NORTH-HOLLAND

Structure des Algèbres de Bernstein*

Artibano Micali

Département des Sciences Mathématiques
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier, France

and

Moussa Ouattara

Faculté des Sciences et Techniques
Université de Ouagadougou
03 B.P. 7021 Ouagadougou 03, Burkina Faso (Upper Volta)

Submitted by Richard A. Brualdi

ABSTRACT

The theory of Bernstein's algebras is revisited. Many results concerning the structure of Bernstein algebras (ideals, nilpotency and so on) are stated. For Bernstein-Jordan algebras, we give a definitive formulation of the theorem which characterizes them. Finally, we emphasize the importance of the invariant L (this ideal doesn't depend on the Peirce decomposition of the algebra) in the study of the structure of Bernstein's algebras.

Nous reprenons la théorie des algèbres de Bernstein à la fois pour regarder ces objets au point de vue structurel (idéaux, nilpotence, etc.) ainsi que pour donner une formulation définitive à certains résultats (car-

*Supported by Progamme CAMPUS.

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS 218:77–88 (1995)

0024-3795/95/$9.50
655 Avenue of the Americas, New York, NY 10010 SSDI 0024-3795(93)00159-W

actérisation des algèbres de Bernstein-Jordan). De plus, nous avons mis en évidence le rôle joué par l'idéal L dans l'étude des algèbres de Bernstein.

1. PRÉLIMINAIRES

Tout au long de ce papier, K désignera un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Une K-algèbre *pondérée* est un couple (A,ω) formé d'une K-algèbre commutative et non associative A et d'un morphisme non nul $\omega\colon A \to K$ de K-algèbres appelé *fonction poids* ou *pondération* de l'algèbre. Une algèbre pondérée (A,ω) est appelée une *algèbre de Bernstein* si pour tout x dans A on a $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$. Toute algèbre de Bernstein admet une unique pondération et toute algèbre de Bernstein possède au moins un idempotent non nul. Si $e \neq 0$ est un idempotent d'une algèbre de Bernstein A, alors A admet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U = \{x \mid x \in A,\ ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V = \{x \mid x \in A,\ ex = 0\}$ vérifiant les propriétés suivantes:

$$U^2 \subseteq V, \qquad UV \subseteq U, \qquad V^2 \subseteq U \quad \text{et} \quad UV^2 = 0 \tag{1.1}$$

Quels que soient les éléments x, x_1, x_2, x_3 dans U et y, y_1, y_2, y_3 dans V, on a:

$$\begin{aligned} x^3 &= 0 \quad \text{et} \quad (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 = 0 \\ &\qquad\qquad \text{(Identité de Jacobi)}; \qquad (1.2) \\ x(xy) &= 0 \quad \text{et} \quad x_1(x_2y) + x_2(x_1y) = 0; \qquad (1.3) \\ (xy)^2 &= 0, \qquad (x_1y)(x_2y) = 0 \quad \text{et} \quad (xy_1)(xy_2) = 0. \qquad (1.4) \end{aligned}$$

2. IDÉAUX DANS UNE ALGÈBRE DE BERNSTEIN

On se donne donc une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ dans sa décomposition de Peirce relative à un idempotent $e \neq 0$ de A et notons $N = \operatorname{Ker}\omega = U \oplus V$. On remarque que pour tout idéal I de A on a $NI \subseteq I$ donc $N(NI) \subseteq NI$. Montrons, de plus, que $e(NI) \subseteq NI$ donc que NI est un idéal de A. Or, la formule $e(xy) = \frac{1}{2}xy + \omega(x)ey - 2(ex)(ey)$ pour x parcourant I et y parcourant N nous donne l'inclusion $e(NI) \subseteq NI$. Ainsi, pour tout idéal I d'une algèbre de Bernstein $A = Ke\oplus N$, les espaces vectoriels produits NI sont des idéaux de A. En particulier, les puissances N^k sont des idéaux de A pour tout entier $k \geq 1$.

Par la suite nous allons considérer le sous-K-espace vectoriel de A défini par $L = \{x \mid x \in U, xU = 0\}$(cf. [3]). Le lemme 3.1 de [5] nous dit que $L^2 = 0$, $V^2 \subseteq L, U^2L = 0$ et $(xy)y \in L$ pour tout x dans U et pour tout y dans V. De plus, L est un idéal de A et on vérifie facilement que l'on peut aussi écrire $L = \{x \mid x \in U, x(U \oplus U^2) = 0\}$.

