiant pour k entier $\geqslant 0$ fixé[8]

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad H^0(\Omega) \subsetneq F \subsetneq H^{-k-2m}(\Omega), \\ &\text{(ii)} \quad H^0(\Omega) \textit{ est dense dans } F. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Soient

$$F_A = F \cap AH^{-k}(\Omega)$$

[7] Ici $\langle\, ,\rangle_\Omega$ désigne l'antidualité entre $H^{-k-2m}(\Omega)$ et $H_0^{k+2m}(\Omega)$, $\langle\, ,\rangle_\Gamma$ l'antidualité entre $\prod_{j=1}^m H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ et $\prod_{j=1}^m H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma)$ puisque $m_j + \frac{1}{2} = 2m - \nu_j - 1/2$.

[8] $E \subsetneq F$ signifie qu'il y a injection algébrique et topologique, i.e., l'injection est continue.

muni de la topologie limite projective de F et de $AH^{-k}(\Omega)$;

$$X = \{u \in H^{-k}(\Omega);\ Au \in F\} = \{u \in H^{-k}(\Omega);\ Au \in F_A\}$$

muni de la topologie du graphe;

$$\mathscr{H}_{A^*}^{k+2m} = \{u \in H^{k+2m}(\mathbb{R}^n);\ [\tilde{A}^*u]|_\Omega \in H_0^{\ k}(\Omega)\}$$

sous espace fermé de $H^{k+2m}(\mathbb{R}^n)$; $\mathscr{H}_{A^*}^{-k-2m}$ le dual fort de $\mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$; c'est donc un quotient de $H^{-k-2m}(\mathbb{R}^n)$ et soit π l'application quotient canonique de $H^{-k-2m}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathscr{H}_{A^*}^{-k-2m}$.

Remarque 3.1. Si $k = 0$ on a $\mathscr{H}_{A^*}^{2m} = H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{H}_{A^*}^{-2m} = H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$, $\pi =$ identité.

En suivant le schéma de Lions–Magenes [5] chap. 2, n° 6, on prouve avant tout le

LEMME 3.1. *$\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans X.*

Pour la démonstration voir par ex. Magenes [6] lemme 5.1., Lions–Magenes [5] chap. 2, Th. 6.4.

LEMME 3.2. (i) *$AH^{-k}(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^{-k-2m}(\Omega)$, on a*

$$AH^{-k}(\Omega) = \{f \in H^{-k-2m}(\Omega); f \perp P\}$$

où P est un sous espace de dimension finie de $H_0^{k+2m}(\Omega)$ défini par

$$P = \{u \in H_0^{k+2m}(\Omega);\ A^*u = 0\}.$$

(ii) *F_A est un sous espace fermé de F.*

(iii) *$H^0(\Omega) \cap F_A$ est dense dans F_A.*

Démonstration. (i) Si l'on considère l'application linéaire et continue

$$A^* : H_0^{k+2m}(\Omega) \to H_0^{\ k}(\Omega),$$

l'inégalité à priori

$$\| u \|_{H_0^{k+2m}(\Omega)} \leqslant C\{\| A^*u \|_{H_0^k(\Omega)} + \| u \|_{H_0^k(\Omega)}\}$$

et l'injection compacte de $H_0^{k+2m}(\Omega)$ dans $H_0^{\ k}(\Omega)$ montrent que son image est fermée et son noyau P est de dimension finie.[9] On a alors le résultat par transposition.

[9] D'après l'exemple de Pliš [8], P n'est pas toujours réduit a 0. Dans le cas de l'ordre 2 ($m = 1$) à cause du principe du maximum, on a $P = \{0\}$, et de même dans le cas des coefficients analytiques [7].

(ii) Immédiate.

(iii) Soit $g_1, \ldots, g_P$ une base orthonormale de P (pour le produit scalaire de $H^0(\Omega)$). Pour $u \in H^{-k-2m}(\Omega)$ on pose

$$Mu = \sum_{j=1}^{P} \langle u, g_j \rangle_\Omega \, g_j$$

où $\langle \, , \rangle_\Omega$ désigne l'antidualité entre $H^{-k-2m}(\Omega)$ et $H_0^{k+2m}(\Omega)$. M est un projecteur continue sur P et l'on a

$$Mu = 0 \Leftrightarrow u \in AH^{-k}(\Omega).$$

Pour $u \in F_A$ soit, d'après l'hypothèse (3.1) (ii), $f_i \to u$ dans F avec $f_i \in H^0(\Omega)$; alors $f_i - Mf_i = h_i \in H^0(\Omega) \cap F_A$ et $h_i \to u$ dans F puisque $Mf_i \to Mu = 0$.

