



Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

ScienceDirect



Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 9 (2012) 152–161

[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

## Estimación del dominio de atracción de sistemas no lineales mediante modelos borrosos polinomiales

J.L. Pitarch<sup>a,\*</sup>, A. Sala<sup>a</sup>, C.V. Ariño<sup>b</sup>, F. Bedate<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera, nº14, 46022, Valencia, España.

<sup>b</sup> Departamento de Ingeniería de Sistemas y Diseño, Universitat Jaume I, Av. de Vicent Sos Baynat, s/n 12071, Castellón de la Plana, España.

### Resumen

La mayor parte de referencias de la literatura en control borroso plantean condiciones LMI para un modelo Takagi-Sugeno y dan por terminado el problema una vez se obtienen resultados factibles. No obstante, dejan sin estudiar la región de atracción obtenida. Este trabajo propone probar que una zona, de forma prefijada, lo más grande posible, pertenece al dominio de atracción del origen de un sistema no lineal. Para ello, se usan modelos borrosos polinomiales cuyo análisis puede ser llevado a cabo mediante optimización convexa (sumas de cuadrados). Asimismo, se utiliza información de la forma de las funciones de pertenencia para realizar iteraciones con la región de modelado borroso, maximizando la región de atracción probada, lo cual reduce el conservadurismo sobre otras propuestas. *Copyright © 2012 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.*

### Palabras Clave:

Función de Lyapunov, dominio de atracción, sistemas borrosos, Takagi-Sugeno, sistemas polinomiales, estabilidad local, sumas de cuadrados, conservadurismo.

### 1. Introducción

Una amplia clase de sistemas no lineales pueden ser expresados, de forma *localmente exacta* en una región de interés denotada como  $\Omega_0$ , como sistemas borrosos Takagi-Sugeno (Takagi y Sugeno 1985) (TS), mediante la metodología “Sector Nonlinearity” (Kazuo Tanaka y Hua O. Wang 2001). En dichos sistemas la no-linealidad es expresada como una combinación convexa de modelos lineales “vértice” cuyos coeficientes se denominan “funciones de pertenencia”. La idea ha sido recientemente extendida a sistemas borrosos polinomiales y está basada en la serie de Taylor (Sala y Ariño 2009): los modelos borrosos polinomiales expresan no-linealidades no polinomiales (o de grado alto) como una interpolación convexa entre polinomios.

Una vez estos modelos localmente equivalentes están disponibles, se puede explorar la estabilidad y el diseño de control utilizando técnicas borrosas. Actualmente, muchos trabajos proponen control borroso mediante técnicas basadas en desigualdades matriciales lineales (en adelante, LMI’s, del término inglés bien establecido “*linear matrix inequalities*”), ver (Boyd 1994), introducidas en el ámbito borroso, en (Wang, Tanaka, y Griffin 1996; Tanaka y Wang 2001) con funciones de Lyapunov cuadráticas. Otras propuestas usan funciones poliédricas (Amato et al. 2011), o no cuadráticas (Guerra 2004).

Las técnicas de suma de cuadrados (en adelante, referidas con el acrónimo SOS, del inglés “*sum of squares*”) introducidas recientemente en (Prajna, Papachristodoulou, Seiler, y Parrilo 2004a) y (Prajna, Papachristodoulou, y Wu 2004) también han sido aplicadas a modelos polinomiales borrosos (K. Tanaka, Yoshida, Ohtake, y H. O Wang 2007a), (Sala y Guerra 2008). Existe literatura donde la idea se aplica a funciones de Lyapunov polinomiales y controlador PDC (K. Tanaka, Yoshida, Ohtake, y H. O Wang 2007b), controladores  $\mathcal{H}_\infty$  adaptados al caso polinomial (Prajna, Papachristodoulou, y Wu 2004), control de coste garantizado para sistemas polinomiales borrosos (Tanaka, Ohtake, y Wang 2009) o diseño de controladores polinomiales bajo perturbaciones acotadas (Ichihara 2008). El artículo de revisión (A. Sala 2009) discute las ideas básicas en el modelado de estos sistemas y las fuentes más destacadas de conservadurismo al usar modelos TS y polinomiales borrosos para el análisis y diseño de controladores no lineales.

En la mayoría de referencias en la literatura se utilizan condiciones LMI y SOS con el fin de probar estabilidad *global* y prestaciones de sistemas borrosos TS; sin embargo, probar estabilidad global de un sistema TS puede suponer haber probado solamente un dominio de atracción *local* muy pequeño del sistema no lineal original. En efecto, aunque se haya encontrado una función de Lyapunov  $V(x)$  decreciente, el modelo TS sólo es válido en una región  $\Omega_0$ , con lo que únicamente se ha probado estabilidad local en el mayor conjunto invariante  $\Theta = \{x: V(x) \leq \gamma\}$  tal que  $\Theta \subset \Omega_0$ . Así, si las funciones de Lyapunov resultan mal condicionadas pueden ser de poca utilidad en la práctica.

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [jopipe1@upvnet.upv.es](mailto:jopipe1@upvnet.upv.es) (J.L. Pitarch), [asala@upvnet.upv.es](mailto:asala@upvnet.upv.es) (A. Sala), [arino@esid.uji.es](mailto:arino@esid.uji.es) (C.V. Ariño), [fernando.bedate@gmail.com](mailto:fernando.bedate@gmail.com) (F. Bedate).

El objetivo principal de este trabajo es, en el caso en que probar la *estabilidad global* del sistema no lineal no sea factible, obtener la *región local* más grande de una forma predefinida que esté probado que pertenezca al dominio de atracción.

Este trabajo se basa, entre otras, en la idea de que, una vez se ha obtenido un modelo borroso polinomial local de un sistema no lineal en una región de interés “amplia”,  $\Omega_0$ , se pueden obtener resultados locales en una región más pequeña  $\Omega_d$ , sin necesidad de remodelar, basándose en los valores extremos de las funciones de pertenencia. En (Sala y Ariño 2006) se propone una expresión de las funciones de pertenencia como combinación de los vértices de otras que permite reasignar el modelo original. El trabajo (Pitarch, Ariño, y Sala 2011) la extiende al caso polinomial. Una vez se acota el modelo en una región más pequeña  $\Omega_d$ , se obtiene la región de atracción que contiene a una zona de forma prefijada del mayor tamaño posible dentro de  $\Omega_d$ . Un procedimiento iterativo sobre el tamaño de  $\Omega_d$  intentará obtener el mayor estimado posible del dominio de atracción del sistema no lineal original.

La estructura del artículo es la siguiente: la sección 2 presenta la notación y resultados preliminares bien conocidos en estabilidad de sistemas TS y polinomiales; asimismo, se concreta el problema a resolver. La sección 3 discute la transformación de un modelo borroso cuando el máximo y mínimo de las funciones de pertenencia en una región son conocidos. La sección 4 realiza un análisis de estabilidad para encontrar la región de atracción más grande con forma prefijada y propone un algoritmo iterativo para resolver el problema. La sección 5 propone un refinamiento para aumentar algo más el tamaño de dicha región estable hallada. Finalmente, la sección 6 muestra ejemplos para clarificar la metodología propuesta y una sección de conclusiones resume las ideas principales del trabajo.

## 2. Preliminares

Los sistemas borrosos Takagi-Sugeno (Takagi y Sugeno 1985) son modelos de sistemas no lineales en la forma

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i(w)(A_i x + B_i u) \quad (1)$$

donde  $\mu_i$  son las funciones de pertenencia,  $x$  los estados del sistema,  $u$  la acción de control,  $n$  el número de reglas y  $w$  son funciones dependientes del tiempo (variables “premisa”) que se suponen conocidas. Las funciones de pertenencia  $\mu_i$  verifican:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(w) = 1, \quad \mu_i(w) > 0 \quad \forall w \quad i: 1 \dots n$$

Si  $w$  incluye al propio estado del sistema,  $x$ , se trata de un modelo de un sistema no lineal (que es precisamente la suposición usual en literatura de control borroso), si no lo incluye sería un sistema lineal variante en el tiempo (LTV en literatura en lengua inglesa (Neerhoff y van der Kloet 2001)).

Existe una metodología sistemática de transformar (localmente, en una *región de modelado*  $\Omega_0$ ) sistemas no lineales autónomos  $\dot{x} = f(x)$  a modelos Takagi-Sugeno si las no-linealidades cumplen condiciones de sector (Tanaka y Wang 2001, cap 1). El modelo linealizado clásico siempre está incluido en la envoltura convexa de los modelos vértice.