LEMME 2.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que un sous-K-espace vectoriel I de A soit un idéal de A contenant un idempotent (e par exemple) non nul est que $A^2 \subseteq I \subseteq A$, inclusions en tant que sous-espaces vectoriels. En particulier, le produit de deux tels idéaux est un idéal.*

En effet, si I est un idéal de A contenant e alors $I \supseteq U$ donc $I \supseteq U^2$ et ceci nous dit que $A^2 \subseteq I \subseteq A$. Réciproquement, si I est un sous-espace vectoriel de A vérifiant $A^2 \subseteq I \subseteq A$ alors $xy \in I$ quels que soient x, y dans A donc, en particulier, $xy \in I$ pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in A$. Ce qui nous montre que I est un idéal de A contenant e. Si maintenant I et J sont deux idéaux de A contenant e alors $IJ \supseteq (A^2)^2 = A^2$ donc $A^2 \subseteq IJ \subseteq A$, ce qui montre que IJ est un idéal de A contenant e.

LEMME 2.2. *Le produit de deux idéaux dans une algèbre de Bernstein dont l'un au moins n'est pas contenu dans N est un idéal.*

En effet, soient I et J deux idéaux d'une algèbre de Bernstein A et supposons que $e \in I$ et que $J \subseteq N$ (le cas où $I \not\subseteq N$ et $J \not\subseteq N$ est donné dans le lemme 2.1). Pour x dans I et y dans J on a $e(xy) = \frac{1}{2}xy + \omega(x)ey - 2(ex)(ey)$ donc $e(xy) \in IJ$. D'autre part, $IJ \subseteq I$ et $IJ \subseteq J$ donc $N(IJ) \subseteq N(I \cap J)$ et montrons que $N(I \cap J) \subseteq IJ$. Si $x \in N$ et $y \in I \cap J$, l'équation $xy = 2e(xy) + 4(ex)(ey)$ nous dit que $xy \in IJ$, d'où notre assertion. Ainsi, $N(IJ) \subseteq IJ$ ce qui nous montre que IJ est un idéal de A.

Par contre, le produit de deux idéaux de A, contenus dans N, n'est pas nécessairement un idéal.

EXEMPLE 2.3. Considérons l'algèbre de Bernstein A de dimension 7 dont la table de multiplication relative à une base $\{e, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i (i = 1, 2, 3)$, $u_3^2 = v_3$, $v_1^2 = u_2$, $u_1v_1 = u_1$, $u_1v_2 = u_2$, tous les autres produits étant nuls. On voit que l'idéal L s'écrit $L = \langle u_1, u_2\rangle$ et considérons l'idéal $I = \langle u_1, u_2, v_1\rangle$; on a $I \supseteq L$ et $IL = \langle u_1\rangle$ donc $N(IL) = L$ ce qui nous montre que $N(IL) \not\subseteq IL$, c'est à dire, IL n'est pas un idéal de A. De plus, L est un idéal minimal de A.

Remarquons, néanmoins, que le produit de deux idéaux contenus dans N peut être un idéal car on sait que pour tout idéal I de A, NI est un idéal de A.

Pour d'autres résultats concernant les idéaux dans une algèbre de Bernstein, on renvoie à [5, paragraphe 2].

3. ALGÈBRES DE BERNSTEIN-JORDAN

On sait que si $A = Ke \oplus U \oplus V$ est une algèbre de Bernstein, une condition nécessaire et suffisante pour que A soit une algèbre de Jordan est que $V^2 = 0$ et $(xy)y = 0$ quels que soient x dans U et y dans V. Ce résultat, qui est dû à différents auteurs (cf. [1, 13]), dépend du choix de l'idempotent e. Dans le théorème qui suit nous montrons que les conditions ci-dessus peuvent être améliorées en faisant varier l'idempotent.

