

## Sur une généralisation de la Théorie de Markoff

SERGE PERRINE

33 rue Charles et Louis Jacquard, 57070 Metz, France

Communicated by M. Waldschmidt

Received January 16, 1990; revised April 10, 1990

On présente une généralisation de la théorie de Markoff et son interprétation sur des suites finies. Ceci permet de montrer comment se généralise l'équation de Markoff  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$  liée à l'étude des constantes d'approximation supérieures à  $\frac{1}{3}$ . Il en résulte la possibilité de présenter une structure arborescente pour les constantes voisines de  $\frac{1}{4}$ . © 1991 Academic Press, Inc.

We present some generalization of Markoff's theory and an interpretation with finite sequences. This gives the possibility to present how to extend the Markoff equation  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$  encountered in the study of approximation constants greater than  $\frac{1}{3}$ . It gives the possibility to present an arborescent structure for constants near  $\frac{1}{4}$ . © 1991 Academic Press, Inc.

### A. INTRODUCTION

Dans deux articles [1] qu'il a publiés en 1879 et 1880, A. A. Markoff a établi un lien remarquable entre les solutions de l'équation diophantienne:  $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$  ( $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3$ ) et les constantes d'approximation supérieures à  $\frac{1}{3}$  de nombres irrationnels.

Ces travaux originaux ont été remis en forme par J. W. S. Cassels [2] à partir d'un résultat de R. Remak [3].

Cependant, à ce jour, et malgré différentes tentatives faites au début du siècle (voir [4–6]), on ne dispose pas de généralisation de ces résultats pour des constantes d'approximation inférieures à  $\frac{1}{3}$ .

Le présent article présente une telle généralisation.

### B. NOTATIONS ET RAPPELS

#### B.1. Constantes des nombres réels irrationnels

Tout nombre réel irrationnel  $\gamma$  possède un unique développement en fraction continue:

$$\begin{aligned} \gamma &= [a_0, a_1, a_2, \dots] = [a_i]_{i \in \mathbb{N}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}} \end{aligned}$$

où  $a_0 \in \mathbb{Z}$  et  $\forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{N}^*$ .

Ceci définit:

- La réduite d'ordre  $n$  de  $\gamma$ :  $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$ .
- Les nombres:  $\delta_n(\gamma) = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, a_{n-1}, \dots]$

$$\|q_n \gamma\| = q_n \left| \gamma - \frac{p_n}{q_n} \right|.$$

- La constante d'approximation de  $\gamma$  (ou constante de Markoff de  $\gamma$ ):

$$C(\gamma) = \liminf_{n \rightarrow \infty} q_n \|q_n \gamma\| = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\gamma)}.$$

Les constantes d'approximation sont, par définition, des nombres réels positifs ou nuls. Par le Théorème de Borel-Hurwitz (voir [5]), ce sont aussi des nombres bornés:

$$C(\gamma) \leq \frac{1}{\sqrt{4 + \lim_{i \in \mathbb{N}} a_i^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} = C\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

L'ensemble  $\mathbb{P} = \{C(\gamma) \mid \gamma \text{ irrationnel}\}$  est le spectre de Perron (ou de Lagrange).

La Théorie de Markoff classique ([1] ou [2]) établit que ce spectre ne contient qu'un nombre infini dénombrable de valeurs strictement supérieures à  $\frac{1}{3}$ .

Ce sont les constantes de nombres algébriques de degré 2 s'écrivant avec  $m$  dans la suite des nombres de Markoff (cf. Appendice):

$$\theta = \frac{2K - 3m + \sqrt{9m^2 - 4}}{2m} \quad (K \mid m^2 + 1 \text{ et } 0 < K \leq m).$$

Pour ces nombres, on a:  $C(\theta) = m/\sqrt{9m^2 - 4} > \frac{1}{3}$ .

## B.2. Liens avec les formes quadratiques binaires

Soit  $\gamma \in \mathbb{R}$  un nombre irrationnel, algébrique de degré 2 et racine d'un polynôme:

$$P_\gamma(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X].$$

Le développement en fraction continue de  $\gamma$  est périodique à partir d'un certain rang. En visualisant la période, il peut être écrit sous la forme suivante:

$$\gamma = [a_0, a_1, \dots, a_j, \underbrace{a_{j+1}, \dots, a_k}]$$

Inversement, tout développement en fraction continue périodique de ce type correspond à un nombre algébrique de degré 2, avec:

$$C(\gamma) = \frac{M(f)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

où  $M(f) = \text{Inf}\{|ax^2 + bxy + cy^2|; (x, y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}\}$  est le minimum arithmétique de la forme quadratique binaire associée:

$$f(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 = Y^2 P_\gamma \left( \frac{X}{Y} \right).$$

Cette forme est indéfinie:  $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ .

Plus généralement, pour toute forme  $f \in \mathbb{R}[X, Y]$  quadratique binaire indéfinie, donnée par la même expression que ci-dessus, mais à coefficients réels non nécessairement rationnels, on peut encore définir comme ci-dessus le minimum arithmétique  $M(f)$ . Ceci permet d'introduire la constante de Markoff de la forme  $f$ :

$$C(f) = \frac{M(f)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

L'ensemble  $\mathbb{M} = \{C(f) \mid f \text{ forme quadratique binaire réelle indéfinie}\}$  constitue le spectre de Markoff. Il est borné comme  $\mathbb{P}$ , et contient  $\mathbb{P}$  strictement (voir Cusick et Flahive [6]).

La Théorie de Markoff classique ([1] ou [2]) établit aussi que ce spectre ne contient qu'un nombre infini dénombrable de valeurs supérieures à  $\frac{1}{3}$ .

Ce sont les constantes de formes quadratiques binaires entières s'écrivant:

$$f_\theta(X, Y) = mF_\theta(X, Y) = mX^2 + [3m - 2K]XY + \left[ \frac{m^2 + 1}{K} - 3K \right] Y^2$$

(avec  $K \mid m^2 + 1$  et  $0 < K \leq M$ ).

Ces formes sont reliées aux nombres  $\theta$  considérés précédemment, le polynôme  $F_\theta(X, 1)$  étant le polynôme minimal de  $\theta$ , et la constante  $C(F_\theta)$  étant égale à  $C(\theta)$ .

