JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 34, 282–291 (1979)

Quelques propriétés topologiques des espaces d'interpolation dans le cadre général

B. BEAUZAMY

*Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex, France**

Communicated by the Editors

Received November 16, 1977; revised July 11, 1978

Nous plaçant dans le cadre le plus général où sont définis les espaces d'interpolation réels, nous étudions, pour ces espaces, la réflexivité et la présence de sous-espaces isomorphes à l^1.

We study, in the general case, the reflexivity of the real Lions–Peetre interpolation spaces $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1,\ 1 < p < \infty)$. We prove that these spaces are reflexive if and only if the canonical injection i, from the intersection $A_0 \cap A_1$ into the sum $A_0 + A_1$, is weakly compact.

Nous avons étudié dans [1] la réflexivité des espaces d'interpolation réels $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ de Lions–Peetre et dans [2] la présence dans ces espaces de sous-espaces isomorphes à l^1. Cette étude a été faite dans le cas où l'espace A_0 était contenu, avec injection continue, dans l'espace A_1. Nous nous proposons ici de nous intéresser aux mêmes questions dans le cadre le plus général où sont définis les espaces d'interpolation: A_0 et A_1 sont deux espaces de Banach, contenus, avec injection continue, dans un même espace vectoriel topologique localement convexe séparé $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$.

On introduit alors les espaces $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$, que nous noterons I et S respectivement, et qui sont des espaces de Banach pour les normes:

$$\| a \|_I = \max(\| a \|_{A_0}, \| a \|_{A_1}),$$

$$\| a \|_S = \inf\{\| a_0 \|_{A_0} + \| a_1 \|_{A_1},\ a_0 + a_1 = a\}.$$

Soit $(a(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$; on sait (voir [6]) que, si ξ_0 et ξ_1 sont deux nombres réels de signes contraires et si

$$\| e^{\xi_0 m} a(m) \|_{l^p(A_0)} = \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \| e^{\xi_0 m} a(m) \|_{A_0}^p \Big)^{1/p} < \infty,$$

* Laboratoire de Recherche associé au CNRS n° 169.

0022-1236/79/110282-10$02.00/0

et

$$\| e^{\xi_1 m} a(m)\|_{l^p(A_1)} = \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \| e^{\xi_1 m} a(m)\|_{A_1}^p\Big)^{1/p} < \infty$$

la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)$ converge normalement dans $\mathfrak{A}$ (p vérifie $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Dans la suite, nous prendrons, pour fixer les idées, $\xi_0 < 0$ et $\xi_1 > 0$, et nous poserons $\theta = \xi_0/(\xi_0 - \xi_1)$.

La norme de l'espace d'interpolation $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ peut être définie de plusieurs manières équivalentes. L'une d'entre elles est donnée par la formule:

$$\| a \|_A = \inf \max(\| e^{\xi_0 m} a(m)\|_{l^p(A_0)}, \| e^{\xi_1 m} a(m)\|_{l^p(A_1)}),$$

l'infimum portant sur toutes les représentations possibles de a en $a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)$ pour lesquelles les deux quantités du second membre sont finies.

Nous renvoyons à [1] et [6] pour les autres définitions et les premières propriétés des espaces d'interpolation; rappelons simplement que:

— $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ est un espace intermédiaire entre I et S: il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\text{(a)} \quad C_1 \| a \|_S \leqslant \| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \qquad \forall a \in (A_0, A_1)_{\theta,p}$$

et

$$\text{(b)} \quad \| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \leqslant C_2 \| a \|_I \qquad \forall a \in I.$$

— Pour tout $a \in (A_0, A_1)_{\theta,p}$ et toute représentation de a en $a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)$, on a:

$$\| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \leqslant e^{-\xi_0\xi_1/|\xi_0-\xi_1|} \| e^{\xi_0 m} a(m)\|_{l^p(A_0)}^{1-\theta} \cdot \| e^{\xi_1 m} a(m)\|_{l^p(A_1)}^{\theta} . \tag{2}$$

— Il existe une constante C (dépendant de ξ_0, ξ_1, p) telle que pour tout a de I, on ait:

$$\| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \leqslant C \| a \|_{A_0}^{1-\theta} \cdot \| a \|_{A_1}^{\theta} . \tag{3}$$

Enfin, nous notons i l'injection de $A_0 \cap A_1$ dans $A_0 + A_1$, et j l'injection de $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ dans $A_0 + A_1$.

