



NORTH-HOLLAND

Approche des Bond Graphs pour l'Analyse Structurelle des Systèmes Linéaires

A. Rahmani,* C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy

LAIL URA CNRS D1440

Ecole Centrale de LILLE

BP. 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cédex, France

Submitted by Richard A. Brualdi

RÉSUMÉ

Nous présentons quelques propriétés structurelles des systèmes linéaires modélisés par bond graph. Après l'établissement d'une analogie entre les digraphes et les bond graphs, une comparaison du rang de la matrice d'état, puis de l'étude de la commandabilité en état structurelle par les deux approches sera faite. Des méthodes de calcul formel utilisant uniquement le modèle bond graph seront proposées. Elles concernent notamment le polynôme caractéristique, les matrices de commandabilité et d'observabilité. © Elsevier Science Inc., 1997

INTRODUCTION

L'approche structurelle a été introduite pour des systèmes à paramètres inconnus par manque de valeurs quantitatives ou incorrects pour des raisons d'erreurs de mesure, ce dernier aspect étant inévitable dans la modélisation de processus physiques. Il s'agit donc d'exploiter au maximum sa structure avant tout calcul numérique. Les méthodes se basant sur la théorie des graphes perdent parfois certaines informations lors de l'écriture du graphe de

*E-mail: rahmani@ec-lille.fr

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS 259:101-131 (1997)

© Elsevier Science Inc., 1997
655 Avenue of the Americas, New York, NY 10010

0024-3795/97/\$17.00
PII S0024-3795(96)00245-5

structure (ou matrice de structure) représentant la structure du système. Ceci est dû au fait que la construction se fait en général à partir de l'équation d'état, qui n'explicite pas totalement toutes les relations constitutives du système étudié. L'outil bond graph (ou graphe à liens) défini dans [1] formalisé dans [2] et [3], est un langage de type réseau qui permet de représenter graphiquement, avec un langage unique, de nombreux systèmes physiques. Il se place comme étape intermédiaire entre la description physique d'un système dynamique et la phase de construction d'un modèle mathématique, par représentation graphique des échanges de puissances entre les différents constituants du système. La modélisation d'un système physique par bond graph ne nécessite pas l'écriture de lois générales de conservation. Elle repose essentiellement sur la caractérisation des phénomènes d'échanges de puissance au sein du système.

Dans la première partie de ce papier, une rapide présentation des deux outils sera faite avant d'établir une analogie entre les digraphes et les bond graphs. Dans la deuxième partie, après un rappel des propriétés structurelles, nous rappellerons l'interprétation du rang de la matrice d'état structurelle par les digraphes puis par les bond graphs. Une méthode de calcul formel des coefficients du polynôme caractéristique d'un système sera présentée. Dans la troisième partie, dans le cadre de l'étude de la commandabilité en état structurelle des systèmes linéaires, nous comparons les approches par les digraphes et par les bond graphs, puis nous proposons une méthode de calcul formel des matrices de commandabilité et d'observabilité. Enfin, nous proposons d'appliquer ces résultats sur le modèle bond graph simplifié d'un bras de robot flexible.

I. ANALOGIE ENTRE DIGRAPHERS ET BOND GRAPHS

En se basant sur les résultats présentés dans [4], une comparaison très détaillée entre les graphes linéaires et les bond graphs a été faite dans [5]. Des similarités et des différences entre les deux approches des points de vue modélisation et mise en équation ont été exposées.

1.1. Technique des Graphes Orientés

Pour l'étude des systèmes dynamiques par les graphes, il est approprié d'utiliser des graphes orientés à poids que l'on appelle aussi digraphes à poids ou simplement digraphes [6].

Un digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ est une structure mathématique déterminée par la donnée de:

(i) Un ensemble fini $\mathcal{A} = \{z_1, \dots, z_n\}$ d'éléments appelés sommets (ou nœuds).

$$\mathcal{Z} = \mathcal{U} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}, \\ \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}, \\ \mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_p\}. \end{cases} \quad (1)$$

Si Cardinal $\mathcal{Z} = n$ (égal au nombre de sommets), le digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ est d'ordre n .

(ii) Un ensemble fini $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ dont les éléments sont des couples ordonnés de sommets appelés des arcs. Si $e = (z_i, z_j)$ est un arc de $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, z_i est son extrémité initiale et z_j son extrémité finale.

DÉFINITIONS 1.

(1) Un chemin (dirigé) est une séquence d'arcs $\mathcal{P} = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ orientés dans le même sens ayant la forme $e_1 = (z_0, z_1)$, $e_2 = (z_1, z_2), \dots$, $e_q = (z_{q-1}, z_q)$ (le sommet initial de l'arc suivant est le sommet final de l'arc précédent). Le sommet initial du premier arc et le sommet final du dernier arc sont appelés respectivement sommet initial et sommet final du chemin.

(2) Le nombre d'arcs contenus dans la séquence $\mathcal{P} = \{e_1, e_1, \dots, e_q\}$ (les arcs de cette séquence ne sont pas nécessairement distincts) est appelé longueur de ce chemin.

1.2. Présentation des Bond Graphs

Dans un bond graph, la notion de causalité permet de mettre en évidence la relation de cause à effet au sein d'un système et de dégager un modèle mathématique associé. De plus, la nature graphique du modèle bond graph associée à la causalité peut être utilisée directement pour l'analyse des propriétés du système physique, en parcourant le modèle bond graph causal suivant des chemins particuliers appelés *chemins causaux*.

Considérons un système linéaire multivariable (Σ), décrit par son équation d'état (2).

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2)$$

avec $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$.

(2) est le modèle d'état déduit du modèle bond graph, où $\dim x = n$ est le nombre d'éléments dynamiques (I ou C) en causalité intégrale quand le modèle bond graph est en causalité intégrale, $\dim u = m$ est le nombre d'entrées, sources d'effort ou de flux (S_e ou S_f), présentes dans le modèle bond graph et $\dim y = p$ est le nombre de sorties, détecteurs d'effort ou de flux (D_e ou D_f), présentes dans le modèle bond graph.

On suppose que les bond graphs contiennent uniquement des liens de puissance (absence de signaux) et que l'équation d'état associée aux modèles bond graphs étudiés est supposée linéaire.

Les différents vecteurs état, entrée et sortie utilisés sont représentés par l'équation (3).

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ \vdots \\ q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \\ \vdots \\ S_{f_1} \\ S_{f_2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{e_1} \\ D_{e_2} \\ \vdots \\ D_{f_1} \\ D_{f_2} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3)$$

p_I et q_C sont des variables de moment généralisé et de déplacement généralisé associées respectivement aux éléments I et C .

Par abus de langage, un élément dynamique (I ou C) et sa variable dynamique associée x_i seront confondus.

DÉFINITIONS 2.

(1) Un chemin causal dans un bond graph causal (causalité affectée) est une succession de liens et de jonctions liant deux éléments bond graph e_i de type (S_e, S_f, I, C, R) et e_j de type (I, C, R, D_e, D_f) [7].

(2) La longueur, notée L_k , d'un chemin causal, reliant un élément e_j à un élément e_i , avec e_j appartenant à $\{S_e, S_f, I, C\}$ et e_i appartenant à $\{D_e, D_f\}$, est égale au nombre k d'éléments I ou C en causalité intégrale rencontrés, quand on parcourt le chemin causal de e_j vers e_i . Dans le cas où e_j appartient à $\{S_e, S_f, I, C\}$ et e_i appartient à $\{I, C\}$, la longueur du chemin causal reliant e_j à e_i est égale à $k + 1$ et notée L_{k+1} .