C.Q.F.D.

On peut maintenant donner une condition pour l'existence des traces qui complète les résultats de Lions–Magenes [5].

THÉORÈME 3.1. *Sous l'hypothèse* (3.1) *la condition*

L'application linéaire $u \mapsto \pi\tilde{u}$,[10] définie dans $H^0(\Omega)$ se prolonge par continuité en une application linéaire et continue de F_A dans $\mathscr{H}_{A^*}^{-k-2m}$ encore notée $u \mapsto \pi\tilde{u}$. (α)

est équivalente à la condition

L'application linéaire $u \mapsto (\mathbf{B}u, \mathbf{S}u)$ définie dans $H^{2m}(\Omega)$ se prolonge par continuité en une application linéaire et continue de X dans

$$\prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=1}^{m} H^{-k-\mu_j-1/2}(\Gamma) \qquad (\beta)$$

encore notée $u \mapsto (\mathbf{B}u, \mathbf{S}u)$.

COROLLAIRE 3.1. *Si les conditions* (α) *et* (β) *sont vérifiées alors on a pour toute* $u \in X$ *et* $v \in \mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$ *la formule de Green suivante*:

$$\begin{aligned} \langle \pi\widetilde{Au}, v \rangle_{\mathscr{H}_{A^*}^{-k-2m} \times \mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}} &- \langle u, A^*v\,|_\Omega \rangle_{H^{-k}(\Omega) \times H_0^{k}(\Omega)} \\ &= \langle \mathbf{S}u, \mathbf{C}v \rangle_{\prod_{j=1}^m (H^{-k-\mu_j-1/2}(\Gamma) \times H^{k+\mu_j+1/2}(\Gamma))} \\ &\quad - \langle \mathbf{B}u, \mathbf{T}v \rangle_{\prod_{j=1}^m (H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma) \times H^{k+m_j+1/2}(\Gamma))} . \end{aligned} \qquad (3.2)$$

[10] Si $f \in H^0(\Omega)$ on note $\tilde{f}$ le prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n$ en dehors de $\bar{\Omega}$.

Cette formule est en effet vraie pour $u \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$; elle s'obtient par passage à la limite en utilisant (α) et (β).

Remarque 3.2. En supposant (α) et (β), on a évidemment les mêmes formules que dans le cas classique avec d'autres systèmes de Dirichlet que $\{\mathbf{B}, \mathbf{S}\}$ et $\{\mathbf{C}, \mathbf{T}\}$.

Démonstration du Théorème 3.1. (α) $\Rightarrow$ (β). On utilise la formule de Green (1.1) valable pour $u \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$ et $v \in \mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$. Le système $\{\mathbf{C}, \mathbf{T}\}$ étant de Dirichlet il existe[11] un relèvement continu r vérifiant

$$r : \prod_{j=1}^{m} H^{k+m_j+1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+\mu_j+1/2}(\Gamma) \to \mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$$

$$\mathbf{C}r(\varphi, \psi) = \varphi, \qquad \mathbf{T}r(\varphi, \psi) = \psi.$$

Pour

$$u \in X \qquad \text{et} \quad (\varphi, \psi) \in \prod_{j=1}^{m} H^{k+m_j+1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+\mu_j+1/2}(\Gamma),$$

on définit

$$L(u, \varphi, \psi) = \langle \pi \widetilde{Au}, r(\varphi, \psi)\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle u, A^*[r(\varphi, \psi)|_\Omega]\rangle_\Omega$$

où $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^n}$ désigne l'antidualité entre $\mathscr{H}_{A^*}^{-k+2m}$ et $\mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$ et $\langle\ ,\ \rangle_\Omega$ désigne l'antidualité entre $H^{-k}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega)$.