Recientemente (Sala y Ariño 2009), el modelado de sistemas borrosos con consecuente lineal han sido generalizados al caso

polinomial. A los polinomios definidos sobre unas variables  $v$  se les denotará con  $\mathcal{R}_v$ .

En efecto, un sistema borroso polinomial es un sistema cuya dinámica puede expresarse como

$$\dot{x} = p(x, u, w, \mu) \quad (2)$$

donde  $p(x, u, w, \mu)$  es un vector cuyos elementos son polinomios en dichas cuatro variables, definidas anteriormente, tal que  $p(0,0,0, \mu) = 0 \quad \forall \mu$ , de modo que el origen es siempre un punto de equilibrio. Si el origen no es siempre un punto de equilibrio, dependiendo de algunas variables externas, estas deben ser consideradas como entradas tipo perturbación. Sistemas no lineales suficientemente diferenciables pueden ser modelados localmente como sistemas borrosos polinomiales en una *región de modelado*  $\Omega_0$ , de forma análoga a los modelos TS.

Por ejemplo en (Sala y Ariño 2009) se demuestra que, en la región  $\Omega_0 = \{-1 \leq x \leq 1\}$ , la no linealidad  $\sin(x)$  se puede expresar exactamente como una interpolación entre dos modelos polinomiales de 3er orden

$$\sin(x) = \mu_1(x - 0.1585x^3) + \mu_2(x - 0.1667x^3)$$

o, por ejemplo, de 5º orden

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + (\mu_1 0.0083336x^5 + \mu_2 0.0081376x^5)$$

dependiendo del término en el que se desee truncar el desarrollo en serie de Taylor de  $\sin(x)$ . Así,  $\dot{x} = \sin(x)$  podría ser representado como (2). Se omiten los detalles por brevedad y se remite al lector a la citada referencia para detalles del proceso de modelado borroso polinomial de sistemas no lineales basado en serie de Taylor.

En muchas referencias en literatura se consideran modelos borrosos afines en control, que son un caso particular de (2):

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i(w) (p_i(x) + B_i(x)u) \quad (3)$$

Dado que el objetivo de este artículo es el análisis de estabilidad local, se supondrá  $u=0$  en los desarrollos a continuación. No obstante, los resultados presentados en este trabajo permitirían estimar el dominio de atracción *a posteriori* de sistemas borrosos polinomiales en bucle cerrado, cuyos controles hayan sido diseñados con las técnicas citadas en la introducción. En efecto, si  $u$  en (3) se sustituye por una ley de control  $u = k(x)$ , pudiendo  $k(x)$  contener términos polinomiales o constantes siempre que se cumpla que el origen siga siendo punto de equilibrio  $f(0, k(0)) = 0$ , entonces la metodología de análisis de estabilidad local propuesta en este trabajo es aplicable.

### 2.1 Estabilidad de sistemas borrosos polinomiales

Considérese un sistema borroso polinomial que está expresado como (2), que modela un sistema no lineal sin perturbaciones  $\dot{x} = f(x)$  en una zona  $\Omega_d$  del que se quiere analizar estabilidad (local). Entonces, siguiendo las técnicas de modelado anteriores, las funciones de pertenencia  $\mu$  son únicamente funciones de  $x$ , y el modelo queda:

$$\dot{x} = p(x, \mu(w)) \quad (4)$$

A la trayectoria del sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$  que en el ins-

tante  $t_0$  pasa por  $x_0$  se denotará como  $\phi(t, x_0, t_0)$ .

**Definición 1:** Se entiende por **dominio de atracción local** en la región  $\Omega_d$ , denotado con  $\Theta_l$ , al conjunto de puntos del espacio de estados cuya trayectoria  $\phi(t, x, t_0)$  para cualquier  $t_0$  no escapa de la región de estudio  $\Omega_d$  (donde el modelo borroso es válido únicamente) y acaba en el punto de equilibrio asintóticamente estable  $x=0$ .

$$\Theta_l = \left\{ x \in \Omega_d : \forall t_0 \phi(t, x, t_0) \in \Omega_d \forall t \geq t_0, \phi(t, x, t_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \right\} \quad (5)$$

□

La teoría de estabilidad de Lyapunov prueba que el sistema (1) con entrada nula  $u=0$  es estable si existe una función  $V(x)$  tal que  $V(0) = 0$  y:

$$V(x) > 0, \quad \frac{dV}{dx} < 0, \quad \forall x \setminus \{x = 0\} \quad (6)$$

Las funciones de Lyapunov más populares propuestas en la literatura son formas cuadráticas:  $V(x) = x^T P x$ . En sistemas borrosos TS lineales se pueden encontrar planteando un problema de desigualdades matriciales lineales (Boyd 1994), (se usará el acrónimo LMI, ampliamente establecido en la literatura en lengua inglesa) de modo que con el software disponible para resolver estos problemas de optimización se puede tratar de encontrar una matriz  $P$  que cumpla las condiciones (6) o determinar si el problema LMI no es factible. Se emplaza al lector a consultar (Tanaka y Wang 2001) para una amplia discusión.

Considerando ahora el sistema (4), con propósitos operacionales (Sala 2007), las funciones de pertenencia  $\mu(w)$ , que son positivas, serán descritas por el cambio de variable

$$\mu_i = \sigma_i^2$$

que da como resultado un modelo:

$$\dot{x} = \tilde{p}(x, \sigma) \quad (7)$$

**Teorema 1** (K. Tanaka, Yoshida, Ohtake, y H. O Wang 2007a): El sistema (4) es globalmente estable si se es capaz de encontrar un polinomio función de Lyapunov  $V(x)$  que verifique

$$V(x) - \varepsilon(x) \in \Sigma_x \quad (8)$$

$$R(x, \sigma) := -\frac{dV}{dx} \tilde{p}(x, \sigma) \in \Sigma_{x, \sigma} \quad (9)$$

donde  $\varepsilon$  es un polinomio positivo radialmente no acotado, que normalmente es  $\sum x_i^2$  (pero no necesariamente), y  $\Sigma_v$  denota la clase de polinomios en las variables  $v$  que pueden ser expresados como suma de cuadrados (SOS, usando el acrónimo ampliamente establecido en la literatura inglesa (Papachristodoulou y Prajna 2002)).

□

En efecto, siendo  $V(x)$  un polinomio de grado arbitrario en las variables de estado,  $\dot{V}$  es también un vector de polinomios en las variables  $x$  y  $\sigma$ , que se denota como  $R(\sigma, x)$  en (9). Si  $V(x)$  es lineal en algunas variables de decisión, entonces  $\dot{V}$  y las expresiones (8) y (9) también lo son y pueden ser directamente introducidas en paquetes de programación SOS (Prajna, Papachristodoulou, Seiler, y Parrilo 2004b; Toh, Todd, y Tutuncu 1999) para obtener

los valores de las variables de decisión que cumplen con las restricciones anteriores. Se pueden encontrar ejemplos de análisis de estabilidad de este tipo de sistemas polinomiales borrosos en (Sala 2007; Tanaka, Yoshida, Ohtake y Wang 2007) y (Sala y Ariño 2009).

Un polinomio  $p(a)$  es SOS si y solo si existe un vector de monomios  $m(a)$  y una matriz constante semidefinida positiva  $H$  tal que  $p(a) = m(a)^T H m(a)$ ; de esta forma los problemas SOS pueden resolverse mediante herramientas de programación semidefinida, que se encargan de buscar  $H$  (Prajna, Papachristodoulou, y Parrilo 2002). Todos los polinomios SOS son positivos, pero el recíproco no es cierto (Reznick 2000; Chesi 2007), lo cual constituye una fuente de conservadurismo.

**Nota:** En el caso de que la búsqueda de la función de Lyapunov por el Teorema 1 sea insatisfactoria pero el sistema linealizado en  $x=0$  sea exponencialmente estable (por lo que el sistema no lineal es localmente estable, 1er teorema de Lyapunov), existen algunas opciones a explorar:

- Probar con una función de Lyapunov global de mayor grado (puede rápidamente agotar los recursos de computación).
- Añadir información de forma, si se puede, mediante restricciones polinomiales: particionar el espacio de estados en regiones  $\Omega_d$  donde se sabe que se cumplen un conjunto de restricciones polinomiales  $r_d(x, \sigma)$ . Se pueden incorporar a las condiciones de Lyapunov como se explica en (Sala 2008), ver Sección 2.2. en este trabajo.
- Intentar probar estabilidad local en una región definida por  $\Omega_d = \{x: h_i(x) \geq 0\}$ , siendo  $h_i(x)$  “r” polinomios conocidos, como se discute a continuación.