Ainsi, pour les valeurs supérieures à  $\frac{1}{3}$ , le spectre de Markoff et le spectre de Perron coïncident et toutes les valeurs correspondantes sont décrites par la Théorie de Markoff classique.

Cependant, pour les valeurs inférieures à  $\frac{1}{3}$ , il n'y a plus coïncidence et la connaissance des spectres de Markoff et de Perron reste encore très lacunaire (voir [6] pour une synthèse récente).

### C. GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DE MARKOFF

#### C.1. Définition

A toute suite  $S = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  où  $\forall i = 0, \dots, n, a_i \in \mathbb{N}^*$  on associe la matrice:

$$M_S = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & K_1 \\ m - K_2 & K_1 - l \end{bmatrix}$$

et les nombres

$$\begin{cases} m(S) = m \\ \varepsilon(S) = \varepsilon = \det M_S = (-1)^{n+1} = K_1 K_2 - ml. \end{cases}$$

(On fait la convention que la suite vide  $S = \emptyset$  définit  $M_\emptyset = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et les nombres  $m(\emptyset) = 1, \varepsilon(\emptyset) = 1$ ).

On dit que  $S^* = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$  est la suite palindrome de  $S$ . La suite  $S$  permet de définir différents nombres:

$$r(S) = r = \frac{K_1 - K_2}{m} \quad \text{est l'écart d'antidromie de } S$$

$$t(S) = t = \sup_{i=0 \dots n} a_i \quad \text{est le maximum de } S.$$

A une telle suite  $S$ , et à tout nombre  $a \in \mathbb{N}^*$ , on associe le nombre de Markoff  $\theta_a(S)$ , nombre réel algébrique de degré 2 défini par:

$$\begin{aligned} \theta_a(S) &= [0, \underbrace{S^*, a}] \\ &= \frac{K_1 + K_2 - m(a+1) + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} \end{aligned}$$

où  $\Delta_a(S) = (a+r+1)^2 m^2 + 4\varepsilon$ .

(Pour  $K_1 = K_2 = K, a = 2$  et  $\varepsilon = -1$ , on retrouve l'expression considérée ci-dessus pour les nombres  $\theta$  de la Théorie de Markoff classique).

On considère aussi la forme de Markoff définie par  $S$  et  $a$ :

$$\begin{aligned} F_\theta(X, Y) &= X^2 + \left[ \frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m} \right] XY + \left[ \frac{l - (a+1)K_1}{m} \right] Y^2 \\ &= (X - \theta_a(S)Y)(X - \overline{\theta_a(S)}Y) \end{aligned}$$

où  $\overline{\theta_a(S)} = -[\underline{a, S}] = [-(a+1); 1, a_0, -1, \underline{a_1, a_2, \dots, a_n, a_0}]$  est le conjugué du nombre  $\theta_a(S)$ .

On note:  $f_\theta(X, Y) = mF_\theta(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ .

Les constantes de Markoff associées vérifient alors:

$$C(\theta_a(S)) = C(F_\theta) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}}$$

où  $m_a(S)$  est un nombre entier positif inférieur ou égal à  $m$  ( $m_a(S)$  est le minimum arithmétique de la forme  $f_\theta$ ).

L'application du lemme de Dickson (voir [8, Vol. 2, pp. 408-409]) donne alors les résultats suivants:

- (1) pour  $a > t(S)$ , on a  $m_a(S) = m(S)$
- (2) pour  $a < t(S) - 1$ , on a  $m_a(S) < m(S)$ .

Hors ces cas, pour  $a = t(S)$ , il se peut que l'on ait  $m_a(S) = m(S)$ . C'est par exemple le cas pour les suites  $S$  données par la Théorie de Markoff classique où  $a = 2$  et  $m_2(S) = m(S)$ . Mais dans les cas les plus généraux, on a en réalité:  $m_a(S) < m(S)$ .

Ceci conduit à définir les nombres de Markoff super réduits, qui sont les nombres  $\theta_a(S)$  tels que:  $m_a(S) = m(S)$ . Ils vérifient:

$$a + 1 \geq t(S).$$

On peut enfin définir les formes de Markoff super réduites  $F_\theta$  qui sont celles dont le minimum arithmétique  $M(F_\theta)$  vaut 1.

## C.2. Propriétés générales des formes de Markoff

A partir de toute forme de Markoff  $F_\theta(X, Y)$  définie par une suite  $S$  et un nombre  $a \in \mathbb{N}^*$ , on obtient d'abord, de façon directe:

- ( $F_1$ ):  $F_\theta(K_1, m) = -\varepsilon$
- ( $F_2$ ):  $F_\theta(K_2 - (a+1)m, m) = -\varepsilon$ .

Si  $A$  est un nombre représenté par  $F_\theta$ , avec:

$$(F_3): F_\theta(k_1, m_1) = A$$

et si  $l_1$  est tel que  $A = k_1^2 - m_1 l_1$ , on a:

$$(F_a): F_\theta(k_1 X - l_1 Y; m_1 X - k_1 Y) = A F_\theta(X, Y)$$

$$(F_b): \overline{\theta_a(S)} = (k_1 \theta_a(S) - l_1) / (m_1 \theta_a(S) - k_1).$$

Si l'on pose alors, avec  $\varepsilon_1 = \pm 1$ :

$$(a_1): \varepsilon_1 m_2 = K_1 m_1 - m k_1$$

$$(a_2): \varepsilon_1 k_2 = l m_1 - K_2 k_1$$

$$(\varepsilon): \varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \cdot \varepsilon.$$

Une vérification facile donne la relation de Markoff généralisée:

$$(M_1): (-\varepsilon_1 A) m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a + r + 1) m m_1 m_2.$$

On a aussi:

$$(a_3): \varepsilon_2 m_1 = m k_2 - K_2 m_2$$

$$(a_4): \varepsilon_2 k_1 = K_1 k_2 - l m_2$$

$$(a_5): -\varepsilon_1 A m = (a + 1) m_1 m_2 + k_1 m_2 - k_2 m_1$$

$$(F_c): F_\theta(k_1 X + [(a + 1) K_1 - l] Y; m_1 X + [(a + 1) m - K_2] Y) \\ = -\varepsilon F_\theta(X, Y)$$

$$(F_4): F_\theta(k_2 - (a + 1) m_2, m_2) = -\varepsilon A.$$

En particulier, la matrice:

$$g = \begin{bmatrix} K_1 & (a + 1) K_1 - l \\ m & (a + 1) m - K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

détermine le groupe des rotations hyperboliques associées à  $F_\theta$ .