L'application

$$(u, \varphi, \psi) \mapsto L(u, \varphi, \psi) \qquad \text{de} \quad X \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+m_j+1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=1}^{m} H^{k+\mu_j+1/2}(\Gamma)$$

dans $\mathbb{C}$ est multilinéaire continue (comme composée d'applications continues). On a donc

$$L(u, \varphi, \psi) = \langle \tau_1(u), \psi\rangle_{1,\Gamma} + \langle \tau_2(u), \varphi\rangle_{2,\Gamma}$$

où

$$\tau_1 \in \mathscr{L}\left(X; \prod_{j=1}^{m} H^{-k-\mu_j-1/2}(\Gamma)\right), \qquad \tau_2 \in \mathscr{L}\left(X; \prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma)\right),$$

$\langle\ ,\ \rangle_{1,\Gamma}$ désigne l'antidualité entre $\prod_{j=1}^{m} H^{-k-\mu_j-1/2}(\Gamma)$ et $\prod_{j=1}^{m} H^{k+\mu_j+1/2}(\Gamma)$ et $\langle\ ,\ \rangle_{2,\Gamma}$ désigne l'antidualité entre $\prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ et $\prod_{j=1}^{m} H^{k+m_j+1/2}(\Gamma)$.

[11] Voir par ex. Lions-Magenes [5], chap. 2.

Pour $u \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$ la formule de Green (1.1) montre que l'on a

$$\tau_1(u) = \mathbf{S}u, \qquad \tau_2(u) = -\mathbf{B}u. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque 3.3. On a aussi démontré que l'expression $L(u, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Psi})$ ne dépend pas du relèvement r choisi; on aurait pu le vérifier directement.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. $AH^{-k}(\Omega)$ étant fermé dans $H^{-k-2m}(\Omega)$ (lemme 2(i)), soit ρ un relèvement continu de $AH^{-k}(\Omega)$ dans $H^{-k}(\Omega)$ ($A\rho f = f$ pour $f \in AH^{-k}(\Omega)$). On a aussi, par restriction à F_A

$$\rho : F_A \to H^{-k}(\Omega)$$

avec $A\rho f = f$ pour $f \in F_A$ et même on a l'application continue $\rho : F_A \to X$.
La forme bilinéaire définie sur $F_A \times \mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$

$$(f, v) \mapsto \mathscr{L}(f, v) = \langle \rho f, A^*v \,|_\Omega \rangle_\Omega - \langle \mathbf{S}\rho f, \mathbf{C}v \rangle_{1,\Gamma} - \langle \mathbf{B}\rho f, \mathbf{T}v \rangle_{2,\Gamma}$$

où les antidualités sont celles déjà introduites dans $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$, est continue. Il existe donc une application G linéaire et continue de F_A dans $\mathscr{H}_{A^*}^{-k-2m}$ vérifiant

$$\mathscr{L}(f, v) = \langle Gf, v \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Pour montrer que l'on a

$$Gf = \tilde{f} \qquad \text{pour} \quad f \in H^0(\Omega) \cap F_A$$

il suffit d'utiliser $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$, en prenant $F = H^0(\Omega)$ (qui vérifie (α)!) et la formule de Green (3.2).

Puisque $\mathscr{D}(\bar{\Omega}) \subset \{u \in H^{-k}(\Omega); Au \in H^0(\Omega)\} \subset X$ et que chaque espace est dense dans le suivant, les applications $\mathbf{S}$ et $\mathbf{B}$ définies pour F sont donc des prolongements par continuité de celles définies pour $H^0(\Omega)$. Il vient alors

$$\langle Gf, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \pi\tilde{f}, v \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{pour} \quad f \in H^0(\Omega) \cap F_A. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque 3.4. G est indépendant du relèvement choisi, puisqu'il est un prolongement continu de l'application $f \mapsto \pi\tilde{f}$ définie sur un sous espace dense.

Remarque 3.5. Dans tous les résultats de ce n. 3 on utilise, *seulement* l'ellipticité de A et le fait que $\{\mathbf{B}, \mathbf{S}\}$ et $\{\mathbf{C}, \mathbf{T}\}$ sont des systèmes de Dirichlet.