THÉORÈME 3.1. *Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et A une K-algèbre de Bernstein. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit une algèbre de Jordan est que pour toute décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ de A relative à un idempotent $e \neq 0$ de A on ait $V^2 = 0$.*

En effet, si A est une algèbre de Jordan et si l'on considère la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent $e \neq 0$ de A, à savoir, $A = Ke \oplus U \oplus V$, compte tenu des relations très connues dans une algèbre de Bernstein-Jordan, on a $V^2 = 0$. Réciproquement, on se donne une décomposition de Peirce de A relative à un idempotent $e \neq 0$ de A, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ telle que $V^2 = 0$ et soit $x = \alpha e + u_0 + v_0$ un élément de A avec $\alpha \in K$, $u_0 \in U$, $v_0 \in V$. On a $x^3 - \omega(x)x^2 = -\frac{1}{2}\alpha v_0^2 + (u_0v_0)v_0 + v_0^3 + u_0^2v_0 = (u_0v_0)v_0$. Si l'on considère l'idempotent $e' = e + u_0 + u_0^2$, on a la décomposition de Peirce $A = Ke' \oplus U' \oplus V'$ avec $U' = \{u + 2u_0u \mid u \in U\}$ et $V' = \{v - 2(u_0 + u_0^2)v_0 \mid v \in V\}$ avec $V'^2 = 0$. L'élément $v_0' = v_0 - 2(u_0 + u_0^2)v_0$ est dans V' donc $v_0'^2 = v_0^2 - 4(u_0v_0)v_0 - 4(u_0^2v_0)v_0$ soit $(u_0v_0)v_0 = 0$. Ceci nous montre que $x^3 = \omega(x)x^2$ pour tout x dans A, c'est-à-dire, A est une algèbre de Jordan.

COROLLAIRE 3.2. *Soient (A, ω) une algèbre de Bernstein et I un idéal de A contenu dans* $\operatorname{Ker}\omega$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre de Bernstein quotient A/I soit de Jordan est que pour toute décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ de A on ait $V^2 \subseteq I$.*

COROLLAIRE 3.3. *Pour toute algèbre de Bernstein (A, ω) l'algèbre de Bernstein quotient A/L est de Jordan.*

En effet, on sait que l'idéal L ne dépend pas de la décomposition de Peirce considérée (invariance de L) et, d'autre part, pour toute décomposition de Peirce de A, à savoir, $A = Ke \oplus U \oplus V$, on a $V^2 \subseteq L$ d'où le corollaire.

COROLLAIRE 3.4. *Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ et $\delta = \dim_K U^2$. Si $\delta > \frac{1}{2}r(r - 1)$ alors A est une algèbre* *de Jordan.*

En effet, soit U' un supplémentaire de L dans U, c'est-à-dire, $U = L \oplus U'$. Compte tenu de la définition de L on a $U^2 = U'^2$ et si $L \neq 0$, $\dim_K U' = r - \dim_K L \leq r - 1$ d'où $\dim_K U^2 = \dim_K U'^2 \leq \frac{1}{2}r(r-1)$. Par conséquent, si $\dim_K U^2 > \frac{1}{2}r(r-1)$, nécessairement $L = 0$ donc $A = A/L$ est une algèbre de Jordan.

4. NILPOTENCE

Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein donnée sous la forme d'une décomposition de Peirce relative à un idempotent $e \neq 0$ de A. Comme $V^2 \subseteq L$ et L est un idéal de A alors $V^k \subseteq L$ pour tout $k \geq 2$ donc $UV^k \subseteq UL = 0$ soit $UV^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. La condition $U^2L = 0$ entraîne aussi $U^2V^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. On déduit facilement que $U^{2k+1} \subseteq U$ et $U^{2k} \subseteq U^2$ pour tout $k \geq 1$ donc $U^m \subset U \oplus U^2$ pour tout entier $m \geq 1$. Il s'ensuit que $U^mV^k = 0$ quels que soient les entiers $m \geq 1, k \geq 2$.

Notons $R(V)$ l'ensemble des multiplications par des éléments de V et $E(V)$ l'algèbre enveloppante de $R(V)$. On sait que $E(V)$ est une algèbre associative sans élément unité.

LEMME 4.1. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type fini. Si l'algèbre $E(V)$ est nilpotente alors l'idéal $N = U \oplus V$ est aussi nilpotent.*

Soit donc $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein de type fini sur K, c'est-à-dire, engendrée en tant qu'algèbre par un nombre fini d'éléments. On sait que l'algèbre de Jordan N/L (où $N = U \oplus V$) est résoluble (cf. [3, théorème 3]) et puisque toute algèbre de Jordan résoluble et de type fini est nilpotente (théorème de Zhevlakov; cf. [14, chapitre 4, paragraphe 3, théorème 2, page 90]), alors N/L est nilpotente. Il existe ainsi un entier $r \geq 1$ tel que $N^r \subseteq L$ donc $N^{r+k} = V(V(\cdots V(VN^r)\cdots))$ (où l'espace V apparait ici k fois) pour tout entier k. Si l'algèbre $E(V)$ est nilpotente, il existe un entier $s \geq 1$ tel que $V(V(\cdots V(VN^r)\cdots)) = 0$ (l'espace V figure ici s fois) donc $N^{r+s} = 0$ d'où le lemme.