Enfin, en posant:  $Z = mX - K_1 Y$ .

$$\text{Et } (\phi): \phi_\theta(Z, Y) = m^2 F_\theta(X, Y) = Z^2 + [(a + 1) m + K_1 - K_2] Z Y - \varepsilon Y^2.$$

On a diverses relations:

$$(\phi_1): \phi_\theta(Z, Y) = -\varepsilon \phi_\theta(Y, -\varepsilon Z)$$

$$(\phi_2): \quad = \phi_\theta(Z + [(a + 1) m + K_1 - K_2] Y, -Y)$$

$$(\phi_3): \quad = \phi_\theta(-Z, Y - [(a + 1) m + K_1 - K_2] \varepsilon Z)$$

$$(\phi_4): \quad = -\varepsilon \phi_\theta(\varepsilon Y, Z + [m(a + 1) + K_1 - K_2] Y).$$

On généralise ainsi l'essentiel des propriétés utilisées dans la présentation de Cassels [2].

C.3. *Interprétation de ces calculs pour les suites et applications*

La suite  $S$  permet de considérer sa suite palindrome  $X = S^*$ . Supposons que cette suite soit décomposée sous la forme:

$$(D): \quad X = (X_1, b, X_2)$$

où  $X_1, X_2$  sont des suites et  $b \in \mathbb{N}^*$ . Posons:

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - l_{X_1} \end{bmatrix} \quad \det M_{X_1} = \varepsilon_1$$

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - l_{X_2} \end{bmatrix} \quad \det M_{X_2} = \varepsilon_2$$

et en cohérence avec l'expression de  $M_S$  donnée avant:

$$M_X = \begin{bmatrix} m & m - K_2 \\ K_1 & K - l \end{bmatrix} \quad \det M_X = \varepsilon = -\varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

En exprimant  $M_X$  en fonction de  $M_{X_1}$  et  $M_{X_2}$ , on en déduit des relations comparables aux relations  $(a_1)$ ,  $(a_2)$ ,  $(a_3)$  et  $(a_4)$  vues ci-dessus.

On trouve aussi:

$$(C_1): \quad m = (b + 1)m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2.$$

De sorte que si  $A$  est la valeur définie par la relation

$$(F_3): \quad F_\theta(k_1, m_1) = A$$

on a aussi la relation de Markoff généralisée  $(M_1)$  vue avant.

Pour  $a = 2$ ,  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ,  $A = -1$ , cette relation se réduit à la relation diophantienne classique:

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Dans ce cas qui est celui de la Théorie de Markoff classique,  $F_\theta$  est une forme super réduite et la valeur  $b = 2$  correspond à une représentation par  $F_\theta$  de la plus grande valeur négative non nulle  $A = -1$  représentée par  $F_\theta$ .

Dans le cas le plus général, si l'on suppose encore que la forme  $F_\theta$  est super réduite, c'est-à-dire telle que:

$$M(F_\theta) = 1.$$

La plus grande valeur négative non nulle  $A_\theta$  représentée par  $F_\theta$  peut être écrite sous la forme:

$$A_\theta = -\frac{m + u_\theta}{m} \quad (u_\theta \geq 0).$$

Diverses possibilités se présentent alors:

C.3a. *Cas où  $\varepsilon = 1$*

On a, avec la relation ( $F_c$ ):  $A_\theta = -1$ . Il se peut que cette valeur ne corresponde pas à une décomposition ( $D$ ) de  $S^*$ , mais plutôt à une décomposition ( $D$ ) de  $S^*aS^*$ . Quoiqu'il en soit, la relation diophantienne ( $M_1$ ) obtenue pour  $S$  ou  $SaS$  conduit à considérer l'équation diophantienne:

$$(M_1^+): \quad m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (a + r + 1)mm_1m_2.$$

Pour  $r = 0$ , on trouve dans [7], la résolution complète de cette équation ( $M_1^+$ ) ainsi que des indications concernant la structure arborescente qui en résulte et des observations sur les constantes de Markoff associées. Contrairement à ce qui se passe pour la Théorie de Markoff classique, il y a ici découplage entre les solutions de cette équation et les constantes de Markoff qui en découlent (voir Appendice).

C.3b. *Cas où  $\varepsilon = -1$*

On a alors nécessairement  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , et la relation ( $M_1$ ) donne pour  $S$ :

$$\varepsilon_1 u_\theta m^2 + \varepsilon_1 m^2 + \varepsilon_1 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a + r + 1)mm_1m_2 \geq 0.$$

On a donc:  $\varepsilon_1 = 1$ .

Tout se réduit alors à considérer l'équation diophantienne:

$$(M_1^-): \quad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a + r + 1)mm_1m_2 - u_\theta m.$$

Dans ce cas, la valeur  $A_\theta$  correspond toujours à une décomposition de  $S^*$  sous la forme requise.

On constate cependant que le cas où  $u_\theta = 0$  reste assez exceptionnel, et, qu'en général, il y a plusieurs possibilités pour la valeur  $u_\theta$ .

Ces observations expliquent que l'application du Théorème d'isolation de Remak [3] ne permette pas de généraliser la Théorie de Markoff classique.

Dans les deux cas considérés ci-dessus, l'équation diophantienne à considérer ( $M_1^+$ ) ou ( $M_1^-$ ) se révèle très différente de celles qui avaient été envisagées au début du siècle, notamment par Frobenius [4]. Ceci explique l'échec de différentes tentatives faites à cette époque pour généraliser la théorie de Markoff classique.



