JOURNAL OF ALGEBRA 170, 547–566 (1994)

L'algèbre des descentes d'une bigèbre graduée

F. PATRAS

CNRS URA 168, Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice Cedex 2, France

Communicated by Michel Broué

Received February 1, 1993

L'étude de l'homologie et la cohomologie des H-espaces amène à définir et étudier certaines familles d'opérations sur les bigèbres.

Un exemple suffit à comprendre les motivations topologiques conduisant à introduire ces opérations: considérons une variété pointée (X, x) de classe C^∞, 1-connexe. L'espace de lacets $\Omega_x X$ est un H-espace. Son algèbre de cohomologie rationnelle $H^*(\Omega_x X, \mathbb{Q})$ est une bigèbre graduée gauche anti-commutative et connexe—autrement dit, une algèbre de Hopf commutative et connexe. L'opération qui associe à un lacet $\gamma \in \Omega_x X$ son itérée γ^k induit un morphisme Ψ^k en cohomologie, qui est un endomorphisme d'algèbre de $H^*(\Omega_x X, \mathbb{Q})$.

On peut alors montrer—voir [P2]—que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^n(\Omega_x X, \mathbb{Q})$ se décompose en sous-espaces propres $H^{n,i}(\Omega_x X, \mathbb{Q})$ associés aux valeurs propres k^i, $i \in [1, n]$, du morphisme Ψ^k. Cette construction a une interprétation géométrique élémentaire [P1]. Elle peut être généralisée à toute bigèbre graduée connexe, et commutative (ou cocommutative, ou gauche anti-commutative, ou gauche anti-cocommutative).

En combinatoire, de nombreux articles se sont attachés récemment à étudier les algèbres de descentes du groupe symétrique [R], [GR], du groupe hyperoctaédral [BfBn1], [BfBn2], [Bn], et plus généralement des groupes de Coxeter finis [BfBnHT]. Les algèbres de descentes, dites aussi algèbres de Solomon, ont été introduites par Solomon dans [S]. Leurs propriétés sont intimement liées à la géométrie des groupes de Coxeter et aux propriétés de leurs représentations.

Revenons sur les bigèbres et considérons le cas particulier de la bigèbre tensorielle $T(X)$ (dite aussi bigèbre des polynômes non-commutatifs) associée à un alphabet X à n lettres. La bigèbre $T(X)$ est munie d'une graduation si l'on considère les éléments de X comme de degré 1. L'opérateur de projection qui associe à tout élément de degré n de $T(X)$ sa composante dans le sous-espace propre de $T(X)$ associé à la valeur propre k^i du morphisme Ψ^k décrit précédemment, n'est autre que la projection π_i étudiée dans [R] (voir aussi [P2]).

0021-8693/94 $6.00

Ces opérateurs π_i peuvent être considérés comme des éléments de l'algèbre de groupe du groupe symétrique S_n et calculés en utilisant la combinatoire des descentes [R], [GR]. En d'autres termes, l'étude des algèbres de descentes des groupes symétriques est intimement liée à celle des propriétés de la bigèbre tensorielle.

Signalons que les opérateurs π_i, considérés comme éléments de l'algèbre de groupe du groupe symétrique, sont apparus indépendament de [R] dans l'étude de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique des algèbres commutatives [L].

Nous montrons dans cet article comment *associer une algèbre de descentes à toute bigèbre graduée.* Cette algèbre contient, entre autres, les opérations étudiées dans [P2]. Nous en étudions les propriétés en nous guidant sur la remarquable description combinatoire de l'algèbre des descentes du groupe symétrique donnée dans [GR].

Nous construisons au passage dans l'algèbre des endomorphismes de certaines bigèbres de nouvelles familles d'idempotents paramétrées par les partages et les suites de composition des entiers naturels et montrons comment interpréter ces idempotents aux termes des résultats de [MM] sur la structure des bigèbres cocommutatives.

Table des matières

I. Rappels et notations.
II. Opérateurs de descente.
III. La structure des bigèbres graduées cocommutatives connexes.
IV. L'action des opérateurs de descente.
V. Quelques opérateurs remarquables.

I. Rappels et notations

Nous rappelons brièvement certaines définitions et propriétés classiques.

Pour plus de détails, nous renvoyons à [Bo] pour ce qui est des bigèbres, et à [GR] pour ce qui est de la combinatoire du groupe symétrique.

Dans la suite, K désigne, sauf précision, un corps commutatif quelconque.

Définition I,1. On appelle bigèbre graduée sur K la donnée d'un K-espace vectoriel gradué $A = \oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et de morphismes linéaires gradués: Π: $A \otimes A \to A$, η: $K \to A$, Δ: $A \to A \otimes A$ et ε: $A \to K$, de telle sorte que:

(i) (A, Π, η) soit une algèbre graduée avec unité.

(ii) (A, Δ, ε) soit une cogèbre graduée avec coünité.

(iii) Le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A & \xrightarrow{\Pi} & A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta \otimes \Delta} & & & & \uparrow{\scriptstyle \Pi \otimes \Pi} \\ A \otimes A \otimes A \otimes A & & \xrightarrow{I \otimes T \otimes I} & & A \otimes A \otimes A \otimes A; \end{array}$$

où on note I l'endomorphisme identité de A et T l'endomorphisme de $A \otimes A$ défini par: $T(x \otimes y) = y \otimes x$.

Par commodité, on supposera en outre dans tout cet article que A est *de type fini*, c'est à dire que chacune des composantes A_n de A est un espace vectoriel de dimension finie sur K.

La condition (iii) équivaut en fait à exiger que Δ soit un morphisme d'algèbres de A dans $A \otimes A$ ou, de manière équivalente, que Π soit un morphisme de cogèbres de $A \otimes A$ dans A.

Une bigèbre graduée A est dite ici *commutative* (*resp. cocommutative*), si elle est commutative en tant qu'algèbre (resp. cogèbre). Elle est dite *connexe* si $A_0 \simeq K$.

On peut définir la notion de *bigèbres graduées gauches* (*resp. gauches anti-commutatives*, *gauches anti-cocommutatives*) [Bo]. La définition d'une bigèbre graduée gauche est la même que celle donnée en I,1 d'une bigèbre graduée, à ceci près qu'il faut définir dans ce cas l'endomorphisme T de $A \otimes A$ par:

$$\forall x \in A_n, \forall y \in A_m, \qquad T(x \otimes y) = (-1)^{m \cdot n} y \otimes x.$$

Les bigèbres graduées gauches apparaissent par exemple en topologie algébrique, dans le calcul de l'homologie ou la cohomologie des H-espaces —on préfère parler dans ce cas *d'algèbres de Hopf*. On peut leur appliquer les arguments qui vont être développés à partir du paragraphe II. Afin de ne pas surcharger inutilement la rédaction de cet exposé, nous nous restreindrons à la considération de bigèbres graduées en laissant au lecteur le soin d'adapter nos résultats et démonstrations au cas des bigèbres graduées gauches.