(3) Le gain d'un chemin causal est donné par (4):

$$G(s) = (-1)^{n_0+n_1} \cdot \prod_{i=1}^{\alpha} (m_i)^{h_i} \cdot \sum_{j=1}^{\beta} (r_j)^{k_j} \cdot T_r \quad (4)$$

avec:

n_0 = le nombre total de changements d'orientation des liens à la jonction 0, quand on parcourt le chemin causal en suivant la variable flux.

n_1 = le nombre total de changements d'orientation des liens à la jonction 1, quand on parcourt le chemin causal en suivant la variable effort.

α = le nombre de transformateurs intervenant dans le chemin causal.

β = le nombre de gyrateurs intervenant dans le chemin causal.

m_i, r_j = respectivement le module du i ème transformateur et le module du j ème gyrateur.

$h_i = \pm 1$ suivant la causalité affectée au i ème transformateur.

$k_j = \pm 1$ suivant la causalité affectée au j ème gyrateur.

T_r = le produit des transmittances des éléments 1-port (I, C , ou R) intervenant dans le chemin causal. Si aucun élément (I, C , ou R) n'intervient dans le chemin causal, alors $T_r = 1$ [7].

Le terme constant de $G(s)$ est noté par $\bar{G}(s)$.

1.3. Caractérisation d'un Digraphe

Dans son texte classique sur la théorie des graphes, König [9] utilise deux types de sommets pour représenter une matrice par un graphe. Les premiers représentent les lignes de la matrice et les seconds ses colonnes. La représentation qui nous intéresse par la suite est celle utilisée dans [10] dans le cadre de la résolution des équations algébriques linéaires par le graphe de fluence ("flow graph").

1.3.1. A Partir d'une Représentation d'État. Pour une matrice carrée $A = \{a_{ij}; i, j \in (1, \dots, n)\}$ d'ordre n donnée, il y a une correspondance entre la matrice A et le digraphe $G(A)$ qui possède n sommets $z_i \in \mathcal{Z}$. Il existe un arc dirigé (z_i, z_j) du sommet initial z_j vers le sommet final z_i si l'élément de la matrice a_{ij} est non nul [$i, j \in (1, \dots, n)$]. Le poids de l'arc est donné par la valeur de a_{ij} .

La représentation des matrices de commande B et de sortie C se fait suivant le même principe.

Considérons le circuit électrique de la figure 1. Ce système dynamique linéaire est décrit par les matrices A , B et C (5),

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{-1}{L_2} & \frac{-1}{R_3 C_1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Le digraphe représentant ce système est donné par la figure 2.

Le digraphe structurel, noté $G([A], [B], [C])$, associé aux matrices structurelles $[A]$, $[B]$ et $[C]$ issues respectivement de A , B et C , ne tient pas compte des poids des arcs mais de leur seule existence.

1.3.2. A Partir d'un Modèle Bond Graph

(a) *Méthode indirecte.* Chaque terme a_{ij} de la matrice d'état A est donné par la somme des gains des chemins causaux de longueur 1 reliant un élément dynamique x_j (I ou C) à un autre élément dynamique x_i (I ou C), multiplié par le terme constant de la transmittance élémentaire de l'élément x_j .

Chaque terme b_{ij} de la matrice de commande B est donné par la somme des gains des chemins causaux de longueur 1 reliant une entrée u_i (S_e ou S_f) à un élément dynamique x_j (I ou C).

Chaque terme c_{ij} de la matrice de sortie C est donné par la somme des gains des chemins causaux de longueur 0 reliant un élément dynamique x_j (I ou C) à une sortie y_i (D_e ou D_f).

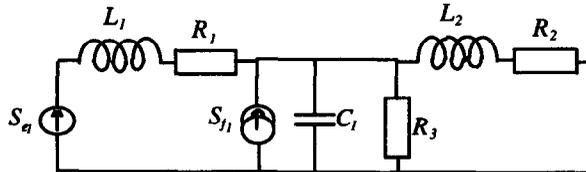


FIG. 1. Circuit électrique.

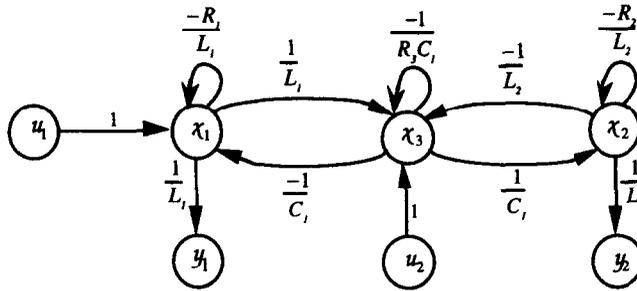


FIG. 2. Digraphe $G(A, B, C)$.

Ainsi, les matrices données par (5) peuvent être déduites directement à partir du modèle bond graph de la figure 3.

Nous pouvons donc construire un digraphe à partir du modèle bond graph d'une manière indirecte. Pour cela, il suffit de:

- (i) déterminer la représentation d'état à partir du modèle bond graph,
- (ii) construire le digraphe correspondant.

Nous proposons de supprimer la première étape et de construire le digraphe directement à partir du modèle bond graph.

(b) *Méthode directe.* La méthode directe consiste à utiliser les chemins causaux dans un modèle bond graph pour construire le digraphe équivalent. Pour cela, nous énonçons la règle suivante (voir le tableau 1):

RÈGLE [11].

(1) Chaque élément dynamique (I ou C) en causalité intégrale dans un modèle bond graph est représenté par un sommet état x_i dans le digraphe associé.

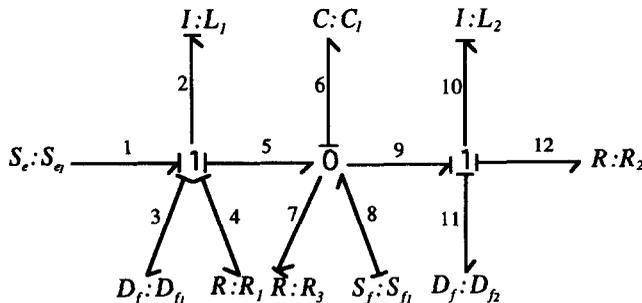


FIG. 3. Bond graph causal.

TABLEAU 1

	Élément dans un modèle bond graph	Gain	Élément du digraphe équivalent
Chemins causaux de longueur 0	$I:I_1 \xleftarrow{\frac{e}{f}} 1 \xleftarrow{\frac{e}{f}} 0 \xrightarrow{\frac{e}{f}} R:R_1$	$\frac{-R_1}{I_1 s}$	
	$R:R_1 \xleftarrow{\frac{e}{f}} 0 \xleftarrow{\frac{e}{f}} 1 \xrightarrow{\frac{e}{f}} I:I_2$	$\frac{-R_1}{I_2 s}$	
	$S_c \xrightarrow{\frac{e}{f}} 1 \xrightarrow{\frac{e}{f}} I:I_1$	1	
	$S_f \xrightarrow{\frac{e}{f}} 0 \xrightarrow{\frac{e}{f}} C:C_1$	1	
Chemins causaux de longueur 1		$\frac{R_1}{I_2 s}$	
		$\frac{R_1}{I_1 s}$	
		$\frac{-I}{C_1 s}$	
		$\frac{I}{I_1 s}$	
		$\frac{-I}{I_2 s}$	
		$\frac{I}{C_1 s}$	
		$\frac{I}{I_2 s}$	
	$I:I_2 \xleftarrow{\frac{e}{f}} 1 \xrightarrow{\frac{e}{f}} D_f:D_{f1}$	$\frac{I}{I_2 s}$	

TABLEAU I
CONTINUED

	$\frac{-R_l}{I_1 S}$	
	$\frac{R_l}{I_2 S}$	

(2) Chaque source d'entrée (S_e ou S_f) dans un modèle bond graph est représentée par un sommet entrée u_i dans le digraphe.

(3) Chaque détecteur de sortie (D_e ou D_f) dans un modèle bond graph est représenté par un sommet sortie y_i dans le digraphe.