PROPOSITION 4.2. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. Si $UV = 0$, alors l'idéal N est nilpotent.*

En effet, soit $N = U \oplus V$. On a $N^2 = U^2 \oplus V^2$ donc $N^3 = U^2V$ et finalement, $N^4 = 0$.

Notons que si l'on suppose que l'algèbre A soit de type fini, alors la proposition 4.2 est une conséquence immédiate du lemme 4.1 car $V(VA) = V(UV + V^2) \subset VV^2 \subset VU = 0$ ce qui nous montre que l'algèbre $E(V)$ est nilpotente.

LEMME 4.3. *Soit A une algèbre de Bernstein de type fini. Si I est un sous-espace vectoriel de A tel que $NI = I$ alors $I \subset L$ et I est un idéal de A.*

Il est clair que la condition $NI = I$ entraîne que $I \subseteq N$ et soit $p: A \to A/L$ la surjection canonique. Les conditions $I = NI = N(NI) = \cdots$ entraînent que $I \subset N^k$ pour tout entier $k \geq 2$. Or, on sait que $p(N)$ est un idéal nilpotent de l'algèbre de Jordan A/L (cf. démonstration du lemme 4.1) donc il existe un entier $k \geq 2$ tel que $p(N)^k = 0$ ce qui entraîne que $p(I) = 0$ d'où $I \subset L$. De $I \subset L \subset U$ on a $eI = I$ qui, assortie de la condition $NI = I$, nous dit que I est un idéal de A.

LEMME 4.4. *Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type fini et I un sous-K-espace vectoriel de A. Alors $NI = I$ si et seulement si $VI = I$.*

En effet, d'après le lemme 4.3, si $NI = I$ alors I est un idéal de A contenu dans L donc $I = NI = (U \oplus V)I = VI$.

Réciproquement, supposons que $VI = I$. On a $I \subseteq N$ et les relations (1.1) entraînent que $I \subseteq U$. Comme A est de type fini, il existe un entier $r \geq 1$ tel que $N^r \subset L$ donc $I = V(V(\cdots V(VI)\cdots)) \subset N^r \subset L$ (où l'espace V figure $r - 1$ fois) soit $I \subset L$. Il en résulte que $NI = (U \oplus V)I = VI = I$.

COROLLAIRE 4.5. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type fini. Si $UV = U$ alors $U^2 = 0$.*

En effet, d'après le lemme 4.4, $VU = U$ si et seulement si $NU = U$ et d'après le lemme 4.3, cette dernière condition entraîne que $U \subset L \subset U$ d'où $U = L$, soit $U^2 = L^2 = 0$.

Nous remarquons que le fait qu'une algèbre de Bernstein soit de type fini n'entraîne pas nécessairement la condition de chaîne descendante pour les idéaux.

EXEMPLE 4.6. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein telle que $N = \operatorname{Ker}\omega = \langle x \rangle$ soit engendré, en tant qu'idéal, par un seul élément x vérifiant les conditions $x^i x^j = 0$ quels que soient les entiers $i \geq 2$ et $j \geq 2$. On posera $ex^i = \frac{1}{2}x^i$ pour tout $i \geq 2$ et $ex = 0$ où e est un idempotent non nul de A. Ainsi (A, ω) admet la décomposition de Peirce

$A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U = \langle x^2, x^3, \ldots\rangle$ et $V = Kx$. Il s'ensuit que $U^2 = \{0\}$ donc, en particulier, $L = U$ et $N^2 = \langle x^2, x^3, \ldots\rangle = U$ d'où $N^3 = (U \oplus V)U = UV \oplus U^2 = UV = \langle x^3, x^4, \ldots\rangle$. Par récurrence, $N^k = \langle x^k, x^{k+1}, \ldots\rangle$ pour tout entier $k \geq 1$ et, par suite, la suite descendante d'idéaux de $(A, \omega), N \supset N^2 \supset N^3 \supset \cdots$ n'est pas stationnaire. La chaîne de sous-espaces vectoriels de $L, \langle x^2\rangle \subset \langle x^2, x^3\rangle \subset \langle x^2, x^3, x^4\rangle \subset \cdots$ est une chaîne strictement croissante d'idéaux de L donc L, en tant que K-algèbre, ne vérife pas la condition de chaîne ascendante pour les idéaux.