Soit A une bigèbre graduée. On notera $\mathscr{L}(A)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de A compatibles à la graduation. Le produit de convolution de deux éléments f et g de $\mathscr{L}(A)$ est l'élément $f * g$ de

$\mathscr{L}(A)$ défini par:

$$f * g := \Pi \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Pour ce produit, $\mathscr{L}(A)$ est une algèbre associative unitaire, d'unité $\eta \circ \varepsilon$ [Bo]. Nous appellerons cette algèbre *l'algèbre de convolution de A*. L'algèbre des endomorphismes linéaires de A désigne l'algèbre $\mathscr{L}(A)$ *pour le produit défini par la composition des morphismes.*

Nous utiliserons par ailleurs les notations combinatoires suivantes. On dit qu'une suite d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ est un *partage* de n si λ est une suite croissante d'entiers naturels non nuls de somme n, on notera: $\lambda \vdash n$. Une *suite de composition* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ de n est une suite d'entiers naturels non nuls de somme n, on notera: $\mu \vDash n$. Une *suite de composition généralisée de n* est une suite d'entiers naturels $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ de somme n, on notera alors: $\nu \vDash_0 n$.

On remarquera que, si μ est une suite de composition de n, on peut lui associer un unique partage $\lambda(\mu)$ tel que les termes des suites μ et $\lambda(\mu)$ soient en bijection. Soient $\alpha \vDash n$ et $\beta \vdash n$, si $\beta = \lambda(\alpha)$ on écrira $\alpha \in \beta$.

On notera $k(\beta)$ le nombre de termes d'une suite d'entiers β et $s(\beta)$ la somme: $s(\beta) := \sum_{i=1}^{k(\beta)} \beta_i$. Une expression comme: $\mu \vDash s(\mu)$ signifie simplement que μ est une suite de composition dont on ne précise pas la somme.

Si α et β sont deux suites (finies) d'entiers, on note $\alpha + \beta$ la suite obtenue en mettant boût à boût les suites α et β. En d'autres termes:

$$\alpha + \beta = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k(\alpha)}, \beta_1, \ldots, \beta_{k(\beta)}\right).$$

II. Opérateurs de descente

Dans ce paragraphe, A est une bigèbre graduée *connexe* sur K. On note I_n l'endomorphisme de A qui associe à un élément de A sa composante de degré n. En d'autres termes, I_n est la projection sur A_n selon la direction $\oplus_{i \neq n} A_i$. On remarquera que I_0 n'est autre que $\eta \circ \varepsilon$, l'élément unité de l'algèbre de convolution $\mathscr{L}(A)$.

Définition II,1. Soit $p \vDash n$. On appellera opérateur de descente associé à la suite de composition p et on notera B_p l'endomorphisme de A défini par:

$$B_p := I_{p_1} * \cdots * I_{p_{k(p)}}.$$

On notera Σ^A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(A)$ engendré par les opérateurs de descente. Comme, si p et q sont deux suites de composition, $B_p * B_q = B_{p+q}$, Σ^A est une sous-algèbre de l'algèbre de convolution de A. Nous verrons (Théorème II,7) que Σ^A est stable pour le produit défini par la composition des morphismes si A est commutative ou cocommutative.

Ces opérateurs vérifient de nombreuses identités remarquables. On remarquera que $I_m \circ B_p = 0$ si $p \vDash n$ et $m \neq n$.

LEMME II,2. *On a l'identité*:

$$I_n \circ (I - I_0)^{*k} = \sum_{p \vDash n,\, k(p)=k} B_p.$$

On a en effet:

$$\begin{aligned} I_n \circ (I - I_0)^{*k} &= I_n \circ \Big(\sum_{i>0} I_i \Big)^{*k} \\ &= I_n \circ \Big(\sum_{\mu \vDash s(\mu),\, k(\mu)=k} B_\mu \Big) \\ &= I_n \circ \Big(\sum_{\mu \vDash s(\mu),\, k(\mu)=k} I_{s(\mu)} \circ B_\mu \Big), \end{aligned}$$

et, comme $I_n \circ I_{s(\mu)} = 0$ si $n \neq s(\mu)$, on a finalement:

$$I_n \circ (I - I_0)^{*k} = \sum_{\mu \vDash n,\, k(\mu)=k} I_n \circ B_\mu = \sum_{\mu \vDash n,\, k(\mu)=k} B_\mu. \quad \text{Q.E.D.}$$

COROLLAIRE II,3. *On a*:

$$I_n \circ (I - I_0)^{*n+1} = 0.$$

Par définition, on appelle *k-ième opération caractéristique* sur A, et on note Ψ^k l'endomorphisme $\Psi^k := I^{*k}$ de A.

On posera: $\Psi_n^k := I_n \circ I^{*k}$.

COROLLAIRE II,4. *On a*:

$$\Psi_n^k = \sum_{p \vDash n} \binom{k}{k(p)} B_p.$$

On a en effet:

$$\begin{aligned} \Psi_n^k &= I_n \circ I^{*k} = I_n \circ [(I - I_0) + I_0]^{*k} \\ &= I_n \circ \Big[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (I - I_0)^{*i} \Big] \end{aligned}$$

(on rappelle que I_0 est élément unité de l'algèbre de convolution de A)

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\sum_{p \models n,\, k(p)=i} B_p \right]$$

$$= \sum_{p \models n} \binom{k}{k(p)} B_p. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Supposons provisoirement que K est de caractéristique nulle et rappelons que, si on note $s(j, i)$ le nombre de Stirling de première espèce de coefficients j et i, on a [C]:

$$\binom{k}{j} = \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{j} s(j, i) k^i.$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
\Psi_n^k &= \sum_{p \models n} \binom{k}{k(p)} B_p \\
&= \sum_{p \models n} \frac{1}{k(p)!} \left[\sum_{i=1}^{k(p)} s(k(p), i) k^i \right] B_p \\
&= \sum_{p \models n} \sum_{1 \leq i \leq k(p)} \frac{s(k(p), i)}{k(p)!} k^i \cdot B_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{p \models n,\, k(p) \geq i} \frac{s(k(p), i)}{k(p)!} B_p \right] k^i.
\end{aligned}$$

Définition II,5. Si K est un corps de caractéristique nulle, on définit l'endomorphisme e_n^i de A par:

$$e_n^i := \sum_{p \models n,\, i \leq k(p)} \frac{s(k(p), i)}{k(p)!} B_p.$$

Corollaire II,6. *Par définition des e_n^i, on a*:

$$\Psi_n^k = \sum_{i=1}^{n} k^i e_n^i.$$

On peut donner une construction plus algébrique des morphismes e_n^i.

