



CrossMark

ScienceDirect

Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 13 (2016) 410–420

## Alternativas de control para un Péndulo de Furuta

Javier Gonzalo González Fontanet, Ania Lussón Cervantes\*, Irina Bausa Ortiz

*Departamento de Control Automático, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Oriente, Ave. Las Américas, s/n, Santiago de Cuba, Cuba.*

### Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de tres alternativas de control utilizadas para el control global de un péndulo de Furuta: Control de la Energía + Realimentación de Variables de Estado, Control Fuzzy + Realimentación de Variables de Estado y Control Fuzzy + Control Predictivo, evidenciándose las prestaciones de cada una de ellas. Los resultados de simulación se obtienen mediante el Matlab y las ventajas del control Fuzzy para el balanceo del péndulo y del control predictivo para la posición invertida son evidentes, brindando así una alternativa de control global que mejora notablemente la respuesta del sistema.

### Palabras Clave:

Control Fuzzy, Control Predictivo, Modelado, Control de la Energía, Sistema Controlado.

### 1. Introducción

Existe gran variedad de aplicaciones, no sólo a nivel industrial, sino también a nivel experimental, que permiten simular el comportamiento de muchos procesos industriales y eventos de la vida cotidiana, para evaluarlos, mejorarlos y encontrar soluciones a posibles errores existentes antes de ser aplicados. Una de esas aplicaciones es el péndulo invertido (IP, Inverted Pendulum), el cual puede ser usado en gran variedad de experimentos para evaluar conceptos de periodo o gravedad, en sistemas que pueden ser complejos o sencillos.

Probablemente el primero en estudiar el fenómeno del péndulo invertido fue Claude Shannon, quien estudió al sistema y lo modeló físicamente a través de un proceso de un juego erecto. Este constaba de un péndulo invertido el cual instaló encima de un carrito, que podía moverse en dos direcciones, el mismo estaba compuesto por una barra invertida cuyo punto de apoyo se encontraba en la parte inferior y su equilibrio era dado por una acción de control ejercida por un actuador (Caballín & Villafruela, 2013).

Las diferencias entre los péndulos invertidos radican en el tipo de intervención que se le realice a la barra invertida: unos dados por un movimiento lineal de un carro sobre un riel; otros por la acción de la inercia de un volante; otros por la acción de una barra en movimiento rotacional; etc.

Este último fue desarrollado por el Dr. Katsuhisa Furuta, quien propuso el control de estabilidad de dicho péndulo a través de un nuevo modelo físico, en un plano de  $360^{\circ}$ , y que giraba en ambas

direcciones. El péndulo de Furuta (PF) ha resultado hasta nuestros días, el más implementado por los investigadores de diversas ramas de la ciencia y la industria (Valenzuela *et al.*, 2012).

Desde la aparición del péndulo rotacional se suscitó un problema mucho más general y complejo que el del simple mantenimiento de la varilla en la posición invertida: el problema de llevar el péndulo desde cualquier posición, y en particular desde la posición colgante natural, hasta la posición invertida. Este problema se conoce como el de swing up.

Por tanto, en el problema del control del PF aparecerían dos sub-problemas: el de llevar el péndulo desde la posición colgante inicial, u otra posición cualquiera, a las proximidades de la posición deseada; y el de estabilizar al péndulo en la posición invertida.

En general, la teoría de los péndulos invertidos ha sido utilizada por la industria militar, en el direccionamiento de los proyectiles inteligentes o el manejo de armas y vehículos no tripulados. En el campo espacial, en el posicionamiento de satélites y de naves espaciales. En el control antisísmico de edificios y en la construcción de grúas y herramientas mecánicas con un gran número de grados de libertad. En el campo de la robótica, se están desarrollando diversos tipos de robots que utilizan la teoría que se usa en los IP, tanto para lograr su estabilidad como su velocidad de traslación (Mancillas *et al.*, 2009).

Sin embargo, el uso de los péndulos invertidos es más aplicado en el ámbito educativo, como medio didáctico en muchos centros de investigación, debido a que representa un problema clásico de control no lineal. El PF permite abordar interesantes problemas de control: este constituye un sistema no lineal mecánico subactuado, con un punto de equilibrio inestable en la posición deseada. Debido a las limitaciones de los actuadores, no pueden ser aplicadas las técnicas de control desarrolladas para robots manipuladores completamente actuados. El modelo del PF, además, no puede linealizarse empleando realimentación de estados estática o

\* Autor en correspondencia.

Correo electrónico: [alusson72@gmail.com](mailto:alusson72@gmail.com) (Lussón)URL: [www.uo.edu.cu](http://www.uo.edu.cu)

dinámica, lo cual dificulta la estabilización alrededor del punto de equilibrio inestable.

Para el control del PF se han implementado múltiples estrategias como por ejemplo: control basado en modelo, control borroso, neuronal, algoritmos genéticos, control basado en la energía del sistema y muchos otros (Maravall *et al.*, 2005), (Ibargüen *et al.*, 2006), (Ibargüen *et al.*, 2009), (Rubio *et al.*, 2012), (Aracil *et al.*, 2013), (Aguilar & Sira, 2007), (Aguilar *et al.*, 2010).

Actualmente para lograr el control global del PF se realizan dos controles independientes (Acosta *et al.*, 2002): el primero se encarga de balancear al mismo hasta que este alcance una región cercana a la posición de equilibrio y luego de alcanzada esta región el controlador del balanceo conmuta a otro que se encarga de mantener al péndulo en la posición invertida.