THÉORÈME 4.7. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type fini et supposons que A vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *l'idéal $N = U \oplus V$ est nilpotent*;

(ii) *la K-algèbre associative $E(V)$ est nilpotente*;

(iii) *$I = \{0\}$ est l'unique sousous-K-espace vectoriel de A vérifiant $VI = I$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): L'algèbre $E(V)$ peut être considérée comme sous-algèbre de l'algèbre $E(N)$ et nous savons (cf. [12, chapitre II, théorème 2.3]) que la nilpotente de N équivaut à celle de $E(N)$. Donc l'algèbre $E(V)$ est nilpotente.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Soit I un sous-espace vectoriel de A vérifiant $VI = I$. Alors $I = V(V(\cdots V(VI)\cdots))$ (où l'espace V figure ici k fois, $k \geq 1$ étant un nombre entier) et comme l'algèbre $E(V)$ est nilpotente, en prenant k suffisamment grand on a $I = \{0\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): On sait que les puissances principales N^k de N sont des idéaux de A et considérons la chaîne décroissante d'idéaux $N \supset N^2 \supset N^3 \supset \cdots$. L'hypothèse du théorème nous dit qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $N^r = N^{r+1}$ et le lemme 4.3 montre que $VN^r = N^r$ soit $N^r = \{0\}$.

NOTE 4.8. Les résultats précédents nous permettent de plonger une algèbre non nilpotente comme noyau d'une algèbre de Bernstein. Plus précisément, si K est un corps de caractéristique différente de 2 et B une K-algèbre vérifiant $B^3 = B^2$ et $(B^2)^2 = \{0\}$, il suffit de prendre $U = B^2$, V un supplémentaire de B^2 dans B (i.e., $B = B^2 \oplus V$) et de poser, pour un idempotent $e \neq 0$, $e \notin B$, $eu = \frac{1}{2}u$ pour tout $u \in U$ et $ev = 0$ pour tout $v \in V$. L'algèbre $A = Ke \oplus B$ est de Bernstein et admet B comme noyau. Ci-dessous nous donnons un exemple.

EXEMPLE 4.9. Soit $N = \langle c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\rangle$ la nil-algèbre du contre-exemple de Suttles. La table de multiplication est donnée par $c_1c_2 = c_2c_4 = -c_1c_5 = c_3$, $c_1c_3 = c_4$, $c_2c_3 = c_5$ les autres produits étant nuls. On a $N^3 = N^2 = \langle c_3, c_4, c_5\rangle$. Puisque $NN^2 = N^2$, si N est noyau d'une algèbre de Bernstein, on doit avoir $(N^2)^2 = 0$ (ce qui est vérifié) et $N^2 \subseteq L \subseteq U$. En prenant $U = N^2$ et $V = \langle c_1, c_2\rangle$, on voit maintenant que $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $ec_i = \frac{1}{2}c_i$ pour $i = 3, 4, 5$, $ec_j = 0$ pour $j = 1, 2$, est une algèbre de Bernstein.

Les résultats précédents permettent de donner une autre démonstration de la conjecture de Grishkov (cf. [2]; voir [11] pour une autre solution de cette conjecture).

THÉORÈME 4.10 (Conjecture de Grishkov). *Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type fini. Si $U^2 = V$ alors $N = U \oplus V$ est un idéal nilpotent de A.*

Supposons donc que $U^2 = V$ et que I soit un sous-K-espace vectoriel de A vérifiant $VI = I$. Le lemme 4.4 nous dit que $NI = I$ et le lemme 4.3, que I est un idéal de A vérifiant $I \subset L$. Comme $L = \mathrm{Ann}(N)$, alors $I = VI \subseteq NL = \{0\}$ soit $I = \{0\}$ et d'après le théorème 4.7, l'idéal N est nilpotent.