Notons e^i et appelons *projecteur de poids* i, l'endomorphisme de A défini par: $e^i := \sum_n e_n^i$.

Comme $s(k(p), 1) = (-1)^{k(p)-1}(k(p) - 1)!$, on a:

$$e^1 = \sum_p (-1)^{k(p)-1} \frac{B_p}{k(p)} = \sum_k (-1)^{k-1} \left[\sum_{k(p)=k} \frac{B_p}{k} \right].$$

D'après II,2, cette égalité se réécrit:

$$e^1 = \sum_k (-1)^{k-1} \frac{(I - I_0)^{*k}}{k} = \log I.$$

Formellement, on a donc:

$$\begin{aligned} \Psi^k &= I^{*k} = \exp \circ \log I^{*k} \\ &= \exp(k \cdot \log I) = \exp(k \cdot e^1) = \sum_i k^i \frac{(e^1)^{*i}}{i!}. \end{aligned}$$

Pour finir, on a l'identité (utiliser II,6.):

$$e^i = \frac{(e^1)^{*i}}{i!} = \frac{(\log I)^{*i}}{i!}.$$

Il est possible de donner un sens rigoureux à ces identités entre séries formelles (ces séries formelles ne comportent en fait qu'un nombre fini de termes non nuls, si l'on se restreint à étudier leur action sur les composantes de A de degré inférieur à un entier m arbitraire). On consultera [P2] pour plus de détails et des informations et références complémentaires sur ce point précis.

A compter de maintenant et jusqu'à nouvel ordre, nous supposons à nouveau que K est un corps commutatif de caractéristique quelconque.

Nous allons maintenant calculer la composée de deux opérateurs de descente.

Reprenons les notations de [GR]. Si $\nu = (\nu_i^j)_{i \in [1,n], j \in [1,m]}$ est une famille de $n \times m$ entiers, on notera $c(\nu)$ la suite de n entiers définie par: $c_i(\nu) = \sum_{j=1}^m \nu_i^j$ et $r(\nu)$ la suite de m entiers définie par: $r_j(\nu) = \sum_{i=1}^n \nu_i^j$. On note enfin $\omega(\nu)$ la suite d'entiers obtenue en enlevant les termes nuls de la suite: $(\nu_1^1, \nu_2^1, \ldots, \nu_n^1, \ldots, \nu_1^m, \ldots, \nu_n^m)$.

THÉORÈME II,7. *Si la bigèbre graduée connexe A est commutative (resp. cocommutative), pour tous $p \models n$ et $q \models n$, on a*:

$$B_p \circ B_q = \sum_{c(\nu)=p,\, r(\nu)=q} B_{\omega(\nu)}$$

(*resp.* $B_q \circ B_p = \sum_{c(\nu)=p,\, r(\nu)=q} B_{\omega(\nu)}$).

On remarquera que, si R est un anneau commutatif, la formule apparaissant au théorème II,7. permet de définir pour tout entier naturel n une *algèbre abstraite des descentes de degré n*, $\mathrm{Desc}_n(R)$, comme la R-algèbre engendrée par les générateurs B_p, $p \models n$, soumis aux relations:

$$B_p \circ B_q = \sum_{c(\nu)=p,\, r(\nu)=q} B_{\omega(\nu)}.$$

L'algèbre $\mathrm{Desc}_n(\mathbb{Q})$ n'est autre que l'algèbre de Solomon du groupe symétrique d'ordre n [GR]. Le théorème II,7. permet donc de considérer tout résultat obtenu sur les algèbres de Solomon comme un théorème de structure pour les bigèbres graduées connexes et commutatives (resp. et cocommutatives). Réciproquement, il peut être préférable d'effectuer certains calculs sur l'algèbre de Solomon du groupe symétrique S_n comme des calculs sur les bigèbres—ce qui permet de substituer des calculs algébriques à la manipulation combinatoire de permutations—on comparera nos méthodes à celles de [GR].

Nous allons démontrer le théorème dans le cas commutatif. Le cas cocommutatif en résulte par dualité.

Commençons par noter $\Pi^{[k]}$ (resp. $\Delta^{[k]}$) l'itérée k-ième du produit (resp. du coproduit), i.e., le morphisme de $A^{\otimes k}$ dans A (resp. A dans $A^{\otimes k}$) défini par récurrence par:

$$\Pi^{[2]} := \Pi, \qquad \Pi^{[k]} := \Pi \circ (I \otimes \Pi^{[k-1]})$$

(resp. $\Delta^{[2]} := \Delta$, $\Delta^{[k]} = (\Delta^{[k-1]} \circ I) \circ \Delta$).

Comme A est une algèbre graduée, $A^{\otimes k}$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre graduée [Bo]. Nous noterons $\Pi_{(k)}$ son produit et $\Pi_{(k)}^{[l]}$ l'itérée l-ième de ce produit.

Ces notations étant fixées, le théorème II,7. va résulter du lemme II,8.

LEMME II,8. *On a, pour toute bigèbre graduée A, pour tous l, j*:

$$\Delta^{[l]} \circ \Pi^{[j]} = \Pi_{(l)}^{[j]} \circ (\Delta^{[l]})^{\otimes j}.$$

De ce que le coproduit est un morphisme d'algèbres, on déduit que:

$$\Delta \circ \Pi^{[j]} = \Pi^{[j]}_{(2)} \circ \Delta^{\otimes j}.$$

Supposons alors le lemme établi pour tous les $l < i$. Comme:

$$\Delta^{[i]} \circ \Pi^{[j]} = (\Delta^{[i-1]} \otimes I) \circ \Delta \circ \Pi^{[j]},$$

on a aussi:

$$\Delta^{[i]} \circ \Pi^{[j]} = (\Delta^{[i-1]} \otimes I) \circ \Pi^{[j]}_{(2)} \otimes \Delta^{\otimes j}.$$

Notons alors $T^{i,j}$ l'endomorphisme de $A^{\otimes i \cdot j}$ défini par:

$$\begin{aligned} T^{i,j}\big(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1}^1 \otimes x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_1^j \otimes \cdots \otimes x_{i-1}^j \otimes x_i^j\big) \\ = x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1}^1 \otimes x_1^2 \otimes \cdots \otimes x_1^j \otimes \cdots \otimes x_{i-1}^j \otimes x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^j. \end{aligned}$$

On a alors en particulier: $\Pi^{[j]}_{(2)} = (\Pi^{[j]} \otimes \Pi^{[j]}) \circ T^{2,j}$, et donc:

$$\begin{aligned} \Delta^{[i]} \circ \Pi^{[j]} &= \big[(\Delta^{[i-1]} \circ \Pi^{[j]}) \otimes \Pi^{[j]}\big] \circ T^{2,j} \circ \Delta^{\otimes j} \\ &= \big(\Pi^{[j]}_{(i-1)} \otimes \Pi^{[j]}\big) \circ \big((\Delta^{[i-1]})^{\otimes j} \otimes I^{\otimes j}\big) \circ T^{2,j} \circ \Delta^{\otimes j}. \end{aligned}$$

Des définitions, il résulte que:

$$\Big[(\Delta^{[i-1]})^{\otimes j} \otimes I^{\otimes j}\Big] \circ T^{2,j} \circ \Delta^{\otimes j} = T^{i,j} \circ (\Delta^{[i]})^{\otimes j},$$

et que:

$$\big(\Pi^{[j]}_{(i-1)} \otimes \Pi^{[j]}\big) \circ T^{i,j} = \Pi^{[j]}_{(i)},$$

ce qui permet de conclure.

