View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Elsevier - Publisher Connector

JOURNAL OF ALGEBRA 17, 474–481 (1971)

Sur les quasi-ordres (à gauche) dans un anneau

POPESCU NICOLAE

Institutul de Matematică, Academia R.S.R., Str. Calea Griviței nr. 21, Bucarest, Romania

AND

SPULBER DORIAN

Facultatea de Matematică, Universitatea "Al. I. Cuza" Jassy, Catedra de Algebră, Jassy, Romania

Communicated by J. Dieudonné

Received January 15, 1970

1. INTRODUCTION

Soit A un anneau (unitaire) et Q son anneau complet des fractions (à gauche); dans [8] est défini l'anneau $M_g(A)$, le plus grand sous-anneau de Q tel que l'inclusion $A \subset M_g(A)$ soit un épimorphisme plat à gauche, et on pose la question de trouver des conditions pour lesquelles $M_g(A) = Q$. Dand ce travail, nous nous proposons de résoudre le problème quand Q est un anneau semi-simple, et d'étudier quelques aspects du problème quand Q est un anneau quasi-frobeniusien. Dans le deuxième paragraphe, on considère le concept de quasi-ordre à gauche d'un anneau unitaire, et on caractérise les anneaux A qui sont des quasi-ordres à gauche dans un anneau semi-simple (théorème 2.4). Le résultat trouvé est une généralisation du théorème de Goldie, et a des conséquences intéressantes (corollaires 2.5, 2.6 et 2.7). De même ce théorème est un complément a un résultat de Sandomierski [9], théorème 1.6. Le théorème 2.8 donne une réponse partielle à un problème de [5].

Le résultat principal du troisième paragraphe est le théorème 3.3 qui contient en particulier le théorème de Jans [3] et [6].

Nous donnons quelques définitions usuelles.

Soit B un anneau (unitaire) et A un sous-anneau de B. Si $b \in B$ est un élément de B, on note $\{A : b\}$ l'ensemble des éléments $x \in A$, tel que $xb \in A$; $\{A : b\}$ est évidemment un idéal à gauche de A. En particulier, pour un élément x de A, on note par $\mathrm{Ann}(x)$ l'idéal $\{0 : x\} = \{x' \in A \mid x'x = 0\}$ et par $Z_g(A)$ l'idéal singulier à gauche de A, c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments dont l'annulateur est essentiel dans A (on dit que l'idéal à gauche $\mathbf{a}$ de A est essentiel si pour tout $y \in A$, $y \neq 0$ il existe $z \in A$ tel que $zy \neq 0$ et $zy \in \mathbf{a}$). Un élément x de A est régulier si pour tout $y \in A$ tel que $xy = 0$ ou $yx = 0$ on a $y = 0$. On dit que A est un ordre à gauche dans B si:

1) Tout élément régulier de A est inversible dans B.

2) Pour tout élément $b \in B$ il existe un élément régulier x de A tel que $xb \in A$.

Soit A un anneau et M un A-module à gauche. Pour un sous-ensemble X de M nous notons par $l(X)$ l'ensemble des éléments a de A tel que $ax = 0$ pour tout $x \in X$. Évidemment $l(X)$ est un idéal à gauche de A. On dit que A vérifié la condition des chaînes ascendantes des annulateurs à gauche de M si toute suite croissante d'annulateurs à gauche de sous-ensembles de M est stationnaire.

2. Quasi-ordres (à gauche)

Définition 2.1. Soit B un anneau unitaire et A un sous anneau de B (non nécessairement unitaire). On dit que A est un quasi-ordre à gauche de B si pour tout élément $b \in B$, il existe des éléments $b_1, b_2, ..., b_n \in B$ et $a_1, ..., a_n \in A$ tel que:

1. $\sum_{i=1}^{n} b_i a_i = 1$

2. $a_i b = a_i' \in A \qquad$ pour tout $\quad 1 \leqslant i \leqslant n$

Évidemment tout ordre à gauche d'un anneau est un quasi-ordre.