### 2.2 Estabilidad local de sistemas borrosos polinomiales

El problema de estabilidad local se basa en modificar las condiciones (8) y (9) para que se cumplan únicamente de forma local en determinada zona de interés. Para ello, se usarán las siguientes definiciones y resultados de (Jarvis-Wloszek et al. 2005, Pag 4-6).

**Definición 2:** Dados unos polinomios  $\{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{R}_x$ , el **Monoi-de Multiplicativo**  $\wp(f_1, \dots, f_r)$  es el conjunto generado por todos los productos finitos de  $f_i$ , incluyendo el producto vacío.

El **Cono**  $\wp(f_1, \dots, f_r)$  generado por los  $f_i$  es el conjunto de polinomios:

$$\wp(f_1, \dots, f_r) := \left\{ s_0 + \sum_{i=1}^l s_i b_i \mid l \in \mathbb{Z}_+, s_i \in \Sigma_n, b_i \in \wp(f_1, \dots, f_r) \right\} \quad (10)$$

y el **Ideal**  $\Im(f_1, \dots, f_r)$  generado por los  $f_i$  es el conjunto de polinomios:

$$\Im(f_1, \dots, f_r) := \left\{ \sum_{k=1}^l p_k f_k \mid l \in \mathbb{Z}_+, p_k \in \mathcal{R}_n \right\} \quad (11)$$

□

Estos conceptos son usados en el Teorema de “Positivstellensatz” (Jarvis-Wloszek et al. 2005, Pag 4–6). Una expresión del mismo que resulta clave para el problema en estudio en secciones posteriores se presenta a continuación:

**Corolario 1:** El polinomio  $P(x)$  es positivo en una región  $\Omega = \{x: h_i(x) > 0, g_j(x) = 0, i: 1, \dots, r, j: 1, \dots, t\}$ , si existen polinomios

$$F(x) \in \wp(h_1, \dots, h_r) \text{ y } G(x) \in \mathfrak{S}(g_1, \dots, g_t) \text{ que verifiquen}$$

$$P(x) - F(x) + G(x) \in \Sigma_x \quad (12)$$

La condición (12) se resuelve numéricamente sustituyendo  $F(x) = \sum_{k=1}^l s_k b_k$  y  $G(x) = \sum_{k=1}^t p_k g_k$ , tomando un número finito “ $l$ ” de términos  $b_k(x) \in \wp(h_1, \dots, h_r)$ . A continuación, se fija el grado de los multiplicadores  $s_k(x)$  y  $p_k(x)$  y se añade que  $s_k(x)$  sean SOS. Los coeficientes de los polinomios son variables de decisión que pueden ser obtenidos con herramientas como SOSTOOLS (Prajna, Papachristodoulou, Seiler, y Parrilo 2004b) o YALMIPROS (Lofberg 2009).

**Observación:** La condición (12) es necesaria y suficiente cuando el grado de los polinomios  $F(x), G(x) \rightarrow \infty$  y se toman todos los posibles productos que componen el cono e ideal. Evidentemente, como se detalla en las anteriores referencias, puede existir una solución al problema que no se pueda obtener con el número limitado de variables de decisión establecido a priori en el código numérico.

Para intentar probar estabilidad local en una región definida por  $h_i(x) \geq 0$ , siendo  $h_i(x)$  “ $r$ ” polinomios conocidos, puede realizarse adaptando el Teorema 1 con Corolario 1:

**Corolario 2:** El sistema (2) es localmente estable en una región  $\{x: V(x) \leq \gamma\} \subset \{x: h_i(x) \geq 0\}$  si el siguiente problema SOS es factible

$$V(x) - \varepsilon(x) - F_1(x) \in \Sigma_x \quad (13)$$

$$R(x, \sigma) := -\frac{dV}{dx} \tilde{p}(x, \sigma) - F_2(x) \in \Sigma_x \quad (14)$$

para polinomios  $\{F_1(x), F_2(x)\} \in \wp(h_1, \dots, h_r)$ . Entonces (8) y (9) se cumplen localmente en la región de modelado borroso definida por las “ $r$ ” restricciones polinomiales  $h_i(x) \geq 0$ .

Según las definiciones previas, el corolario permitiría probar que  $\{x: V(x) \leq \gamma\} \subset \Theta_i$  si se definen unas  $h_i$  adecuadamente de modo que  $\Omega_d = \{x: h_i(x) \geq 0\}$  esté incluida en la región de validez del modelo  $\Omega_0$ . Una vez se han resuelto (13) y (14), hay que determinar el valor máximo de  $\gamma$  para que se cumpla la inclusión  $\{x: V(x) \leq \gamma\} \subset \Omega_d$ .

Otras aplicaciones del Teorema 1 con condiciones de localidad más complejas serán discutidas en secciones posteriores.

### 2.3 Planteamiento del problema

Las anteriores técnicas sólo plantean una respuesta positiva o negativa al problema de estabilidad local abordado en el Corolario 2. No obstante existen dos inconvenientes:

1. Obtienen una función positiva decreciente, pero realmente el dominio de atracción local probado es, en principio, únicamente la equipotencial  $\{x: V(x) \leq \gamma\}$  más amplia incluida en la zona de estudio  $\Omega_d$ . Si el interés es el garantizar que unas condiciones iniciales en determinada zona (de forma prefijada a priori) convergen al origen, dicha zona puede ser muy pequeña si la solución obtenida no está bien condicionada.
2. Si el sistema no lineal original es modelado en una zona amplia  $\Omega_0$ , entonces el modelo borroso polinomial incluye en sus modelos vértices, aspectos del sistema que están fuera de

la zona de atracción probada, lo cual es obviamente conservador.

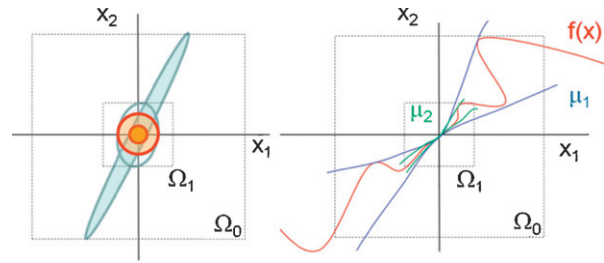


Figura 1. Problemas de condicionamiento (izquierda) y de conservadurismo asociado al modelado (derecha) en estudio de estabilidad local.

Por ejemplo, en la Figura 1 (izq.), la función de Lyapunov con curvas de nivel elipsoidales en  $\Omega_0$  prueba un círculo muy pequeño y, de hecho, el círculo probado con una región de estudio más pequeña  $\Omega_d \equiv \Omega_1$  es de tamaño mayor. Esto es debido a que los modelos vértice están menos separados (Figura 1 (der.)) al modelar sólo en  $\Omega_1$ , con lo que el problema del Corolario 1 asociado es mucho menos restrictivo.

El objetivo de este trabajo es, dada una zona de forma prefijada alrededor del equilibrio (por ejemplo esférica o cúbica), encontrar el mayor factor de escala tal que la región escalada esté incluida en el dominio de atracción local de la región de modelado  $\Omega_0$ . Para reducir el conservadurismo, se modifican las técnicas anteriormente expuestas en esta sección, para utilizar un subconjunto convexo del modelo original válido sólo en una zona más pequeña de estudio, de forma que se aprovecha la información de la zona de modelado  $\Omega_d$ .

### 3. Modelos borrosos polinomiales locales

Como se ha comentado, dado un modelo TS, que modela un sistema no lineal en una región inicial de modelado  $\Omega_0$ , si se pretende analizar la estabilidad en una región de interés  $\Omega_d \subset \Omega_0$ , sólo son necesarias determinadas características locales del modelo inicial.

Para analizar la estabilidad local de un modelo borroso TS (1) o un modelo borroso polinomial (4) en una cierta región, el modelo original se puede modificar utilizando la información proporcionada por las funciones de pertenencia.