Signalons au passage deux corollaires du lemme II,8. (et du lemme "dual":

$$\Delta^{[l]} \circ \Pi^{[j]} = (\Pi^{[j]})^{\otimes l} \circ \Delta^{[l]}_{(j)},$$

où on note $\Delta^{[l]}_{(j)}$ l'itérée l-ième du coproduit de la cogèbre $A^{\otimes j}$), que nous laissons en exercice—voir [P2] pour plus de détails.

Corollaire II,9. *Si A est une bigèbre graduée commutative ou cocommutative connexe, on a*:

$$\Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{k \cdot l}.$$

COROLLAIRE II,10. *Sous les hypothèses de* II,9. *et si K est en outre de caractéristique nulle, on a*:

$$e^i \circ e^j = \delta^i_j \cdot e^i.$$

On rappelle que, si a et b sont deux éléments d'un ensemble, le symbole de Kronecker associé à a et b, δ^a_b est nul si $a \neq b$ et est égal à 1 sinon.

Le corollaire II,10. peut s'énoncer de la manière suivante: les projecteurs de poids i définissent une famille de projecteurs orthogonaux.

Compte tenu de II,6., *ils décomposent A en sous-espaces propres sous l'action des opérations caractéristiques Ψ^k.*

On posera $A^{(i)} := e^i \cdot A$; l'espace vectoriel $A^{(i)}$ s'identifie donc au sous-espace propre de A pour la valeur propre k^i du morphisme Ψ^k.

Revenons-en maintenant à la preuve du théorème II,7.

Soient p et q deux suites de composition de n. On a:

$$\begin{aligned} B_p \circ B_q &= \left(I_{p_1} * \cdots * I_{p_{k(p)}}\right) \circ \left(I_{q_1} * \cdots * I_{q_{k(q)}}\right) \\ &= \Pi^{[k(p)]} \circ \left(I_{p_1} \otimes \cdots \otimes I_{p_{k(p)}}\right) \otimes \Delta^{[k(p)]} \circ \Pi^{[k(q)]} \\ &\quad \circ \left(I_{q_1} \otimes \cdots \otimes I_{q_{k(q)}}\right) \circ \Delta^{[k(q)]} \\ &= \Pi^{[k(p)]} \circ \left(I_{p_1} \otimes \cdots \otimes I_{p_{k(p)}}\right) \circ \Pi^{[k(q)]}_{(k(p))} \circ \left(\Delta^{[k(p)]}\right)^{\otimes k(q)} \\ &\quad \circ \left(I_{q_1} \otimes \cdots \otimes I_{q_{k(q)}}\right) \circ \Delta^{[k(q)]}. \end{aligned}$$

Comme

$$\Delta^{[i]} \circ I_n = \sum_{\nu \vDash_0 n,\, k(\nu)=i} \left(I_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu_i}\right) \circ \Delta^{[i]},$$

on a:

$$\begin{aligned} &\Delta^{[k(p)]^{\otimes k(q)}} \circ \left(I_{q_1} \otimes \cdots \otimes I_{q_{k(q)}}\right) \\ &\quad = \left[\sum_{\nu^i \vDash_0 q_i,\, k(\nu^i)=k(p)} I_{\nu^1_1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^1_{k(p)}} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^{k(q)}_1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^{k(q)}_{k(p)}}\right] \\ &\qquad \circ \left(\Delta^{[k(p)]}\right)^{\otimes k(q)} \\ &\quad = \sum_{\nu^i \vDash_0 q_i,\, k(\nu^i)=k(p)} \left(I_{\nu^1_1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^1_{k(p)}} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^{k(q)}_1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^{k(q)}_{k(p)}}\right) \\ &\qquad \circ \left(\Delta^{[k(p)]}\right)^{\otimes k(q)} \end{aligned}$$

Comme le coproduit est coassociatif, on a tout d'abord:

$$\left(\Delta^{[k(p)]}\right)^{\otimes k(q)} \circ \Delta^{[k(q)]} = \Delta^{[k(p)\cdot k(q)]}.$$

Par ailleurs, le morphisme:

$$\left(I_{p_1} \otimes \cdots \otimes I_{p_{k(p)}}\right) \circ \Pi^{[k(q)]}_{(k(p))} \circ \left(I_{\nu_1^1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^1_{k(p)}} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^{k(q)}_{k(p)}}\right)$$

est nul sauf si $\nu_1^1 + \cdots + \nu_1^{k(q)} = p_1, \ldots, \nu^1_{k(p)} + \cdots + \nu^{k(q)}_{k(p)} = p_{k(p)}$; et est égal à $\Pi^{[k(q)]}_{(k(p))} \circ (I_{\nu_1^1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^{k(q)}_{k(p)}})$ dans ce cas.

Comme $\Pi^{[k(p)]} \circ \Pi^{[k(q)]}_{(k(p))} = \Pi^{[k(p)k(q)]}$ (le produit est par hypothèse commutatif!), on a finalement:

$$\begin{aligned} B_p \circ B_q &= \Pi^{[k(p)k(q)]} \circ \left(\sum_{c(\nu)=p,\, r(\nu)=q} I_{\nu_1^1} \otimes I_{\nu_2^1} \otimes \cdots \otimes I_{\nu^{k(q)}_{k(p)}} \right) \circ \Delta^{[k(p)k(q)]} \\ &= \sum_{c(\nu)=p,\, r(\nu)=q} I_{\nu_1^1} * I_{\nu_2^1} * \cdots * I_{\nu^{k(q)}_{k(p)}}. \end{aligned}$$

Le théorème résulte pour finir de ce que I_0 est l'élément unité de l'algèbre $\mathscr{L}(A)$ et que donc, pour tout ν, $c(\nu) = p$, $r(\nu) = q$, on a:

$$I_{\nu_1^1} * \cdots * I_{\nu^{k(q)}_{k(p)}} = I_{\omega(\nu)}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Sous les hypothèses de II,7., Σ^A est donc stable pour le produit défini par la composition des morphismes. On l'appellera *l'algèbre des descentes de A*.

