MATHEMATICS

DOPPELVERHÄLTNISSE AUF EINER GERADEN IN EINER MOUFANGEBENE (CHAR. $\neq$ 2).

VON

ADOLF SCHLEIERMACHER

(Communicated by Prof. T. A. SPRINGER at the meeting of February 27, 1965)

1. *Einleitung*

Im Folgenden sei $\mathfrak{P}$ eine echte, dh. nichtdesarguessche Moufangebene der Char. $\neq$ 2. In $\mathfrak{P}$ sei eine feste Gerade g gegeben, O, U, V, E seien die Punkte eines nichtausgearteten Vierecks mit O, $V \in g$, und $\mathfrak{C}$ sei der zugehörige Koordinatenalternativkörper. (Zu den Definitionen siehe (1) Seite 186). Die Elemente von $\mathfrak{C}$ sind die Punkte $\neq V$ von g und sollen deshalb mit denselben Symbolen bezeichnet werden wie diese. Den Punkt V werden wir gelegentlich auch mit dem Symbol ∞ bezeichnen. $\mathfrak{C}$ ist natürlich ein echter, dh. nichtassoziativer Alternativkörper der Char. $\neq 2$.

Jordanhomomorphismus nennen wir einen Automorphismus α der additiven Gruppe von $\mathfrak{C}$, wenn α noch der Bedingung $(AB+BA)^\alpha = A^\alpha B^\alpha + B^\alpha A^\alpha$ für alle $A, B \in \mathfrak{C}$ genügt. Ein Jordanhomomorphismus α von $\mathfrak{C}$ kann auch als eine auf die Punkte von g wirkende Permutation angesehen werden, wenn man in natürlicher Weise $\infty^\alpha = \infty$ festsetzt.

Ein Element $A \in \mathfrak{C}$ soll zu $B \in \mathfrak{C}$ konjugiert heißen (in Zeichen $A \equiv B$), wenn es ein $C \in \mathfrak{C}$ mit $C \neq 0$ gibt, sodaß $A = C^{-1}(BC)$. In Lemma 1 wird sich ergeben, daß die Relation des Konjugiertseins auch bei Alternativkörpern eine Äquivalenzrelation ist. In Lemma 2 zeigen wir, daß für jede Konjugiertenklasse $\prec X \succ$ eines Elementes $X \in \mathfrak{C}$ und für jeden Jordanhomomorphismus α von $\mathfrak{C}$ gilt: $\prec X^\alpha \succ = \prec X \succ^\alpha$.

Für irgend vier verschiedene Punkte $A, B, C, D \in g$ definieren wir das Doppelverhältnis [1] $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ als die Konjugiertenklasse des Ausdrucks

$$[(A-D)^{-1}(B-D)]\,[(B-C)^{-1}(A-C)]$$

also:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec [(A-D)^{-1}(B-D)]\,[(B-C)^{-1}(A-C)] \succ .$$

Kommt unter den vier Punkten A, B, C, D der Punkt $V = \infty$ vor, so sollen in dem obigen Ausdruck einfach die beiden Terme, die ∞ enthalten, weggelassen werden.

[1]) Man vergleiche die Definitionen bei R. BAER ((2) Kap. III, 4) B. A. ROZENFELD ((3) Kap. VI, 9) und T. A. SPRINGER ((4) Seite 461).

Das so eingeführte Doppelverhältnis soll zur Untersuchung einiger geometrisch definierter Permutationsgruppen dienen, die auf der Punktmenge der Geraden g operieren.

So sei Γ die Gruppe der umkehrbaren Abbildungen von g auf sich, die durch Kollineationen der Ebene $\mathfrak{P}$ mit der Fixgeraden g induziert werden. Weiter sei Π die Gruppe der Abbildungen von g auf sich, die sich durch projektive Kollineationen induzieren lassen (Eine Kollination heisst projektiv, wenn sie ein Produkt zentraler Kollineationen ist.)

Die Projektion $\sigma(a, B, c)$ der Geraden a auf die Gerade c vom Zentrum B aus, für $B \notin a, c$, sei die Abbildung: $X \to XB \cap c$ für $X \in a$. Eine Folge von Projektionen heisse Projektivität. In einer Moufangebene ist die Gruppe Π mit der Gruppe aller Projektivitäten von g auf sich identisch.

Ist $\bar{\delta}$ eine Dualität von $\mathfrak{P}$ mit $g^{\bar{\delta}} \notin g$, so wollen wir unter der von $\bar{\delta}$ auf g induzierten Abbildung die Abbildung $\delta : X \xrightarrow{\delta} X^{\bar{\delta}} \cap g$ für $X \in g$ verstehen. Δ sei die Menge der Abbildungen von g auf sich, die sich durch Kollineationen oder Dualitäten induzieren lassen. Wie man leicht sieht, ist Δ eine Gruppe, die Γ als Untergruppe vom Index $\leqslant 2$ enthält. Aus Lemma 6 wird sich ergeben, dass Γ wirklich den Index 2 in Δ hat.

Ausser den bisher eingeführten werden wir noch die Gruppe Φ aller doppelverhältnistreuen umkehrbaren Abbildungen von g auf sich betrachten.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die folgenden Sätze formulieren, welche die Beziehungen zwischen dem Doppelverhältnis und den oben eingeführten Gruppen charakterisieren.

Satz 1: Genau dann existiert ein $\pi \in \Pi$ mit $A^\pi = A'$, $B^\pi = B'$, $C^\pi = C'$ und $D^\pi = D'$, wenn

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}$$

Satz 2: (a) Sei $\delta \in \Delta$. Dann gibt es einen Jordanhomomorphismus α von $\mathfrak{C}$, sodaß

$$\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\alpha$$

für jedes Quadrupel $A, B, C, D \in g$ aus lauter verschiedenen Punkten gilt.

(b) Seien A, B, C, D und A', B', C', D' Quadrupel aus lauter verschiedenen Punkten auf g mit

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\alpha$$

für einen gewissen Jordanhomomorphismus α von $\mathfrak{C}$. Dann gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ und ein $\vartheta \in \Delta - \Gamma$, sodaß $A^\gamma = A'$, $B^\gamma = B'$, $C^\gamma = C'$, $D^\gamma = D'$ und $A^\vartheta = A'$, $B^\vartheta = B'$, $C^\vartheta = C'$, $D^\vartheta = D'$.

Satz 3: Sei $\gamma \in \Gamma$ und $\gamma \in \Phi$. Dann folgt $\gamma \in \Pi$. (In Zusammenhang mit Satz 1 ergibt dies $\Pi = \Gamma \cap \Phi$).

Satz 4: Sei δ eine Abbildung von g auf sich und α ein Jordanhomomorphismus von $\mathfrak{C}$ und es gelte

$$\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\alpha$$

für alle Quadrupel A, B, C, D aus lauter verschiedenen Punkten auf g. Dann folgt $\delta \in \Delta$.