La idea es expresar las funciones de pertenencia  $\mu(w)$  de un modelo borroso, en un subconjunto de  $\Omega_0$ , como una combinación convexa de unos ciertos vectores vértice  $v_k$ . La demostración para el caso de un modelo TS se propuso en (Pitarch, Ariño, Bedate y Sala 2010), y se extendió al caso polinomial en (Pitarch, Ariño, y Sala 2011), como sigue:

**Lema 1:** Si las funciones de pertenencia  $\mu(w)$  de un sistema borroso polinomial descrito como (3) en una región  $\Omega_d$ , pueden ser expresadas como una combinación convexa<sup>1</sup> de unos vectores vértice  $v_k \in \mathbb{R}^n, k: 1 \dots n_v$ , de elementos  $v_{ki}, i: 1 \dots n$

$$\mu_i(w) = \sum_{k=1}^{n_v} \beta_k(w) v_{ki}, \quad \forall w \in \Omega_d, \quad i: 1 \dots n \quad (15)$$

<sup>1</sup> Los vértices  $v_k$  pueden ser obtenidos fácilmente a partir de las cotas mínima y máxima en  $\Omega_d$ .

$$\sum_{k=1}^{n_p} \beta_k(w) = 1, \quad \beta_k(w) > 0 \quad \forall w \in \Omega_d \quad k: 1 \dots n_p$$

entonces, para modelos borrosos polinomiales (4) el sistema puede ser transformado a

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{n_p} \beta_k(w) p_k(x)^* \quad (16)$$

donde los nuevos vectores de polinomios vértice son:

$$p_k(x)^* = \sum_{i=1}^n v_{ki} p_i(x) \quad (17)$$

**Demostación:** Los detalles se han omitido por brevedad pero se pueden consultar en (Pitarich, Ariño, y Sala 2011).  $\square$

Se pueden usar métodos basados en la teoría de programación lineal (Luenberger 2008) para enumerar los vértices  $v_{ki}$  del citado politopo (relacionado con la obtención de soluciones factibles en un problema LP).

#### 4. Análisis de estabilidad local

Usando los modelos transformados (16), se pueden obtener resultados de estabilidad local con las propuestas de la sección 2.

**Lema 2:** La región  $\Theta \subset \Omega_d$  definida como

$$\Theta = \{x: V(x) \leq V_M, V(x) > 0\} \quad (18)$$

pertenece al dominio de atracción local en la región de interés  $\Omega_d$  del sistema (4) en el punto de equilibrio  $x=0$  si

$$V_M \leq \min\{V(x) \mid x \in \partial\Omega_d\} \quad (19)$$

donde  $\partial\Omega_d$  denota la frontera de  $\Omega_d$  y  $V(x)$  verifica:

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega_d \setminus \{x = 0\} \quad (20)$$

$$\frac{dV}{dx} p_k(x)^* < 0 \quad \forall x \in \Omega_d \setminus \{x = 0\} \quad k: 1, \dots, n_p \quad (21)$$

**Demostación:** Como, por Lema 1, el sistema puede expresarse en  $\Omega_d$  como (16), si las condiciones (20) y (21) son factibles para una cierta función  $V(x)$ , entonces, se ha encontrado una función de Lyapunov que prueba estabilidad asintótica global (Khalil 2002, cap 6.4) del sistema borroso (16), idénticamente igual a (4) en la zona  $\Omega_d$ , y que  $\Theta$  es un conjunto invariante (Khalil 2002, cap 4.2) para cualquier valor de  $V_M$  en (18), pero sólo para aquellos que verifican (21) en (4), dado que la expresión (16) no es válida fuera de  $\Omega_d$ . En efecto, solo se puede probar estabilidad local en la región más grande contenida en  $\Omega_d$ , la cual vendrá definida por un valor

$$V_M = \min_{x \in \partial\Omega_d} V(x)$$

El siguiente lema permitirá determinar cuándo un conjunto limitado por una curva polinomial (por ejemplo, una curva de nivel de una función de Lyapunov) contiene una región  $\Phi$  de forma prefijada.

**Lema 3:** Sea  $\Phi$  una región definida por la intersección de  $n_r$  polinomios fijados a priori  $k_i(x)$ , tales que el interior de  $\Phi$  contiene al punto de equilibrio  $x=0$

$$\Phi = \{x: k_i(x) \geq 0 \quad i: 1, \dots, n_r\} \quad (22)$$

y cuya frontera es la unión de los conjuntos definidos por:

$$B_i = \{k_i(x) = 0, k_j(x) \geq 0 \quad j \neq i\} \quad i: 1, \dots, n_r$$

Sea  $\mathcal{G}(k_1, \dots, k_{n_r})$  el monoide multiplicativo generado por las restricciones  $B_i$ , sea  $\mathfrak{S}(k_i)$  el ideal generado por  $k_i(x)$  asociado a  $B_i$ , y sea  $\wp(k_1, \dots, k_{n_r})$  el cono generado por el conjunto de polinomios que definen la región  $\Phi$ . Entonces la región  $\Theta = \{x: q(x) \leq 1\}$  contiene a la frontera de la región  $\Phi$  si las siguientes  $n_r$  condiciones SOS

$$-(q(x) - 1) - F_i(x) - G_i(x) \in \Sigma_x \quad i: 1, \dots, n_r \quad (23)$$

son factibles. Donde  $F_i(x) \in \wp(k_1, \dots, k_{n_r})$  y  $G_i(x) \in \mathfrak{S}(k_i)$ .

**Demostación:** Tomando  $(q(x) - 1) \geq 0$ , si existen polinomios  $F_i(x) \in \wp(k_1, \dots, k_{n_r})$ ,  $G_i(x) \in \mathfrak{S}(k_i)$  y  $g \in \mathcal{R}_x$  que verifiquen

$$(q(x) - 1) + F_i(x) + G_i(x) + g^2 = 0$$

entonces el conjunto de valores  $\{x: q(x) - 1 > 0\} \cap B_i$  es vacío por el Teorema 2. Esto se prueba, realizando un cambio de signo, si (23) es factible.  $\square$

**Definición 3:** Dada una región de forma prefijada  $\Phi_1$  definida como (22), se llamará conjunto escalado al conjunto  $\Phi_2 = \{x: k_i(\lambda^{-1}x) \geq 0 \quad i: 1, \dots, n_r\} \subset \Omega_d$  y a  $\lambda$  se le denotará como **factor de escala**. En ocasiones, se usará la notación  $\Phi_2 = \lambda\Phi_1$ . Por simplicidad, se denotará con  $\bar{k}_i(x)$  a  $k_i(\lambda^{-1}x)$  para un  $\lambda$  fijo, conocido.

Supóngase ahora la región de modelado  $\Omega_d$  definida por una serie de restricciones polinomiales

$$\Omega_d = \{x: h_i(x) \geq 0 \quad i: 1, \dots, n_h\} \quad (24)$$

Una expresión similar a las consideradas en el Lema 3 servirá para determinar que una curva de nivel de la función de Lyapunov está contenida en  $\Omega_d$ . Con ello, se puede probar el siguiente resultado:

**Teorema 2:** Considérese el sistema (4) y sea  $V(x)$  una función polinomial de grado prefijado. La región con forma prefijada (22) y factor de escala  $\lambda$ ,  $\Phi_2 = \{x: \bar{k}_i(x) \geq 0\}$ , supuesto  $\lambda$  conocido, pertenece al dominio de atracción local de  $x=0$  en una región de interés  $\Omega_d \subset \Omega_0$ , definida en (24), si el siguiente problema SOS es factible

$$-(V(x) - 1) - F_{1m}(x) + G_{1m}(x) \in \Sigma_x \quad m: 1, \dots, n_r \quad (25)$$

$$(V(x) - 1) - F_{2i}(x) + G_{2i}(x) \in \Sigma_x \quad i: 1, \dots, n_h \quad (26)$$

$$V(x) - \varepsilon(x) - T_0(x) \in \Sigma_x \quad (27)$$

$$-\frac{dV}{dx} p_k(x)^* - \varepsilon(x) - T_k(x) \in \Sigma_x \quad k: 1, \dots, n_p \quad (28)$$

donde  $F_{1m}(x) \in \wp(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{n_r})$ ,  $G_{1m}(x) \in \mathfrak{S}(\bar{k}_m)$ ,  $\{F_{2i}(x),$

$$T_0(x), T_k(x) \in \wp(h_1, \dots, h_{n_h}), G_{2i}(x) \in \mathfrak{S}(h_i).$$

Además, la región  $\Theta = \{x: V(x) \leq 1\}$  esta también contenida en el dominio de atracción local de  $x=0$ .