III. La structure des bigèbres graduées cocommutatives connexes

Dans ce paragraphe, A désigne une bigèbre graduée cocommutative connexe sur un corps K de caractéristique nulle.

On rappelle qu'un élément x de A est dit *primitif* s'il satisfait à:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

L'ensemble Prim(A) des éléments primitifs de A est un sous-espace vectoriel gradué de A. Pour la structure d'algèbre de Lie sur A induite par la structure d'algèbre associative de A, Prim(A) est en fait une sous-algèbre de Lie de A. Plus précisément, Prim(A) n'est autre que $A^{(1)}$, le sous-espace propre de A pour la valeur propre k de l'opération caractéristique Ψ^k—la vérification de ces propriétés est élémentaire, nous la laissons en exercice. Voir [P2] pour plus de détails.

Un théorème classique [MM] montre que A est isomorphe en tant que bigèbre à $U(A^{(1)})$, l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $A^{(1)}$. On rappelle que $U(A^{(1)})$ a une structure de bigèbre cocommutative pour le coproduit induit par le morphisme d'algèbre de Lie:

$$A^{(1)} \mapsto A^{(1)} \times A^{(1)},$$
$$x \to (x, x).$$

Ce paragraphe donne une nouvelle démonstration de ce théorème. J'en dois l'idée à Pierre Cartier.

Nous traitons le cas d'une bigèbre cocommutative, mais la démonstration s'appliquerait une fois de plus telle quelle au cas d'une bigèbre graduée gauche anti-cocommutative (dans le langage de la topologie: au cas d'une algèbre de Hopf cocommutative).

En fait, plus encore que de la proposition III,1. elle-même, nous aurons besoin dans la suite de cet article des différents lemmes intervenant dans la démonstration de cette proposition.

Proposition III,1. *La bigèbre A est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $A^{(1)}$.*

Comme annoncé, le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de cette proposition.

Lemme III,2. *L'opération caractéristique Ψ^k est un endomorphisme de cogèbre cocommutative de A.*

Cela résulte immédiatement de ce que, comme A est cocommutative, le produit de convolution de deux endomorphismes de cogèbre de A est encore un endomorphisme de cogèbre de A (on rappelle que $\Psi^k := I^{*k}$).

L'espace vectoriel $A^{\otimes k}$ est un espace vectoriel gradué pour la graduation induite par la graduation de A. Définissons sur $A^{\otimes k}$ une autre graduation: si pour tout $i \in [1, k]$, $x_i \in A^{(\alpha_i)}$, l'élément $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ sera dit *de poids* $\sum_{i=1}^k \alpha_i$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ est une suite d'entiers, on posera:

$$A^{(\alpha)} := A^{(\alpha_1)} \otimes \cdots \otimes A^{(\alpha_k)}.$$

On rappelle que $A^{(i)}$ est le sous-espace propre de A pour la valeur propre k^i de l'opérateur Ψ^k.

On remarquera que, comme A se décompose en sous-espaces propres sous l'action de Ψ^l, $A^{\otimes k}$ se décompose également en sous-espaces propres sous l'action de $(\Psi^l)^{\otimes k}$. Compte tenu de III,2., l'image par $\Delta^{[k]}$ d'un élément de $A^{(i)}$ appartient au sous-espace propre de $A^{\otimes k}$ associé à la valeur propre l^i de l'opérateur $(\Psi^l)^{\otimes k}$. D'où le corollaire III,3.

COROLLAIRE III,3. *L'image par $\Delta^{(k)}$ d'un élément de $A^{(i)}$ est un élément de poids i de $A^{\otimes k}$.*

En d'autres termes, on a:

$$\Delta^{[k]}: A^{(i)} \to \bigoplus_{\alpha \vDash_0 i,\, k(\alpha)=k} A^{(\alpha)}.$$

COROLLAIRE III,4. *La restriction à $A^{(k)}$ du morphisme $(e^1)^{\otimes l} \circ \Delta^{[l]}$ est à valeurs dans $(A^{(1)})^{\otimes k}$ si $k = l$; elle est nulle sinon.*

La restriction de $\Delta^{[l]}$ à $A^{(k)}$ est en effet à valeurs dans $\oplus_{\alpha \vDash_0 k,\, k(\alpha)=l} A^{(\alpha)}$. Le morphisme $(e^1)^{\otimes l}$ est nul sur $A^{(\alpha)}$ sauf si $\alpha = (1, \ldots, 1)$, d'où le corollaire.

Nous noterons $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$ le sous-espace vectoriel des tenseurs symétriques de l'algèbre tensorielle $T(A^{(1)})$ [Bo]. On pose: $\mathrm{Sym}_k(A^{(1)}) := \mathrm{Sym}(A^{(1)}) \cap (A^{(1)})^{\otimes k}$. Comme le coproduit est cocommutatif, et compte tenu de III,4., la restriction à $A^{(k)}$ du morphisme $(e^1)^{\otimes k} \circ \Delta^{[k]}$ (resp. $(e^1)^{\otimes l} \circ \Delta^{[l]}$, $l \neq k$) est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathrm{Sym}_k(A^{(1)})$ de $(A^{(1)})^{\otimes k}$ (resp. est nulle).

PROPOSITION III,5. *Le morphisme $\Sigma_k((e^1)^{\otimes k}/k!) \circ \Delta^{[k]}$ de A dans* $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'isomorphisme réciproque est le morphisme Π_S de* $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$ *dans A induit par le produit.*

On notera S le morphisme $\Sigma_l((e^1)^{\otimes l}/l!) \circ \Delta^{[l]}$.

Remarquons d'abord que, comme les idempotents e^i sont deux à deux orthogonaux, la restriction à $A^{(k)} := e^k \cdot A$ de $e^l = (e^1)^{*l}/l! = \Pi^{[l]} \circ ((e^1)^{\otimes l}/l!) \circ \Delta^{[l]}$ est égale au morphisme identité si $k = l$ et est nulle sinon. L'endomorphisme $\Pi_S \circ S$ de A est donc égal au morphisme identité.

Il nous suffit pour établir la proposition de prouver que l'endomorphisme $S \circ \Pi_S$ de $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$ est égal à l'identité.

On remarquera d'abord que le morphisme $((e^1)^{\otimes l}/l!) \circ \Delta^{[l]} \circ \Pi^{[k]}$ de $\mathrm{Sym}_k(A^{(1)})$ dans $\mathrm{Sym}_l(A^{(1)})$ est nul si $l > k$ et est égal à l'identité si $k = l$ (utiliser la version duale du lemme II.8.:

$$\left(\Pi^{[k]}\right)^{\otimes l} \circ \Delta^{[l]}_{(k)} = \Delta^{[l]} \circ \Pi^{[k]};$$

le calcul est un calcul standard sur des suites de compositions généralisées, à la manière de II,7.).