Lemme 2.2. *Soit B un anneau unitaire et A un quasi-ordre à gauche de B. Soit $\bar{A}$ un sous-anneau de B avec même élément unité que B et contenant A. Alors l'inclusion canonnique $\bar{A} \subset B$ est un épimorphisme plat à gauche.*

La démonstration est une conséquence de la définition 2.1 et du théorème 2.7 de [8].

Lemme 2.3. *Soit B un anneau unitaire et A un quasi-ordre à gauche de B. Alors:*

1) *A est un sous A-module essentiel de B (considéré comme A-module de façon canonique).*

2) *Pour tout idéal à gauche* $\mathbf{b}$ *de* B, $\mathbf{b} = B(\mathbf{b} \cap A)$.

3) *Si* B *ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux à gauche* (*c'est-à-dire est de dimension de Goldie finie*) *alors* A *a la même propriété.*

4) *Si* B *est noethérien à gauche alors* A *possède la propriété des chaînes ascendantes d'annulateurs à gauche de sous ensembles de* B.

Preuve. L'affirmation 1) est une conséquence de la définition 2.1.

2) Évidemment $\mathbf{b} \supseteq B(\mathbf{b} \cap A)$. Si $b \in \mathbf{b}$ alors, conformément à la définition 2.1 on $a : b = \sum_i b_i a_i b = \sum_i b_i a_i'$, et $a_i' \in \mathbf{b} \cap A$, pour tout i. Donc $\mathbf{b} = B(\mathbf{b} \cap A)$.

3) Soit $\{\mathbf{a}_i\}_i$ un ensemble d'idéaux à gauche de A, tel que la somme: $\sum \mathbf{a}_i$ soit directe, alors la somme $\sum_i B\mathbf{a}_i$ est directe dans B. En effet soient i_0 et $b \neq 0$ tels que $b \in (\sum_j B\mathbf{a}_{i_j}) \cap B\mathbf{a}_{i_0}$, $i_j \neq i_0$ pour tout j, c'est-à-dire:

$$b = \sum_{j=1}^{m} \bar{b}_j \text{ avec } \bar{b}_j = \sum_{k=1}^{\delta_j} b_j^k a_{kj} \text{ où } b_j^k \in B,\ a_{kj} \in \mathbf{a}_{ij}, \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant m$$

et

$$b = \sum_{k=1}^{\delta_0} b_0^k a_{k0} \qquad \text{où} \qquad b_0^k \in B \qquad \text{et} \qquad a_{k0} \in \mathbf{a}_{i_0}.$$

Soit $\bar{A}$ le plus petit sous-anneau de B ayant même unité que B, et contenant A; évidemment tout élément de A sera de la forme $a + n.\, l$ ou $a \in A$ et n est un entier, l étant l'élément unité de B. En appliquant le lemme 2.3 de [8] on trouve des éléments $\beta_1, ..., \beta_n$ de B et $x_1, ..., x_n$ de $\bar{A}$ tel que $\sum_i \beta_i x_i = 1$ et $x_i b_j^k \in \bar{A}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$ et $1 \leqslant k \leqslant \delta_j$. Mais il est évident qu'il existe i et un k, $1 \leqslant k \leqslant \delta_0$, tel que $x_i b_0^k \neq 0$ et $x_i b_0^k d_{k0} \neq 0$; alors $x_i b_j^k \neq 0$ pour un j et un k, $1 \leqslant k \leqslant \delta_j$. On voit que $x_i b \neq 0$, et $x_i b \in \mathbf{a}_{i_0} \cap (\sum_{j=1}^{m} \mathbf{a}_{i_j})$. Contradiction. La conclusion en découle normalement.

4) Soit $l(X_1) \subset l(X_2) \subset \cdots \subset l(X_n) \subset \cdots$ une suite croissante d'annulateurs à gauche de A, où les X_i sont des sous ensembles de B. Alors:

$$B(l(X_1)) \subset B(l(X_2)) \subset \cdots$$

sera une suite croissante d'idéaux à gauche de B et il existe un indice n_0, tel que: $B(l(X_{n_0})) = B(l(X_{n_0+1})) = \cdots$.