**Demostración:** Por “Positivstellensatz” se demuestra que las condiciones (27) y (28) implican (20) y (21). Por Lema 2 entonces  $V(x)$  es función de Lyapunov y junto con (26), la región  $\Theta = \{x: V(x) \leq 1\} \subset \Theta_i$ . Con la condición (25) se garantiza que la región  $\Phi_2$  de tamaño  $\lambda$  está contenida en la región  $\Theta = \{x: V(x) \leq 1\}$  por Lema 3. A su vez, por condición (26) y ser  $V(x)$  función de Lyapunov, se mantiene  $\Theta$  y por consecuente  $\Phi_2$ , dentro de la región de interés  $\Omega_d$ .  $\square$

#### 4.1 Algoritmo Iterativo.

Los resultados de las secciones anteriores se pueden combinar para obtener un algoritmo que calcule, por ejemplo, una estimación de la región esférica  $\Phi = \{x: x^T \lambda^{-2} x \leq 1\}$ , centrada en el origen, de radio  $\lambda$ , con el  $\lambda$  más grande para la cual la estabilidad exponencial esté asegurada, usando una zona de modelado que es un polítopo simétrico que contiene a  $x=0$ :

$$\Omega_0 = \{x: (a_i^T x)^2 \leq 1 \quad i: 1, \dots, n_h\} \quad (29)$$

Y una serie de zonas de interés menores con factor de escala  $\rho$ :

$$\Omega_d = \left\{ x: \left( \frac{a_i^T}{\rho} x \right)^2 \leq 1 \quad i: 1, \dots, n_h \right\} \quad (30)$$

dado que son un caso particular del Teorema 2. No obstante, el Teorema 2 puede aplicarse a otro tipo de geometrías de  $\Omega_d$  y  $\Phi$ .

La esfera más grande a encontrar siempre debe estar contenida en la región  $\Omega_0$ . Entonces, el radio máximo de la esfera  $\lambda_{Max}$  puede ser calculado a priori como un problema LMI en el caso más general (Boyd 1994).

Básicamente, el procedimiento primero comprobará los casos extremos; [1] comprobar factibilidad en los problemas SOS presentados en la sección 2 en toda la región de modelado  $\Omega_0$  mediante el Teorema 1 o el Corolario 1, [2] comprobar estabilidad del modelo linealizado alrededor de  $x=0$ .

En el caso en el que [1] no sea factible o se obtengan pobres resultados y [2] sí sea estable o bien sea marginalmente estable, con lo cual el modelo no lineal sí podría ser localmente estable (Khalil 2002, cap 8), se propone el siguiente algoritmo para tratar de encontrar mejores resultados.

**Algoritmo 1:** *Considérese el sistema (3) modelado en una región amplia  $\Omega_0$ .*

1. Definir una nueva región  $\Omega_d \subset \Omega_0 | \Omega_d = \rho \Omega_0$  tomando un  $\rho = \rho_0 \approx 0$  y expresar el sistema (3) en  $\Omega_d$  como en (16) utilizando Lema 1.
2. Fijar un grado máximo para el polinomio función de Lyapunov  $V(x)$ .
3. Resolver el siguiente problema:

Maximizar  $\lambda$  sujeto a

$$0 \leq \lambda \leq \rho \lambda_{Max} \quad (31)$$

$$V(x) - \varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{n_h} \vartheta_i(x) \left( \left( \frac{a_i^T}{\rho} x \right)^2 - 1 \right) \in \Sigma_x \quad (32)$$

$$(V(x) - 1) + \varphi_{ii}(x) \left( \left( \frac{a_i^T}{\rho} x \right)^2 - 1 \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_h} \varphi_{ij}(x) \left( \left( \frac{a_j^T}{\rho} x \right)^2 - 1 \right) \in \Sigma_x \quad i: 1, \dots, n_h \quad (33)$$

$$-(V(x) - 1) + \psi_0(x)(x^T \lambda^{-2} x - 1) \in \Sigma_x \quad (34)$$

$$-\frac{dV}{dx} p_k(x) - \varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{n_h} \chi_{ik}(x) \left( \left( \frac{a_i^T}{\rho} x \right)^2 - 1 \right) \in \Sigma_x \quad k: 1, \dots, n_v \quad (35)$$

con multiplicadores  $\{\vartheta_i \varphi_{ij} \chi_{ik}\} \in \Sigma_x$  y  $\{\varphi_{ii} \psi_0\} \in \mathcal{R}_x$ .

4. Incrementar el factor de escala  $\rho = \rho + \Delta\rho$  si  $\rho < 1$  y volver al paso 2. En el caso que  $\rho = 1$  o el problema no sea factible, se acaba el algoritmo.  $\square$

El algoritmo proporciona una aproximación a la región esférica más grande de  $x=0$  perteneciente al dominio de atracción local en  $\Omega_0$ , utilizando una función de Lyapunov polinomial de grado prefijado, las técnicas LMI/SOS presentadas en el Teorema 2 y realizando un barrido de la región de modelado, en este caso mediante el factor de escala  $\rho$ , minimizando  $\lambda$  por bisección en cada iteración.

Se obtendrían esferas mayores subiendo los grados de la función de Lyapunov o de los multiplicadores, incorporando productos cruzados de restricciones, o realizando una exploración con regiones  $\Omega_d \subset \Omega_0$  que no tienen por qué ser un escalado simétrico de  $\Omega_0$ .

Como se observará en los ejemplos, el valor mínimo de  $\lambda$  en función del factor de escala de la región de interés  $\rho$  puede tener varios máximos locales, siendo ésta la razón por la cual se propone realizar una exploración.

## 5. Expansión del dominio de atracción

Las técnicas presentadas tanto en este trabajo como las comentadas de la bibliografía (véase secciones 1 y 2) obtienen como resultado un subconjunto del dominio de atracción local definido por la equipotencial  $V(x) < 1$  contenida en la región de interés  $\Omega_d$ . Es un resultado conservador: el dominio de atracción local en  $\Omega_d$  podría ser mayor que el encontrado, debido a la limitación impuesta de que el dominio de atracción esté formado por la equipotencial de  $V(x) = 1$  que tiene que estar contenida en la región de validez del modelo borroso.

Mediante el siguiente resultado, se puede ampliar el dominio de atracción probado en la misma región de interés  $\Omega_d$ , utilizando la función de Lyapunov  $V(x)$  antes obtenida, sin necesidad de incrementar la complejidad computacional de los problemas LMI/SOS anteriores.

**Lema 4:** *Dada una región de modelado borroso  $\Omega_d$  definida como (24), conocidos los conjuntos  $B_i$  que definen la frontera de dicha*

región  $(\partial\Omega)$ ,

$$B_i = \{h_i(x) = 0, h_j(x) \geq 0 \quad j \neq i\} \quad i: 1, \dots, n_r$$

y dada una función de Lyapunov polinomial  $V(x)$  obtenida por Teorema 2, o cualquier otro procedimiento, la región más grande probada mediante técnicas SOS perteneciente al dominio de atracción local se obtiene resolviendo el siguiente problema:

Maximizar  $\gamma$  sujeto a

$$(V(x) - \gamma) - F_i(x) - G_i(x) \in \Sigma_x \quad i: 1, \dots, n_h \quad (36)$$

para polinomios  $F_i(x) \in \wp(-\dot{h}_i, h_1, \dots, h_{n_h})$  y  $G_i(x) \in \mathfrak{S}(h_i)$ .

El mayor dominio de atracción  $\Theta$  probado es:

$$\Theta = \{x: V(x) \leq \gamma, x \in \Omega_d\} = \{x: \min(\gamma - V(x), h_i(x)) > 0\} \quad (37)$$

**Demostración:** La idea básica es que en la frontera de  $\Omega_d$  ( $\partial\Omega_d$ ), puede haber zonas definidas por

$$R_i = \{x \in \partial\Omega_d \mid \dot{h}_i(x) > 0, h_i = 0, h_j \geq 0\} \quad i: 1, \dots, n_h \quad j \neq i \quad (38)$$

es decir, donde las trayectorias del sistema en  $\partial\Omega_d$  apuntan hacia dentro de dicha región. Entonces, no es necesario que  $V(x) \leq \gamma$  esté contenido en  $\Omega_d$  si  $V(x) \leq \gamma$  no intersecta con las zonas de la frontera que no pertenecen a algún  $R_i$ . Así, el objetivo es probar el máximo  $\gamma$  para el que:

$$\{x: V(x) \leq \gamma, x \in B_i\} \Rightarrow \dot{h}_i(x) > 0 \quad i: 1, \dots, n_h \quad (39)$$

Con dicho  $\gamma$ , (37) define un conjunto invariante. En efecto, partes de la frontera de  $\Theta$  están en la frontera de  $\Omega_d$  y otras están en  $V(x) = \gamma$ . Por (39) si un punto  $x$  de la frontera de  $\Theta$  está incluida en la de  $\Omega_d$ , entonces no abandona  $\Omega_d$  porque  $\dot{h}_i(x) > 0$ , y si el punto  $x$  de la frontera de  $\Theta$  está en el interior de  $\Omega_d$ , la condición de que  $V(x)$  es decreciente en el interior  $\Omega_d$  (secciones anteriores) nos asegura que continúa estando en  $\Theta$  en el futuro.