Notons que la conjecture de Grishkov est en défaut si la condition $U^2 = V$ n'est pas vérifiée même si l'algèbre est de type fini. En effet, dans l'exemple 4.6, l'algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus \langle x\rangle$ est de type fini mais comme ici $U^2 = \{0\}$ et $V = Kx$ on a l'inclusion stricte $U^2 \subset V$ et l'idéal $N = \langle x\rangle$ n'est pas nilpotent.

THÉORÈME 4.11. *Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ et $\delta = \dim_K U^2$. Si $\delta > \frac{1}{2}r(r-1)$ alors A est une algèbre de Bernstein conservative.*

En effet, le corollaire 3.4 nous dit qu'une telle algèbre est de Bernstein-Jordan. En particulier $V^2 = 0$. Il reste à établir que $UV = 0$. Soient $v_0 \in V$ un élément non nul et $L_0 : U \to U$ l'application K-linéaire définie par $u \mapsto uv_0$. Puisque $L_0^2(u) = (uv_0)v_0 = 0$ pour tout u dans U on a $L_0^2 = 0$, il existe une base $\{u_1, \dots u_r\}$ de U sur K telle que la matrice de L_0 en cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec p blocs de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
où $p = \dim_K L_0(U)$. Ceci signifie que $u_1v_0 = u_2, \ldots, u_{2p-1}v_0 = u_{2p}$ et $u_2v_0 = 0, \ldots, u_{2p}v_0 = 0$ et, par suite, $L_0(U) = \langle u_2, \ldots, u_{2p}\rangle$. De plus, on déduit immédiatement que $u_{2k}u_{2l} = 0$ $(k, l = 1, \ldots, p)$, $u_{2k-1}u_{2k} = 0$ $(k = 1, \ldots, p), u_{2k}u_{2l-1} = -u_{2k-1}u_{2l}\,(k, l = 1, \ldots p$ avec $k \neq l)$ et pour $k > 2p$ on a $v_0u_k = 0$ et $u_{2l}u_k = 0$ $(l = 1, \ldots, p)$. Comme U^2 est engendré par les produits $u_iu_j\,(i, j = 1, \ldots, r$ avec $i \leq j)$, en dénombrant les relations ci-dessus, on déduit une dimension maximale de U^2, c'est à dire, une majoration de δ. On obtient alors $\delta \leq \frac{1}{2}r(r+1) - \{\frac{1}{2}p(p+1) + p + \frac{1}{2}p\,(p-1) + p(r-2p)\} = \frac{1}{2}r(r+1) - p(r-p+1)$. Si $\delta > \frac{1}{2}r(r-1)$, on a aussi $\frac{1}{2}r(r+1) - p(r-p+1) > \frac{1}{2}r(r-1)$ soit $p^2 - (r+1)p + r > 0$. Mais puisque les racines de ce polynôme en p sont 1 et r, cette inégalité n'est vérifiée que pour $p = 0$. Donc $v_0U = 0$ pour tout v_0 dans V, soit encore $VU = 0$ d'où le théorème.

THÉORÈME 4.12. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ avec $r \leq 3$. Si $L = 0$ alors l'algèbre A est conservative.*

En effet, soit $x = u_0v_0$ dans UV supposons que $r = 3$ (démonstration analogue pour $r = 1$, et $r = 2$). Il existe une base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de U sur K telle que $u_1v_0 = u_2, u_2v_0 = 0, u_1u_2 = 0, u_2u_3 = 0, u_2^2 = 0$. Puisque $x \in L_0(U)$, ceci nous dit que $xU = 0$ donc $x \in L = 0$ soit $x = 0$. Les conditions $V^2 = 0$ (car A est une algèbre de Jordan) et $UV = 0$ nous disent précisément que l'algèbre A est conservative.

Le théorème 4.12 n'est pas vrai pour $r = 4$.

EXEMPLE 4.13. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la K-algèbre de Bernstein de type $(5, 5)$ dont la table de multiplication relative à une base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, \ldots, v_5\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i\,(i = 1, \ldots, 4)$, $u_1^2 = v_1$, $u_1u_3 = v_2$, $u_1u_4 = v_3$, $u_3^2 = v_4$, $u_2u_3 = -v_3$, $u_1v_5 = u_2$, $u_3v_5 = u_4$, tous les autres produits étant nuls. On voit que A est une algèbre de Bernstein qui vérifie $L = 0$ et $UV = \langle u_2, u_4\rangle \neq 0$. Donc A est une algèbre de Jordan non conservative.