2. *Algebraische Hilfsmittel*

Mithilfe der in jedem Alternativkörper geltenden Moufangidentitäten und Kürzungsregeln (siehe (1) Seite 160 bzw. 161) kann man die folgende Identität beweisen:

(1) $[W(XY^{-1})]\,(YZ^{-1}) = Y^{-1}([(YW)X]Z^{-1})$ für alle $W, X, Y, Z \in \mathfrak{C}$. Beweis [1]: $Y[(WS)(YZ^{-1})] = [Y(WS)Y]Z^{-1} = [(YW)(SY)]Z^{-1}$. Daraus folgt $(WS)(YZ^{-1}) = Y^{-1}([(YW)(SY)]Z^{-1})$. Setzt man $S = XY^{-1}$, also $SY = X$, so folgt $[W(XY^{-1})](YZ^{-1}) = Y^{-1}([(YW)X]Z^{-1})$.

(2) Jeder echte Alternativkörper $\mathfrak{C}$ ist eine Cayleyalgebra über seinem Zentrum $\mathfrak{Z}$. (siehe (1) Seite 175 Satz 13).

(3) In jeder Cayleyalgebra $\mathfrak{C}$ über $\mathfrak{Z}$ insbesondere im Fall Char. $\mathfrak{C} \neq 2$, auf den wir uns beschränken, ist eine nichtausgeartete quadratische Form $N(X)$, die sog. Normenform, definiert, sodaß für $X, Y \in \mathfrak{C}$ gilt: $N(XY) = N(X)N(Y)$. (siehe (1) Seite 171–73 und (5) Seite 60).

(4) Sei $\mathfrak{C}_0 = \{X \mid N(X+Z) - N(X) - N(Z) = 0 \text{ für alle } Z \in \mathfrak{Z}\} = \mathfrak{Z}^\perp$. Es gilt (siehe zB. (5) Seite 62):

(a) $\mathfrak{C}_0 \oplus \mathfrak{Z} = \mathfrak{C}$.

(b) Die sog. kanonische Involution ι: $X = Z + X_0 \xrightarrow{\iota} \bar{X} = Z - X_0$, wo $Z \in \mathfrak{Z}$, $X_0 \in \mathfrak{C}_0$, ist ein Antiautomorphismus von $\mathfrak{C}$.

(c) Für alle $X \in \mathfrak{C}$ ist $N(X) = X\bar{X} = \bar{X}X$, also $N(X) = -X^2$ für $X \in \mathfrak{C}_0$.

(d) Ist $X \neq 0$, so auch $N(X) \neq 0$ und $X^{-1} = N(X)^{-1}\bar{X}$.

(e) Sind $A, B \in \mathfrak{C}_0$ und gilt $A \perp B$ bzgl. N, so folgt $AB = -BA$.

(5) Als Spur eines Elementes $A \in \mathfrak{C}$ bezeichnet man das Element $Sp(A) = \frac{1}{2}(A + \bar{A})$ aus $\mathfrak{Z}$. Für die Spur gilt:

(a) $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B)$ und $Sp(ZA) = Z[Sp(A)]$ für $A, B \in \mathfrak{C}, Z \in \mathfrak{Z}$.

(b) $Sp(AB) = Sp(BA)$ und $Sp(A(BC)) = Sp((AB)C)$ für bel. $A, B, C \in \mathfrak{C}$.

Nun sei $\mathfrak{C}$ wie in der Einleitung die Cayleyalgebra bzgl. des Quadrupels O, U, V, E, und $\mathfrak{C}_1$ sei die Algebra bzgl. eines Quadrupels O_1, U_1, V_1, E_1 mit $O_1 = O$ und $V_1 = V$. Dann ergibt sich:

(6) Aus $EU \cap OV = 1 = E_1U_1 \cap O_1V_1$ folgt

[1]) Diesen Beweis verdanke ich Frau Prof. MOUFANG.

(a) $\mathfrak{C}_1$ hat dieselbe Addition wie $\mathfrak{C}$, und die Multiplikation "$\circ$" wird durch $A \circ B = (AQ^{-1})(QB)$ mit festem passendem Q für alle $A, B \in \mathfrak{C}_1$ beschrieben.

(b) $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}$ haben dieselbe Normenform.

Beweis: (a) Es genügt, den Fall $U_1 = U$ zu betrachten, da es stets eine Translation mit der Achse g gibt, die U_1 in U überführt. Bei einer Algebra $\mathfrak{C}_1$ bzgl. O, U, V, $E_1 = (Q, 1)$ lassen sich aber die Behauptungen aus (a) leicht verifizieren.

(b) Wegen (a) haben $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}$ dasselbe Zentrum. Weiter folgt aus (a), daß $N(A \circ B) = N(A)N(B) = N(A) \circ N(B)$. Also ist N auch Normen form von $\mathfrak{C}_1$.

Lemma 1: $A \equiv B$ genau dann, wenn $N(A) = N(B)$ und $Sp(A) = Sp(B)$.

Beweis: Ist $A = C^{-1}BC$ für ein gewisses $C \in \mathfrak{C}$, so ist $N(A) = N(C^{-1}BC) = N(B)$ und $Sp(A) = Sp(C^{-1}(BC)) = Sp((BC)C^{-1}) = Sp(B)$ nach (3) und (5b).

Sei umgekehrt $N(A) = N(B)$ und $Sp(A) = Sp(B)$. Dann gibt es ein $Z \in \mathfrak{Z}$ und $A_0, B_0 \in \mathfrak{C}_0$ mit $A = Z + A_0$, $B = Z + B_0$ und $A_0^2 = B_0^2 = -N(A_0)$, und es wird $(A_0 + B_0)^{-1}A(A_0 + B_0) = B$.

Lemma 2: Sei α ein Jordanhomomorphismus von $\mathfrak{C}$. Dann gilt für alle Konjugiertenklassen $\prec X^\alpha \succ = \prec X \succ^\alpha$.

Beweis: Lemma 2 folgt aus Lemma 1, sowie der von Smiley (siehe (6) Seite 166) bewiesenen Tatsache, daß die Jordanhomomorphismen unter den umkehrbaren semilinearen Transformationen des Vektorraums $\mathfrak{C}$ über $\mathfrak{Z}$ durch die Beziehungen $N(X)^\alpha = N(X^\alpha)$ und $Sp(X)^\alpha = Sp(X^\alpha)$ charakterisiert sind.

Nun benötigen wir noch zwei Hilfsformeln:

(i) $P^{-1} - Q^{-1} = P^{-1}(Q-P)Q^{-1} = Q^{-1}(Q-P)P^{-1}$ für $P, Q \neq 0$.
Dies ist trivial. Klammern erübrigen sich, da nur mit zwei Elementen gerechnet wird.

(ii) Sind A, B, C Elemente einer Quaternionenunteralgebra $\mathfrak{B}$ (Def. siehe (5) Seite 61) mit $ABC = CBA$, so gilt für $D \in \mathfrak{C}$ stets $((DA)B)C = D(ABC)$ und $(ABC)D = A(B(CD))$.