THÉORÈME 1. *Les espaces* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1, 1 < p < \infty)$ *sont réflexifs si et seulement si l'injection i, de* $A_0 \cap A_1$ *dans* $A_0 + A_1$, *est faiblement compacte.*

Remarque. Il a été démonté par H. Morimoto [7] que ces espaces étaient réflexifs dès que l'un des espaces A_0 et A_1 était réflexif. Notre résultat, qui donne une condition nécessaire et suffisante, est de toute évidence beaucoup plus fort.

Dans l'énoncé qui suit, dire que I et S ont des l^1 homothétiques signifie qu'il existe une suite (e_n) de points de I et un nombre $\delta_0 > 0$ tels que $\| e_n \|_I \leqslant 1$ et, pour toute suite finie de scalaires (α_k):

$$\left\| \sum \alpha_k e_k \right\|_S \geqslant \delta_0 \sum | \alpha_k |.$$

THÉORÈME 2. *Les espaces* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1,\ 1 < p < \infty)$ *contiennent un sous-espace isomorphe à* l^1 *si et seulement si* $A_0 \cap A_1$ *et* $A_0 + A_1$ *ont des* l^1 *homothétiques.*

Remarquons tout d'abord que pour chacun de ces deux théorèmes, l'une des implications s'établit aisément, du fait que $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ est intermédiaire entre I et S: si l'espace d'interpolation est réflexif, i est faiblement compacte, et si I et S ont des l^1 homothétiques, $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ contient l^1.

Nous nous contenterons de montrer ces théorèmes pour l'espace d'interpolation $(A_0, A_1)_{1/2,2}$, que nous noterons A (la démonstration est complètement identique pour les autres). Nous choisirons donc $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = +1$. Les deux théorèmes seront établis simultanément, car une même méthode fournit les deux résultats.

La démonstration se décompose en deux étapes: dans la première on passe d'une propriété de A à une propriété de l'injection j, dans la seconde, d'une propriété de l'injection j à une propriété de l'injection i. La première étape est l'objet de la proposition 1 ci-dessous; compte-tenu du lemme 1, qui donne une définition équivalente de la norme de A, elle se réduit à une application des techniques de W. J. Davis, W. B. Johnson, T. Figiel, A. Pelczynski [3]. Nous n'en donnerons donc que les grandes lignes.

PROPOSITION 1. *A est réflexif si et seulement si j est faiblement compacte; A contient l^1 si et seulement si A et S ont des l^1 homothétiques.*

LEMME 1. *La norme de l'espace d'interpolation A est équivalente à la norme* $| a | = (\sum_{m \in \mathbb{Z}} \| a \|_m^2)^{1/2}$, *où* $\| \cdot \|_m$ *est la jauge du convexe* $e^m B_0 + e^{-m} B_1$ *(*B_0 *et* B_1 *désignent les boules unité de* A_0 *et* A_1 *respectivement).*

Ce lemme a été établi par l'auteur dans [1] (chap. III, Prop. III.1, lemme). La démonstration donnée est dans le cas $A_0 \hookrightarrow A_1$, mais elle s'étend immédiatement au cas général. Les deux lemmes qui suivent s'établissent comme dans [3] (voir aussi [1]). Si X est un espace de Banach, B_X désigne sa boule unité.

LEMME 2. *La bitransposée* $j''\colon A'' \to S''$ *est injective, et* $j''^{-1}(S) = A$.

LEMME 3. *L'adhérence de* $j(B_A)$ *pour* $\sigma(S'', S')$ *est* $j''(B_{A''})$.