Notons i_k l'inclusion de $\mathrm{Sym}_k(A^{(1)})$ dans $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$. Compte-tenu de ce qui précède, le morphisme $S \circ \Pi^S|_k - i_k$ est à valeurs dans $\oplus_{l<k} \mathrm{Sym}_l(A^{(1)})$; où on note $S \circ \Pi^S|_k$ la restriction à $\mathrm{Sym}_k(A^{(1)})$ du morphisme $S \circ \Pi^S$.

Soit n un entier arbitraire, la restriction de $S \circ \Pi_S$ à $\oplus_{l \leq n} \mathrm{Sym}_l(A^{(1)})$ est donc unipotente. Le morphisme $S \circ \Pi_S$ est par conséquent inversible; en particulier le morphisme Π_S est inversible à gauche.

Finalement, comme $\Pi_S \circ S$ est égal au morphisme identité de A, on a:

$$\Pi_S = \Pi_S \circ S \circ \Pi_S.$$

Le morphisme Π_S étant inversible à gauche, $S \circ \Pi_S$ est égal à l'endomorphisme identité de $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$. Q.E.D.

Revenons-en à la démonstration de la proposition III,1.

D'après III,5., Π_S est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués. Il se factorise sous la forme:

$$\mathrm{Sym}(A^{(1)}) \xrightarrow{p} U(A^{(1)}) \xrightarrow{\Pi_U} A,$$

où p est l'isomorphisme canonique d'espace vectoriel entre l'espace vectoriel des tenseurs symétriques et l'algèbre enveloppante et où Π_U est le morphisme de bigèbres de $U(A^{(1)})$ dans A induit par l'inclusion de $A^{(1)}$ dans A.

De ce que Π_S est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on déduit que Π_U est un isomorphisme de bigèbres, ce qui achève la preuve de III,1.

On remarquera qu'un corollaire élémentaire de III,1. est que A est engendré en tant qu'algèbre par $A^{(1)}$.

En particulier, les éléments de la forme $x_1 \cdot \cdots \cdot x_k := \Pi^{[k]}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$, où $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in (A^{(1)})^{\otimes k}$ engendrent A en tant qu'espace vectoriel. Nous allons voir comment se calcule l'action des opérateurs de descente sur ces éléments—ce qui nous permettra au passage de décrire l'action des opérateurs de descente sur A, question laissée en suspens jusques-là.

IV. L'action des opérateurs de descente

Dans ce paragraphe et le suivant, A est une bigèbre graduée cocommutative connexe sur un corps de caractéristique nulle.

Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ est une suite de composition $\mu \models n$, on appelle *monôme de Lie de type* μ tout élément de A de la forme:

$$x = x_1 \cdot \cdots \cdot x_l,\ x_i \in A^{(1)}_{\mu_i}.$$

Un *polynôme de Lie* est une combinaison linéaire de monômes de Lie.

Calculons l'action de l'opérateur de descente B_p, $p \models n$, sur le monôme de Lie $x = x_1 \cdot \cdots \cdot x_l$ de type μ associé à une suite $(x_1, \ldots, x_l)$ d'éléments de $A^{(1)}$, où $x_i \in A^{(1)}_{\mu_i}$.

On a:

$$\begin{aligned} B_p(x) &= \left(I_{p_1} * \cdots * I_{p_{k(p)}}\right) \circ \Pi^{[l]}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_l) \\ &= \Pi^{[k(p)]} \circ \left(I_{p_1} \otimes \cdots \otimes I_{p_{k(p)}}\right) \circ \left(\Pi^{[l]}\right)^{\otimes k(p)} \circ \Delta_{(l)}^{[k(p)]}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_l) \end{aligned}$$

(utiliser la version duale du lemme II,8).

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ est une suite de composition généralisée où $\alpha_i \in [0, l]$, on posera $x_0 := 1$ et $x_\alpha := x_{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_{\alpha_m}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que, comme $x_i \in A^{(1)}$, on a:

$$\left(\Pi^{[l]}\right)^{\otimes k(p)} \circ \Delta_{(l)}^{[k(p)]}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_l) = \sum_{\alpha^1, \ldots, \alpha^{k(p)}} x_{\alpha^1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha^{k(p)}},$$

où $(\alpha^1, \ldots, \alpha^{k(p)})$ décrit l'ensemble des suites de suites de composition généralisées satisfaisant aux conditions:

(i) $k(\alpha^i) = l$ pour tout $i \in [1, k(p)]$

(ii) $\forall i \in [1, k(p)], \forall j \in [1, l], \alpha_j^i \in [0, l]$.

(iii) La suite de composition généralisée $\alpha^1 + \cdots + \alpha^{k(p)}$ contient une et une seule fois chacun des entiers $1, \ldots, l$.

(iv) Si l'on enlève les termes nuls de la suite α^i, $i \in [1, k(p)]$, la suite obtenue est une suite croissante d'entiers.

Remarquons alors que:

$$I_{p_1} \otimes \cdots \otimes I_{p_{k(p)}}(x_{\alpha^1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha^{k(p)}})$$

est nul sauf si: $\forall i \in [1, k(p)]$, $\sum_{j \in [1, l], \alpha_j^i \neq 0} \mu_{\alpha_j^i} = p_i$.

Soit maintenant $f \in [1, k(p)]^{[1, l]}$ (i.e., soit un morphisme d'ensembles f de $[1, l]$ dans $[1, k(p)]$). On notera f_i^{-1} la suite ordonnée (strictement croissante) associée à l'ensemble $f^{-1}(\{i\})$. On dira enfin que f est un μ, p-morphisme et on notera $f \in p^\mu$ si:

$$\forall i \in [1, k(p)], \qquad p_i = \sum_{f(j) = i} \mu_j.$$

Avec ces notations et compte-tenu des calculs précédents, on a finalement la proposition IV,1.

Proposition IV,1. *Soit $x = x_1 \cdot \cdots \cdot x_l$ un monôme de Lie de type μ où $\mu \models n$, $k(\mu) = l$. Soit $p \models n$. Alors*:

$$B_p(x) = \sum_{f \in p^\mu} x_{f_1^{-1}} \cdot \cdots \cdot x_{f_{k(p)}^{-1}}.$$

V. Quelques opérateurs remarquables

Si μ est une suite de composition, on posera:

$$A^{(1)}_{\mu} := A^{(1)}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes A^{(1)}_{\mu_{k(\mu)}}.$$

Notons *sym* la projection canonique de $T(A^{(1)})$ sur $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$ [Bo]. Si λ est un partage, posons enfin: $\mathrm{Sym}^{\lambda}(A^{(1)}) := \mathrm{sym}(A^{(1)}_{\lambda})$.