Beweis: Wir zerlegen $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^\perp = \mathfrak{B}L$, wo $L \in \mathfrak{B}^\perp$, wie zB. bei Jacobson (siehe (5) Seite 60). Dann ist $D = D_1 + D_2L$. mit $D_1, D_2, \in \mathfrak{B}$. Mit A, B, C sind auch $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ in $\mathfrak{B}$, wie sich aus (4d) ergibt. Nun folgt:

$$DA = (D_1 + D_2L)(A + OL) = D_1A + (D_2\bar{A})\,L,\ (DA)B =$$
$$(D_1A + (D_2\bar{A})L)(B + OL) = D_1AB + (D_2\bar{A}\bar{B})\,L,\ ((DA)B)C =$$
$$(D_1AB + (D_2\bar{A}\bar{B})L)(C + OL) = D_1ABC + (D_2\bar{A}\bar{B}\bar{C})L =$$
$$D_1ABC + (D_2\overline{A\,BC})L = D_1ABC + (D_2\overline{A\,BC})L = D(ABC)$$

und auf ähnliche Weise

$$A(B(CD)) = ABCD_1 + (D_2CBA)L = ABCD_1 + (D_2ABC)L = (ABC)D.$$

3. *Elementare Eigenschaften des Doppelverhältnisses*

(7) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf g und sei $R \neq 0, 1, \infty$ gegeben. Dann gibt es mindestens einen Punkt D, sodaß $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec R \succ$, falls $R \in \mathfrak{Z}$ genau einen.
Wir übergehen den einfachen Beweis.

(8) Die vier Punkte $A, B, C, D \in g$ sind genau dann in harmonischer Lage, wenn $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = -1$.
Den Beweis für (8) findet man bei Havel (siehe (7) Seite 78)

(9) Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte $\neq \infty$ auf g, so gilt:
$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec [(A-B)^{-1} - (A-D)^{-1}]\, [(A-B)^{-1} - (A-C)^{-1}]^{-1} \succ.$

Beweis: Sei $[(A-D)^{-1}(B-D)]\, [(B-C)^{-1}(A-C)] = R$ und $R' = [[(A-D)^{-1}(B-D)](B-C)^{-1}](A-C)$. Wegen (3), (5b) und Lemma 1 ist $R \equiv R'$ und deshalb $R' \in \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$.
Aus den Kürzungsregeln ergibt sich $(A-D)^{-1}(B-D) = (R'(A-C)^{-1})(B-C)$ und daraus folgt

$$[(A-D)^{-1}(B-D)](A-B)^{-1} = [(R'(A-C)^{-1})(B-C)](A-B)^{-1}.$$

Auf die letzte Gleichung wenden wir (i) und (ii) an, wobei wir links $P = A-D$, $Q = A-B$ und rechts $P = A-C$, $Q = A-B$ einsetzen. Natürlich erfüllen die Elemente P, $(P-Q)$, Q aus (i) die Voraussetzungen von (ii). Es folgt also $(A-B)^{-1} - (A-D)^{-1} = R'[(A-B)^{-1} - (A-C)^{-1}]$ und damit ist (9) bewiesen.

Ist $X \neq 0$, so überlegt man sich, daß $\prec X^{-1} \succ = \prec X \succ^{-1}$ und

$$1 - \prec X \succ = \prec 1 - X \succ.$$

(10) Es gelten die folgenden Vertauschungsregeln:

(a) $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}^{-1}$

(b) $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}.$

Beweis: (a) Man überlegt sich, daß

$$([(A-C)^{-1}(B-C)][(B-D)^{-1}(A-D)])^{-1} =$$
$$[(A-D)^{-1}(B-D)][(B-C)^{-1}(A-C)]$$

konjugiert ist zu $([(B-D)^{-1}(A-D)][(A-C)^{-1}(B-C)])^{-1}$. Ist einer der vier Punkte $= \infty$, so läßt man die Terme, worin dieser Punkt vorkommt, weg.

(b) Die Fälle, wo einer der Punkte gleich ∞ ist, erledigen sich durch triviale Rechnungen.
Sind alle vier Punkte von ∞ verschieden, so wenden wir (9) an:

$$R = [(A-B)^{-1} - (A-D)^{-1}][(A-B)^{-1} - (A-C)^{-1}]^{-1} \in \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$$

$$1 - R = [(A-B)^{-1} - (A-C)^{-1} - (A-B)^{-1} + (A-D)^{-1}][(A-B)^{-1} -$$
$$-(A-C)^{-1}]^{-1} = [(A-C)^{-1} - (A-D)^{-1}][(A-C)^{-1} - (A-B)^{-1}]^{-1} \in \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}.$$

Damit ist (b) bewiesen.

(c) Es genügt, die erste Relation zu beweisen, da die übrigen sich dann aus (a) und (b) ergeben. Der Beweis erfolgt durch eine leichte Rechnung, wobei man (3), (5b) und Lemma 1 benutzt.

Faßt man das Doppelverhältnis von vier Punkten $A, B, C, D \in g$ als eine Punktmenge $\leqslant g$ auf, so kann man die folgende Aussage machen:

(11) Das Doppelverhältnis von vier Punkten $A, B, C, D \in g$ hängt nicht von der Wahl der Grundpunkte U und E des Koordinatensystems ab, sondern nur von den drei Punkten 0, 1 und ∞.

Beweis: Sei $\mathfrak{C}^0$ eine Algebra, die von einer andern Wahl der Grundpunkte herrührt. Dann hat wegen (6a) die Algebra $\mathfrak{C}^0$ dieselbe Addition wie $\mathfrak{C}$ und die Multiplikation $A \circ B = (AQ^{-1})(QB)$. Wir betrachten vier Punkte $A, B, C, D \in g$ und ihr Doppelverhältnis bzgl. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^0$. Das Doppelverhältnis bzgl. $\mathfrak{C}^0$ werde mit $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^0$ bezeichnet.

Ist einer der vier Punkte gleich ∞, so dürfen wir wegen der Vertauschungsregeln (10c) annehmen $A = \infty$. Dann ist

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec (B-D)(B-C)^{-1} \succ = \prec (B-D) \circ (B-C)^{-1} \succ = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^0$$

wegen Lemma 1 zusammen mit (3) und (5b).

Sind alle vier Punkte $\neq \infty$, so ist (9) anwendbar:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec [(A-B)^{-1} - (A-D)^{-1}] \; [(A-B)^{-1} - (A-C)^{-1}]^{-1} \succ =$$
$$\prec [(A-B)^{-1} - (A-D)^{-1}] \circ [(A-B)^{-1} - (A-C)^{-1}]^{-1} \succ = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^0$$

wieder wegen (3), (5b) und Lemma 1.

4. *Geometrische Hilfssätze*

(12) Die Abbildung $X \xrightarrow{\iota} \bar{X}$ liegt in Φ.