C.4. La  $(a, r, \varepsilon)$  Théorie de Markoff

On suppose ici donnés les nombres suivants:

$$\begin{cases} a \in \mathbb{N}^* \\ r \in \mathbb{Q} \cap ]+1, -1[, \quad r = \frac{R_1}{R_2} \text{ où } R_2 > 0 \text{ et } \text{pgcd}(R_1, R_2) = 1 \\ \varepsilon \in \{+1, -1\}. \end{cases}$$

On s'intéresse aux nombres  $\gamma$  algébriques de degré 2 tels que l'on ait:

$$C(\gamma) = \frac{m}{\sqrt{(a+r+1)^2 m^2 + 4\varepsilon}}.$$

Une façon de construire de tels nombres de forme  $\gamma = \theta_a(S)$  consiste à rechercher les suites  $S = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  vérifiant les conditions suivantes:

- $(R_0)$ :  $\varepsilon = (-1)^{n+1}$
- $(R_1)$ :  $m = p_n = R_2 x_n \in R_2 \mathbb{Z}$
- $(R_2)$ :  $0 < q_n < p_n$
- $(R_3)$ :  $x_n \mid q_n^2 - \varepsilon$
- $(R_4)$ :  $R_2 \mid ((q_n^2 - \varepsilon)/x_n) - R_1 q_n$
- $(R_5)$ :  $p_n/q_n = [S^*]$
- $(R_6)$ :  $r(S) = r$
- $(R_7)$ :  $m_a(S) = m(S)$ .

En décrivant alors toutes les valeurs  $x_n \in \mathbb{N}^*$ , et en recherchant pour chacune d'elles les valeurs  $q_n$  convenables en nombre nécessairement fini, on énumère toutes les possibilités existantes pour les suites  $S$ . Ces suites sont donc facilement déterminables par ordinateur.

On dit que la  $(a, r, \varepsilon)$  Théorie de Markoff est l'étude des suites  $S$  ainsi obtenues (ou des nombres  $\theta_a(S)$  en résultant).

En remarquant d'ailleurs que si  $S$  convient,  $S^*$  convient aussi, on peut ne considérer qu'une seule de ces deux suites en imposant la condition complémentaire:

$$(R_8)$$
:  $\text{Sup} \left( 0, \frac{m}{R_2} \cdot R_1 \right) < K_1 \leq \left( \frac{m}{R_2} \right) \left( \frac{R_1 + R_2}{2} \right).$

Pour certaines valeurs de  $a, r$ , et  $\varepsilon$ , on ne trouve qu'un nombre fini de possibilités pour  $S$ . Pour d'autres, au contraire, on trouve une infinité de possibilités pour  $S$ . C'est le cas notamment de la  $(2, 0, -1)$  Théorie qui n'est autre que la Théorie de Markoff classique.

TABLE I  
Valeurs correspondant à la (2, 0, 1) Théorie de Markoff

$p_n = m$	$m_2(S)$	$K_1 = K_2 = q_n$	$l$	$[S^*] = m/K_1$	$f_0(X, 1)$	$A_{\theta m}$	$k_1$	$m_1$	$k_2$	$m_2$
3	3	1	0	$\overline{[21]}$	$3X^2 + 7X - 3$	-3	0	1	0	1
8	8	3	1	$\overline{[2111]}$	$8X^2 + 18X - 8$	-8	0	1	1	3
12	12	5	2	$\overline{[2211]2}$	$12X^2 + 26X - 13$	-12	5	12	-1	0
21	21	8	3	$\overline{[211111]}$	$21X^2 + 47X - 21$	-21	0	1	3	8
55	55	21	8	$\overline{[21111111]}$	$55X^2 + 123X - 55$	-55	0	1	8	21
70	70	29	12	$\overline{[222211]2}$	$70X^2 + 152X - 75$	-70	29	70	-1	0
144	144	55	21	$\overline{[2111111111]}$	$144X^2 + 322X - 144$	-144	0	1	21	55
377	377	144	55	$\overline{[211111111111]}$	$377X^2 + 843X - 377$	-377	0	1	55	144
408	408	169	70	$\overline{[22222211]2}$	$408X^2 + 886X - 437$	-408	169	408	-1	0
987	987	377	144	$\overline{[21111111111111]}$	$987X^2 + 2207X - 987$	-987	0	1	144	377

Note.  $r = R_1 = 0; R_2 = 1; (-1)^n = -1 = -\varepsilon; a = 2; \varepsilon_1 = 1 = -\varepsilon_2$  (on suppose ici  $m < 1000$ ). La barre  $\overline{\quad}$  correspond au développement de  $k_1/m_1$ ; la barre  $\overline{\quad}$  correspond à  $k_2/m_2$ .

Dans tous les cas, on a par construction dans une  $(a, r, \varepsilon)$  Théorie:

$$C(\theta_a(S)) = \frac{m}{\sqrt{(a+r+1)^2 m^2 + 4\varepsilon}}$$

$$\varepsilon C(\theta_a(S)) < \frac{\varepsilon}{a+r+1}.$$

Et si la  $(a, r, \varepsilon)$  Théorie contient une infinité de suites  $S$ , on a pour toute forme  $F$  limite de formes de Markoff  $F_\theta$  (les coefficients de  $F$  étant les limites de ceux de  $F_\theta$  lorsque  $m$  augmente indéfiniment):

$$C(F) = \frac{1}{a+r+1}.$$

On trouve ainsi des points d'accumulation du spectre de Markoff, avec des situations comparables à ce qui se passe autour de la valeur  $\frac{1}{3}$  pour la Théorie de Markoff classique.

#### C.4a. Exemple de la $(2, 0, 1)$ Théorie de Markoff

On donne en Table I les diverses possibilités obtenues pour les suites  $S$  en énumérant les diverses valeurs  $x_n \in \mathbb{N}^*$  inférieures à 1000.

On voit apparaître ainsi les possibilités suivantes pour les suites  $S$ :

$$\begin{cases} S = ((1)_{2t+1}, 2) & (t \in \mathbb{N}) \\ S = (1, 1, (2)_{2t}) & (t \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Une vérification facile permet de s'assurer que ces suites font bien partie de la  $(2, 0, 1)$  Théorie de Markoff. Elles sont en nombre infini.