La réciproque du théorème 4.12 n'est pas vraie, c'est-à-dire, il existe des algèbres conservatives vérifiant $L \neq \{0\}$.

EXEMPLE 4.14 (Les algèbres $A_{T,\omega}$). Soient K un corps de caractéristique différente de 2, A un K-espace vectoriel, $T\colon A \to A$ un opérateur K-linéaire et $\omega\colon A \to K$ une forme K-linéaire telle que $\omega \circ T = \omega$. On notera $A_{T,\omega}$ la K-algèbre commutative dont le K-espace vectoriel sous-jacent est A et dont la multiplication est définie par $xy = \frac{1}{2}[\omega(x)T(y) +$

$\omega(y)T(x)]$ pour x et y parcourant A. Il en résulte que $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ quels que soient x, y dans A donc $\omega : A \to K$ est une pondération de A. On sait (cf. [9, théorème 4.1]) que $A_{T,\omega}$ est une K-algèbre conservative si et seulement si $T^2 = T$ et ceci est vérifié si et seulement si $A_{T,\omega}$ est de Bernstein. Dans ce cas, $L = U$, un supplémentaire de Ke dans $\operatorname{Im} T$, $V = \operatorname{Ker} T$ et $N^2 = \{0\}$, où e est un idempotent non nul de $A_{T,\omega}$.

5. DUPLIQUÉE D'UNE ALGÈBRE DE BERNSTEIN

Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre commutative et notons $D(A)$ la seconde puissance symétrique de A. Le K-espace vectoriel $D(A)$ est linéairement engendré par les vecteurs $x \cdot y$ (produit symétrique de x par y) pour x et y parcourant A et on définit sur $D(A)$ une structure de K-algèbre commutative donnée par $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y'$ pour x, y, x', y', parcourant A. Cette nouvelle algèbre $D(A)$ est appelée *la dupliquée commutative* ou simplement *dupliquée* de A. L'application K-linéaire μ: $D(A) \to A$ définie par $x{\cdot}y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif de K-algèbres et si $N(A) = \operatorname{Ker}\mu$, alors $D(A)N(A) = \{0\}$. De plus, si ω: $A^2 \to K$ est une pondération de A^2, le morphisme composé $\omega_d = \omega \circ \mu$: $D(A) \to K$ est une pondération de $D(A)$ et soit $N_d = \operatorname{Ker}\omega_d$. On voit que $N_d \supset N(A)$, inclusion en tant qu'idéaux de $D(A)$.

THÉORÈME 5.1. *Soient A une algèbre de Bernstein et $D(A)$ sa dupliquée. Si A^2 est de type fini alors l'idéal N_d est nilpotent.*

On écrit $A^2 = Ke \oplus N$ avec $N = \operatorname{Ker}\omega$ et l'isomorphisme de K-algèbres $D(A)/N(A) \simeq A^2$ entraîne l'isomorphisme d'idéaux $N_d/N(A) \simeq N$. Comme A^2 est de type fini et $(A^2)^2 = A^2$ nécessairement N est nilpotent (cf. théorème 4.10), c'est-à-dire, il existe un entier $r \geq 1$ tel que $N^r = \{0\}$ soit $N_d^r \subseteq N(A)$ donc $N_d^{r+1} = N_d N_d^r \subseteq D(A)N(A) = \{0\}$ soit $N_d^{r+1} = \{0\}$.

La réciproque du théorème 5.1 n'est pas vraie, c'est-à-dire, le fait que l'idéal N_d soit nilpotent n'entraîne pas nécessairement que l'algèbre A^2 soit de type fini.

EXEMPLE 5.2 (cf. [3]). Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et C une K-algèbre commutative. Sur le K-espace vectoriel $A = K \times C \times C$ on définit une structure de K-algèbre de Bernstein par

$$(\alpha, x, y)(\beta, x', y') = \left(\alpha\beta,\ \tfrac{1}{2}\alpha x' + \tfrac{1}{2}\beta x + xy' + x'y + yy',\ 0\right)$$

pour α, β parcourant K et x, y, x', y' parcourant C. La pondération de A est l'application K-linéaire $\omega: A \to K$ définie par $(\alpha, x, y) \mapsto \alpha$ et on a, par rapport à l'idempotent $e = (1, 0, 0)$, la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U = (0, C, 0)$ et $V = (0, 0, C)$. De plus, $A^2 = Ke \oplus U$ et l'idéal $N = U \oplus V$ est nilpotent si et seulement si la K-algèbre C est nilpotente. Si $D(A) = Ke \cdot e \oplus N_d$ est la dupliquée de A, comme $U^2 = \{0\}$, la démonstration du théorème 5.1 nous dit que $N_d^3 = \{0\}$ même si C, et par conséquent N, n'est pas nilpotent. En particulier, U étant isomorphe, en tant que K-espace vectoriel, à une copie de C, l'algèbre A^2 n'est pas nécessairement de type fini.