(4) Un chemin causal de longueur 1 reliant une source (S_e ou S_f) à un élément dynamique (I ou C) est représenté par un arc reliant un sommet entrée u_i à un sommet état x_i .

(5) Un chemin causal de longueur 0 reliant un élément dynamique (I ou C) à un détecteur (D_e ou D_f) est représenté par un arc reliant un sommet état x_i à un sommet sortie y_i .

(6) Un chemin causal de longueur 1 reliant deux éléments dynamiques (I ou C) est remplacé par un arc reliant deux sommets états x_i et x_j .

(7) Les gains des chemins causaux correspondent aux poids des arcs.

REMARQUES.

(i) Lors de la transformation d'un chemin causal sur un modèle bond graph en un arc sur un digraphe, il faut respecter les points de départ et d'arrivée.

(ii) Le digraphe obtenu à partir d'un modèle bond graph acquiert quelques propriétés caractérisant le bond graph (le sous-graphe des sommets état est symétrique et surtout, il est fortement connexe).

EXEMPLE 1. En application de cette règle, nous proposons de représenter directement le modèle bond graph de la figure 4 par un digraphe.

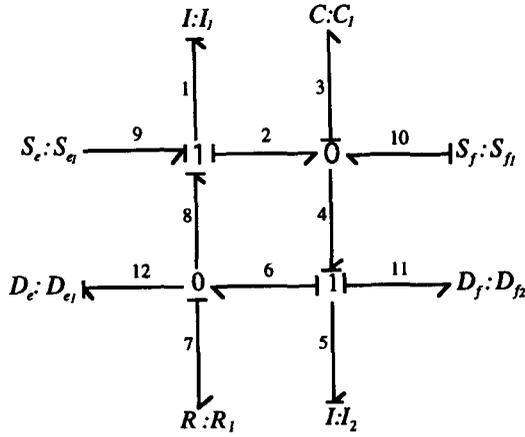


FIG. 4. Bond graph causal.

En regroupant tous les éléments, nous obtenons le digraphe de la figure 5.

EXEMPLE 2. Considérons le circuit électrique de la figure 6. Le modèle bond graph causal correspondant est donné par la figure 7. Ce modèle bond graph contient un élément en causalité dérivée (l'élément C_3), donc l'équation d'état correspondante peut être écrite sous la forme (6) [12]:

$$\begin{aligned} W\dot{x} &= Ax + Bu, & W &\in R^{n \times n}, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{6}$$

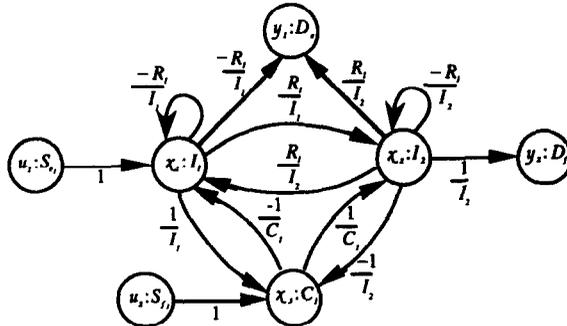


FIG. 5. Digraphe équivalent.

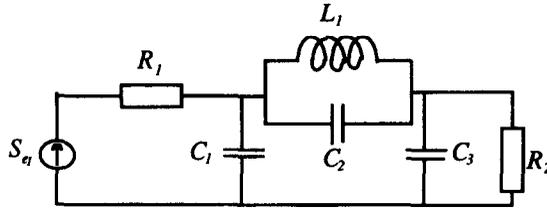


FIG. 6. Circuit électrique.

Calcul de la matrice W :

$$w_{ii} = 1 + \sum_{h \in H} \left(\tilde{G}_{L_1}(x_i, x_i)_d \right)_h, \quad i = 1, \dots, n; \quad (7)$$

où $\tilde{G}_{L_1}(x_i, x_i)_d$ est le terme constant du gain du chemin causal de longueur 1, reliant l'élément dynamique (I ou C) en causalité intégrale (associé à la variable dynamique x_i) à lui-même à travers les éléments (I ou C) en causalité dérivée.

$$w_{ij} = \sum_{h \in H} \left(\tilde{G}_{L_1}(x_j, x_i)_d \right)_h, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n; \quad i \neq j \quad (8)$$

où $\tilde{G}_{L_1}(x_j, x_i)_d$ est le terme constant du gain du chemin causal de longueur 1, reliant l'élément dynamique (I ou C) en causalité intégrale (associé à la variable dynamique x_j) à l'élément dynamique (I ou C) en causalité intégrale (associé à la variable dynamique x_i) à travers les éléments (I ou C) en causalité dérivée.

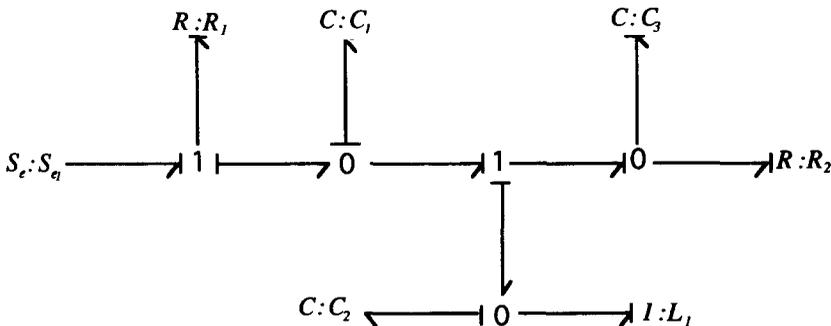


FIG. 7. Bond graph causal.

L'application des relations (7) et (8) conduit aux expressions suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{-1}{R_1 C_1} + \frac{-1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{-1}{L_1} & \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{-1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{c_3}{c_1} & \frac{c_3}{c_2} \\ 0 & \frac{c_3}{c_1} & 1 + \frac{c_3}{c_2} \end{bmatrix}$$

Cette équation est l'interprétation directe du calcul de l'équation d'état à l'aide de l'équation de structure de jonction [13].

1.4. *Equivalence bond graph / digraphe*

Dans [4], [5] et [14], les différents auteurs ont établi une comparaison entre les bond graphs et les graphes linéaires des points de vue modélisation et mise en équations. Ils ont par ailleurs proposé la conversion d'un bond graph en un graphe linéaire. Une conversion des bond graphs à partir des matroïdes a été proposé dans [15].

Notre propos concerne l'introduction d'une nouvelle notion relative aux bond graphs, intitulée famille de cycles causaux comme une équivalence à la notion de famille de cycles dans un digraphe.

DÉFINITIONS 3 [11].

(1) Un cycle causal est un chemin causal fermé pouvant contenir plusieurs éléments dynamiques (I ou C) distincts.

(2) Un cycle causal propre ne contient que des liens de puissance. Un cycle causal impropre contient au moins un lien d'information.

(3) Un cycle causal est d'ordre (ou largeur) k s'il contient k éléments dynamiques distincts (I ou C) en causalité intégrale.

(4) Le gain d'un cycle causal propre est égal au produit des gains des éléments dynamiques (I ou C) et des gains des chemins causaux qui composent ce cycle.

(5) Deux cycles causaux sont différents s'ils n'ont aucun élément dynamique (I ou C) en commun.

(6) Une famille de cycles causaux est un ensemble de cycles causaux différents.

(7) Une famille de cycles causaux est d'ordre (ou largeur) k si elle contient k éléments dynamiques distincts (I ou C) en causalité intégrale.

(8) Le gain d'une famille de cycles causaux est égal au produit des gains des différents cycles causaux qui composent cette famille.

II. RANG DE LA MATRICE D'ÉTAT

Pour l'étude des propriétés structurelles des matrices, plusieurs terminologies ont été utilisées afin de désigner la notion de rang. Les définitions les plus répandues sont le rang générique, le rang terme et le rang structurel.