4. Remarques et Compléments

1. L'hypothese (3.1) montre par passage au dual fort que l'on a les injections continues suivantes

$$H_0^{k+2m}(\Omega) \subsetneq F' \subsetneq H^0(\Omega).$$

On en déduit facilement:

Proposition 4.1. *Sous l'hypothèse* (3.1) *la condition* (α) *entraîne à la condition*

L'application $u \mapsto u\,|_\Omega$ est linéaire continue et injective de $\mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$ dans F'. (α')

et la condition (α') *entraîne* (α) *si* F *est aussi réflexif.*

2. Si l'on suppose que F est *réflexif* alors la condition (3.1) est *équivalente* à la suivante

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad H_0^{k+2m}(\Omega) \subsetneq F' \subsetneq H^0(\Omega) \\ &\text{(ii)} \quad H_0^{k+2m}(\Omega) \text{ dense dans } F'. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les conditions (4.1) et (α') expriment que F' *est un espace normal de distributions contenu dans* $H^0(\Omega)$ *et contenant les restrictions à* Ω *des éléments de* $\mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$. Cette condition est à comparer avec les hypothèses de Lions–Magenes [5] chap. 2 n. 6.

3. Il est évident que la condition (α) résulte de la condition:

l'application $u \mapsto \tilde{u}$ *définie dans* $H^0(\Omega)$ *se prolonge par continuite en une application linéaire et continue de* F *dans* $H^{-k-2m}(\mathbb{R}^n)$. (α'')

Cette condition (α'') a l'avantage de ne pas faire intervenir l'opérateur A.

4. On peut s'intéresser au prolongement à X de l'application

$$u \mapsto (B_1u, \ldots, B_pu,\, S_1u, \ldots, S_qu)$$

avec p, q fixes, $0 \leqslant p,\ q \leqslant m$,[12] mais non $p = q = 0$. Designons par ($\beta_{p,q}$) cette condition. Notons:

$$\mathscr{H}_{A^*,p,q}^{k+2m} = \{u \in H^{k+2m}(\mathbb{R}^n);\ T_{p+1}u = \cdots = T_mu = C_{q+1}u = \cdots = C_mu = 0,\ A^*u\,|_\Omega \in H_0{}^k(\Omega)\}$$

et introduisons la condition:

l'application $u \mapsto u\,|_\Omega$ *est linéaire continue injective de* $\mathscr{H}_{A^*,p,q}^{k+2m}$ *dans* F'. ($\alpha'_{p,q}$)

[12] Si $p = 0$, resp. $q = 0$, alors on considére l'application $u \to (S_1u, \ldots, S_qu)$, resp. $u \to (B_1u, \ldots, B_pu)$.

On a alors:

THÉORÈME 4.1. *Sous l'hypothèse* (3.1) *on a*

$$(\beta_{p,q}) \Leftrightarrow (\alpha'_{p,q}).$$

On peut de même transformer la condition (α).

Si $p = m$ et $q = 0$ on obtient essentiellement les conditions de Lions-Magenes [5] chap. 2 (voir aussi [6]) mais on les complète en prouvant la *nécessité* de la condition $(\alpha'_{m,0})$.

EXEMPLE 4.1. $F = \Xi^{-k-2m}(\Omega)$,[13] vérifie (3.1) et (α''). Pour vérifier (α'') il suffit de remarquer que $f \in \Xi^{-k-2m}(\Omega)$ peut se représenter sous la forme

$$f = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m+k} D^{\alpha}(\rho^{|\alpha|} f_{\alpha}) \qquad \text{avec} \quad f_{\alpha} \in H^0(\Omega);$$

alors

$$\tilde{f} = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m+k} D^{\alpha}\widetilde{(\rho^{|\alpha|} f_{\alpha})} \in H^{-k-2m}(\mathbb{R}^n).$$

EXEMPLE 4.2. $A = -\Delta$ (laplacien), $k = 0$, $m = 1$.

Si on prend $F = H^{-1}(\Omega)$ alors $F' = H_0{}^1(\Omega)$ est un espace normal mais il ne contient pas $H^2(\Omega)$; on ne peut donc pas parler des traces γ_0 et γ_1 pour les éléments de X. Mais F' contient $H_0{}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. On peut donc seulement parler de la trace première γ_0 .

5. APPLICATION À LA DUALITÉ

THÉORÈME 5.1. *Soit F un espace vérifiant les conditions* (3.1), (α) *et* (β); *soit $\{A, B\}$ un problème elliptique régulier dans $\bar{\Omega}$.*

L'opérateur $\mathscr{P}_F : X \to F \times \prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ défini par

$$u \mapsto \mathscr{P}_F u = (Au, \mathbf{B}u)$$

est à indice; de plus indice $\mathscr{P}_F =$ indice $\mathscr{P}$, $\ker \mathscr{P}_F = \ker \mathscr{P} = N$, $\operatorname{Im} \mathscr{P}_F = N^{*\perp}$.