Une analyse directe de l'équation diophantienne:

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

permet de s'assurer que ce sont les seules possibilités rencontrées dans cette Théorie.

Ainsi, la  $(2, 0, 1)$  Théorie ne détermine pas d'arbre comparable à celui qui apparaissait dans la Théorie de Markoff classique. Elle détermine cependant une infinité de constantes d'approximation convergeant par valeurs inférieures vers le point d'accumulation  $\frac{1}{3}$  du spectre de Markoff.

#### C.4b. Exemple de la $(3, 0, -1)$ Théorie de Markoff

On donne en Table II les diverses possibilités obtenues pour les suites  $S$  en énumérant les valeurs  $x_n \in \mathbb{N}^*$  inférieures à 3100. Dans ce cas, on observe que la valeur  $u_\theta$  correspondant à chaque suite  $S$  peut varier. En considérant les suites  $S$  correspondant à une même valeur donnée  $u_\theta$ , une construction d'arbre est cependant possible. On généralise ainsi la situation rencontrée dans la Théorie de Markoff classique.

TABLE II  
Valeurs correspondant à la (3, 0, -1) Théorie de Markoff

$m$	$K_1 = K_2$	$l$	$S^*([S^*]) = m/K_1$	Polynome $f_0(X, Y)$	$A_0 m$	$k_1$	$m_1$	$k_2$	$m_2$	$u_0$
10	3	1	$\sqrt[3]{(3, 2, 1)}$	$10X^2 + 34XY - 11Y^2$	-11	0	1	1	3	1
25	7	2	$\sqrt[7]{(3, 1, 1, 2, 1)}$	$25X^2 + 86XY - 26Y^2$	-26	0	1	2	7	1
53	23	10	$\sqrt[23]{2, 3, 3, 1, 1}$	$53X^2 + 166XY - 82Y^2$	-55	3	7	1	2	2
58	17	5	$\sqrt[17]{(3, 2, 2, 2, 1)}$	$58X^2 + 198XY - 63Y^2$	-63	0	1	5	17	5
65	18	5	$\sqrt[18]{(3, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$65X^2 + 224XY - 67Y^2$	-67	0	1	5	18	2
109	33	10	$\sqrt[109]{(3, 3, 3, 2, 1)}$	$109X^2 + 370XY - 122Y^2$	-119	3	10	1	3	10
130	47	17	$\sqrt[47]{(2, 1, 3, 3, 1, 1, 1)}$	$130X^2 + 426XY - 171Y^2$	-131	1	3	4	11	1
137	37	10	$\sqrt[37]{(3, 1, 2, 2, 1, 2, 1)}$	$137X^2 + 474XY - 138Y^2$	-138	0	1	10	37	1
149	44	13	$\sqrt[44]{(3, 2, 1, 1, 2, 2, 1)}$	$149X^2 + 508XY - 163Y^2$	-163	0	1	13	44	14
170	47	13	$\sqrt[170]{(3, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$170X^2 + 586XY - 175Y^2$	-175	0	1	13	47	5
269	82	25	$\sqrt[269]{(3, 3, 1, 1, 3, 2, 1)}$	$269X^2 + 912XY - 303Y^2$	-274	7	23	1	3	5
305	133	58	$\sqrt[305]{(2, 3, 2, 2, 3, 1, 1)}$	$305X^2 + 954XY - 474Y^2$	-307	17	39	1	2	2
314	129	53	$\sqrt[314]{(2, 2, 3, 3, 2, 1, 1)}$	$314X^2 + 998XY - 463Y^2$	-339	2	5	7	17	25
338	99	29	$\sqrt[338]{(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)}$	$338X^2 + 1154XY - 367Y^2$	-367	0	1	29	99	29
346	93	25	$\sqrt[346]{(3, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1)}$	$346X^2 + 1198XY - 347Y^2$	-347	0	1	25	93	1
349	136	53	$\sqrt[349]{(2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1)}$	$349X^2 + 1124XY - 491Y^2$	-359	7	18	2	5	10

373	104	29	$\overline{(3, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)}$	$373X^2 + 1284XY - 387Y^2$	-387	0	1	29	104	14
389	115	34	$\overline{(3, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1)}$	$389X^2 + 1326XY - 426Y^2$	-426	0	1	34	115	37
445	123	34	$\overline{(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$445X^2 + 1534XY - 458Y^2$	-458	0	1	34	123	13
578	251	109	$\overline{(2, 3, 3, 3, 1, 1)}$	$578X^2 + 1810XY - 895Y^2$	-598	33	76	1	2	20
625	182	53	$\overline{(3, 2, 3, 3, 2, 2, 1)}$	$625X^2 + 2136XY - 675Y^2$	-671	2	7	7	24	46
629	191	58	$\overline{(3, 3, 2, 2, 3, 2, 1)}$	$629X^2 + 2134XY - 706Y^2$	-667	17	56	1	3	38
674	189	53	$\overline{(3, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1)}$	$674X^2 + 2318XY - 703Y^2$	-699	7	25	2	7	25
698	213	65	$\overline{(3, 3, 1, 1, 1, 3, 2, 1)}$	$698X^2 + 2366XY - 787Y^2$	-703	18	59	1	3	5
725	307	130	$\overline{(2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 1)}$	$725X^2 + 2286XY - 1098Y^2$	-727	11	26	3	7	2
773	317	130	$\overline{(2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 1)}$	$773X^2 + 2458XY - 1138Y^2$	-778	2	5	16	39	5
785	342	149	$\overline{(2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 1)}$	$785X^2 + 2456XY - 1219Y^2$	-795	44	101	1	2	10
793	294	109	$\overline{(2, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 1)}$	$793X^2 + 2584XY - 1067Y^2$	-863	10	27	3	8	70
797	215	58	$\overline{(3, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1)}$	$797X^2 + 2758XY - 802Y^2$	-802	0	1	58	215	5
829	246	73	$\overline{(3, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1)}$	$829X^2 + 2824XY - 911Y^2$	-911	0	1	73	246	82
865	253	74	$\overline{(3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1)}$	$865X^2 + 2954XY - 938Y^2$	-938	0	1	74	253	73
901	242	65	$\overline{(3, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)}$	$901X^2 + 3120XY - 903Y^2$	-903	0	1	65	242	2
905	343	130	$\overline{(2, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 1)}$	$905X^2 + 2934XY - 1242Y^2$	-927	3	8	11	29	22
949	265	74	$\overline{(3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1)}$	$949X^2 + 3266XY - 986Y^2$	-986	0	1	74	265	37