On remarquera qu'on a, par définition de $\mathrm{Sym}(A^{(1)})$, l'identité:

$$\forall \mu \in \lambda,\ \mu \vDash s(\lambda): \qquad \mathrm{sym}\big(A^{(1)}_{\lambda}\big) = \mathrm{sym}\big(A^{(1)}_{\mu}\big).$$

Par ailleurs, on a aussi: $\mathrm{Sym}(A^{(1)}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{Sym}^{\lambda}(A^{(1)})$.

Notons A^{λ} l'image de $\mathrm{Sym}^{\lambda}(A^{(1)})$ par le morphisme Π_S—voir III,5. Comme $\mathrm{Sym}^{\lambda}(A^{(1)}) \subset \mathrm{Sym}_{k(\lambda)}(A^{(1)})$, c'est une conséquence de III,5. que $A^{\lambda} \subset A^{(k(\lambda))}$.

Comme Π_S est un isomorphisme, on a en outre:

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\lambda \vdash n} A^{\lambda}.$$

Nous allons nous attacher dans ce paragraphe à montrer que la projection sur A^{λ} selon $\oplus_{\beta \neq \lambda} A^{\beta}$ est un élément de Σ^{A} et définir et étudier au passage diverses familles d'éléments remarquables de Σ^{A}.

Si μ est une suite de composition de n, définissons tout d'abord l'élément I_{μ} de Σ^{A} par:

$$I_{\mu} := e^{1}_{\mu_1} * \cdots * e^{1}_{\mu_{k(\mu)}}.$$

Ordonnons alors les opérateurs de descente et les opérateurs I_{μ} de la manière suivante:

- si $s(\mu) < s(\nu)$, on pose $B_{\mu} < B_{\nu}$ et $I_{\mu} < I_{\nu}$.
- si $s(\mu) = s(\nu)$ et $k(\mu) < k(\nu)$, on pose: $B_{\mu} < B_{\nu}$ et $I_{\mu} < I_{\nu}$.
- si $s(\mu) = s(\nu)$ et $k(\mu) = k(\nu)$, on pose $B_{\mu} < B_{\nu}$ et $I_{\mu} < I_{\nu}$ si le mot $\mu_1 \ldots \mu_{k(\mu)}$ est plus petit que le mot $\nu_1 \cdots \nu_{k(\nu)}$ selon l'ordre lexicographique (i.e., si le plus petit i tel que $\mu_i \neq \nu_i$ est tel que: $\mu_i < \nu_i$).

Lemme V,1. *Il existe une matrice T trigonale, dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, à coefficients rationnels et indépendante de A permettant de passer de la famille ordonnée (B_{μ}) à la famille ordonnée (I_{μ}) d'éléments de Σ^{A}.*

Le lemme résulte immédiatement de la définition des morphismes I_μ. On a en effet, d'après II,5:

$$e_n^1 = I_n + \sum_{p \vDash n,\, k(p) \geq 2} (-1)^{k(p)-1} \frac{B_p}{k(p)}.$$

On a donc $I_\mu = B_\mu + B'$, où B' est combinaison linéaire d'opérateurs de descente B_ν, avec $B_\nu > B_\mu$. Q.E.D.

On remarquera que les coefficients de T peuvent être calculés explicitement.

COROLLAIRE V,2. *La famille* (I_μ) *engendre* Σ^A.

Par définition, les B_μ engendrent Σ^A. Le corollaire résulte immédiatement de ce que T est inversible.

Nous allons voir que la nouvelle famille génératrice (I_μ) de Σ^A est sous certains rapports plus simple à manipuler que la famille (B_μ).

Calculons par exemple $I_\mu \circ I_\nu$, où μ et ν sont deux suites de composition telles que $\lambda(\mu) = \lambda(\nu)$. Posons $k := k(\mu)$, on a alors:

$$\begin{aligned} I_\mu \circ I_\nu &= \Pi^{[k]} \circ e_\mu^1 \circ \Delta^{[k]} \circ \Pi^{[k]} \circ e_\nu^1 \circ \Delta^{[k]} \\ &= \Pi^{[k]} \circ e_\mu^1 \circ (\Pi^{[k]})^{\otimes k} \circ \Delta^{[k]}_{(k)} \circ e_\nu^1 \circ \Delta^{[k]}; \end{aligned}$$

où on pose: $e_\mu^1 := e_{\mu_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{k(\mu)}}^1$.

Notons à la manière de IV,1. μ^ν l'ensemble des automorphismes de $[1, k]$ tels que $f \in \mu^\nu$ si et seulement si: $\forall i \in [1, k]$, $\mu_i = \nu_{f^{-1}(i)}$.

Si $g \in [1, k]^{[1,k]}$, on notera encore, par abus, g l'endomorphisme de $A^{\otimes k}$ défini par:

$$g(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = x_{g^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{g^{-1}(k)}.$$

Comme le coproduit est cocommutatif, on vérifie d'abord que:

$$\forall g \in \mu^\nu, \qquad e_\mu^1 \circ \Delta^{[k]} = g \circ e_\nu^1 \circ \Delta^{[k]}.$$

Comme, par ailleurs:

$$e_\mu^1 \circ (\Pi^{[k]})^{\otimes k} \circ \Delta^{[k]}_{(k)} \circ e_\nu^1 \circ \Delta^{[k]} = \sum_{f \in \mu^\nu} f \circ e_\nu^1 \circ \Delta^{[k]}$$

(le calcul est le même que celui de la preuve de IV,1.), on a:

$$e_\mu^1 \circ (\Pi^{[k]})^{\otimes k} \circ \Delta^{[k]}_{(k)} \circ e_\nu^1 \circ \Delta^{[k]} = |\mu^\nu| e_\mu^1 \circ \Delta^{[k]},$$

et, pour finir:

$$I_\mu \circ I_\nu = \Pi^{[k]} \circ \left[|\mu^\nu| e^1_\mu \circ \Delta^{[k]}\right] = |\mu^\nu| I_\mu.$$

En fait, $|\mu^\nu|$ ne dépend que de $\lambda = \lambda(\mu) = \lambda(\nu)$. Plus précisément, si $\lambda \vdash n$ et $1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{i_1}$, $2 = \lambda_{i_1+1} = \cdots = \lambda_{i_1+i_2}, \ldots, n = \lambda_{i_1+\cdots+i_{n-1}} = \cdots = \lambda_{i_1+\cdots+i_n}$, alors $|\mu^\nu| = i_1! \cdots i_n!$. On notera ce nombre $\sigma(\lambda)$.