II.1. Propriétés Structurelles

Les premières investigations des propriétés structurelles des matrices ont été faites par Frobenius [16], et de manière plus générale par König [9]. Quelques décennies plus tard, Lin [17] propose une condition nécessaire et suffisante de commandabilité structurelle des systèmes monovariables [18, 19] à l'aide de la théorie des graphes, qui a ensuite été étendue aux systèmes multivariables. Parallèlement à ces travaux, Glover et Silverman [20] ont proposé une approche alternative en utilisant des opérations booléennes. Depuis, ces études ont fait l'objet de nombreux travaux (cf. [21, 22]).

DÉFINITIONS 4.

(1) Une propriété d'un système est dite "structurelle" si elle ne dépend que du type d'éléments qui composent ce système et de la façon dont ils sont interconnectés, non pas de la valeur numérique de ses paramètres.

(2) Une propriété est dite "structurelle" si elle est vérifiée pour toutes les valeurs des paramètres sauf éventuellement pour quelques valeurs particulières.

(3) Une matrice structurelle, notée $[A]$, est composée de zéros fixés, notés 0, et de termes de valeurs non nulles mais indéterminées, notés *, L , ou X . Les termes non nuls sont supposés indépendants les uns des autres.

Nous rappelons ici la définition du rang structurel. Pour cela, nous rappelons la définition de termes indépendants:

DÉFINITION 5 [9, 16]. Un ensemble de termes indépendants d'une matrice A est un ensemble de termes non nuls dont un seul apparaît par ligne et par colonne.

II.2. Rang Structurel

La notion de rang structurel est un élément essentiel dans l'étude des propriétés structurelles des systèmes dynamiques. Cette notion est très liée à la forme de représentation des matrices structurelles.

DÉFINITION 6 [6]. Le rang structurel de $[A]$, noté $\text{rang}_s[A]$, est égal au nombre maximal d'éléments contenus dans au moins un ensemble de termes indépendants.

II.3. Rang Bond Graph

Le modèle bond graph peut être considéré comme un graphe, quand on le parcourt en suivant les chemins causaux. La matrice d'état associée aux modèles bond graphs considérés (sans signaux) a une forme particulière à cause du choix des variables d'état: deux termes symétriques par rapport à la diagonale sont simultanément nuls ou non nuls. Aucune hypothèse sur l'indépendance des termes n'est faite a priori. La méthode de calcul du rang structurel de la matrice d'état A conduit à la détermination du nombre de valeurs propres structurellement nulles de la matrice d'état, c'est-à-dire la valeur de l'exposant q telle que le polynôme caractéristique de A s'écrive:

$$P(s) = \det(sI - A) = s^q(s^{n-q} + \dots + a_{n-q}). \quad (9)$$

Cependant, certaines valeurs particulières des paramètres des éléments bond graphs peuvent conduire à l'annulation du coefficient a_{n-q} , ce qui introduirait alors une autre valeur propre nulle, mais non décelable par les manipulations causales proposées.

La démarche s'adresse surtout aux utilisateurs de modèles bond graphs, car elle permet de mettre en évidence des propriétés structurelles directement à partir du bond graph.

THÉORÈME 1 [23]. Le rang_{bg} de la matrice d'état formelle (A) associée à un modèle bond graph est égal à $n - q$, avec:

n = nombre d'éléments I ou C en causalité intégrale quand le modèle bond graph est en causalité intégrale (ce qui correspond au nombre de variables statiquement indépendantes).

q = nombre d'éléments dynamiques I ou C restant en causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est imposée sur le modèle bond graph.

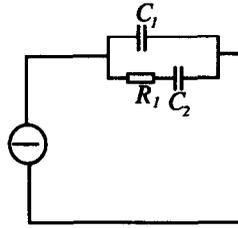


FIG. 8. Circuit électrique.

REMARQUES.

(1) La causalité dérivée affectée sur le modèle bond graph doit éviter les conflits de causalité et les problèmes qui pourraient apparaître, tels que les boucles de causalité non solvables.

(2) L'équation d'état associée à un bond graph en causalité intégrale, s'écrit $\dot{x} = Ax + Bu$. Imposer la causalité dérivée sur le modèle bond graph équivaut à écrire cette équation sous la forme $x = A^{-1}(\dot{x} - Bu)$ lorsque celle-ci est possible. L'inversibilité de A est donc liée à la possibilité d'affecter une causalité dérivée à tout le bond graph.

II.4. Comparaison entre le Rang Structurel et le Rang Bond Graph

Considérons le système électrique très simple de la figure 8 et son modèle bond graph associé représenté par la figure 9.

L'équation d'état formelle, associée à ce modèle bond graph, est donnée par (10),

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} S_{f_1}, \quad \text{où } x = \begin{bmatrix} q_{c_1} \\ q_{c_2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

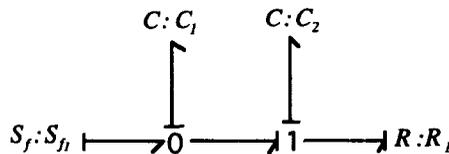


FIG. 9. Bond graph causal.

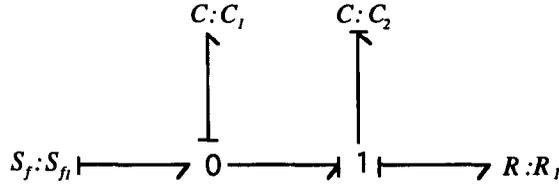


FIG. 10. Bond graph en causalité dérivée.

II.4.1. Rang Structurel. La matrice d'état structurelle $[A]$ associée à la représentation (10) est donnée par (11),

$$[A] = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}. \quad (11)$$

$\text{Rang-}s[A] = 2$, conformément à la définition 2.

II.4.2. Rang Bond Graph. Les 2 éléments dynamiques C_1 et C_2 ont une causalité intégrale, donc $n = 2$.

Lorsque la causalité dérivée est imposée au modèle bond graph (figure 10), l'élément C_1 doit rester en causalité intégrale pour éviter de créer un conflit de causalité à la jonction 0. Donc, $q = 1$ et $\text{rang-bg}(A) = 1$.

II.4.3. Rang Réel.

$$\det A = \frac{-1}{RC_1} \times \frac{-1}{RC_2} - \frac{1}{RC_1} \times \frac{1}{RC_2} = 0, \quad (12)$$

$$\text{rang } A = 1.$$

II.4.4. Interprétation. Le résultat obtenu par l'approche bond graph correspond au rang réel de A , contrairement au résultat obtenu par le rang structurel. La raison est que les termes de la matrice A ne sont pas indépendants. La condition d'indépendance entre les paramètres est nécessaire au niveau structurel pour que les méthodes énoncées (hors bond graph) soient valides. Cette hypothèse peut ne pas être vérifiée, d'un point de vue structurel, à cause de la physique du système, comme cela apparaît dans cet exemple.

A l'inverse, la méthode bond graph tient compte de ces dépendances formelles grâce à la cohérence des règles d'affectation de la causalité et des relations causales implicites apparaissant sur le bond graph. Elle fournit donc plus un rang "formel" que "structurel".

III. DÉTERMINANT DE $sI - A$

Considérons un système $\Sigma(A, B)$ de dimension n . Le polynôme caractéristique d'une matrice A , noté $P_A(s)$, est égal au déterminant de la matrice $sI_n - A$. Il peut s'écrire sous la forme (13).

$$P_A(s) = \det(sI_n - A) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}. \quad (13)$$

Le calcul direct du déterminant de la matrice $sI_n - A$ est assez complexe surtout pour des systèmes de grande dimension. C'est pourquoi, des méthodes graphiques se basant sur la règle de Mason ont été introduites.