Table continued

TABLE II—continued

$m$	$K_1 = K_2$	$l$	$S^*([S^*] = m/K_1)$	Polynome $f_\theta(X, Y)$	$A_\theta m$	$k_1$	$m_1$	$k_2$	$m_2$	$u_\theta$
962	265	73	$\overline{(3, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)}$	$962X^2 + 3318XY - 987Y^2$	-987	0	1	73	265	25
1018	301	89	$\overline{(3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)}$	$1018X^2 + 3470XY - 1115Y^2$	-1115	0	1	89	301	97
1165	322	89	$\overline{(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$1165X^2 + 4016XY - 1199Y^2$	-1199	0	1	89	322	34
1189	360	109	$\overline{(3, 3, 3, 3, 2, 1)}$	$1189X^2 + 4036XY - 1331Y^2$	-1298	33	109	1	3	109
1417	512	185	$\overline{(2, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1)}$	$1417X^2 + 4644XY - 1863Y^2$	-1418	1	3	43	119	1
1429	620	269	$\overline{(2, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 1, 1)}$	$1429X^2 + 4476XY - 2211Y^2$	-1482	3	7	23	53	53
1469	437	130	$\overline{(3, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1)}$	$1469X^2 + 5002XY - 1618Y^2$	-1479	11	37	3	10	10
1490	403	109	$\overline{(3, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 2, 1)}$	$1490X^2 + 5154XY - 1503Y^2$	-1503	0	1	109	403	13
1537	447	130	$\overline{(3, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 2, 1)}$	$1537X^2 + 5254XY - 1658Y^2$	-1538	2	7	16	55	1
1618	491	149	$\overline{(3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1)}$	$1618X^2 + 5490XY - 1815Y^2$	-1727	44	145	1	3	109
1721	473	130	$\overline{(3, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$1721X^2 + 5938XY - 1762Y^2$	-1759	3	11	11	40	38
1777	775	338	$\overline{(2, 3, 2, 2, 2, 3, 1, 1)}$	$1777X^2 + 5558XY - 2762Y^2$	-1787	99	227	1	2	10
1802	659	241	$\overline{(2, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 1, 1)}$	$1802X^2 + 5890XY - 2395Y^2$	-1803	4	11	15	41	1
1810	743	305	$\overline{(2, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 1)}$	$1810X^2 + 5754XY - 2667Y^2$	-1895	2	5	39	195	85
1825	557	170	$\overline{(3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 1)}$	$1825X^2 + 6186XY - 2058Y^2$	-1835	47	154	1	3	10
1825	757	314	$\overline{(2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 1)}$	$1825X^2 + 5786XY - 2714Y^2$	-1967	17	41	5	12	142
1906	511	137	$\overline{(3, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1)}$	$1906X^2 + 6602XY - 1907Y^2$	-1907	0	1	137	511	1

1954	725	269	$\overline{(2, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 1)}$	$1954X^2 + 6366XY - 2631Y^2$	-1982	23	62	3	8	28
1970	577	169	$\overline{(3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)}$	$1970X^2 + 6726XY - 2139Y^2$	-2139	0	1	169	577	169
1993	834	349	$\overline{(2, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 2, 1, 1)}$	$1993X^2 + 6304XY - 2987Y^2$	-2063	5	12	18	43	70
2005	782	305	$\overline{(2, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1)}$	$2005X^2 + 6456XY - 2823Y^2$	-1995	39	100	2	5	10
2045	552	149	$\overline{(3, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1)}$	$2045X^2 + 7076XY - 2059Y^2$	-2059	0	1	149	552	14
2050	893	389	$\overline{(2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1)}$	$2050X^2 + 6414XY - 3183Y^2$	-2078	115	264	1	2	28
2098	623	185	$\overline{(3, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1)}$	$2098X^2 + 7146XY - 2307Y^2$	-2307	0	1	185	623	209
2105	813	314	$\overline{(2, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)}$	$2105X^2 + 6794XY - 2938Y^2$	-2287	5	13	17	44	182
2173	606	169	$\overline{(3, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1)}$	$2173X^2 + 7480XY - 2255Y^2$	-2255	0	1	169	606	82
2225	657	194	$\overline{(3, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1)}$	$2225X^2 + 7586XY - 2434Y^2$	-2434	0	1	194	657	209
2257	660	193	$\overline{(3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1)}$	$2257X^2 + 7708XY - 2447Y^2$	-2447	0	1	193	600	190
2357	633	170	$\overline{(3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)}$	$2357X^2 + 8162XY - 2362Y^2$	-2362	0	1	170	633	5
2378	911	349	$\overline{(2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)}$	$2378X^2 + 7690XY - 3295Y^2$	-2443	18	47	5	13	65
2441	672	185	$\overline{(3, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$2441X^2 + 8420XY - 2503Y^2$	-2503	0	1	185	672	62
2474	691	193	$\overline{(3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1)}$	$2474X^2 + 8514XY - 2571Y^2$	-2571	0	1	193	691	97
2533	701	194	$\overline{(3, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$2533X^2 + 8730XY - 2610Y^2$	-2610	0	1	194	701	77
2938	889	269	$\overline{(3, 3, 1, 1, 3, 2, 1)}$	$2938X^2 + 9974XY - 3287Y^2$	-3038	3	10	23	76	100
3050	843	233	$\overline{(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)}$	$3050X^2 + 10514XY - 3139Y^2$	-3139	0	1	233	843	89

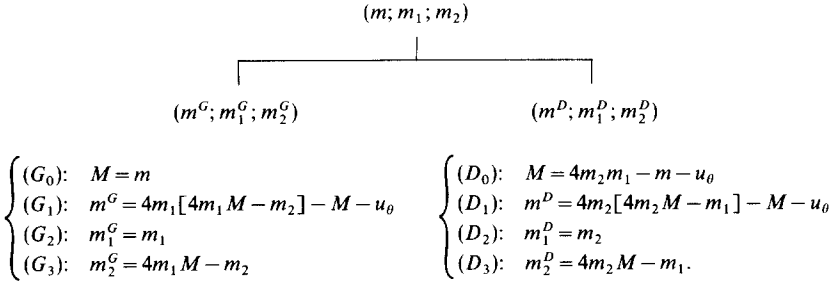
Note.  $r = R_1 = 0; R_2 = 1; (-1)^r = 1 = -e; a = 3; e_1 = 1 = e_2$  (on suppose ici  $m < 3100$ ). La barre  $\overline{\quad}$  correspond au développement de  $k_1/m_1$ ; la barre  $\overline{\quad}$  correspond à  $k_2/m_2$ .