Supposons maintenant j faiblement compacte. Alors $j(B_A)$ est relativement compact dans S pour $\sigma(S, S')$, et donc les adhérences pour $\sigma(S, S')$ et $\sigma(S'', S')$

coïncident: on les note $\overline{j(B_A)}$. Puisque $\overline{j(B_A)} \subset S$, $j''^{-1}\overline{j(B_A)} \subset A$ et donc $j''^{-1}(j''(B_{A''})) \subset A$, $B_{A''} \subset A$ et A est réflexif.

Supposons que A contienne l^1. Alors la boule de A n'est pas séquentiellement relativement compacte dans A'' pour $\sigma(A'', A')$. Si nous montrons que cela implique que $j(B_A)$ n'est pas séquentiellement relativement compact dans S'' pour $\sigma(S'', S')$, il en résultera, d'après un théorème de H. P. Rosenthal (voir [8] et [2]), que A et S contiennent des l^1 homothétiques.

LEMME 4. *Si $j(B_A)$ est relativement séquentiellement compact dans S'' pour $\sigma(S'', S')$, la boule de A est séquentiellement relativement compacte dans A'' pour $\sigma(A'', A')$.*

Démonstration. On a vu que $j''(B_{A''})$ était l'adhérence de $j(B_A)$ pour $\sigma(S'', S')$, et on sait que $B_{A''}$ est $\sigma(A'', A')$ compact. Il résulte du lemme 2 que j'' est bicontinu de $B_{A''}$ sur $j''(B_{A''})$, et donc que si $\overline{j(B_A)}$ est séquentiellement compact dans S'' pour $\sigma(S'', S')$, $B_{A''}$ est séquentiellement relativement compact dans A'' pour $\sigma(A'', A')$, et donc a fortiori B_A aussi. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

Supposons que A ne soit pas réflexif. L'injection j n'est pas faiblementcompacte et d'après R. C. James [4], on peut trouver une suite de points (e_n) de A et un nombre δ_0, $0 < \delta_0 \leqslant 1$, avec

$$\| e_n \|_A \leqslant 1 \ \forall n, \text{ et } \forall k \ \operatorname{dist}_S(\operatorname{conv}(e_1 \cdots e_k), \operatorname{span}(e_{k+1} \cdots)) > \delta_0 \tag{4}$$

Cette dernière notation signifiant que: $\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i - \sum_{k+1}^{\infty} \alpha_i e_i \| > \delta_0$ pour toute suite de scalaires $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ positifs de somme 1 et pour toute suite finie de scalaires $\alpha_{k+1} \cdots$.

De même, si A contient l^1, toujours d'après la proposition 1, on peut trouver une suite de points (e_n) de A et un nombre δ_0, $0 < \delta_0 \leqslant 1$ avec

$$\begin{gathered} \| e_n \|_A \leqslant 1, \\ \left\| \sum \alpha_i e_i \right\|_S \geqslant \delta_0 \sum | \alpha_i | \end{gathered} \tag{4bis}$$

pour toute suite finie de scalaires (α_i). Dans les deux cas, pour tout choix de scalaires $c_1 \cdots c_n$ positifs et de somme 1,

$$\left\| \sum c_i e_i \right\|_S \geqslant \delta_0 . \tag{5}$$

Choisissons pour chaque n une représentation $(e_n(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ de e_n (c'est à dire $e_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e_n(m)$, et $e_n(m) \in I \ \forall m, \forall n$), avec

$$\max(\| e^{-m} e_n(m) \|_{l^2(A_0)}, \| e^m e_n(m) \|_{l^2(A_1)}) \leqslant 2 \tag{6}$$

On pourra même supposer, pour chaque n, cette représentation à support fini (c'est-à-dire $e_n(m) = 0$ pour $|m|$ assez grand), quitte à tronquer chaque représentation. En renormalisant, on conservera les estimations (4) et (4bis) (en remplaçant éventuellement δ_0 par un nombre plus petit, que nous noterons encore δ_0).