[13] Pour la définition et les propriétés de ces espaces voir [5], chap. 2, n. 6.3.

On a ainsi prouvé que pour tout $(f, \varphi) \in F \times \prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ et verifiant pour tout $v \in N^*$

$$\langle \pi\tilde{f}, V\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \varphi, \mathbf{T}v\rangle_\Gamma = 0,$$ [14]

ou $V \in H^{k+2m}(\mathbb{R}^n)$ et $V|_\Omega = v$, il existe $u \in H^{-k}(\Omega)$, unique modulo N, tel que

$$\begin{aligned} Au &= f \\ \mathbf{B}u &= \varphi. \end{aligned}$$

Demonstration. Soit $u \in H^{-k}(\Omega)$ et $Au \in F$; on va appliquer le Theoreme 2.1 en explicitant dans ce cas K^*u.

Soit $\psi \in \prod_{j=1}^{m} H^{k+2m-\nu_j-1/2}(\Gamma)$; on a

$$\begin{aligned} \langle K^*u, \psi\rangle_\Gamma &= \langle u, K\psi\rangle_{H^{-k}(\Omega)\times H_0^k(\Omega)} \\ &= \langle u, A^*(R\psi)|_\Omega\rangle_{H^{-k}(\Omega)\times H_0^k(\Omega)}. \end{aligned}$$

L'espace F vérifiant les conditions (α) et (β) on peut utiliser la formule de Green (3.2); on obtient alors pour (2.1)

$$\begin{aligned} \langle K^*u, \psi\rangle_\Gamma &= \langle \pi\widetilde{Au}, R\psi\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \mathbf{B}u, \psi\rangle_\Gamma \\ &= \langle R^*\pi\widetilde{Au} + \mathbf{B}u, \psi\rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$K^*u = R^*\pi\widetilde{Au} + \mathbf{B}u.$$

Resoudre le problème

$$\begin{aligned} Au &= f \\ \mathbf{B}u &= \varphi \end{aligned}$$

est donc equivalent à resoudre le problème

$$\begin{aligned} Au &= f \\ K^*u &= R^*\pi\tilde{f} + \varphi. \end{aligned}$$

Le noyau des deux problèmes est le même. Pour que $(f, \varphi) \in \operatorname{Im} \mathscr{P}_F$ il faut et il suffit que $(f, R^*\pi\tilde{f} + \varphi) \in \operatorname{Im} \mathscr{M}^*$, i.e., par le Théorème 2.1 que pour tout $v \in N^*$

$$\langle f, v - R\mathbf{T}v\rangle_\Omega + \langle R^*\pi\tilde{f} + \varphi, Tv\rangle_\Gamma = 0$$

[14] On a note $\langle\,,\rangle_{\mathbb{R}^n}$ l'antidualité entre $\mathscr{H}_{A^*}^{-k-2m}$ et $\mathscr{H}_{A^*}^{k+2m}$ et $\langle\,,\rangle_\Gamma$ l'antidualite entre $\prod_{j=1}^{m} H^{-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ et $\prod_{j=1}^{m} H^{k+m_j+1/2}(\Gamma)$.

soit

$$\langle \pi\tilde{f}, V\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{T}v\rangle_\Gamma = 0. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Bibliographie

1. M. S. Baouendi et G. Geymonat, Quelques résultats de dualité dans les problèmes aux limites linéaires elliptiques. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* **270** (1970), 370–372.
2. L. Boutet de Montvel, Comportement d'un opérateur pseudodifférentiel sur une varieté à bord II. Pseudo-noyaux de Poisson. *J. Anal. Math.* **17** (1966), 255–304.
3. G. Geymonat, Su alcuni problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici secondo Petrowsky. *Le Matematiche* **20** (1965), 211–253.
4. L. Hörmander, "Linear Partial Differential Operators." Springer, Berlin, 1963.
5. J. L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications," Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
6. E. Magenes, Sur les problèmes aux limites pour les équations linéaires elliptiques. *Colloque n° 117 du CNRS Paris juin 1962*, pp. 95–111.
7. B. Malgrange, Existence et approximations des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolutions. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **6** (1955–56), 271–355.
8. A. Pliš, A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere. *Commun. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 599-617.

Printed in Belgium