Entonces, como (37) es un conjunto invariante y solo el origen pertenece al conjunto  $\{x: \dot{V}(x) = 0\}$ , por el Teorema de invarianza de LaSalle (Khalil 2002, sec 4.2) el conjunto  $\Theta$  forma parte del dominio de atracción local de  $\Omega_d$ .

Para probar (39), teniendo una función de Lyapunov  $V(x)$  en  $\Omega_d$ , se debe probar que todos los conjuntos

$$c_i = \{V(x) \leq \gamma, \dot{h}_i(x) \leq 0, h_i(x) = 0, h_j(x) \geq 0 \quad \forall j \neq i\} \quad i: 1 \dots n_h$$

son vacíos. Por el Teorema de “Positivstellensatz”(Jarvis-Wloszek et al. 2005, pag. 5),  $c_i$  es vacío si la siguiente afirmación

$$g^2 + (\gamma - V(x)) + F_i(x) + G_i(x) = 0$$

es cierta para polinomios  $g \in \mathcal{R}_x, F_i(x) \in \wp(-\dot{h}_i, h_1, \dots, h_{n_h})$  y  $G_i(x) \in \mathfrak{S}(h_i)$ , pudiéndose probar mediante un cambio de signo, que es la condición (36).  $\square$

La nueva estimación del dominio de atracción encontrada siempre será mayor que la determinada en secciones anteriores.

**Nota:** Si con la ejecución del Lema 4 se obtienen resultados  $\gamma \rightarrow \infty$ , significa que el dominio de atracción probado  $\Theta$  es toda la

región  $\Omega_d$ , lo que da a entender que podemos modelar el sistema no lineal en una región de interés más grande obteniendo, muy probablemente, un dominio de atracción más grande.

## 6. Ejemplos

En esta sección se presentan dos ejemplos que ilustran el procedimiento propuesto. Se muestra la evolución del radio de la esfera máxima estable garantizada cuando se incrementa la región de modelado y además se muestra la forma del dominio de atracción local estimado por el método.

**Ejemplo 1:** Sea un modelo borroso polinomial de dos reglas, con sus correspondientes funciones de pertenencia, dado por:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x) p_i(x) \quad (40)$$

$$\mu_1(x) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \quad \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x)$$

$$p_1(x) = \begin{pmatrix} -0.116x_1 + 0.015x_2^4 + 0.0603x_2 \\ 0.2x_1^2x_2 - 0.0603x_1 - 0.4711x_2 \end{pmatrix}$$

$$p_2(x) = \begin{pmatrix} -0.1106x_1 + 0.03x_2^4 - 0.2796x_2 \\ -0.1x_1^2 + 5.8714x_1 - 0.4763x_2 \end{pmatrix}$$

Se define  $\Omega_{d,k}$  como una región cuadrada en el plano  $(x_1, x_2)$  dada por:

$$\Omega_{d,k} = \{x: \left| \left( \frac{0}{\rho_k} \right) x \right| \leq 1, \left| \left( \frac{1}{\rho_k} 0 \right) x \right| \leq 1\} \quad (41)$$

donde  $k$  es el número de iteración y  $\rho_k$  es el factor de escala que cambia en cada iteración.

En este caso, la monotonía de las funciones de pertenencia con la distancia al origen implica que su máximo y mínimo son fácilmente calculables: los valores máximo y mínimo de  $\mu_i$  en  $\Omega_{d,k}$  se obtienen fácilmente en el centro (máximo de  $\mu_1$ , mínimo de  $\mu_2$ ) y el vértice extremo del cuadrado (mínimo de  $\mu_1$ , máximo de  $\mu_2$ ) que denotaremos por  $\xi$ . Por lo tanto los vértices  $v_{ki}$  son

$$v_{11} = \mu_1^m = \mu_1(0), \quad v_{21} = \mu_1^M = \mu_1(\xi)$$

$$v_{12} = \mu_2^m = \mu_2(0), \quad v_{22} = \mu_2^M = \mu_2(\xi)$$

Los procedimientos en las secciones anteriores permiten determinar la esfera más grande alrededor de  $x=0$  para la cual se cumplen las condiciones de estabilidad local. En este primer ejemplo se ha elegido estabilidad cuadrática por simplicidad.

Considérese en la primera iteración  $\rho_1 = 0.01$  y las siguientes iteraciones en incrementos de 0.01 hasta alcanzar la no factibilidad del problema SOS. La esfera más grande se obtiene resolviendo las condiciones de estabilidad local SOS del Algoritmo 1 para cada región  $\Omega_k$ , reemplazando (35) por

$$-2[x_1 \ x_2]P(\mu_1^M p_1 + \mu_2^m p_2) - \varepsilon(x) + \psi_1(x_1^2 - \rho^2) + \psi_2(x_2^2 - \rho^2) \in \Sigma_x \quad (42)$$

$$-2[x_1 \ x_2]P(\mu_1^m p_1 + \mu_2^M p_2) - \varepsilon(x) + \psi_1(x_1^2 - \rho^2) + \psi_2(x_2^2 - \rho^2) \in \Sigma_x \quad (43)$$

Los elipsoides y la esfera más grande contenida en cada uno de ellos se muestran en la Figura 2 (izquierda) para algunos valores de la exploración. Obsérvese como los elipsoides mal condicionados dan lugar a un área muy pequeña, en comparación con el cuadrado de interés en el cual la función de Lyapunov decrece, y este hecho se acentúa más cuando se observa la región esférica: Por ejemplo, con cuadrado de lado 0.6, la máxima esfera estable posee un radio de 0.18, i.e., esta área es solo el 7% de la de la región cuadrada donde el modelo borroso es válido.

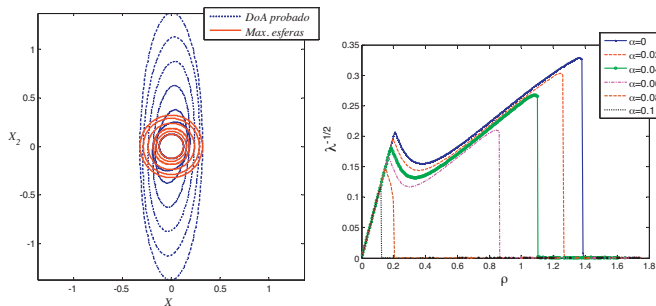


Figura 2. Izq: Dominios de atracción para diferentes tamaños de regiones de operación (cuadrados). Der: Evolución del radio de la esfera más grande probable con  $\Omega_{d,k}$  para diferentes tasas de decrecimiento ( $\alpha=0$ ).

Ahora, si se prueba una determinada tasa de decrecimiento  $\alpha$  para este sistema, solo se necesita añadir

$$-2\alpha[x_1 \ x_2]P[x_1 \ x_2]^T$$

a las condiciones (41) y (42). Entonces, empezando con un  $\alpha=0$ , incrementando  $\alpha$  las condiciones SOS se hacen más restrictivas así que el radio máximo probable será menor. La Figura 2 (derecha) muestra la evolución del radio de la esfera más grande probable con  $\Omega_{d,k}$  para diferentes tasas de decrecimiento. La línea de arriba corresponde a estabilidad simple ( $\alpha=0$ ).

Como se puede observar las curvas no siguen una evolución creciente debido a que al aumentar la zona de estudio los modelos vértice también expanden la distancia entre ellos introduciendo más incertidumbre, lo que se refleja en un claro condicionamiento progresivamente peor. No obstante, después de un “empeoramiento” ocurre que al ampliar la zona de modelado no se introduce ninguna nueva no linealidad y el radio crece de forma monótona hasta alcanzar la no factibilidad. En resumen, no se puede probar ninguna característica de monotonía en la evolución del radio porque depende de las características particulares del sistema no lineal subyacente en la región de modelado elegida.