Beweis: Nehmen wir zunächst an, die vier Punkte A, B, C, D seien $\neq \infty$, sodass sich nach (9) ergibt

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec [(A-B)^{-1} - (A-D)^{-1}] \; [(A-B)^{-1} - (A-C)^{-1}]^{-1} \succ .$$

Aus (4c) bzw. (5) folgt $N(X)=N(\bar{X})$ und $Sp(X)=Sp(\bar{X})$ und daraus $X\equiv\bar{X}$ nach Lemma 1. Also können wir schreiben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec \overline{[(A-B)^{-1}-(A-D)^{-1}]\,[(A-B)^{-1}-(A-C)^{-1}]^{-1}} \succ$$
$$= \prec [(\bar{A}-\bar{B})^{-1}-(\bar{A}-\bar{C})^{-1}]^{-1}[(\bar{A}-\bar{B})^{-1}-(\bar{A}-\bar{D})^{-1}] \succ$$

Nach Lemma 1, (3) und (5b) ist

$$\prec [(\bar{A}-\bar{B})^{-1}-(\bar{A}-\bar{C})^{-1}]^{-1}[(\bar{A}-\bar{B})^{-1}-(\bar{A}-\bar{D})^{-1}] \succ$$
$$= \prec [(\bar{A}-\bar{B})^{-1}-(\bar{A}-\bar{D})^{-1}][(\bar{A}-\bar{B})^{-1}-(\bar{A}-\bar{C})^{-1}]^{-1} \succ = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{D} & \bar{C} \end{bmatrix}.$$

Also $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{D} & \bar{C} \end{bmatrix}$.

Ist einer der Punkte gleich ∞, so können wir uns wegen der Vertauschungsregeln (10c) auf den Fall $A=\infty$ beschränken. In diesem Fall ist

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec (B-D)(B-C)^{-1} \succ = \prec \overline{(B-D)(B-C)^{-1}} \succ$$
$$= \prec (\bar{B}-\bar{C})^{-1}(\bar{B}-\bar{D}) \succ = \prec (\bar{B}-\bar{D})(\bar{B}-\bar{C})^{-1} \succ = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{D} & \bar{C} \end{bmatrix}$$

nach analogen Schlüssen wie oben.

(13) Jede Abbildung der Form $X \to X+C$, $\infty \to \infty$ gehört zu Φ. Dies ist trivial.

(14) Jede Abbildung der Form $X \to QX$, $Q \neq 0$ fest, $\infty \to \infty$ gehört zu Φ.

Beweis: Betrachten wir zunächst vier Punkte $A, B, C, D \neq \infty$. Dann sind auch die vier Punkte QA, QB, QC, QD von ∞ verschieden und nach (9) ist

$$\begin{bmatrix} QA & QB \\ QD & QC \end{bmatrix} = \prec [(QA-QB)^{-1}-(QA-QD)^{-1}][(QA-QB)^{-1}-(QA-QC)^{-1}]^{-1} \succ.$$
$$= \prec ([(A-B)^{-1}-(A-D)^{-1}]Q^{-1})(Q[(A-B)^{-1}-(A-C)^{-1}]^{-1}) \succ$$

Der letzte Ausdruck in den spitzen Klammern ist nach (3), (5b) und Lemma 1 konjugiert zu

$[(A-B)^{-1}-(A-D)^{-1}]\,[(A-B)^{-1}-(A-C)^{-1}]^{-1} \in \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$. Daher folgt

$$\begin{bmatrix} QA & QB \\ QD & QC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}.$$

Sei nun o.B.d.A. der Punkt A gleich ∞. Dann ist

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec (B-D)\,(B-C)^{-1} \succ = \prec [Q(B-D)]\,[(B-C)^{-1}Q^{-1}] \succ$$

wegen (3), (5b) und Lemma 1, und es folgt

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \prec (QB-QD)(QB-QC)^{-1} \succ = \begin{bmatrix} QA & QB \\ QD & QC \end{bmatrix}.$$

(15) Die Abbildung $X \to X^{-1}$, $0 \Leftrightarrow \infty$, gehört zu Φ.

Beweis: Sind A, B, C, D vier Punkte $\neq 0, \infty$, so sind auch die Punkte $A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, D^{-1} \neq 0, \infty$ und

$$R' = [(A^{-1} - D^{-1})^{-1}(B^{-1} - D^{-1})]\,[(B^{-1} - C^{-1})^{-1}(A^{-1} - C^{-1})] \in \begin{bmatrix} A^{-1} & B^{-1} \\ D^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$R = [(A-D)^{-1}(B-D)]\,[(B-C)^{-1}(A-C)] \in \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}.$$

Aus (i) ergibt sich:

$$\begin{aligned} R' &= [(D^{-1}(D-A)A^{-1})^{-1}(D^{-1}(D-B)B^{-1})]\,[(C^{-1}(C-B)B^{-1})^{-1}(C^{-1}(C-A)A^{-1})] \\ &= [(A(D-A)^{-1}D)(D^{-1}(D-B)B^{-1})][(B(C-B)^{-1}C)(C^{-1}(C-A)A^{-1})]. \end{aligned}$$

Man sieht nun mithilfe von (3) sofort, dass $N(R) = N(R')$. Um $Sp(R) = Sp(R')$ zu beweisen, formen wir R' nach (ii) um:

$$R' = [A\{(D-A)^{-1}[(D-B)B^{-1}]\}]\,[\{[B(C-B)^{-1}](C-A)\}A^{-1}].$$

Zur Abkürzung setzen wir $A - C = S_1$, $B - C = S_2$, $A - D = T_1$ und $B - D = T_2$, sodass also $T_2 = S_2 - S_1 + T_1$.
Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} Sp(R') &= Sp([A\{T_1^{-1}(T_2B^{-1})\}]\,[\{(BS_2^{-1})S_1\}A^{-1}]) = \\ &= Sp(\{T_1^{-1}(T_2B^{-1})\}\,\{(BS_2^{-1})S_1\}) \\ &= Sp([T_1^{-1}(S_2B^{-1})]\,[(BS_2^{-1})S_1]) \\ &\quad - Sp([T_1^{-1}(S_1B^{-1})]\,[(BS_2^{-1})S_1]) \\ &\quad + Sp([T_1^{-1}(T_1B^{-1})]\,[(BS_2^{-1})S_1]) \end{aligned}$$

Es genügt jetzt, den mittleren Ausdruck zu betrachten, da bei den beiden andern das störende B sofort herausfällt, wenn man (5b) und die Kürzungsregeln anwendet.

Um den mittleren Ausdruck umzuformen, wenden wir auf $W = T_1^{-1}$, $X = S_1$, $Y = B$, $Z = S_2$ die Identität (1) an und erhalten

$$[T_1^{-1}(S_1B^{-1})](BS_2^{-1}) = B^{-1}([(BT_1^{-1})S_1]S_2^{-1}).$$

Also wird $Sp([T_1^{-1}(S_1B^{-1})]\,[(BS_2^{-1})\,S_1])$

$$\begin{aligned} &= Sp(\{[T_1^{-1}(S_1B^{-1})](BS_2^{-1})\}\,S_1) && \text{nach (5b)} \\ &= Sp(\{B^{-1}([(BT_1^{-1})S_1]S_2^{-1})\}\,S_1) \\ &= Sp(B^{-1}\{([(BT_1^{-1})S_1]S_2^{-1})\,S_1\}) && \text{nach (5b)} \\ &= Sp(B^{-1}\{(BT_1^{-1})[S_1S_2^{-1}\,S_1]\}) && \text{nach einer der Moufangidentitäten} \\ &= Sp(\{B^{-1}(BT_1^{-1})\}\,[S_1S_2^{-1}\,S_1]) && \text{nach (5b)} \\ &= Sp(T_1^{-1}[S_1S_2^{-1}S_1]) = Sp((T_1^{-1}\,S_1)(S_2^{-1}S_1)) && \text{nach (5b).} \end{aligned}$$

Das Letzte ist der Ausdruck, den wir bei Betrachtung von $Sp(R)$ erhalten hätten. Damit ist gezeigt, daß $Sp(R) = Sp(R')$ und aus Lemma 1 folgt $R \equiv R'$.