Reinschke [6] a présenté une méthode permettant de calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'un système en boucle ouverte représenté par un digraphe. Cette règle se base sur la notion de familles de cycles dans le digraphe $G(A)$. Nous proposons une méthode équivalente permettant la détermination des coefficients du polynôme caractéristique d'un système modélisé par bond graph. Pour cela, une famille de cycles dans un digraphe sera remplacée par une famille de cycles causaux dans un bond graph.

THÉORÈME 2 [24]. *La valeur de chaque coefficient a_i ($1 \leq i \leq n$) du polynôme caractéristique $P_A(s)$, défini par l'équation (13), est égale au terme constant du gain total des familles de cycles causaux d'ordre i dans le modèle bond graph. Le gain de chaque famille de cycles causaux intervenant doit être multiplié par $(-1)^d$ si la famille est constituée de d cycles causaux différents.*

Considérons le modèle bond graph représenté figure 4. Le bond graph possède trois éléments dynamiques en causalité intégrale ($n = 3$), donc le polynôme caractéristique recherché sera de la forme (14),

$$P_A(s) = \det(sI_3 - A) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3. \quad (14)$$

Le tableau 2 met en évidence les différentes familles de cycles causaux nécessaires au calcul du polynôme caractéristique.

TABLEAU 2
CALCUL DES COEFFICIENTS DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

a_i	Familles de cycles causaux	Gains
a_1	$I:I_1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{8} 0 \xrightarrow{7} R:R_1$ (a) Cycle d'ordre 1 ($d=1$)	$G_{(a)} = (-1) \times \frac{-R_1}{I_1 s}$
	$R:R_1 \xrightarrow{7} 0 \xrightarrow{6} 1 \xrightarrow{5} I:I_1$ (b) Cycle d'ordre 1 ($d=1$)	$G_{(b)} = (-1) \times \frac{-R_1}{I_1 s}$
a_2	$I:I_1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{8} 0 \xrightarrow{7} R:R_1$ $R:R_1 \xrightarrow{7} 0 \xrightarrow{6} 1 \xrightarrow{5} I:I_2$ (c) Famille d'ordre 2 ($d=2$)	$G_{(c)} = \frac{-R_1}{I_1 s} \times \frac{-R_1}{I_1 s}$
	$1 \xrightarrow{8} 0 \xrightarrow{6} 1$ $1 \downarrow \quad 7 \downarrow \quad 5 \downarrow$ $I:I_1 \quad R:R_1 \quad I:I_2$ (d) Cycle d'ordre 2 ($d=1$)	$G_{(d)} = (-1) \times \frac{R_1^2}{I_1 I_1 s^2}$
	$I:I_1 \quad C:C_1 \quad C:C_1 \quad I:I_2$ $1 \uparrow \quad 3 \uparrow \quad 3 \uparrow \quad 5 \uparrow$ $1 \xrightarrow{2} 0 \quad 0 \xrightarrow{4} 1$ (e) Cycle d'ordre 2 ($d=1$) (f) Cycle d'ordre 2 ($d=1$)	$G_{(e)} = (-1) \times \frac{-1}{I_1 C_1 s^2}$ $G_{(f)} = (-1) \times \frac{-1}{I_1 C_1 s^2}$
	$I:I_1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{8} 0 \xrightarrow{7} R:R_1$ $C:C_1 \quad I:I_2$ $3 \uparrow \quad 5 \uparrow$ $0 \xrightarrow{4} 1$ (g) Famille d'ordre 3 ($d=2$)	$G_{(g)} = \frac{-R_1}{I_1 s} \times \frac{-1}{I_1 C_1 s^2}$
	$R:R_1 \xrightarrow{7} 0 \xrightarrow{6} 1 \xrightarrow{5} I:I_1$ $I:I_1 \quad C:C_1$ $1 \uparrow \quad 3 \uparrow$ $1 \xrightarrow{2} 0$ (h) Famille d'ordre 3 ($d=2$)	$G_{(h)} = \frac{-R_1}{I_1 s} \times \frac{-1}{I_1 C_1 s^2}$
a_3	$I:I_1 \quad C:C_1 \quad I:I_1 \quad C:C_1$ $\uparrow e \downarrow f \quad \uparrow f \downarrow e \quad \downarrow f \uparrow e \quad \downarrow e \uparrow f$ $\uparrow e \downarrow f \quad \uparrow f \downarrow e \quad \downarrow f \uparrow e \quad \downarrow e \uparrow f$ $R:R_1 \quad I:I_2 \quad R:R_1 \quad I:I_2$ (i) Cycles d'ordre 3 ($d=1$) (j) Cycles d'ordre 3 ($d=1$)	$G_{(i)} = (-1) \times \frac{R_1}{I_1 I_1 C_1 s^3}$ $G_{(j)} = (-1) \times \frac{R_1}{I_1 I_1 C_1 s^3}$

La somme des termes constants des différentes expressions nous permet d'obtenir le résultat suivant (15),

$$\begin{aligned}
 P_A(s) = s^3 + s^2 \left(\frac{R_1}{I_1} + \frac{R_1}{I_2} \right) + s \left(\frac{R_1^2}{I_1 I_2} + \frac{1}{I_1 C_1} - \frac{R_1^2}{I_1 I_2} + \frac{1}{I_2 C_1} \right) \\
 + \left(\frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_1} \right), \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$P_A(s) = s^3 + s^2 \left(\frac{R_1}{I_1} + \frac{R_1}{I_2} \right) + s \left(\frac{1}{I_1 C_1} + \frac{1}{I_2 C_1} \right).$$

REMARQUES.

(1) Le terme constant a_3 de $P_A(s)$ s'annule formellement. Ce résultat était prévisible puisque le rang de la matrice A est dégénéré.

(2) En règle générale, avant d'entamer le calcul des coefficients du polynôme caractéristique, il faut exploiter toutes les informations structurelles dont nous disposons, notamment, le rang_bond graph de la matrice d'état A obtenu par une simple manipulation causale.

IV. COMMANDABILITÉ EN ÉTAT STRUCTURELLE

L'importance des notions de commandabilité et d'observabilité dans l'étude des systèmes n'est plus à démontrer. Ces notions ont été introduites par Gilbert [25]. Kalman [26] a présenté une description mathématique des systèmes, en faisant apparaître la structure canonique qui décrit les différents sous-espaces en fonction de leurs propriétés de commandabilité et d'observabilité. Rosenbrock [27] a élaboré une théorie à l'aide de la représentation sous forme de matrice système. L'approche géométrique, quant à elle, a été introduite par Wonham [28]. L'approche par bond graphs a également été exploitée pour traiter ce problème [23, 29–31].

Notre propos concerne essentiellement l'étude de la commandabilité en état, sachant que par simple dualité les mêmes résultats peuvent être obtenus pour l'observabilité.

IV.1. Critères graphiques

DÉFINITIONS 7.

(1) Un système structurel $\Sigma([A], [B])$ est structurellement commandable si tous les systèmes complètement commandables, au sens numérique, ont la même structure.

(2) Un système structurel $\Sigma([A], [B])$ est structurellement commandable s'il est commandable au sens numérique pour presque toutes les valeurs des paramètres.

IV.1.1. Approche par les Graphes. Une pré-condition de la commandabilité en état est que les variables d'entrées soient capables d'influencer toutes les variables d'état, ce qui se traduit, en théorie des graphes, par la notion d'accessibilité.

DÉFINITION 8. Sur le digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, un sommet état $x_i \in \mathcal{Z}$ est accessible en entrée s'il existe au moins un chemin reliant ce sommet état à un sommet entrée $u_i \in \mathcal{Z}$.