On obtient ainsi:

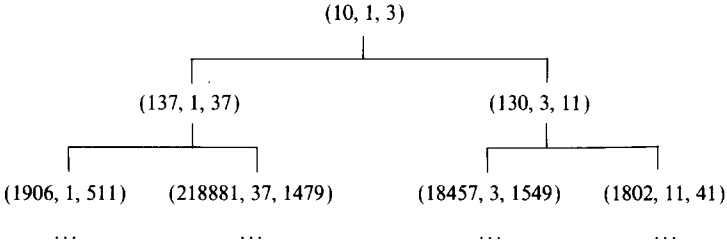
THEOREME. Pour  $u_\theta \in \mathbb{N}$ , considérons l'équation diophantienne:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz - u_\theta x.$$

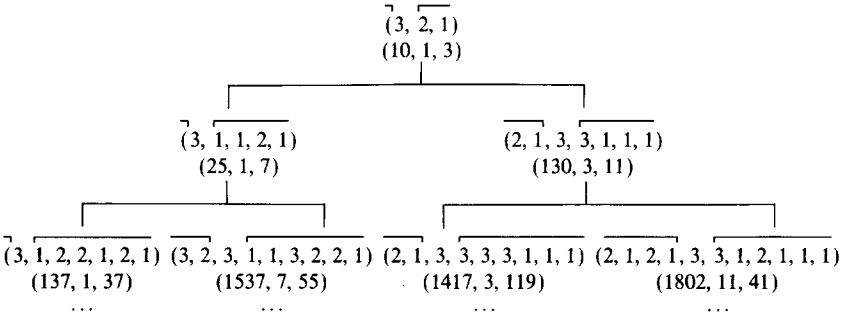
Supposons qu'elle admette au moins une solution. Alors elle admet un arbre de solutions descriptible à partir de toute solution  $(x, y, z) = (m, m_1, m_2)$  par la figure suivante:



La vérification de ce résultat est évidente. Et par exemple, avec  $u_\theta = 1$ , ces formules donnent l'arbre suivant:



Si l'on compare à ce que donne la table II, ceci permet d'organiser les suites  $y$  apparaissant et correspondant à  $u_\theta = 1$  selon l'arbre suivant:





Ceci met en évidence une structure d'arbre comparable à ce qui se présente dans la Théorie de Markoff classique, avec ici un point d'accumulation égal à  $\frac{1}{4}$ .

Les autres valeurs  $u_\theta$  qui apparaissent dans le cas général de la  $(3, 0, -1)$  Théorie (en particulier les nombres de Fibonacci  $F_{2t}$ ,  $(t \in \mathbb{N})$ ) permettent de construire une infinité d'autres arbres comparables montrant la complexité de cette Théorie par rapport à celle de Markoff.

Par ailleurs, il est facile de généraliser le Théorème précédent pour des valeurs  $a \in \mathbb{N}^*$  différentes de 3.

#### D. REMARQUES FINALES

Les  $(a, r, \varepsilon)$  Théories de Markoff décrites ci-dessus donnent des généralisations partielles de la Théorie de Markoff classique. Elles permettent de construire différents exemples montrant la complexité des spectres de Markoff et de Perron pour les valeurs inférieures à  $\frac{1}{3}$ .

Pour la partie inconnue de ces spectres, les valeurs à considérer pour  $a$  sont les valeurs 2, 3 et 4.

Pour  $r$ , les valeurs envisageables doivent permettre l'écriture suivante:

$$r + 1 = \frac{1}{[S]} + \frac{1}{[S^*]}$$

où  $S = (a_0, \dots, a_n)$  suite finie d'entiers de  $\mathbb{N}^*$  bornés par  $a$ .

Les valeurs  $\varepsilon$  valent quant à celles  $+1$  ou  $-1$ . Tout choix convenable pour  $a$ ,  $r$  et  $\varepsilon$  permettant de trouver une infinité de suites  $S$  dans la  $(a, r, \varepsilon)$  Théorie de Markoff détermine un point d'accumulation rationnel correspondant qui vaut:

$$\frac{1}{a + r + 1}$$

On sait d'ailleurs que les spectres contiennent d'autres points d'accumulation irrationnels (cf. [6]).

Selon les cas, on trouve ou non des phénomènes arborescents comparables à ceux que met en exergue la Théorie de Markoff classique.

Ceux-ci sont plus ou moins reliés à la résolution d'équations diophantiennes de forme:

$$(M_1^+): \quad m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (a + r + 1)mm_1m_2$$

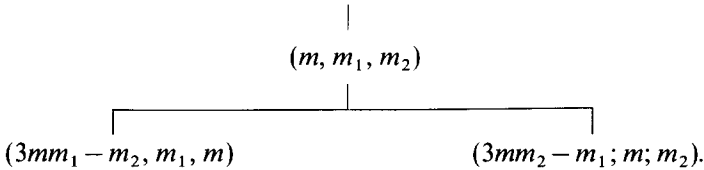
ou

$$(M_1^-): \quad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a + r + 1)mm_1m_2 - u_\theta m.$$

Pour les cas où  $r=0$ , la situation est en partie éclaircie. Mais la question reste posée d'étendre les observations faites à d'autres valeurs possibles de  $r$ .