Soit $a \in l(X_{n_0+1})$; alors $a \in B(l(X_{n_0}))$, donc $a = \sum_i b_i a_i$ avec $b_i \in B$ et $a_i \in l(X_{n_0})$ pour tout i; alors pour tout $x \in X_{n_0}$ on a:

$$ax = \left(\sum_i b_i a_i\right) x = \sum_i b_i (a_i x) = 0$$

Donc

$$a \in l(X_{n_0})$$

THÉORÈME 2.4. *Soit A un anneau (éventuellement sans élément unité). Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1) *$Z_g(A) = 0$ et A ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux à gauche.*

2) *A est quasi-ordre à gauche dans un anneau semi-simple.*

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2). Soit Q l'anneau complet des fractions de A; alors, [6], Q est semi-simple et pour tout idéal à gauche $\mathbf{a}$ essentiel de A, $Q\mathbf{a}$ est essentiel dans Q donc $Q\mathbf{a} = Q$. Mais pour tout $q \in Q$, $\{A : q\}$ est essentiel dans A et $Q(A : q) = Q$. Donc il existe $a_1, \ldots, a_n \in \{A : q\}$ et $q_1, \ldots, q_n \in Q$ tel que $\sum_i q_i a_i = 1$. Évidemment A est un quasi-ordre à gauche dans Q.

2) $\Rightarrow$ 1). Si A est un quasi-ordre à gauche dans un anneau semi-simple (avec élément unité), Q, alors conformément au lemme 2.3, A ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux à gauche.

Soit $\mathbf{a}$ un idéal à gauche essentiel dans A; alors $Q\mathbf{a}$ est essentiel dans Q. En effet si $q \in Q$ est un élément non nul, alors, conformément à la définition 2.1, soit $a_1, \ldots, a_n \in A$, et $q_1, \ldots, q_n \in Q$ tels que $\sum_i q_i a_i = 1$ et $a_i q \in A$. Soit i_0, tel que $a_i q \neq 0$ alors il y a un $x \in A$, tel que $x a_i q \neq 0$ et $x a_i q \in \mathbf{a}$. On en de déduit que $Z_g(A) = 0$.

COROLLAIRE 2.5. *Soit A un anneau qui ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux à gauche et tel que $Z_g(A) = 0$, alors A vérifie la condition des chaînes ascendantes pour les annulateurs à gauche de sous-ensembles de son enveloppe injective (c'est-à-dire, A est un anneau de Goldie solide, d'après* [3]).

On en déduit directement:

COROLLAIRE 2.6. *Soit A un anneau tel que $Z_g(A) = 0$. Alors A est un anneau de Goldie si et seulement si A est un anneau de Goldie solide* [3].

On obtient une réponse partielle à un problème de [3].

COROLLAIRE 2.7. *Soit A un anneau commutatif. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1) *A est un ordre dans un anneau semi-simple (nécessairement commutatif).*

2) *A ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux, et A est réduit (c'est-à-dire, tout élément nilpotent est nul).*

Preuve. Il faut prouver seulement l'implication 2) $\Rightarrow$ 1). En effet si A est réduit $Z(A) = 0$; si x est un élément de A tel que $\mathrm{Ann}(x)$ est essentiel, alors $Ax \cap \mathrm{Ann}(x) \neq 0$ et il existe $yx \neq 0$ de façon que $yx^2 = (yx)^2 = 0$. Contradiction. Alors conformément au théorème 2.4 l'anneau total de quotient Q de A est semi-simple et conformément au théorème de Goldie, A est un ordre dans Q.

D'ici on déduit un cas spécial dans lequel l'anneau total des fractions $\mathrm{tot}(A)$, d'un anneau (unitaire) est identique avec l'anneau $M(A)$ introduit dans [5].