On a, pour tout choix de scalaires (c_i)-positifs de somme 1:

$$\delta_0 \leqslant \left\| \sum c_i e_i \right\|_S \leqslant \frac{1}{C_1} \left\| \sum c_i e_i \right\|_A \leqslant \frac{1}{C_1} e^{1/2} \left\| e^{-m} \sum c_i e_i(m) \right\|_{l^2(A_0)}^{1/2} \times \left\| e^m \sum c_i e_i(m) \right\|_{l^2(A_1)}^{1/2}.$$

Il résulte alors immédiatement de (6) que pour $\delta_1 = C_1 \delta_0{}^2/2e$,

$$\begin{aligned} \left\| e^{-m} \sum c_i e_i(m) \right\|_{l^2(A_0)} &\geqslant \delta_1 , \\ \left\| e^m \sum c_i e_i(m) \right\|_{l^2(A_1)} &\geqslant \delta_1 , \end{aligned} \tag{7}$$

pour tous scalaires positifs (c_i) de somme 1. Nous allons maintenant, au moyen d'un procédé dû à R. C. James [5], améliorer les estimations précédentes, sur des blocs de la suite $(e_i(m))_{i \in \mathbb{N}}$. On pose $\delta = (C_1 \delta_0)^2/16$.

LEMME 5. *Il existe une suite croissante d'entiers p_k et une suite de blocs $f_k(m) = \sum_{p_k+1}^{p_{k+1}} \gamma_j e_j(m)$ (où les $(\gamma_j)_{p_k+1}^{p_{k+1}}$ sont positifs et de somme* 1), *il existe deux nombres réels K_0 et K_1 avec:*

$$\begin{aligned} \| e^{-m} f_k(m) \|_{l^2(A_0)} &\leqslant K_0 \left(1 + \frac{\delta}{100}\right), \\ \left\| \sum c_i e^{-m} f_i(m) \right\|_{l^2(A_0)} &\geqslant K_0 \left(1 - \frac{\delta}{100}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \| e^{+m} f_k(m) \|_{l^2(A_1)} &\leqslant K_0 \left(1 + \frac{\delta}{100}\right), \\ \left\| \sum c_i e^{m} f_i(m) \right\|_{l^2(A_1)} &\geqslant K_1 \left(1 - \frac{\delta}{100}\right) \end{aligned} \tag{8bis}$$

pour tout choix de coefficients c_i positifs et de somme 1.

Démonstration du lemme 5. On procède successivement dans $l^2(A_0)$ et $l^2(A_1)$. *Posons*:

$$K_p{}^0 = \inf \left\{ \left\| \sum_{i \geqslant p} \alpha_i e^{-m} e_i(m) \right\|_{l^2(A_0)}, (\alpha_i) \text{ suite finie de coefficients positifs et de somme } 1 \right\}. \tag{6}$$

On a pour tout $p \in \mathbb{N}$ $K_p{}^0 \geqslant \delta_1$ (d'après (7)) et $K_p{}^0 \leqslant 2$ (d'après (6)). La suite $K_p{}^0$ est croissante. Soit $K_0 = \lim_{p\to\infty} K_p{}^0$. Choisissons p_1' tel que $K^0_{p_1'+1} \geqslant (1-\delta/100)$ K_0. On peut trouver des coefficients $(\alpha_i)_{i\geqslant p_1'+1}$ positifs de somme 1, tels que

$$\Big\| \sum_{i\geqslant p_1'+1} \alpha_i e^{-m} e_i(m) \Big\|_{l^2(A_0)} \leqslant \Big(1+\frac{\delta}{100}\Big) K^0_{p_1'} \leqslant \Big(1+\frac{\delta}{100}\Big) K_0 .$$