**Ejemplo 2:** Considérese el sistema no lineal siguiente:

$$\dot{x} = \begin{cases} -3x_1 + 0.5x_2 \\ (-2 + 3 \sin(x_1))x_2 \end{cases} \quad (44)$$

El objetivo es encontrar una función de Lyapunov en la región:

$$\Omega_0 = \{(x_1, x_2) | 4^2 - x_1^2 \geq 0, 4^2 - x_2^2 \geq 0\} \quad (45)$$

de la no linealidad  $\sin(x_1)$  en  $\Omega_0$  siguiendo la propuesta basada en series de Taylor (Sala y Ariño 2009). El modelo borroso polinomial resultante, utilizando la descomposición de Taylor hasta grado 3, es:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 p_i(x, \mu) \quad (46)$$

$$\mu_1(x) = \frac{\sin(x_1) - x_1 + 0.074325x_1^3}{-0.0923417x_1^3} \quad \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x)$$

$$p_1(x, \mu) = \begin{cases} -3x_1 + 0.5x_2 \\ -2x_2 + 3x_2(x_1 - 0.166667x_1^3)\mu_1(x) \end{cases}$$

$$p_2(x, \mu) = \begin{cases} -3x_1 + 0.5x_2 \\ -2x_2 + 3x_2(x_1 - 0.074325x_1^3)\mu_2(x) \end{cases}$$

Utilizando la metodología descrita en la sección 3 y expresando la región de exploración como en (40), la esfera más grande se obtiene iterando con  $\rho_k$  como en el ejemplo anterior y resolviendo las condiciones de estabilidad local SOS del Algoritmo 1 para cada región  $\Omega_{d,k}$ , reemplazando (35) por

$$-\left[\frac{dV}{dx_1} \quad \frac{dV}{dx_2}\right] [p_1(x, \mu_1^M) + p_2(x, \mu_2^M)] - \varepsilon(x) + \psi_1(x_1^2 - \rho^2) + \psi_2(x_2^2 - \rho^2) = \Sigma_x \quad (47)$$

$$-\left[\frac{dV}{dx_1} \quad \frac{dV}{dx_2}\right] [p_1(x, \mu_1^m) + p_2(x, \mu_2^m)] - \varepsilon(x) + \psi_1(x_1^2 - \rho^2) + \psi_2(x_2^2 - \rho^2) = \Sigma_x \quad (48)$$

donde  $\mu_1^m, \mu_2^m, \mu_1^M$  y  $\mu_2^M$  se calculan de forma similar al caso anterior ya que  $\mu_1$ , en la zona de estudio  $\Omega_0$  crece a medida que nos alejamos del origen.

Si estudiamos primero estabilidad cuadrática, se obtienen resultados similares al Ejemplo 1 añadiendo que en este caso además varía la orientación de los elipsoides encontrados a medida que aumenta la región de estudio. Posteriormente se ha estudiado utilizar grados superiores de la función de Lyapunov para comprobar la mejora en estimación del dominio de atracción real. En la Figura 3 (derecha) se puede observar cómo tomando  $V(x)$  de cuarto y quinto grado se logran encontrar esferas, pertenecientes al dominio de atracción en  $\Omega_{d,k}$ , mayores que con estabilidad cuadrática. En efecto, a partir de  $\rho = 2.1$  las funciones de Lyapunov cuadráticas disminuyen rápidamente su condicionamiento y dan lugar a esferas menores.

lugar a esferas menores.

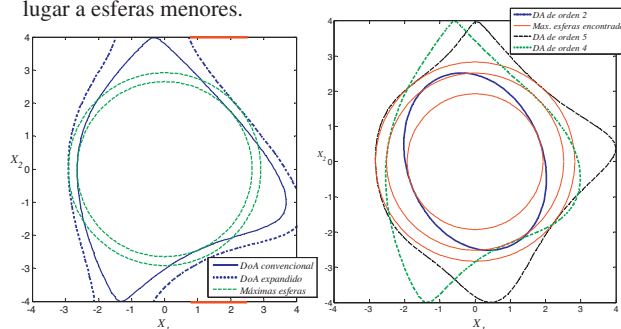


Figura 3. Izq: Dominio de atracción convencional (Algoritmo 1) y expandido (Lema 4) utilizando función de Lyapunov de cuarto grado. En rojo zonas prohibidas de  $\partial\Omega_0$  donde  $\dot{h}(x) < 0$ . Der: Mejores dominios de atracción encontrados para funciones de Lyapunov de diferentes grados.

Una vez obtenida la función de Lyapunov y teniendo en cuenta los resultados anteriores, se puede aplicar a posteriori el procedimiento explicado en la sección 5. Para ello, definiendo las restricciones de (24) como  $h_1 = \rho_k - x_2, h_2 = \rho_k - x_1, h_3 = -\rho_k - x_1$  y  $h_4 = -\rho_k - x_2$ , los bordes del cuadrado de estudio son:

$$B_1(x) = \{x_1 \mid -\rho_k \leq x_1 \leq \rho_k, x_2 = \rho_k\}$$



$$B_2(x) = \{x_2 \mid -\rho_k \leq x_2 \leq \rho_k, x_1 = \rho_k\}$$

$$B_3(x) = \{x_1 \mid -\rho_k \leq x_1 \leq \rho_k, x_2 = -\rho_k\}$$

$$B_4(x) = \{x_2 \mid -\rho_k \leq x_2 \leq \rho_k, x_1 = -\rho_k\}$$

Con las zonas del borde donde las trayectorias del sistema apuntan hacia dentro de la región  $\Omega_{dk}$  el Lema 4 puede calcular una equipotencial de  $V(x)$  más grande hasta que se interponga alguna zona del borde donde  $\dot{h}(x) < 0$ .

Como resultado de este procedimiento en la Figura 3 (izquierda) se muestran las regiones *prohibidas* del borde (en rojo), calculadas numéricamente, donde las trayectorias del sistema abandonan el cuadrado de modelado y la expansión de la región de estabilidad probada por Lema 4 hasta que la equipotencial de la función de Lyapunov toca una de estas regiones prohibidas. Como se puede observar, en este caso, mediante este procedimiento de expansión se consigue ampliar la máxima región esférica estable alrededor del origen sin ampliar el orden de la función de Lyapunov.

Para tener una idea de cuán conservadores estamos siendo con esta técnica, en la Figura 4 se han trazado las trayectorias del sistema desde varias condiciones iniciales de forma que se estime el dominio de atracción real del sistema no lineal. A estas trayectorias se le superpone el mejor dominio de atracción probado por la metodología propuesta (Algoritmo 1 + Lema 4), utilizando una función de Lyapunov de grado 7. Se puede observar que se ha estimado bastante bien la esfera de radio máximo dado que, en efecto, la curva de la función de Lyapunov (que rebasa el borde de la región  $\Omega_0$  debido a la expansión en Lema 4) se ajusta bastante al límite del dominio de atracción en el cuadrante superior derecho, y la esfera es tangente a ella.

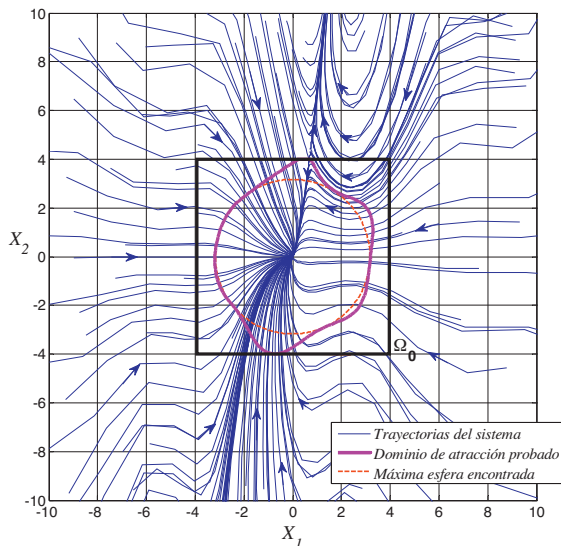


Figura 4. Plano de fase del sistema no lineal junto con la región de atracción estimada con función de Lyapunov de orden 7.

Finalmente en la Figura 5 se muestra la evolución del radio de la esfera más grande contenida utilizando funciones de Lyapunov de varios órdenes, comparando antes y después de aplicar la expansión presentada en la sección 5. El nivel de mejora es menor cuanto más alto es el grado de la función de Lyapunov buscada

dado que ésta tiene más flexibilidad para adaptarse al verdadero dominio de atracción local. De hecho, en la Figura 4 apenas se aprecia que la equipotencial máxima rebasa el borde del cuadrado  $\Omega_0$ , como se ve en las curvas verdes de la Figura 7.

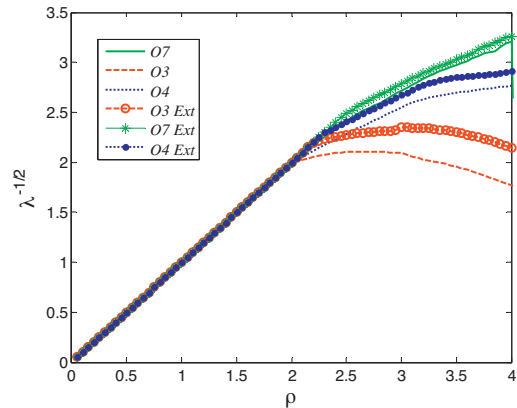


Figura 5. Evolución del radio de la esfera estable centrada en el origen, con varios grados de la función de Lyapunov en función del factor de escala de la región de estudio.