THÉORÈME 3. Un système structurel $\Sigma([A], [B])$ est structurellement commandable si et seulement si, les propriétés (a) et (b) sont vérifiées:

- (a) Sur le digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, tous les sommets états $x_i \in \mathcal{Z}$ sont accessible en entrée, à partir d'au moins un des m sommets entrée $u_i \in \mathcal{Z}$.
- (b) $\text{Rang}_{-s}([A] [B]) = n$.

Pour l'étude de la commandabilité, Reinschke [6] considère la matrice structurelle $[Q_1]$ définie par (16) où E est une matrice de retour d'état pleine,

$$[Q_1] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [E] & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

THÉORÈME 4 [6]. Le système structurel $\Sigma([A], [B])$ est structurellement commandable si et seulement si le digraphe $G([Q_1])$ vérifie les deux conditions suivantes:

- (a) Chaque sommet état $x_i \in \mathcal{Z}$ est accessible en entrée par au moins un des m sommets entrée u_i .
- (b) Il existe au moins une famille de cycles d'ordre n dans $G([Q_1])$.

IV.1.2. Approche par les Bond Graphs. Les critères de commandabilité structurelle sur un modèle bond graph, sont une reprise de ceux présentés pour les digraphes. La notion d'accessibilité en entrée s'exprime sur

le modèle bond graph en causalité intégrale par l'existence d'un chemin causal entre les sources et les éléments dynamiques (I ou C) en causalité intégrale.

PROPRIÉTÉ 1 [23]. Si $\text{rang_bg}(A) = n - q$, alors q est le nombre minimal d'entrées nécessaires pour commander le système $\Sigma(A, B)$.

THÉORÈME 5 [23]. Un système $\Sigma(A, B)$ est structurellement commandable si et seulement si les propriétés (a) et (b) sont vérifiées:

- (a) Tous les éléments dynamiques (I ou C) en causalité intégrale sont causalement atteints par une source d'entrée.
- (b) $\text{Rang_bg}(A \ B) = n$.

Le calcul du rang_bg de la matrice $(A \ B)$ est déterminé à l'aide de manipulations causales que nous rappelons,

PROPRIÉTÉ 2 [23].

$$\text{Rang_bg}(A \ B) = n - t$$

avec t nombre d'éléments dynamiques (I ou C) restant en causalité intégrale quand les assertions (a) et (b) sont appliquées:

- (a) La causalité dérivée est affectée au modèle bond graph.
- (b) La dualisation du nombre maximal de sources d'entrées est effectuée afin d'éliminer les causalités intégrales restantes, si c'est possible sans créer des conflits de causalité ou des boucles de causalité non solvables.

Considérons le circuit électrique de la figure 11. Le modèle bond graph correspondant est donné par la figure 12.

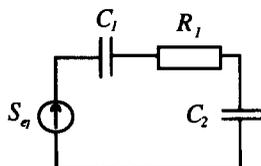


FIG. 11. Circuit électrique.

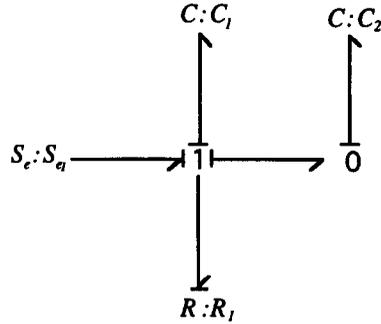


FIG. 12. Bond graph causal.

L'équation d'état formelle associée à ce modèle bond graph est donnée par (17),

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_2} \\ \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} u \quad \text{avec} \quad x = \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \end{bmatrix}, \quad u = [S_{e_1}]. \quad (17)$$

(1) *Critère graphique de Reinschke.* Considérons le digraphe structurel $G([Q_1])$ donné par la figure 13.

- (a) Chaque sommet x_i est accessible à partir de u .
- (b) Nous pouvons extraire au moins une famille de cycles d'ordre 2. Un choix possible est donné figure 14.

Le modèle représenté par l'équation (17) est donc structurellement commandable au sens des graphes.

(2) *Critère structurel relatif au bond graph.*

- (a) Les deux éléments dynamiques C_1 et C_2 en causalité intégrale sont accessibles à partir de la source d'effort S_{e_1} par au moins un chemin causal.
- (b) Calcul de $\text{rang_bg}(A \ B)$.
 - (i) Quand nous mettons le bond graph en causalité dérivée (figure 15), l'élément dynamique C_1 garde sa causalité intégrale.

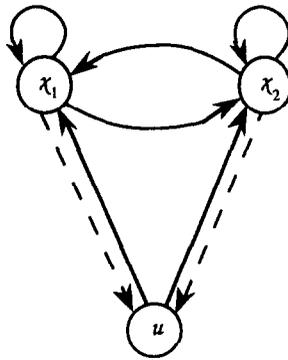


FIG. 13. Digraphe structurel $G(Q_1')$.

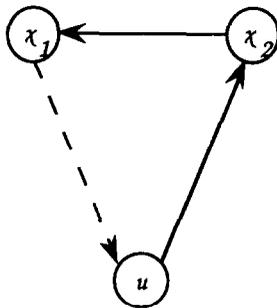


FIG. 14. Une famille de cycles d'ordre 2.

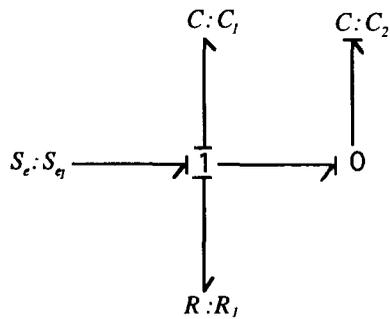


FIG. 15. Bond graph en causalité dérivée.

- (ii) La dualisation de la source d'effort S_{e_1} laisse inchangée la causalité intégrale de C_1 (figure 16) et entraîne une mise en causalité intégrale de C_2 ; cette dualisation n'est donc pas utile, et seul C_2 peut être mis en dérivée.

Donc $\text{rang_bg}(A \ B) = n - t = 1$, ce qui implique que le système n'est pas structurellement commandable.

- (3) Rang réel de C_s .

$$\det C_s = \det(B \ AB) = \det \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1^2 C_1} & -\frac{1}{R_1^2 C_2} \\ \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1^2 C_1} & -\frac{1}{R_1^2 C_2} \end{array} \right)$$

$$\det C_s = \frac{1}{R_1} \left(\frac{-1}{R_1^2 C_1} + \frac{-1}{R_1^2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R_1^2 C_1} + \frac{1}{R_1^2 C_2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{rang } C_s = 1. \tag{18}$$

Donc le système n'est commandable ni structurellement ni formellement.

(4) *Interprétation.* Le résultat obtenu par l'approche bond graph est le seul qui corresponde à la propriété réelle du système contrairement à ceux obtenus par d'autres critères structurels. Ces derniers utilisent l'hypothèse d'indépendance entre les termes des matrices A et B , alors que dans l'approche bond graph, la dépendance formelle entre ces termes est prise en compte.

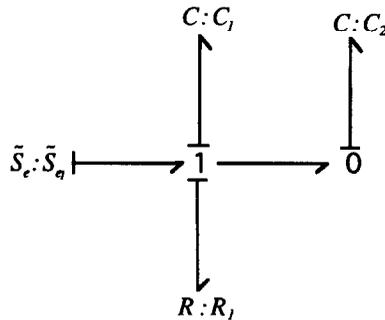


FIG. 16. Bond graph après dualisation de S_e .

IV.2. *Calcul Formel de Matrices*

Le calcul formel des matrices de commandabilité $C_s = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ et d'observabilité $(O_b)^t = [C^t \ (CA)^t \ \dots \ (CA^{n-1})^t]$ peut être relativement difficile dans le cas des systèmes de grandes dimensions, du fait du calcul des puissances successives de la matrice A . Dans le cas général, où la matrice A est quelconque, le recours à des algorithmes de calcul formel s'impose.