Die Sonderfälle, wo einer der Punkte gleich 0 oder ∞ ist, erledigen sich durch einfachere Betrachtungen, die wir übergehen können.

Lemma 3: Die Abbildungen aus (13–15) der Form $X \to X+C$ $X \to QX$ und $X \to X^{-1}$ erzeugen Π.

Beweis: Die von den Abbildungen (13–15) erzeugte Gruppe, die wir zunächst mit Λ bezeichnen wollen, ist jedenfalls eine dreifach transitive Untergruppe von Π.

Gehen wir zu einem neuen Koordinatensystem mit den Grundpunkten $O_1 \in g$, U_1, $V_1 \in g$, E_1 und der zugehörigen Cayleyalgebra $\mathfrak{C}_1$ über, so können wir die Abbildungen $X \to X +_1 C$, $X \to Q \circ_1 X$ und $X \to X^*$ betrachten, die mithilfe der Operationen "$+_1$" und "$\circ_1$" in $\mathfrak{C}_1$ und dem Inversen bzgl. "$\circ_1$" definiert sind. Diese Abbildungen liegen in Λ, denn sie sind in Λ konjugiert zu Abbildungen der Form

$$X \to X+C,\ X \to (QR^{-1})(RX) \text{ bzw. } X \to X^{-1}.$$

Jetzt sei $\pi \in \Pi$ eine beliebige Projektivität, die wir als Produkt von n Projektionen $\sigma_i = \sigma(g_{i-1}, P_i, g_i)$ schreiben können: $\pi = \prod_{i=1}^{n} \sigma(g_{i-1}, P_i, g_i)$, wobei natürlich $g_0 = g = g_n$. Wegen (11) und weil jede echte Moufangebene unendlich viele Punkte enthält, kann der Punkt U im Quadrupel O, U, V, E so gewählt werden, dass $P_i \notin UV$ für $i = 1, \ldots, n$ und $U \notin g_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ Dann wird

$$\pi = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i = \prod_{i=1}^{n} \sigma(g_{i-1}, P_i, g_i) = \prod_{i=1}^{n} \sigma(g, U, g_{i-1})\, \sigma(g_{i-1}, P_i, g_i)\, \sigma(g_i, U, g).$$

Nun können wir uns auf die Betrachtung von Abbildungen der Form $\sigma(g, U, a)\, \sigma(a, B, c)\, \sigma(c, U, g)$ beschränken.

Fall a. $B \notin g$. Daraus folgt $\sigma(a, B, c) = \sigma(a, B, g)\sigma(g, B, c)$, also

$$\sigma(g, U, a)\, \sigma(a, B, c)\, \sigma(c, U, g) = \sigma(g, U, a)\, \sigma(a, B, g)\, \sigma(g, B, c)\, \sigma(c, U, g)$$

und wir brauchen nur die Abbildung $\sigma(g, U, a)\, \sigma(a, B, g)$ zu betrachten, weil $\sigma(g, B, c)\, \sigma(c, U, g)$ dieselbe Gestalt hat. Berechnen wir nun das Bild des Punktes $S \in g$ bei der Abbildung $\sigma(g, U, a)\, \sigma(a, B, g)$ in einem Koordinatensystem mit den Grundpunkten O_1, U_1, V_1, E_1, wobei $U_1 = U$ und $V_1 = a \cap g$. (Falls $a = g$, haben wir die identische Abbildung vor uns.) Die Berechnung ergibt, dass sich $\sigma(g, U, a)\, \sigma(a, B, g)$ aus Abbildungen der Form (13–15) in den neuen Operationen "$+_1$" und "$\circ_1$" zusammensetzt. Da diese wie wir gesehen haben in Λ liegen, ist der Fall a erledigt.

Fall b. Diesmal berechnen wir das Bild von S bei der Abbildung $\sigma(g, U, a)\, \sigma(a, B, c)\, \sigma(c, U, g)$, und zwar legen wir die Grundpunkte O_1, U_1, V_1, E_1 so, dass $B = O_1$ und $a \cap g = V_1$, $U_1 = U$. Wieder ergibt die Berechnung, die wir übergehen, das gewünschte Resultat.

Für die nun folgenden Lemmata brauchen wir einige Definitionen:

$\Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ sei die Gruppe aller linearen Transformationen ω von $\mathfrak{C}$, die $N(X^{\omega}) = N(X)Z$ mit festem nur von ω abhängendem $Z \neq 0$ erfüllen.

$0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ sei die orthogonale Gruppe von $\mathfrak{C}$ bzgl. N, und $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ sei die Untergruppe der Rotationen, d.i. der Isometrieen mit Determinante 1. Mit $0(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{Z}, N)$ bezeichnen wir die Untergruppe von $0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$, welche den Punkt 1 und damit den Unterraum $1^\perp = \mathfrak{C}_0$ invariant läßt.

Natürlich ist $0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N) \leqslant \Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$. Alle diese Gruppen lassen sich in naheliegender Weise auch als Permutationsgruppen auf g auffassen, indem man für eine bel. Abbildung ω aus einer dieser Gruppen die Konvention $\infty^\omega = \infty$ macht.

Lemma 4: Jede Abbildung σ aus $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ ist eine Projektivität von g auf sich, dh. $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N) \leqslant \Pi$.

Beweis: $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ wird durch die Drehungen um 180° erzeugt, dh. durch Abbildungen, die in einer Ebene $\mathfrak{E}$ jeden Vektor X in $-X$ überführen und die in $\mathfrak{E}^\perp$ jeden Vektor festlassen. (siehe (8) Theorem 3.22, p. 134).

Wählen wir zunächst eine Ebene $\mathfrak{E}$, welche 1 enthält. Dann gibt es ein $E \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{C}_0$ mit $E \neq 0$ und eine orthogonale Basis $1, E_1 = E, \ldots, E_7$ mit $-E_iE_j = E_jE_i$ für $i \neq j$ und $N(E_i) = -E_i^2$. Sei $X = Z_0 + \sum_{i=1}^{7} Z_iE_i$ und sei β die Abbildung $X \xrightarrow{\beta} N(E_1^{-1})E_1XE_1 = -Z_0 - Z_1E_1 + \sum_{i=2}^{7} Z_iE_i$.

β ist erstens eine Projektivität von g auf sich und zweitens die Drehung um 180° in $\mathfrak{E}$.

Zu einer beliebigen Ebene $\mathfrak{E}'$ in $\mathfrak{C}$ gibt es nun ein $A \in \mathfrak{E}'$ mit $A \neq 0$ und eine Ebene $\mathfrak{E}$ durch 1, sodaß $A\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$, denn die Gesamtheit der Ebenen durch 1 geht bei der Abbildung $X \xrightarrow{\alpha} AX$ in die Gesamtheit der Ebenen durch A über. Ist β die Drehung um 180° in $\mathfrak{E}$, so ist $\alpha^{-1}\beta\alpha$ die Drehung um 180° in $\mathfrak{E}'$. Da $\alpha^{-1}\beta\alpha$ eine Projektivität ist, haben wir bewiesen, daß die Gruppe $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ durch Projektivitäten erzeugt wird.