APPENDICE: ARBRES DÉDUITS DE LA THÉORIE DE MARKOFF CLASSIQUE

La Théorie de Markoff classique est présentable à partir d'un arbre de triplets  $(m, m_1, m_2)$  construit à partir du triplet initial  $(5, 1, 2)$  selon la figure suivante (cf. [2]):



(Les nombres  $m$  apparaissant en tête de ces triplets sont les nombres de Markoff.)

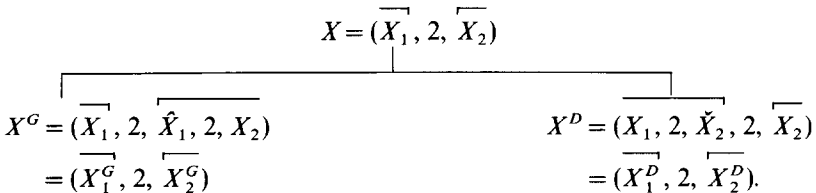
Elle peut aussi être construite de façon directe sur les périodes des nombres algébriques correspondants:

$$\theta = \frac{2K - 3m + \sqrt{9m^2 - 4}}{2m} = [0, \overline{S^*, a}] = \theta_a(S)$$

où  $K|m^2 + 1$  et  $0 < K \leq m$ . Pour cela, on pose pour toute suite d'entiers  $S = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ :

$$\begin{cases}
 X = S^* = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) & \text{suite palindrome de } S \\
 \hat{X} = (1, a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) & \text{si } a_n \neq 1 \\
 \hat{X} = (a_{n-1} + 1, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0) & \text{si } a_n = 1 \\
 ((\widehat{X^*})^*) = \check{X}.
 \end{cases}$$

Alors, à partir de  $X_1 = (\emptyset)$  et  $X_2 = (1, 1)$ , l'algorithme précédent peut être écrit sur les périodes comme suit, avec la convention des tables précédentes pour la signification de  $\overline{\quad}$  et  $\check{\quad}$ , et en application des calculs vus au paragraphe C.3:



Cette méthode permet d'envisager la construction d'autres arbres en remplaçant la valeur 2 par une valeur  $b \in \mathbb{N}^*$  quelconque, au moyen de l'algorithme:

$$\begin{array}{c}
 X = (\overline{X_1}, b, \overline{X_2}) \\
 \left. \begin{array}{l} \hline \\ \hline \end{array} \right\} \\
 \begin{array}{cc}
 X^G = (\overline{X_1}, b, \hat{X}_1, b, X_2) & X^D = (X_1, b, \check{X}_2, b, \overline{X_2}).
 \end{array}
 \end{array}$$

On généralise la Théorie de Markoff, mais à partir de  $X_1 = \emptyset$  et  $X_2 = (1, b - 1, 1)$  on fabrique d'autres arbres en nombre infini associés à l'équation diophantienne:

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (b + 1)mm_1m_2.$$

La (2, 0, 1) Théorie de Markoff est ainsi obtenue avec  $b = 2$  et  $a = 2$ . Plus généralement, sur la base des équations données par la construction précédente, on peut résoudre complètement l'équation diophantienne (voir [7]):

$$\begin{cases}
 m^2 + \varepsilon_1 m_1^2 + \varepsilon_2 m_2^2 = (b + 1)mm_1m_2 & (\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1) \\
 \text{avec } (m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3, b \in \mathbb{N} \\
 \text{et } \text{pgcd}(m, m_1) = \text{pgcd}(m_1, m_2) = \text{pgcd}(m, m_2) = 1.
 \end{cases}$$

L'arbre correspondant peut être écrit sous la forme:

$$\begin{array}{c}
 (m, m_1, m_2) \\
 (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\
 \left. \begin{array}{l} \hline \\ \hline \end{array} \right\} \\
 \begin{array}{cc}
 ((b + 1)mm_1 - \varepsilon_1 m_2, m_1, m) & ((b + 1)mm - \varepsilon_2 m_1, m, m_2) \\
 (\varepsilon_1^G = \varepsilon_1; \varepsilon_2^G = \varepsilon_1 \varepsilon_2) & (\varepsilon_1^D = \varepsilon_1 \varepsilon_2; \varepsilon_2^D = \varepsilon_2).
 \end{array}
 \end{array}$$

Cependant, sur les formes quadratiques  $F_\theta$  correspondantes, il est possible de vérifier que le minimum arithmétique n'est pas nécessairement égal à 1 dans le cas où  $b = a$ , bien que dans certains cas, ce minimum puisse être égal à 1.

C'est le phénomène de découplage entre minima arithmétiques et arbre de Markoff cité au paragraphe C.3a. Il s'observe bien, par exemple, sur la (2, 0, 1) Théorie de Markoff (voir paragraphe C.4a ou Table I). Dans ce cas, la condition  $M(F_\theta) = 1$  n'est obtenue que sur deux chaînes de suites de l'arbre fabriqué par le procédé décrit ci-dessus.

Pour  $b < a$ , on a au contraire toujours  $M(F_\theta) = 1$  pour toutes les suites de l'arbre d'après le lemme de Dickson [8, Vol. 2, pp. 408–409].

## BIBLIOGRAPHIE

1. A. A. MARKOFF, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, *Math. Ann.* **6** (1879), 381–406; *Math. Ann.* **17** (1880), 379–399.
2. J. W. S. CASSELS, An introduction to diophantine approximation, in “Cambridge Tracts in Mathematics,” Vol. 45, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1957.
3. R. REMAK, Über indefinite binäre quadratische minimal Formen, *Math. Ann.* **92** (1924), 155–182.
4. G. FROBENIUS, Über die Markoffschen Zahlen, *Preussische Akad. Wiss. S.B.* (1913), 458–487.
5. O. PERRON, Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale, I, in “Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.,” Abh. 4, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1921; II, in “Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.,” Abh. 8, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1921.
6. T. W. CUSICK ET M. E. FLAHERTY, The Markoff and Lagrange spectra, in “Mathematical Surveys and Monographs,” Vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
7. S. PERRINE, “Approximation diophantienne (Théorie de Markoff),” Thèse présentée à l'Université de Metz, Décembre 1988.
8. L. E. DICKSON, “History of a Theory of Numbers,” Chelsea, New York, 1952.