THÉORÈME 2.8. *Soit A un anneau commutatif avec élément unité tel que A ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux. Si A est réduit, alors* $\mathrm{tot}(A) \equiv M(A) \equiv Q(A)$ *où $Q(A)$ est l'anneau complet des fractions de A.*

3. QUASI-ORDRES DANS UN ANNEAU QUASI-FROBENIUS

Tous les anneaux considérés sont unitaires; tous les morphisme des anneaux sont unitaires et les modules sont à gauche et unitaires.

Soit A un anneau; nous appelerons système localisant à gauche sur A un système topologisant et idempotent formé d'idéaux à gauche de A [2]. Si F est un système localisant à gauche de A et X est un A-module, nous notons par X_F le localisé de X par rapport à F et par $\psi_X : X \to X_F$ le morphisme canonique ([2], ch. V, §2). Si X est un module injectif de A, alors l'ensemble des idéaux à gauche a de A tel que $\mathrm{Hom}_A(A/\mathbf{a}, X) = 0$ est un système localisant à gauche associé à X. Particulièrement si $X = Q$ l'enveloppe injective de A, et D le système associé, alors A_D est l'anneau complet des fractions de A [4, 8].

LEMME 3.1. *Soit A un anneau et Q son enveloppe injective, tels que* $\mathrm{Hom}_A(Q/A, Q) = 0$. *Alors $A_D \simeq Q$ et A_D est un anneau auto-injectif à gauche.*

Preuve: Évidemment $A \subset A_D \subset Q$. Mais $\psi_Q : Q \to Q_D$ est un isomorphisme ([2], ch. III, §2) et les conditions entrainent $A_D = Q$.

Montrons que $A_D = Q$ est un anneau auto-injectif à gauche. Soit pour cela b un idéal à gauche de Q et $f : b \to Q$ un morphisme de Q-modules; il existe un morphisme $\bar{f} : Q \to Q$ de A-modules prolongeant f. Mais $\bar{f}$ est un morphisme de Q-modules: en effet soient $q, q' \in Q$ et $y = q\bar{f}(q') - \bar{f}(qq')$. Soit $\mathbf{a} = \{A : q\}$. Alors $\mathbf{a} \in D$ et pour tout $x \in \mathbf{a}$, on a: $xq = x' \in A$. Donc:

$$xy = xq\bar{f}(q') - x\bar{f}(qq') = x'\bar{f}(q') - \bar{f}(x'q') = 0.$$

Donc l'annulateur de y (dans A) est un élément de D, alors $y = 0$.

LEMME 3.2. *Soit A un anneau et F un système localisant à gauche sur A et X un A-module. Si X_F est un A_F-module injectif, alors X_F est l'enveloppe injective de $\psi_X(X)$ dans la catégorie des A-modules.*

Nous observons que X_F est canoniquement un A_F-module ([2], ch. V, §2).

THÉORÈME 3.3. *Soit A un anneau tel que A est un quasi-ordre à gauche dans son anneau complet des fractions A_D. Alors pour tout A-module X tel que $Q \otimes_A X$ est un A_D-module injectif, $Q \otimes_A X$ est l'enveloppe injective de l'image du morphisme canonique: $X \to A_D \otimes_A X$.*

En particulier, si A_D est un anneau auto-injectif à gauche il sera l'enveloppe injective de A.

Preuve. Conformément au théorème 2.7 de [8] on déduit que A_D est le localisé de A par rapport au système localisant à gauche F de A, formé des idéaux $\mathbf{a}$ tel que $A_D\mathbf{a} = A_D$.

Alors pour tout A-module X, on a: $X_F \simeq A_D \otimes_A X$, de façon fonctorielle. Tout résultera alors du lemme 3.2.

Observations. 1) Le résultat du théorème ci-dessus est vrai si nous remplaçons l'inclusion $A \subset Q$ par un épimorphisme plat à gauche $\varphi : A \to Q$.

2) Si A est un quasi-ordre à gauche de Q, alors tout idéal de F défini ci-dessus est essentiel dans A; donc pour tout A-module X, on a:

$$\operatorname{Ker}(X \to Q \otimes_A X) \subseteq \mathbb{Z}_g(X)$$

3) Nos résultats contiennent comme cas particuliers les résultats: 2.2, 2.3, 2.6 et 2.8 de [9]. De même on peut déduire une démonstration rapide du théorème 1.6 du même ouvrage.