Lemma 5: $\Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ ist eine Untergruppe von Φ und zwar gerade die Standuntergruppe der Punkte 0 und ∞, dh. kurz $\Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N) = \Phi_{0\infty}$.

Beweis: Wir zeigen zuerst $\Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N) \leqslant \Phi$. Nach Lemma 4 ist $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N) \leqslant \Pi$. Aus Lemma 3 zusammen mit (13–15) folgt $\Pi \leqslant \Phi$. Aus (12) ergibt sich daher $0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N) \leqslant \Phi$.

Sei nun $\omega \in \Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$. Dann gibt es ein Z mit $N(X^\omega) = N(X)Z$, und es folgt $Z = N(P)$, wenn $P = 1^\omega$. Die Abbildung $X \xrightarrow{\alpha} P^{-1}X^\omega$ liegt in $0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$, denn $N(X^\alpha) = N(P^{-1})N(X^\omega) = N(P^{-1})N(X)N(P) = N(X)$. Also gilt $\alpha \in \Phi$. Da die Abbildung $X \to P^{-1}X$ nach (14) in Φ liegt, folgt $\omega \in \Phi$.

Nun betrachten wir eine Abbildung φ aus $\Phi_{0\infty}$ und es sei $1^\varphi = P$. Wegen $0^\varphi = 0$ ist $P \neq 0$, und die Abbildung $X \xrightarrow{\pi} P^{-1}X$ liegt in $\Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$. Also haben wir nur nachzuweisen, daß $\varphi_1 = \varphi\pi \in \Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$. Wegen (14) ist $\varphi_1 \in \Phi$.

Aus (8) folgt, daß φ_1 Quadrupel in harmonischer Lage auf ebensolche Quadrupel abbildet. Daher und weil φ_1 die drei Fixpunkte 0, 1 und ∞ hat, ist φ_1 nach Havel (siehe (9) Seite 316) ein Jordanhomomorphismus von $\mathfrak{C}$. Nach Smiley (siehe (6) Seite 166) ist φ_1 somit eine semilineare Transformation von $\mathfrak{C}$ mit $Sp(X^{\varphi_1})=Sp(X)^{\varphi_1}$. Aus

$$\prec X^{\varphi_1}\succ=\begin{bmatrix}\infty & 0\\ X^{\varphi_1} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\infty & 0\\ X & 1\end{bmatrix}=\prec X\succ$$

folgt aber $N(X^{\varphi_1})=N(X)$ und $Sp(X^{\varphi_1})=Sp(X)$. Nun folgt $Sp(X)=Sp(X)^{\varphi_1}$ für alle X und daher ist φ_1 linear, und $N(X^{\varphi_1})=N(X)$ zieht $\varphi_1\in 0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ nach sich. Damit ist gezeigt, daß $\varphi_1\in\Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$.

L e m m a 6: Die Abbildung $\iota: X\xrightarrow{\iota}\overline{X}$ gehört zu $\Delta-\Gamma$.

Beweis: Wir bezeichnen mit $[M, B]$ die Gerade $Y=MX+B$, mit (M) den Schnittpunkt der Geraden $Y=MX$ und UV und mit $[C]$ die Gerade $X=C$. Dann liefert die Abbildung $(X, Y)\to[-\overline{X}, \overline{Y}]$, $(M)\to[\overline{M}]$, $\infty\to UV$ eine Dualität von $\mathfrak{P}$. Diese Dualität induziert auf g die Abbildung ι, wie man sofort sieht. Also ist $\iota\in\Delta$.

Angenommen $\iota\in\Gamma$. Dann gibt es eine Kollineation mit dem Fixpunkt U, die auf g die Abbildung ι induziert. Sei $E^0=(C, 1)$ der Bildpunkt von E bei dieser Kollineation und $\mathfrak{C}^0$ die zugehörige Cayleyalgebra, sodass also ι ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}^0$ wird. Aus (6a) folgt nun $\overline{AB}= =(\overline{A}C^{-1})(C\overline{B})$. Wäre $C\in\mathfrak{Z}$, so wäre $\mathfrak{C}$ kommutativ, also $C\notin\mathfrak{Z}$. Sei $D\in\mathfrak{C}$ mit $DC\neq CD$. Dann haben wir $DC=\overline{\overline{D}}\,\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{C}\,\overline{D}}=(\overline{\overline{C}}C^{-1})(C\overline{\overline{D}})=CD$, und dies ist ein Widerspruch. Es folgt also $\iota\notin\Gamma$.

L e m m a 7: Sei δ eine umkehrbare Abbildung von g auf sich mit den Fixpunkten $0, 1, \infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) δ ist ein Jordanhomomorphismus von $\mathfrak{C}$.

(b) $\delta\in\Delta$.

(c) δ ist ein Automorphismus der additiven Gruppe von $\mathfrak{C}$, und es gibt ein $C\neq 0$, sodass entweder $(AB)^\delta=(A^\delta C^{-1})(CB^\delta)$ für alle $A, B\in\mathfrak{C}$ oder $(AB)^\delta=(B^\delta C^{-1})(CA^\delta)$ für alle $A, B\in\mathfrak{C}$.

Beweis: Ist (c) erfüllt, so folgt $(A^2)^\delta=(A^\delta C^{-1})(CA^\delta)=(A^\delta)^2$ und daraus durch Linearisieren $(AB+BA)^\delta=A^\delta B^\delta+B^\delta A^\delta$. Also folgt (a) aus (c).

Ist δ ein Jordanhomomorphismus von $\mathfrak{C}$, so definieren wir eine neue Algebra $\mathfrak{C}^*$ mit derselben Addition wie in $\mathfrak{C}$ und dem Produkt "$\star$": $A\star B=(A^{\delta^{-1}}B^{\delta^{-1}})^\delta$. Nach Smiley (siehe (4) Seite 166) gilt dann $N(A\star B)=N((A^{\delta^{-1}}B^{\delta^{-1}})^\delta)=N(A^{\delta^{-1}}B^{\delta^{-1}})^\delta=(N(A^{\delta^{-1}})N(B^{\delta^{-1}}))^\delta=(N(A)^{\delta^{-1}}N(B)^{\delta^{-1}})^\delta=N(A)N(B)$. Die Algebra $\mathfrak{C}^*$ ist also wie $\mathfrak{C}$ eine Cayleyalgebra mit der Normenform N.

Nach Jacobson (siehe (5) Seite 62/63) existiert ein Isomorphismus η von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}^*$ mit $\eta\in 0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$. Aus $\eta\in 0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ folgt nach Lemma 4 und 6 auch $\eta\in\Delta$. Nach der Definition der Algebra $\mathfrak{C}^*$ ist δ^{-1} ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}^*$ auf $\mathfrak{C}$. Daher ist $\eta\delta^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{C}$ und liegt deshalb in $\Gamma \leqslant \Delta$. Aus $\eta\delta^{-1} \in \Delta$ und $\eta \in \Delta$ folgt nun $\delta \in \Delta$.