Dans la théorie des graphes, le i ème terme du vecteur $A^k B_j$ peut être interprété comme un chemin de longueur k reliant un sommet entrée u_j à un sommet état x_i . Pour calculer le gain de ce vecteur, il suffit de calculer le produit des poids des arcs qui composent le chemin. Dans le même esprit, nous proposons une interprétation bond graph des termes des matrices de commandabilité et d'observabilité.

IV.2.1. *Matrice de Commandabilité.*

THÉORÈME 6 [32]. *Dans la matrice C_s , le i ème terme du vecteur $A^k B_j$ est donné par (19):*

$$(A^k B_j)(i) = \sum_{h \in H} \left(\tilde{G}_{L_{k+1}}(u_j, x_i) \right)_h \quad \text{où } i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, m, \quad 0 \leq k \leq n - 1 \quad (19)$$

où $\tilde{G}_{L_{k+1}}(u_j, x_i)$ est le terme constant du gain du chemin causal de longueur L_{k+1} entre u_j associée à S_e ou S_f et x_i associée à I ou C en causalité intégrale.

H est la liste de tous les chemins causaux liant u_j et x_i .

IV.2.2. *Matrice d'Observabilité.*

THÉORÈME 7 [8]. *Dans la matrice O_b , le i ème terme du vecteur $C_r A^k$ est obtenu par (20):*

$$(C_r A^k)(i) = \left[\sum_{h \in H} \left(\tilde{G}_{L_k}(x_i, y_r) \right)_h \right] \times \tilde{g}(x_i) \\ \text{où } i = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, p, \quad 0 \leq k \leq n - 1 \quad (20)$$

avec $\tilde{G}_{L_k}(x_i, y_r)$, le terme constant du gain du chemin causal de longueur L_k entre x_i associée à I ou C en causalité intégrale et y_r associée à D_e ou D_j . H est la liste de tous les chemins causaux liant x_i et y_r . $\tilde{g}(x_i)$ est le terme constant du gain de x_i associée à I ou C en causalité intégrale [$\tilde{g}(I) = 1/I$ et $\tilde{g}(C) = 1/C$].

IV.2.3. *Matrice de Passage.* Le rang_bond graph de la matrice de commandabilité $C_s = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$ noté $\text{rang_bg}(A \ B)$ est égal à n si et seulement si le modèle est structurellement commandable. A partir de C_s , n colonnes indépendantes peuvent être extraites, de différentes façons, par exemple C_s^1 (21) et C_s^2 (22), ou toutes les matrices déduites par permutation à partir de C_s^1 et C_s^2 .

$$C_s^1 = \begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & \cdots & A^{\nu_1-1}B_1 & B_2 & AB_2 & \cdots \\ \times A^{\nu_2-1}B_2 & \cdots & B_q & AB_q & \cdots & A^{\nu_q-1}B_q \end{bmatrix}, \quad (21)$$

ou

$$C_s^2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_q & AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_q & \cdots \\ \times A^{\mu_1-1}B_1 & A^{\mu_2-1}B_2 & \cdots & A^{\mu_q-1}B_q \end{bmatrix} \quad (22)$$

avec $q \leq m$ et $\mu_i, i \in \{1, \dots, q\}$ sont les indices de commandabilité.

Les matrices C_s^1 et C_s^2 peuvent être utilisées comme matrices de changement de base [33, 34] pour faire du placement de pôles par exemple. Nous avons choisi de présenter uniquement le calcul formel de la matrice C_s^1 . Celui de C_s^2 a été présenté dans [8].

Le calcul de la forme C_s^1 est immédiat pour un modèle bond graph en observant qu'un sous-espace commandable est associé à chaque entrée.

Pour un modèle d'état déduit d'un bond graph, la matrice C_s^1 est toujours la même. Si $\text{rang_bg}[A] = n - q$, alors q sources d'entrées sont nécessaires pour commander le modèle, les $(q - 1)$ vecteurs colonnes indépendants de C_s^1 sont composés des $(q - 1)$ vecteurs colonnes B_j de la matrice B . Les $(n - q + 1)$ vecteurs colonnes indépendants restant sont composés des vecteurs $[B_j \ AB_j \ \cdots \ A^{n-q}B_j]$, avec j l'indice de la q ème entrée nécessaire. En effet, le $\text{rang_bg}(A \ B_j)$ calculé en utilisant la propriété 1 avec uniquement la j ème entrée dans le modèle bond graph, est égal à $n - q + 1$. Le choix de l'ordre des sources d'entrée est arbitraire. Donc le choix de n vecteurs colonnes linéairement indépendants donne C_s^1 (23),

$$C_s^1 = [B_j \ AB_j \ \cdots \ A^{n-q}B_j \ B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_{j-1} \ B_{j+1} \ B_{j+2} \ \cdots \ B_q]. \quad (23)$$

Les termes de C_s^1 sont calculés en utilisant (19).

PROPOSITION 3 [8]. *Le rang_bg(B) (resp. le rang_bg(C)) est égal au nombre de source d'entrées (resp. détecteurs de sortie) qui peuvent être dualisés sur le modèle bond graph en causalité intégrale, sans introduire de conflits et en acceptant les causalités dérivées sur les éléments dynamiques.*

REMARQUE. La proposition 2 nous permet de choisir le nombre et l'emplacement des sources et des capteurs nécessaires dans le modèle bond graph pour éviter la redondance et garantir ainsi le bon fonctionnement du système.

Ainsi, considérons le circuit électrique de la figure 17. Le modèle bond graph correspondant est donné par la figure 18.

Les vecteurs d'état et d'entrée sont les suivants:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{L_1} \\ p_{L_2} \\ p_{L_3} \\ p_{L_4} \\ q_{C_1} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \\ S_{e_3} \end{bmatrix}.$$

(a) *Commandabilité en état.*

(i) Quand la causalité dérivée est imposée au modèle, les éléments dynamiques $I: L_1, I: L_2$ et $I: L_3$ restent en causalité intégrale. Nous pouvons alors conclure que $\text{rang_bg}[A] = 5 - 3 = 2$ et que trois sources d'entrées sont nécessaires pour commander le modèle.

(ii) La dualisation séparée de chacune des sources permet de faire passer en causalité dérivée un des éléments restés en intégrale, ce qui s'exprime par:

$$\text{rang_bg}[A \ B_1] = 3, \quad \text{rang_bg}[A \ B_2] = 3, \quad \text{rang_bg}[A \ B_3] = 3.$$

(iii) Pour faire disparaître ces causalités intégrales, la dualisation simultanée des trois sources d'entrée est appliquée sur le modèle bond graph. Tous les éléments dynamiques (I, C) admettent une causalité dérivée. Nous pouvons alors conclure que $\text{rang_bg}[A \ B_1 \ B_2 \ B_3] = 5$. Le système est structurellement commandable en état par les trois sources.

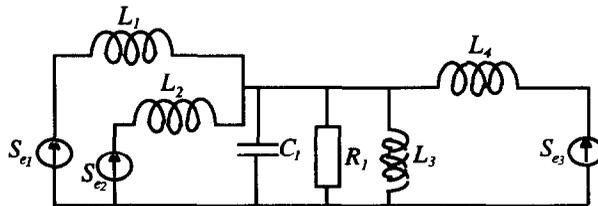


FIG. 17. Circuit électrique.

