Europ. J. Combinatorics (1998) **19**, 503–505
Article No. ej970203

Une Propriété Maximale de Matrices Binaires et Inversibles dont toutes les Lignes Contiennent le Même Nombre de Répétitions du Chiffre Un

OSVALDO MARRERO

A maximal property is obtained for binary nonsingular matrices in which each row has the same number of ones.

Dans les théories des designs et du codage on s'intéresse au nombre maximal de lignes de quelques matrices binaires. Comme un exemple classique on peut citer l'inégalité de Fisher [2, p. 129]. Deza [1] a étudié le nombre maximal de lignes de certaines matrices binaires, ainsi que celui de matrices semblables aux carrés latins. Dans cet article on présente un résultat sur le nombre maximal de lignes de matrices binaires et inversibles pour lesquelles on ne demande par hypothèse que dans toutes les lignes le nombre de répétitions du chiffre un soit le même. Bien que son démonstration est simple, ce résultat généralise deux propositions du même genre.

DÉFINITION. On appelle les sous ensembles $X_1, \ldots, X_v$ de $X := \{x_1, \ldots, x_v\}$ un *design* (v, k, λ) si

1. $|X_i| = k$ pour chaque $i := 1, \ldots, v$;
2. $|X_i \cap X_j| = \lambda$ pour chaque paire de différents $i, j := 1, \ldots, v$; et
3. $0 < \lambda < k < v$.

DÉFINITION. La *matrice d'incidence* $A := [a_{ij}]$ d'un design (v, k, λ) est définie par

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{si } x_j \in X_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, en particulier, telle matrice A et toutes ses lignes sont nommées *binaires*. De la même façon on définit la matrice d'incidence pour d'autres types de designs.

Dans la théorie des designs le résultat suivant est très connu.

PROPOSITION 1. *Soit A une matrice binaire à v colonnes et telle que*

$$AA' = \begin{bmatrix} k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \cdots & k \end{bmatrix},$$

où $0 < \lambda < k < v$. Alors le nombre maximal de lignes de A ne peut pas dépasser v. En plus, si A a v lignes, A est donc la matrice d'incidence d'un design (v, k, λ).

0195-6698/98/040503 + 03 $25.00/0

En effet, d'après la Proposition 1, si les sous ensembles $X_1, \ldots, X_v$ de X constituent un design (v, k, λ), alors il n'existe pas d'autre sous ensemble Y de X tel que $|Y| = k$ et $|X_i \cap Y| = \lambda$ pour chaque $i := 1, \ldots, v$.

La Proposition 1 résulte de l'inégalité de Fisher, ainsi que de la proposition suivante, donnée par l'auteur [3].

PROPOSITION 2. *On suppose que les sous ensembles* $X_1, \ldots, X_v$ *de* $X := \{x_1, \ldots, x_v\}$ *constituent un design* (v, k, λ). *Alors il n'existe pas d'autre sous ensemble* Y *de* X *tel que* $|Y| = k_1$ *et* $|X_i \cap Y| = \lambda_1$ *pour chaque* $i := 1, \ldots, v$, *où* $0 < k_1 < v$ *et* $0 < \lambda_1 < k$.

Dans la Proposition 2 on note, en particulier, que k_1 et λ_1 sont indépendants, respectivement, des paramètres k et λ du design (v, k, λ). Mais, en effet, on peut renforcer cette proposition, car il ne faut pas présumer l'existence d'un design (v, k, λ); pour arriver à la même conclusion, on peut supposer seulement l'existence d'une matrice d'incidence inversible dont toutes les lignes contiennent le même nombre de répétitions du chiffre un. Bien sûr, une telle matrice n'est pas donc nécessairement la matrice d'incidence d'un design (v, k, λ). Puisque la matrice d'incidence d'un design (v, k, λ) est inversible, la Proposition 2 résulte donc comme un cas particulier de la proposition suivante. Il est peut-être une surprise que, dans la matrice A dans la Proposition 3 ci-dessous, le nombre de positions où les chiffres uns coïncident entre deux lignes quelconques n'a rien à voir avec la conclusion de la proposition.

PROPOSITION 3 (EN TERMES DE MATRICES). *Soit* A *une matrice binaire de dimensions* $v \times v$, *inversible, et dont toutes les lignes contiennent le même nombre* $k > 0$ *de répétitions du chiffre un. Alors il n'existe pas d'autre ligne binaire qui ait le même nombre* λ_1 *de coïncidences du chiffre un avec chaque ligne de* A, *où* $0 < \lambda_1 < k$.

DÉMONSTRATION. Si telle ligne binaire $(a_1, \ldots, a_v)'$ existe, alors

$$A(a_1, \ldots, a_v)' = \lambda_1(1, \ldots, 1)',$$

et donc

$$A(a_1\lambda_1^{-1}k, \ldots, a_v\lambda_1^{-1}k)' = (k, \ldots, k)'.$$

De l'hypothèse,

$$A(1, \ldots, 1)' = (k, \ldots, k)'.$$

En plus, puisque A est inversible, la solution $(z_1, \ldots, z_v)' := (1, \ldots, 1)'$ de

$$A(z_1, \ldots, z_v)' = (k, \ldots, k)'$$

est unique. Alors il faut que

$$(a_1\lambda_1^{-1}k, \ldots, a_v\lambda_1^{-1}k)' = (1, \ldots, 1)',$$

et donc

$$a_1 = \cdots = a_v = \lambda_1 k^{-1}.$$

Puisqu'il faut que chaque a_i soit 0 ou 1, et comme $k > 0$, il arrive que $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_1 = k$, ce qui contredit l'hypothèse $0 < \lambda_1 < k$.

PROPOSITION 3 (EN TERMES DE SOUS ENSEMBLES). *Soit* $X_1, \ldots, X_v$ *sous ensembles de* $X := \{x_1, \ldots, x_v\}$ *tels que* $|X_i| = k > 0$ *pour chaque* $i := 1, \ldots, v$, *et tels que la matrice d'incidence correspondante est inversible. Alors il n'existe pas d'autre sous ensemble* Y *de* X *tel que* $|X_i \cap Y| = \lambda_1$ *pour chaque* $i := 1, \ldots, v$, *où* $0 < \lambda_1 < k$.

En termes de sous ensembles, on note à la fin de la démonstration de la Proposition 3 que $\lambda_1 = 0$ correspond à $\emptyset$ et $\lambda_1 = k$ correspond à X. Dans la théorie des designs ces deux cas sont inintéressants, et donc on les élimine par l'hypothèse $0 < \lambda_1 < k$.

RÉFÉRENCES

1. M. Deza, Matrices dont deux lignes quelconque coïncident dans un nombre donne de positions communes, *J. Combinatorial Theory Ser. A* **20** (1976), 306–318.
2. M. Hall, Jr, *Combinatorial Theory*, 2nd edn, Wiley, New York, 1986.
3. O. Marrero, A property of (v, k, λ)-designs, *Israel J. Math.* **12** (1972), 277–278.

Received 25 July 1997 and accepted 22 December 1997

O. MARRERO
Department of Mathematical Sciences,
Villanova University,
Villanova, PA,
U.S.A.
E-mail: marrero@ucis.vill.edu