Wenn (b) gilt, so ist entweder $\delta \in \Gamma$ oder $\delta \in \Delta - \Gamma$. Falls $\delta \in \Gamma$, gibt es eine Kollineation δ mit dem Fixpunkt U, die δ induziert. Nach einem Argument, das wir schon beim Beweis des vorigen Lemmas anwendeten, ist δ Isomorphismus von $\mathfrak{C}$ auf eine Algebra $\mathfrak{C}^0$ bzgl. der Grundpunkte O, U, V, $E^0 = (C, 1)$, und deshalb ist δ ein Automorphismus der additiven Gruppe von $\mathfrak{C}$ und erfüllt die Bedingung $(AB)^\delta = (A^\delta C^{-1})(CB^\delta)$, dh. δ genügt (c).

Ist $\delta \in \Delta - \Gamma$, so ist $\delta\iota \in \Gamma$, dh. $\delta\iota$ erfüllt (c). Dann erfüllt aber auch δ selbst die Bedingung (c).

Lemma 8: Sei δ ein Jordanhomomorphismus von $\mathfrak{C}$. Dann gilt für alle Quadrupel A, B, C, D aus lauter verschiedenen Punkten von g:

$$\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\delta .$$

Beweis: Nach Lemma 7 gibt es ein $Q \neq 0$, sodass entweder $(XY)^\delta = (X^\delta Q^{-1})(QY^\delta)$ für alle X, $Y \in \mathfrak{C}$ oder $(XY)^\delta = (Y^\delta Q^{-1})(QX^\delta)$. Wir betrachten zunächst den ersten Fall und schreiben zur Abkürzung $X \circ Y$ für $(XQ^{-1})(QY)$. Dann bedeutet "$\circ$" die Multiplikation in der Algebra bzgl. der Grundpunkte 0, U, V und $E^0 = (Q, 1)$. Es folgt nun, da jeder Jordanhomomorphismus δ die Bedingung $S^{-1\delta} = (S^\delta)^{-1}$ für alle $S \in \mathfrak{C}$ erfüllt, dass

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix}^0 &= \prec [(A-D)^{-1\delta} \circ (B-D)^\delta] \circ [(B-C)^{-1\delta} \circ (A-C)^\delta] \succ \\ &= \prec [(A-D)^{-1}(B-D)]\, [(B-C)^{-1}(A-C)] \succ^\delta = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\delta ,\end{aligned}$$

wobei $\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix}^0$ wie in (11) das Doppelverhältnis bzgl. der Algebra $\mathfrak{C}^0$ bezeichnet. Da nach (11) $\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix}$ sind wir im ersten Falle fertig.

Im zweiten Fall genügt $\delta\iota$ den Bedingungen des ersten Falles, wenn ι die Abbildung $X \xrightarrow{\iota} \overline{X}$ bedeutet. Nach (12) folgt daher

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\delta = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^{\delta\iota} = \begin{bmatrix} A^{\delta\iota} & B^{\delta\iota} \\ D^{\delta\iota} & C^{\delta\iota} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix}$$

und wir sind fertig.

5. *Beweis der Sätze* 1–4

Beweis von Satz 1: (a) π sei eine Projektivität von g auf sich. Aus (13–15) sowie Lemma 3 folgt $\pi \in \Phi$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

(b) A, B, C, D und A', B', C', D' seien Quadrupel auf g mit $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}$. Es ist zu zeigen, dass eine Projektivität π existiert mit $A^\pi = A'$, $B^\pi = B'$, $C^\pi = C'$, $D^\pi = D'$.

Da die Abbildungen (13–15) eine dreifach transitive Gruppe erzeugen, gibt es Projektivitäten ϱ und σ derart, dass $A^\varrho = \infty$, $B^\varrho = 0$, $C^\varrho = 1$ und $A'^\sigma = \infty$, $B'^\sigma = 0$, $C'^\sigma = 1$. Dann gilt nach dem unter (a) Bewiesenen:

$$\prec D^\varrho \succ = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ D^\varrho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\varrho & B^\varrho \\ D^\varrho & C^\varrho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'^\sigma & B'^\sigma \\ C'^\sigma & D'^\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ D'^\sigma & 1 \end{bmatrix} = \prec D'^\sigma \succ.$$

Also ist $D^\varrho \equiv D'^\sigma$. Deshalb gibt es eine Bewegung φ aus $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$, sodass $D^{\varrho\varphi} = D'^\sigma$ und $1^\varphi = 1$. Dies folgt aus Lemma 1. Wegen Lemma 4 ist φ eine Projektivität. Die Projektivität $\pi = \varrho\varphi\sigma^{-1}$ hat nun schon die gewünschten Eigenschaften, denn $A^{\varrho\varphi\sigma^{-1}} = \infty^{\varphi\sigma^{-1}} = A'$, $B^{\varrho\varphi\sigma^{-1}} = 0^{\varphi\sigma^{-1}} = B'$, $C^{\varrho\varphi\sigma^{-1}} = 1^{\varphi\sigma^{-1}} = C'$ und $D^{\varrho\varphi\sigma^{-1}} = D'^{\sigma\sigma^{-1}} = D'$.

Beweis von Satz 2: (a) Sei $\delta \in \Delta$. Wir müssen zeigen, dass es einen Jordanhomomorphismus α von $\mathfrak{C}$ gibt, sodass $\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\alpha$ für jedes echte Quadrupel $A, B, C, D \in g$ gilt.

Hat δ nicht die Fixpunkte $0, 1, \infty$, so gibt es eine Projektivität π, sodass $\delta\pi$ die Fixpunkte $0, 1, \infty$ hat. Da die Abbildung π die Doppelverhältnisse nicht ändert, können wir annehmen δ habe die Fixpunkte $0, 1, \infty$. Lemma 7 besagt, dass dann δ ein Jordanhomomorphismus ist. Aus Lemma 8 folgt $\begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\delta$. Also kann man $\alpha = \delta$ setzen.

(b) Seien A, B, C, D und A', B', C', D' Quadrupel von je vier verschiedenen Punkten auf g und sei α ein Jordanhomomorphismus von $\mathfrak{C}$, sodass $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\alpha = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}$ gilt.

Es kann $\alpha \in \Gamma$ angenommen werden, denn nach Lemma 7 gilt $\alpha \in \Delta$; ist nun $\alpha \in \Delta - \Gamma$, so ist $\alpha\iota \in \Gamma$ wegen Lemma 6, wenn ι die Abbildung $X \xrightarrow{\iota} \bar{X}$ ist. Da ι die Konjugiertenklassen unverändert lässt, bleibt

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^{\alpha\iota} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}.$$

Wir müssen zeigen, dass es ein $\gamma \in \Gamma$ und ein $\vartheta \in \Delta - \Gamma$ mit $A^\gamma = A'$, $B^\gamma = B'$, $C^\gamma = C'$ und $D^\gamma = D'$ bzw. $A^\vartheta = A'$, $B^\vartheta = B'$, $C^\vartheta = C'$ und $D^\vartheta = D'$ gibt. Zeigen wir zunächst die Existenz von γ!