Soit p_2' l'indice du dernier coefficient non nul, et ainsi de suite. On construit ainsi une suite d'entiers p_k', une suite de blocs $f_k'(m) = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} \alpha_i e_i(m)$, avec $(\alpha_i)_{i=p_k+1\cdots p_{k+1}}$ positifs de somme 1 pour tout k, avec $\| e^{-m} f_k'(m)\|_{l^2(A_0)} \leqslant (1+\delta/100)$ K_0, et si (c_i) sont des coefficients positifs de somme 1, $\sum c_i f_i(m) e^{-m}$ est une combinaison à coefficients positifs des e_i commencant à $p_1'+1$, et donc

$$\Big\| \sum c_i f_i'(m)\, e^{-m} \Big\|_{l^2(A_0)} \geqslant K^0_{p_1'+1} \geqslant (1-\delta/100)\, K_0 .$$

Puisque les blocs sont construits au moyen de coefficients positifs de somme 1, les estimations (6) et (7) restent satisfaites pour les $f_i'(m)$ dans $l^2(A_1)$ avec le même δ_1. On effectue à nouveau la même construction, dans $l^2(A_1)$ cette fois, sur les $f_k'(m)$: on construit des blocs à coefficients positifs et de somme 1 sur les $f_k'(m)$; on note $f_k(m)$ les blocs obtenus. Ils satisfont encore aux estimations (8) obtenues pour les f_k', et possèdent en outre les propriétés (9).

Il résulte de (6) et (8) que $2 \geqslant \| e^{-m} f_n(m)\|_{l^2(A_0)} \geqslant K_0(1-\delta/100)$ et donc $K_0 \leqslant 2/(1-\delta/100) \leqslant 2/(1-1/100)$ et de même $K_1 \leqslant 2/(1-1/100)$. Si les (e_n) possédaient la propriété (4), il en est de même des $f_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_k(m)$, avec le même δ_0, et si les (e_n) vérifiaient (4bis), c'est aussi le cas des f_k, toujours avec le même δ_0. Nous abandonnerons désormais les (e_n) pour ne plus nous intéresser qu'aux (f_k).

Nous allons maintenant montrer que les $(f_k(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ prennent presque toute leur masse sur un nombre fini fixe de coordonnées, à la fois dans $l^2(A_0)$ et dans $l^2(A_1)$.

LEMME 6. *Il existe un entier M positif et un entier k_0 tels que $\forall k \geqslant k_0$,*

$$\Big(\sum_{|m|\leqslant M} \| e^{-m} f_k(m)\|^2_{A_0}\Big)^{1/2} \geqslant \Big(1-\frac{2\delta}{100}\Big) K_0 ,$$
$$\Big(\sum_{|m|\leqslant M} \| e^{m} f_k(m)\|^2_{A_1}\Big)^{1/2} \geqslant \Big(1-\frac{2\delta}{100}\Big) K_1 . \tag{9}$$

Démonstration du lemme 6. Il suffit de montrer séparément l'existence d'entiers M_0, k_0', et M_1, k_0'' convenant pour A_0 et A_1 respectivement: on prendra $M = \max(M_0, M_1)$, $k_0 = \max(k_0', k_0'')$. Donnons la démonstration pour A_0.

Supposons la conclusion fausse. On peut alors, pour tout M et pour tout k_0, trouver $k \geqslant k_0$ tel que:

$$\Big(\sum_{|m|\leqslant M} \| e^{-m} f_k(m) \|_{A_0}^2\Big)^{1/2} < \Big(1 - \frac{2\delta}{100}\Big) K_0$$

On construit alors par récurrence deux suites croissantes M_k et n_k avec:

— $f_{n_k}(m)$ est à support dans $[-M_k, +M_k]$ (i.e., si $|m| > M_k$, $f_{n_k}(m) = 0$).
— n_{k+1} est tel que $(\sum_{|m|\leqslant M_{k+1}} \| e^{-m} f_{n_k}(m) \|_{A_0}^2)^{1/2} \leqslant (1 - 2\delta/100) K_0$.