THÉORÈME 3.4. *Soit A un anneau quasi-ordre à gauche dans un anneau B. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

a) *B est un anneau quasi-frobenius.*

b) *A vérifie les conditions suivantes:*

1) *A verifie la condition des chaînes ascendantes des annulateurs à gauche de son enveloppe injective.*

2) *Si Q est enveloppe injective de A alors $B \otimes_A Q = 0$.*

Preuve. a) $\Rightarrow$ b). Alors $B = Q$ est tout résultera du lemme 2.2 et du théorème 2.7 de [8].

b) $\Rightarrow$ a). D'après la condition 2) et du théorème 2.7 de [8] il résulter que $B = Q$, c'est-à-dire que B est auto-injectif conformément au lemme 3.1. Pour finir la démonstration il faut appliquer le théorème 5.2 de [1]. Pour cela il faut observer que pour un sous-ensemble X de Q, on a: $l_Q(X) \cap A = l_A(X)$ où $l_Q(X)$ est l'annulateur à gauche de X dans Q et $l_A(X)$ l'annulateurs à gauche de X dans A. Tout résultera de la condition 1) et du lemme 3.2, 2).

La théorème de Jans [3 où 6], résultera immédiatement:

COROLLAIRE 3.4. *Soit A un anneau, et Q son enveloppe injective. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

a) *A est un ordre dans un anneau quasi-frobenius.*

b) *A verifie les conditions suivantes*:

1) *A ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux à gauche.*

2) *A vérifie la condition des chaînes ascendantes pour les annulateurs à gauche de sous-ensembles de Q.*

3) *Pour tout élément $q \in Q$, il existe un élément régulier $x \in A$ tel que $xq \in A$.*

Preuve. Conformément au théorème 3.4 il faut prouver que b) $\Rightarrow$ a). Pour cela soit B l'anneau complet des fractions de A; on observe que $\mathrm{Hom}_A(Q/A, Q) = 0$. En effet si $f: Q/A \to Q$ est un morphisme non nul il existe un élément $q \in Q$, tel que $0 \neq f(\bar{q}) \in A$ ou $\bar{q}$ est l'image de q dans Q/A. Si x est un élément régulier de A tel que $xq \in A$, alors $xf(\bar{q}) = 0$; contradiction. Alors, d'après le lemme 3.1, on déduit que $B = Q$. En utilisant un argument classique ([2], ch. V, Sec. 2] ou [6, la démonstration de la proposition 2.3) on déduit que A est un ordre à gauche dans Q. Tout découlera du théorème 3.4.

Observations. Nous avons utilisé dans les considérons ci-dessus le fait que l'anneau A a un élément unité. Nous pouvons retrouver les mêmes résultats sans cette hypothèse, mais les considérations sont assez ennuyeuses.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. FAITH, Rings with ascending conditions on amihilaters, *Nogoya Math. J.* **27** (1966), 179–191.
2. P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 323–448.
3. I. P. JANS, On order in quasi-Frobenius rings, *J. Algebra* **7** (1967), 35–43.
4. J. LAMBEK, "Lectures on Rings and Modules," Ginn Blaisdell, 1966.
5. D. LAZARD, Épimorphismes plats d'anneaux, *C.R. Acad. Sc. Paris* **266** (1968), 314–316.

6. A. C. Mewborn and C. N. Winton, Ordres in self-injective semi-perfect rings, *J. Algebra* **13** (1969), 5–9.
7. C. Năstăsescu and N. Popescu, On the localisation ring of a ring, *J. Algebra* **15** (1970), 41–56.
8. N. Popescu and T. Spiru, Quelques observations sur les épimorphisme plats (à gauche) d'anneaux, *J. Algebra* **16** (1970), 40–59.
9. F. I. Sandomierski, Semi-simple maximal quotient rings, *Trans. A.M.S.* **128** (1967), 112–120.