PROPOSITION V,3. *Soient μ et ν deux suites de composition telles que $k(\mu) = k(\nu)$. Alors, on a*:

$$I_\mu \circ I_\nu = \sigma(\lambda) \cdot I_\mu \qquad \textit{si } \lambda = \lambda(\mu) = \lambda(\nu)$$
$$I_\mu \circ I_\nu = 0 \qquad \textit{sinon}.$$

Nous laissons la seconde identité en exercice.

PROPOSITION V,4. *Soit λ un partage. La projection sur A^λ selon la direction $\oplus_{\beta \neq \lambda} A^\beta$ est donnée par l'élément E_λ de Σ^A défini par*:

$$E_\lambda := \frac{1}{k(\lambda)!} \sum_{\mu \vDash s(\lambda),\, \mu \in \lambda} I_\mu.$$

D'après III,5., le morphisme:

$$I_{s(\lambda)} \circ \Pi^{[k(\lambda)]} \circ \frac{(e^1)^{\otimes k(\lambda)}}{k(\lambda)!} \circ \Delta^{[k(\lambda)]} = \frac{1}{k(\lambda)!} \sum_{\beta \vDash s(\lambda),\, k(\beta) = k(\lambda)} I_\beta$$
$$= \sum_{\mu \vdash s(\lambda),\, k(\mu) = k(\lambda)} E_\mu,$$

est l'opérateur de projection sur le sous-espace vectoriel $A_{s(\lambda)} \cap A^{(k(\lambda))}$ de A selon la direction

$$\bigoplus_{i \neq s(\lambda) \text{ ou } j \neq k(\lambda)} A_i \cap A^{(j)}.$$

D'après III,5. encore,

$$A^\lambda \subset A^{(k(\lambda))} \qquad \text{et} \qquad A_s(\lambda) \cap A^{(k(\lambda))} = \bigoplus_{\mu \vdash s(\lambda),\, k(\mu) = k(\lambda)} A^\mu.$$

Vérifier que E_β est à valeurs dans A^β ne présente pas de difficulté. Reste à vérifier que, si $\beta \vdash s(\lambda)$, $k(\beta) = k(\lambda)$ et $\beta \neq \lambda$, alors la restriction de E_β à A^λ est nulle—mieux encore, il suffit de vérifier que la restriction de I_μ à A^λ est nulle pour tout $\mu \models s(\lambda)$, $k(\mu) = k(\lambda)$, $\mu \notin \lambda$. La proposition résultera alors de ce que les sous-espaces vectoriels A^β sont en somme directe.

Il suffit finalement de montrer que l'expression:

$$\Pi^{[k]} \circ e_\mu^1 \circ \Delta^{[k]} \circ \Pi^{[k]}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k),$$

où $k := k(\lambda) = k(\mu)$, et où $x_i \in A_{\alpha_i}^{(1)}$ avec $\alpha \models s(\lambda)$, $\alpha \in \lambda$, est nulle si $\mu \notin \lambda$. Ce type de calcul nous est désormais familier (c'est à quelques détails près le même que celui de la proposition IV.1 par exemple). Nous le laissons en exercice.

Signalons pour finir quelques propriétés multiplicatives des morphismes I_μ et E_λ dans l'algèbre des descentes Σ^A. Ce sont évidemment, comme pour la proposition V,3., les propriétés duales de celles que A. Garsia et C. Reutenauer ont établi au théorème 4,2. de [GR] pour l'algèbre de Solomon.

PROPOSITION V,5. *Soient* $\mu \models s(\mu)$, $\beta \vdash s(\beta)$, *avec* $k(\beta) = k(\mu)$. *Posons* $\lambda := \lambda(\mu)$, *on a*:

$$I_\mu \circ E_\beta = \delta_\beta^\lambda I_\mu,$$
$$E_\beta \circ I_\mu = \delta_\beta^\lambda \cdot \sigma(\beta) E_\beta.$$

La proposition V,5. résulte des calculs précédents, de la proposition V,3. et de la définition des morphismes E_λ. Le seul point non immédiat est la première identité, où il faut vérifier que, si $\lambda = \beta$:

$$|\{\nu \models s(\lambda), \lambda(\nu) = \lambda\}| = k(\lambda)! \sigma(\lambda)^{-1}.$$

Signalons pour finir la parution du très bel ouvrage de C. Reutenauer sur l'algèbre de Lie libre: "Free Lie Algebras," Clarendon Press, Oxford 1993. On y trouvera en particulier une étude détaillée de l'algèbre de Solomon, envisagée du point de vue des bigèbres tensorielles. Le lecteur est vivement engagé à s'y référer.

Signalons aussi [MR] où l'on trouvera une approche de l'algèbre des descentes hyperoctaédrale en termes de produits de convolution.

BIBLIOGRAPHIE

[BfBn1] F. BERGERON ET N. BERGERON, Orthogonal idempotents in the descent algebra of B_n and applications, *J. Pure Appl. Algebra* **79** (1992), 109–129.

[BfBn2] F. BERGERON ET N. BERGERON, A decomposition of the descent algebra of the hyperoctaedral group, I, *J. Algebra* **148** (1992), 86–97.

[BfBnHT] F. Bergeron, N. Bergeron, R. B. Howlett, et D. E. Taylor, A decomposition of the descent algebra of a finite Coxeter group, *J. Algebraic Combin.* **1** (1992), 23–44.

[Bn] N. Bergeron, A decomposition of the descent algebra of the hyperoctaedral group, II, *J. Algebra* **148** (1992), 92–122.

[Bo] N. Bourbaki, "Algèbre," tomes I, II, III, Diffusion C.C.L.S. (Centre commercial du livre spécialisé), Paris, 1970.

[C] L. Comtet, "Analyse combinatoire," Presses Univ. France, Paris, 1970.

[GR] A. M. Garsia et C. Reutenauer. A decomposition of Solomon's descent algebra, *Adv. in Math.* **77** (1989), 189–262.

[L] J. L. Loday, Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives, *Invent. Math.* **96** (1989), 205–230.

[MM] J. W. Milnor et J. C. Moore, On the structure of Hopf algebras, *Ann. of Math.* **81** (1965), 211–264.

[MR] C. Mantaci et C. Reutenauer, A generalization of Solomon's algebra for hyperoctaedral groups and other wreath products, preprint.

[P1] F. Patras, Construction géométrique des idempotents eulériens. Filtration des groupes de polytopes et des groupes d'homologie de Hochschild, *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), 101–126.

[P2] F. Patras, La décomposition en poids des algèbres de Hopf, *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993), 1067–1087.

[R] C. Reutenauer, Theorem of Poincaré–Birkhoff–Witt, logarithm and representations of the symmetric group whose orders are the Stirling numbers, *Lecture Notes in Math.* **1234** (1986), 267–284.

[S] L. Solomon, A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group, *J. Algebra* **41** (1976), 255–268.