On pose alors

$$f_{n_k}^C(m) = f_{n_k}(m) \qquad \text{si} \quad |m| \leqslant M_k ,$$
$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

et

$$f_{n_k}^D = f_{n_k} - f_{n_k}^C .$$

Les $(f_{n_k}^D(m))_{k\in\mathbb{N}}$ sont à supports disjoints, et les $f_{n_k}^C$ vérifient:

$$\| e^{-m} f_{n_k}^C(m) \|_{l^2(A_0)} \leqslant \Big(1 - \frac{2\delta}{100}\Big) K_0 .$$

Il en résulte que pour tout k, on a:

$$K_0 \Big(1 - \frac{\delta}{100}\Big) \leqslant \Big\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} f_{n_i}(m)\, e^{-m} \Big\|_{l^2(A_0)} \leqslant \Big\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} f_{n_i}^C(m)\, e^{-m} \Big\|_{l^2(A_0)}$$
$$+ \Big\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} f_{n_i}^D(m)\, e^{-m} \Big\|_{l^2(A_0)}$$
$$\leqslant \Big(1 - \frac{2\delta}{100}\Big) K_0 + \Big(1 + \frac{\delta}{100}\Big) \frac{1}{k^{1/2}}$$

et ceci est impossible pour k assez grand; ceci prouve le lemme, car la démonstration pour A_1 est identique.

Nous renumérotons la suite f_k après avoir supprimé les k_0 premiers termes. Le lemme 6 devient alors vrai avec $k_0 = 1$.

Posons maintenant $y_k = \sum_{|m|\leqslant M} f_k(m)$. Puisque pour chaque m, $f_k(m) \in I$, les y_k sont des éléments de I. Ils sont bornés dans I. En effet:

$$\| y_k \|_A = \Big\| \sum_{|m|\leqslant M} f_k(m) \Big\|_{A_0} \leqslant \sum_{|m|\leqslant M} \| f_k(m) \|_{A_0}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{|m|\leqslant M} e^{2m}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{|m|\leqslant M} \| e^{-m} f_k(m) \|_{A_0}^2\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant 2 \Big(\sum_{|m|\leqslant M} e^{2m}\Big)^{1/2}$$

et de même:

$$\| y_k \|_{A_1} \leqslant 2 \Big(\sum_{|m| \leqslant M} e^{2m} \Big)^{1/2}$$

et donc $\| y_k \|_I = \max(\| y_k \|_{A_0}, \| y_k \|_{A_1}) \leqslant 2(\sum_{|m| \leqslant M} e^{2m})^{1/2}$. Calculons maintenant $\| y_k - f_k \|_A$. Le point $f_k - y_k$ admet pour représentant $\sum_{|m|>M} f_k(m)$. Or on a:

$$\sum_{|m|>M} \| e^{-m} f_k(m) \|_{A_0}^2 + \sum_{|m| \leqslant M} \| e^{-m} f_k(m) \|_{A_0}^2 \leqslant K_0^2 \Big(1 + \frac{\delta}{100} \Big)^2$$

et donc d'après le lemme 6:

$$\begin{aligned} \sum_{|m|>M} \| e^{-m} f_k(m) \|_{A_0}^2 &\leqslant K_0^2 \Big(1 + \frac{\delta}{100} \Big)^2 - K_0^2 \Big(1 - \frac{2\delta}{100} \Big)^2 \\ &\leqslant K_0^2 \frac{6\delta}{100} \end{aligned}$$

et de même

$$\sum_{|m|>M} \| e^{+m} f_k(m) \|_{A_1}^2 \leqslant K_1^2 \frac{6\delta}{100}$$

d'où il résulte que:

$$\begin{aligned} \| f_k - y_k \|_A &\leqslant \max \Big(\Big(\sum_{|m|>M} \| e^{-m} f_k(m) \|_{A_0}^2 \Big)^{1/2} \|, \sum_{|m|>M} \| e^{m} f_k(m) \|_{A_1}^2 \Big)^{1/2} \Big) \\ &\leqslant \max(K_0, K_1) \Big(\frac{6\delta}{100} \Big)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{2}{1 - \delta/100} \Big(\frac{6\delta}{100} \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\| f_k - y_k \|_S \leqslant \frac{1}{C_1} \frac{2}{1 - \delta/100} \Big(\frac{6\delta}{100} \Big)^{1/2} \leqslant \frac{\delta^{1/2}}{C_1} \leqslant \delta_0/4.$$