**Coste computacional.** Para dar una idea del coste computacional de las propuestas de este trabajo, la resolución de una iteración del Algoritmo 1 en un Intel Core 2 Duo P86000 y 4Gb RAM DDR3 en este ejemplo cuesta 94 seg. para una función de Lyapunov cuadrática y 100 seg. para grado 4 y 118 seg. para grado 6. Se ha utilizado MATLAB 2008a con YALMIP, SDPT3 4.0 y SOSTOOLS 2.03 para la implementación.

## 7. Conclusiones

En este artículo se han abordado algunos problemas de modelado y estabilidad local de sistemas no lineales, en un marco polinomial borroso. El objetivo era encontrar la mayor región de forma prefijada garantizando que ésta pertenece al dominio de atracción. Las herramientas computacionales utilizadas son la programación semidefinida para búsqueda de expresiones suma de cuadrados (SOS).

La idea básica es expresar las funciones de pertenencia mediante una expresión politópica para tener en cuenta la información local de ellas en una región de estudio reducida. El mayor factor de escala probable de la región de forma prefijada es una función no monotónica del tamaño de la región de interés que requiere de una exploración iterativa para ser encontrado.

Un segundo problema SOS permite expandir la región de atracción más grande probada por el método, y por tanto aumentar el factor de escala de la región de forma prefijada centrada en el origen.

Los cambios de variable necesarios para expresar condiciones de síntesis de controladores como LMI en sistemas polinomiales afines en la entrada, no posibilitan aplicar de forma directa los resultados de este trabajo a la síntesis. El problema de síntesis local sin BMI es un problema abierto, tanto en esta como en muchas otras referencias de la literatura.

## English Summary

**Domain of attraction estimation for nonlinear systems with fuzzy polynomial models.**

## Abstract

Many approaches in fuzzy systems literature express LMI conditions for a Takagi-Sugeno model and finish the problem once those conditions are feasible. However, studying the obtained region of attraction and its relationship with the original nonlinear problem is forgotten. This paper proposes to obtain a predefined-shape zone, as large as possible, belonging to the local domain of attraction of the origin of a nonlinear system. In order to do this, local fuzzy polynomial models are used whose analysis can be carried out by convex optimization (sum of squares). Moreover membership information is used in order to do iterations with the fuzzy modeling region, maximizing the size of the proven domain of attraction, which reduces conservatism over existing results.

## Keywords:

Lyapunov function, domain of attraction, fuzzy systems, Takagi-Sugeno, polynomial systems, local stability, sum of squares, conservatism.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo del Gobierno de España (DPI2008-06731-C02-01). El primer autor en particular agradece al Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) por la beca FPI BES-2009-013882.

Además se agradece el trabajo realizado por los revisores que con sus comentarios han contribuido a mejorar la calidad del artículo tanto en forma como en contenido.

## Referencias

- Amato, F., F. Calabrese, C. Cosentino, y A. Merola. 2011. «Stability analysis of nonlinear quadratic systems via polyhedral Lyapunov functions». *Automatica* 47: 614–617.
- Boyd, Stephen. 1994. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Chesi, Graziano. 2007. «On the Gap Between Positive Polynomials and SOS of Polynomials». *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (6) (Junio): 1066–1072. doi:10.1109/TAC.2007.899083.
- Guerra, T. 2004. «LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form». *Automatica* 40 (5) (Mayo): 823–829. doi:10.1016/j.automatica.2003.12.014.
- Ichihara, Hiroyuki. 2008. State feedback synthesis for polynomial systems with bounded disturbances. En *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2520–2525. Cancun, Mexico. doi:10.1109/CDC.2008.4738610. <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=4738610>.
- Jarvis-Wloszek, Z., R. Feeley, W. Tan, K. Sun, y A. Packard. 2005. «Control applications of sum of squares programming». *Positive Polynomials in Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin / Heidelberg.
- Khalil, Hassan. 2002. *Nonlinear systems*. 3o ed. Upper Saddle River N.J.: Prentice Hall.
- Lofberg, J. 2009. «Pre- and Post-Processing Sum-of-Squares Programs in Practice». *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (Mayo): 1007–1011. doi:10.1109/TAC.2009.2017144.
- Luenberger, David. 2008. *Linear and nonlinear programming*. New York: Springer.
- Neerhoff, F. L., y P. van der Kloet. 2001. The characteristic equation for time-varying models of nonlinear dynamic systems. En *Proc. ECCTD*, 28–31.
- Papachristodoulou, A., y S. Prajna. 2002. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition. En *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, 3:3482–3487.
- Pitarch, J. L., C. V. Ariño, F. Bedate, y A. Sala. 2010. Local fuzzy modeling: Maximising the basin of attraction. En *International Conference on Fuzzy Systems*, 1–7. Barcelona, Spain. doi:10.1109/FUZZY.2010.5584617. <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=5584617>.
- Pitarch, Jose Luis, Carlos Ariño, y Antonio Sala. 2011. Estimating domains of attraction of fuzzy polynomial systems. En , 680–685. Advances in Intelligent Systems Research. Aix-les-Bains: Atlantis Press. doi:10.2991/eusflat.2011.35. <http://www.atlantis-press.com/php/paper-details.php?id=2220>.
- Prajna, S., A. Papachristodoulou, P. Seiler, y P. A Parrilo. 2004a. SOSTOOLS: Control applications and new developments. En *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, 315–320.
- Prajna, S., A. Papachristodoulou, P. Seiler, y P. A Parrilo. 2004b. *Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB User’s guide*. Citeseer.
- Prajna, S., A. Papachristodoulou, y P.A. Parrilo. 2002. Introducing SOSTOOLS: a general purpose sum of squares programming solver. En *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, 741–746. Las Vegas, NV, USA. doi:10.1109/CDC.2002.1184594. <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=1184594>.
- Prajna, S., A. Papachristodoulou, y F. Wu. 2004. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach. En *Control Conference, 2004. 5th Asian*, 1:157–165.
- Reznick, B. 2000. «Some concrete aspects of hilbert’s 17th problem». *Real algebraic geometry and ordered structures: AMS Special Session on Real Algebraic Geometry and Ordered Structures held at Louisiana State University, Baton Rouge, LA, April 17–21, 1996: Special Semester on Real Algebraic Geometry and Ordered Structures held at Louisiana State University and Southern University, Baton Rouge, LA, January–May 1996* 253: 251.
- Sala, A. 2007. Reducing the gap between fuzzy and nonlinear control (invited talk). En , 1–6. Valenciennes, France. <http://personales.upv.es/asala/publics/papers/C81AFNC07PLEN.pdf>.
- . 2008. Introducing shape-dependent relaxed conditions in fuzzy control of nonlinear systems in Takagi-Sugeno form. En *Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Conference on*, 512–517.
- . 2009. «On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems». *Annual Reviews in Control* 33 (1): 48–58.
- Sala, A., y C. Ariño. 2009. «Polynomial Fuzzy Models for Nonlinear Control: A Taylor Series Approach». *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17 (6) (Diciembre): 1284–1295. doi:10.1109/TFUZZ.2009.2029235.
- Sala, A., y C. V. Ariño. 2006. Local stability of open-and closed-loop fuzzy systems. En *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2006 IEEE*, 2384–2389.
- Sala, A., y T.M. Guerra. 2008. Stability analysis of fuzzy systems: membership-shape and polynomial approaches. En *Proc. IFAC World Congress*, 5605–5610. Seoul, Korea.
- Takagi, T., y M. Sugeno. 1985. «Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control». *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics* 15(1) (Febrero): 116–132.
- Tanaka, K., H. Ohtake, y H.O. Wang. 2009. «Guaranteed Cost Control of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach». *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* 39 (2) (Abril): 561–567. doi:10.1109/TSMCB.2008.2006639.
- Tanaka, K., H. Yoshida, H. Ohtake, y H. O Wang. 2007a. A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems. En *American Control Conference, 2007. ACC’07*, 4071–4076.
- . 2007b. Stabilization of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. En *Intelligent Control, 2007. ISIC 2007. IEEE 22nd International Symposium on*, 160–165.
- Tanaka, Kazuo, y Hua O. Wang. 2001. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. New York: Wiley.
- Toh, K. C, M. J Todd, y R. H Tutuncu. 1999. «SDPT3—a Matlab software package for semidefinite programming». *Optimization Methods and Software* 11 (12): 545–581.
- Wang, H. O, K. Tanaka, y M. F Griffin. 1996. «An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues». *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 4 (1): 14–23.