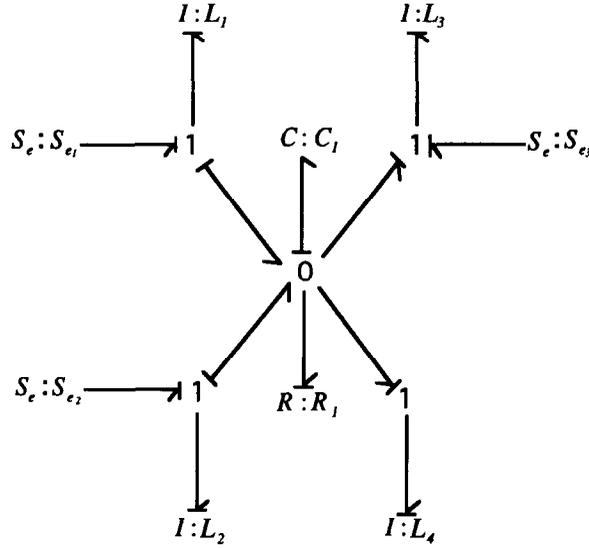


FIG. 18. Bond graph causal.

(b) Calcul de C_s^1 . $\text{rang_bg}[A \ B_1] = 3$, $\text{rang_bg}[A \ B_2] = 3$, $\text{rang_bg}[A \ B_3] = 3$, donc trois choix sont possibles pour former la matrice de passage C_s^1 .

$$C_s^1 = \begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \tag{24a}$$

ou

$$C_s^1 = \begin{bmatrix} B_2 & AB_2 & A^2B_2 & B_1 & B_3 \end{bmatrix} \tag{24b}$$

ou

$$C_s^1 = \begin{bmatrix} B_3 & AB_3 & A^2B_3 & B_1 & B_2 \end{bmatrix}. \tag{24c}$$

Pour une raison de simplicité de présentation, nous proposons l'expression de la forme (24a). Le calcul des différents termes de cette matrice se fait avec

l'équation (19).

$$C_s^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{L_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_1 C_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1 C_1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{-1}{L_1 R C_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

V. CONCLUSION

Connaissant, d'une part l'importance des propriétés structurelles utiles avant tout calcul numérique, d'autre part la complexité des calculs matriciels nécessaires dans l'étude des propriétés de commande, nous nous sommes intéressés à trouver des méthodes consacrées à la détermination, à partir du modèle bond graph, des matrices sous forme d'expressions formelles. Ces méthodes sont graphiques et se basent sur la règle de Mason appliquée aux bond graphs. Elles sont pratiques puisqu'elles reposent uniquement sur le parcours des chemins causaux dans un modèle bond graph. Ces règles de calcul nous permettent d'éviter le calcul matriciel qui n'est pas toujours facile à réaliser. Les résultats obtenus s'affilient pour l'étude de l'inversibilité [35], du placement de pôles par retour d'état [32] et du découplage par retour d'état. Une analyse graphique est faite lors de la résolution de chaque problème ainsi qu'une expertise à chaque étape pour bien choisir le nombre et l'emplacement des sources d'énergie et des capteurs nécessaires afin de commander ou de découpler les systèmes, et d'éviter ainsi la redondance.

REFERENCES

- 1 M. Paynter, *Analysis and Design of Engineering Systems*, MIT Press, 1961.
- 2 D. Karnopp et C. Rosenberg, *System Dynamics: A Unified Approach*, Wiley, New York 1975.

- 3 P. Breedveld, Essential gyrators and equivalence rules for 3-port junction structure, *J. Franklin Inst.* 318(2):77–89 (1984).
- 4 A. C. Bell et H. R. Martens, A comparison of linear graphs and bond graphs in the modeling process, Automatic Control Conference, 1974.
- 5 R. Ort et H. R. Martens, A topological procedure for converting a bond graph to linear graph, *J. Dynam. Systems Meas. Control* Sept. 1974, pp. 307–314.
- 6 K. J. Reinschke, *Multivariable Control: A Graph-Theoretic Approach*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 108, Springer-Verlag, 1988.
- 7 P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis, *Modélisation et Identification des Processus*, Tome 2, Méthodes et Techniques de L'ingénieur, Editions TECHNIP, 1992.
- 8 A. Rahmani, C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, Formal determination of controllability/observability matrices for multivariable systems modelled by bond-graph, *Proceedings of IMACS/SICE, International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems '92*, Kobe, Japan, Sept. 1992.
- 9 D. König, Graphak es matrixik, *Mater. Fiziol. Lapok.* 38:116–119 (1931).
- 10 C. L. Coates, Flow-graph solutions of algebraic equations, *IEEE Trans. Automat. Control* CT-6:170–187 (1959).
- 11 A. Rahmani, Etude Structurelle des systèmes Linéaires par l'Approche Bond Graph, Thèse d'Université, Lille, Oct. 1993.
- 12 C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, Grassman algebra and bond-graph modeling, *J. Franklin Inst.* 329(6):1129–1146 (1992).
- 13 R. C. Rosenberg, State space formulation for bond graph models of multiport systems, *J. Dynam. Systems Meas. Control.*, Mar. 1971, pp. 35–40.
- 14 A. S. Perelson et G. F. Oster, Bond graphs and linear graphs, *J. Franklin Inst.* 302(2):159–185 (1976).
- 15 S. Birkett, Combinatorial Analysis of Dynamical Systems, Thesis, Univ. of Ontario, 1990.
- 16 G. Frobenius, Über zerlegbare Determinanten, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1917, pp. 174–277.
- 17 C. T. Lin, Structural controllability, *IEEE Trans. Automat. Control* AC-19:201–208 (1974).
- 18 C. T. Lin System structure and minimal structure controllability, *IEEE Trans. Automat. Control* AC-22(5):855–862 (1977).
- 19 R. N. Shields et J. B. Pearson, Structural controllability of multi-input linear systems, *IEEE Trans. Automat. Control* AC-21(5):203–212 (1976).
- 20 K. Glover et L. M. Silverman, Characterization of structural controllability, *IEEE Trans. Automat. Control* (1976).
- 21 O. I. Franksen, P. Falster et F. J. Evans, Structural aspects of controllability and observability—II. Digraph decomposition, *J. Franklin Inst.* 308:105–124.
- 22 C. Schizas et F. J. Evans, Rank invariant transformations and the controllability of large-scale systems, *Electron. Lett.* 16:19–20 (1980).
- 23 C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, Structural controllability/observability of linear systems represented by bond graphs, *J. Franklin Inst.* 326(6):869–883 (1989).

- 24 A. Rahmani, C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, A new transfer matrix formal determination from bond graph models, 14th IMACS World Congress, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Juillet 1994.
- 25 E. G. Gilbert, Controllability and observability in multivariable control systems, *SIAM J. Control Ser. A* 2(1):128–151 (1963).
- 26 R. F. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems, *SIAM J. Control Ser. A* 1(2):153–192 (1963).
- 27 H. H. Rosenbrock, Correction to “The zeros of a system,” *Internat. J. Control* 20(3):525–527 (1974).
- 28 W. M. Wonham, Linear multivariable control: A geometric approach, *J. Differential Equations* 31:53–98 (1970).
- 29 R. C. Rosenberg et A. N. Andry, A controllability test for linear system using a graphical technique, IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems, Zürich, 1979.
- 30 N. Suda et T. Hatanaka, Structural properties of systems represented by bond graphs, in *C. & D. Systems: Analysis, Simulation & Control, Congrès IMACS*, 1986, pp. 73–80.
- 31 C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems, *J. Franklin Inst.* 328(1):55–70 (1991).
- 32 A. Rahmani, C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, Pole assignment for systems modelled by bond-graph, *J. Franklin Inst.*, 331B(3):229–314, (1994).
- 33 P. Brunovsk, A classification of linear controllable systems, *Kybernetika (Prague)* 6:173–187 (1970).
- 34 D. G. Luenberger, Canonical forms for linear multivariable systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 1967, pp. 290–293.
- 35 A. Rahmani, C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, A bond graph criterion for structural invertibility of linear systems, *J. Math. Comput. Simulation*, soumis à lecture.

Received 17 February 1995; final manuscript accepted 27 February 1996