Les calculs ont jusqu'ici été communs pour les théorèmes 1 et 2. Nous allons maintenant considérer séparément la réflexivité et la présence de l^1. Si A n'est pas réflexif, les (e_n) de départ vérifient:

$$\mathrm{dist}_S(\mathrm{conv}(e_1 \cdots e_k), \mathrm{conv}(e_{k+1} \cdots)) > \delta_0$$

et donc les (f_n) construits au lemme 5 aussi. On a, pour tout k, si $\alpha_1 \cdots \alpha_k$, $\alpha_{k+1} \cdots$ sont positifs avec $\sum_1^k \alpha_i = \sum_{k+1}^\infty \alpha_i = 1$,

$$\left\| \sum_1^k \alpha_i y_i - \sum_{k+1}^\infty \alpha_i y_i \right\|_S \geqslant \left\| \sum_1^k \alpha_i f_i - \sum_{k+1}^\infty \alpha_i f_i \right\|_S$$

$$- \left\| \sum_1^k \alpha_i (y_i - f_i) \right\|_S - \left\| \sum_{k+1}^\infty \alpha_i (y_i - f_i) \right\|_S$$

$$\geqslant \delta_0 - \frac{\delta_0}{4} - \frac{\delta_0}{4} = \delta_0/2.$$

Comme les (y_k) sont bornés dans I, ceci prouve que l'injection i: $I \to S$ n'est pas faiblement compacte, et achève la démonstration du théorème 1.

Si A contient un sous-espace isomorphe à l^1, les (e_n) et donc les (f_n), de départ vérifient:

$$\left\| \sum \alpha_i f_i \right\|_S \geqslant \delta_0 \sum |\alpha_i|$$

et donc

$$\left\| \sum \alpha_i y_i \right\|_S \geqslant \left\| \sum \alpha_i f_i \right\|_S - \sum |\alpha_i| \, \| y_i - f_i \|_S$$

$$\geqslant (\delta_0 - \delta_0/4) \sum |\alpha_i| = \frac{3\delta_0}{4} \sum |\alpha_i|,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Remarque. Il résulte du théorème 2 que si A contient un sous-espace isomorphe à l^1, on peut trouver une suite de points (y_n) de $A_0 \cap A_1$ et un nombre $\delta > 0$ tels que

$$\| y_n \|_{A_0} \leqslant 1, \qquad \| y_n \|_{A_1} \leqslant 1 \qquad \forall n,$$

$$\left\| \sum \alpha_i y_i \right\|_{A_0} \geqslant \delta \sum |\alpha_i|, \qquad \left\| \sum \alpha_i y_i \right\|_{A_1} \geqslant \delta \sum |\alpha_i|$$

pour toute suite de scalaires (α_i). La suite (y_n) est donc équivalente à la base de l^1 à la fois dans A_0 et dans A_1. Un résultat analogue est obtenu avec la condition de non-réflexivité, mais il ne possède pas de formulation aussi simple.

Bibliographie

1. B. Beauzamy, Opérateurs uniformément convexifiants, *Studia Math.* **57**, No. 1 (1976).
2. B. Beauzamy, Opérateurs de type Rademacher entre espaces de Banach, exposés 6 et 7, Séminaire Maurey–Schwartz 1975–1976, École Polytechnique, Paris.
3. W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, et A. Pelczynski, Factoring weakly compact operators, *J. Functional Analysis* **17**, No. 3 (1974).
4. R. C. James, Weak compactness and reflexivity, *Israel J. Math.* **80** (1964), 101–119.

5. R. C. James, Uniformly non-square Banach spaces, *Ann. of Math.* **80**, No. 3 (1964), 542–550.
6. J. L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Ann. Inst. Hautes Études Sci.* No. 19 (1964).
7. H. Morimoto, Sur la réflexivité de l'espace $S(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **264** (1967), 325–328.
8. H. P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l_1, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **71**, No. 6 (1974), 2411–2413.