Es gibt Projektivitäten π und ϱ derart, dass $A^\pi = \infty$, $B^\pi = 0$, $C^\pi = 1$ und $A'^\varrho = \infty$, $B'^\varrho = 0$, $C'^\varrho = 1$. Aus Satz 1 und Lemma 2 folgt:

$$\prec D^{\pi\alpha} \succ = \prec D^\pi \succ^\alpha =$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ D^\pi & 1 \end{bmatrix}^\alpha = \begin{bmatrix} A^\pi & B^\pi \\ D^\pi & C^\pi \end{bmatrix}^\alpha = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^\alpha = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'^\varrho & B'^\varrho \\ D'^\varrho & C'^\varrho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ D'^\varrho & 1 \end{bmatrix} = \prec D'^\varrho \succ.$$

Also ist $D^{\pi\alpha} \equiv D'^{\varrho}$ und es gibt wegen Lemma 1 eine Bewegung $\varphi \in 0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ mit $D^{\pi\alpha\varphi} = D'^{\varrho}$ und $1^{\varphi} = 1$. Nach Lemma 4 ist φ eine Projektivität und also $\varphi \in \Gamma$. Nach unserer Annahme ist $\alpha \in \Gamma$. Die Abbildiung $\pi\alpha\varphi\varrho^{-1}$ liegt deshalb in Γ. Diese Abbildung leistet aber das Gewünschte, denn $A^{\pi\alpha\varphi\varrho^{-1}} = \infty^{\alpha\varphi\varrho^{-1}} = A'$, $B^{\pi\alpha\varphi\varrho^{-1}} = 0^{\alpha\varphi\varrho^{-1}} = B'$, $C^{\pi\alpha\varphi\varrho^{-1}} = 1^{\alpha\varphi\varrho^{-1}} = C'$ und $D^{\pi\alpha\varphi\varrho^{-1}} = D'^{\varrho\varrho^{-1}} = D'$.

Um nun die Existenz eines $\vartheta \in \Delta - \Gamma$ mit den gewünschten Eigenschaften einzusehen, bedenken wir, dass nach (12) für die Punkte A', B', C', D' gilt

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}' & \bar{B}' \\ \bar{D}' & \bar{C}' \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Existenz eines $\gamma \in \Gamma$ mit $A^{\gamma} = \bar{A}'$, $B^{\gamma} = \bar{B}'$, $C^{\gamma} = \bar{C}'$ und $D^{\gamma} = \bar{D}'$ wie wir eben bewiesen haben. Nun sei ι die Abbildung $X \xrightarrow{\iota} \bar{X}$. Dann gilt $A^{\gamma\iota} = A'$, $B^{\gamma\iota} = B'$, $C^{\gamma\iota} = C'$ und $D^{\gamma\iota} = D'$. Da $\iota \notin \Gamma$ und $\gamma \in \Gamma$, folgt $\gamma\iota \notin \Gamma$. Also $\gamma\iota = \vartheta \in \Delta - \Gamma$.

Beweis von Satz 3: Wegen Satz 1 genügt es, eine Abbildung mit den Fixpunkten 0, 1, ∞ zu betrachten.

Die Untergruppe von Φ mit den Fixpunkten 0, 1, ∞ ist, wie man aus Lemma 5 folgert, die Gruppe $0(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{Z}, N)$.

Sei nun γ die Abbildung aus $\Gamma \cap \Phi$ mit den drei Fixpunkten 0, 1, ∞. Wäre $\gamma \notin 0^+(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{Z}, N)$, so wäre wegen Lemma 4 jede Abbildung aus $0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ in Γ, also auch die Abbildung $X \xrightarrow{\iota} \bar{X}$, was aber wegen Lemma 6 nicht sein kann. Es folgt $\gamma \in 0^+(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{Z}, N)$ und Lemma 4 zieht sofort $\gamma \in \Pi$ nach sich.

Beweis von Satz 4: Sei zunächst $\varphi \in \Phi$. Wir zeigen $\varphi \in \Delta$. Es gibt nämlich eine Projektivität π, sodaß $\varphi_1 = \varphi\pi$ die Fixpunkte 0, 1, ∞ hat. Mit φ liegt wegen Satz 1 auch φ_1 in Φ. Aus Lemma 5 folgt $\varphi_1 \in \Omega(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$ und da $1^{\varphi_1} = 1$, sogar $\varphi_1 \in 0(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$.

Ist $\varphi_1 \in 0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$, so ist φ_1 nach Lemma 4 eine Projektivität und mithin $\varphi_1 \in \Delta$. Ist $\varphi_1 \notin 0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$, so ist $\varphi_1\iota$ in $0^+(\mathfrak{C}, \mathfrak{Z}, N)$, Dann folgt $\varphi_1\iota \in \Delta$ und da $\iota \in \Delta$ wegen Lemma 6, ergibt sich $\varphi_1 \in \Delta$.

Nun betrachten wir eine Abbildung δ, welche $\begin{bmatrix} A^{\delta} & B^{\delta} \\ D^{\delta} & C^{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^{\alpha}$ mit dem Jordanhomomorphismus α erfüllt. Da die Jordanhomomorphismen eine Gruppe bilden, ist auch α^{-1} ein Jordanhomomorphismus. Lemma 8 liefert also

$$\begin{bmatrix} A^{\alpha^{-1}} & B^{\alpha^{-1}} \\ D^{\alpha^{-1}} & C^{\alpha^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^{\alpha^{-1}}$$

für alle echten Quadrupel auf g. Daraus folgt

$$\begin{bmatrix} A^{\alpha^{-1}\delta} & B^{\alpha^{-1}\delta} \\ D^{\alpha^{-1}\delta} & C^{\alpha^{-1}\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\alpha^{-1}} & B^{\alpha^{-1}} \\ D^{\alpha^{-1}} & C^{\alpha^{-1}} \end{bmatrix}^{\alpha} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}^{\alpha^{-1}\alpha} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}.$$

Also liegt die Abbildung $\varphi = \alpha^{-1}\delta$ in Φ und damit nach dem oben Bewiesenen in Δ. Die Abbildung α liegt aber wegen Lemma 7 in Δ, und daraus folgt $\delta = \alpha\varphi \in \Delta$.

LITERATUR

1. Pickert, Projektive Ebenen. Springer (1955).
2. Baer, Linear algebra and projective geometry. New York (1952).
3. Rozenfeld, Neevklidovy Geometrii. Moskau (1955).
4. Springer, On the geometric algebra of octave planes. Indag. Math. XXIV Fasc. 4 (1961).
5. Jacobson, On composition algebras and their automorphisms Rend. Palermo Serie II, Tomo VII (1958).
6. Smiley, Von Staudt projectivities of Moufang planes. Coll. on alg. and top. foundations of geom. Utrecht 1959.
7. Havel, Harmonical quadruplet in Moufang plane. Czech. Math. Journal **5**, (1955).
8. Artin, Geometric algebra. Interscience Tracts 3 (1957).
9. Havel, Eine Bemerkung zum Staudtschen Satz in der Moufangebene. Czech. Math. Journ. **7**, (1957).