Si (A, ω) est une K-algèbre pondérée, la restriction de ω à A^2 définit sur A^2 une structure de K-algèbre pondérée. Inversement, la donnée d'une pondération $\omega: A^2 \to K$ sur A^2 ne nous permet pas toujours d'étendre ω en une pondération de A.

EXEMPLE 5.3. Si (A, ω) est une K-algèbre commutative pondérée où K est un corps de caractéristique différente de 2, on définit sur le K-espace vectoriel $D(A) \oplus A$ la structure d'algèbre donnée par (cf. [8])

$$(x \cdot y + z)(x' \cdot y' + z') = \tfrac{1}{2}[xy \cdot z' + x'y' \cdot z + \omega(z')xy + \omega(z)x'y']$$

pour x, y, z, x', y', z' parcourant A. En particulier, $(x \cdot y)(x' \cdot y') = 0$ et $zz' = 0$, quels que soient x, y, x', y' et z, z' dans A et, par suite, si on suppose qu'il existe un morphisme de K-algèbres $\Omega: D(A) \oplus A \to K$, en appliquant Ω à $(x \cdot y)^2 = 0$ et à $z^2 = 0$ on a $\Omega = 0$. Ceci nous dit que la K-algèbre $D(A) \oplus A$ *n'est pas pondérée.* Par contre, le sous-K-espace vectoriel B de $D(A) \oplus A$ engendré par des éléments de la forme $x \cdot y + z$ avec $\omega(x)\omega(y) = \omega(z)$ est une sous-K-algèbre de $D(A) \oplus A$ et B est munie de la pondération naturelle $\omega': B \to K$ définie par $x \cdot y + z \mapsto \omega(z)$. Comme B contient $(D(A) \oplus A)^2$ en tant que sous-algèbre, la restriction de ω' définit sur $(D(A) \oplus A)^2$ une structure de K-algèbre pondérée.

Nous remercions le Referee de nous avoir communiqué ses remarques.

REFERENCES

1 M. T. Alcalde, R. Baeza et C. Burgueño, Autour des algèbres de Bernstein, *Arch. Math.* 53:134–140 (1989).

2 A. N. Grishkov, On the genetic property of Bernstein algebras, *Soviet Math. Dokl.* 35:489–492 (1987).

3 I. R. Hentzel et L. A. Peresi, Semi-prime Bernstein algebras, *Arch. Math.* 52:539–543 (1989).
4 P. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.* 9:613–623 (1975).
5 A. Koulibaly et M. Ouattara, Structure et théorie de Frattini d'une algèbre de Bernstein, *Algebras Groups Geom.* 8:145–158 (1991).
6 A. Micali et M. Ouattara, Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington, *Linear Algebra Appl.* 153:193–207 (1991).
7 A. Micali et F. Zitan, Automorphismes d'une algèbre de Bernstein, *Cahiers Math. Montpellier* 38:109-116 (1989).
8 A. Micali et M. Ouattara, Sur la dupliquée d'une algèbre II, *Bull Soc. Math. Belg. Sér. A* 43:113–125 (1991).
9 A. Micali et M. Ouattara, Sur les algèbres de Jordan génétiques, *Ann. Univ. Clermont II*, Sér. Math. 27:193–227 (1991).
10 M. Ouattara, Algèbres de Jordan et Algèbres génétiques, *Cahiers Math. Montpellier*: 37 (1988).
11 L. A. Peresi, Nilpotency in Bernstein algebras, *Arch. Math.* 56:437–439 (1991).
12 R. D. Schafer, *An introduction to Nonassociative Algebras*, Academic, New York, 1966.
13 A. Wörz-Busekros, Bernstein algebras, *Arch. Math.* 48:388–398 (1987).
14 K. A. Zhevlakov et al., *Rings That Are Nearly Associative*, Academic, New York, 1982.

Received 10 June 1991; final manuscript accepted 18 December 1991