Muchas tareas se pueden realizar mediante el control de la energía del péndulo en vez de controlar su posición y velocidad directamente. Por ejemplo, una manera de balancear el péndulo a la posición invertida es darle una energía que corresponde a la posición vertical. El péndulo entonces comienza a balancearse y puede ser “atrapado” en la posición vertical con una estrategia de estabilización (Åström & Furuta, 2000). Fantoni y Lozano (Fantoni & Lozano, 2002), propusieron un control basado en energía para el balanceo y estabilización del péndulo de Furuta basado en las propiedades de pasividad del sistema. Se han propuesto, además, estrategias de control que incluyen no sólo la energía, sino también el momento del sistema (Gordillo *et al.*, 2003), (Acosta *et al.*, 2001) las cuales permiten superar algunos de los problemas presentes en (Åström & Furuta, 2000).

Otra de las técnicas que puede ser utilizada para el control del balanceo del PF es la lógica Fuzzy o Controlador Lógico Borroso (CLB). Esta estrategia resulta muy útil en aquellas situaciones en que los datos y sus relaciones no pueden escribirse en términos matemáticos precisos. Los conjuntos borrosos son una generalización de la lógica clásica y contienen objetos que pertenecen de forma imprecisa o gradual al conjunto. El grado de pertenencia viene definido por una función de pertenencia, que usualmente toma valores entre 0 y 1 (Lorandi *et al.*, 2011).

En la actualidad se puede considerar que uno de los objetivos fundamentales de todo sistema de control consiste en actuar sobre las variables manipuladas de forma que puedan satisfacer los cambiantes criterios económicos, de seguridad, medioambientales y de calidad en la producción. Las técnicas de Control Predictivo Basado en Modelo (MPC, Model Predictive Control) constituyen una poderosa herramienta para afrontar estos retos (Camacho & Bordons, 2010).

El MPC está reconocido en el mundo como una herramienta capaz de solucionar una gran variedad de problemas de control multivariables con restricciones. Este no es una estrategia de control específica, sino que se trata más bien de un campo muy amplio de métodos de control desarrollados en torno a ciertas ideas comunes (Bordons, 2000), (Fernández, 2011).

Aunque existe un gran número de estrategias que han sido empleadas en el control del péndulo de Furuta, los resultados mostrados en los trabajos relacionados con el tema indican que la prioridad de estos diseños radica en la estabilidad del sistema, dejando a un lado un parámetro importante como lo es el tiempo de establecimiento.

En este trabajo se brinda el diseño de tres alternativas de control utilizadas para el control global de un péndulo de Furuta: Control de la Energía + Realimentación de Variables de Estado (RVE), Control Fuzzy + RVE y Control Fuzzy + MPC y haciendo uso del Matlab se muestran las prestaciones de cada una, con el fin de

brindar un control avanzado y combinado que mejore notablemente la respuesta del sistema.

## 2. Modelado del Péndulo de Furuta

En la Figura 1 se muestra el diagrama de cuerpo libre del Péndulo de Furuta, el cual consta de dos cuerpos inerciales conectados: un pilar central con momento de inercia  $J$ , rígidamente conectado a un brazo horizontal de longitud  $l_a$  y masa  $m_a$  homogéneamente distribuida en línea y el péndulo de longitud  $l_p$  y masa homogéneamente distribuida en línea  $m_p$ .

El ángulo del péndulo, Theta ( $\theta$ ), ha sido definido como cero en la posición vertical invertida, y positivo, cuando el péndulo se mueve en sentido horario. El ángulo del brazo, Phi ( $\phi$ ), se ha definido positivo cuando el brazo se mueve en sentido anti horario. La variable  $\tau_\phi$  representa la fuerza generalizada o torque en la dirección del ángulo de posición del brazo  $\phi$ .

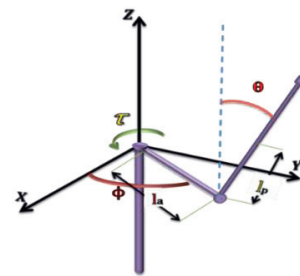


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre del Péndulo de Furuta.

El modelo no lineal del PF en espacio de estados se muestra a continuación (Valenzuela *et al.*, 2012):

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{\phi} \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\beta\gamma(\sin^2\theta - 1)\sin\theta\dot{\theta}^2 - 2\beta^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \beta\gamma\sin\theta\dot{\theta}^2 - \gamma\delta\cos\theta + \beta\tau_\phi}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2)\sin^2\theta} \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 = \dot{\theta} \quad (3)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\beta(\alpha + \beta\sin^2\theta)\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2\beta\gamma(1 - \sin^2\theta)\sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi} - \gamma^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + \delta(\alpha + \beta\sin^2\theta)\sin\theta - \gamma\cos\theta\tau_\phi}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2)\sin^2\theta} \quad (4)$$

donde

$$\alpha = J + \left(\frac{1}{3}m_a + m_p\right)l_a^2; \quad \beta = \frac{1}{3}m_p l_p^2; \quad \gamma = \frac{1}{2}m_p l_a l_p; \quad \delta = \frac{1}{2}m_p g l_p \quad (5)$$

Linealizando (1-4) mediante expansión de series de Taylor, se obtiene el modelo lineal del PF expresado en forma matricial:

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} = \mathbf{A}\Delta x + \mathbf{B}\Delta \tau \quad (6)$$

$$y = \mathbf{C}\Delta x_j + \mathbf{D}\Delta \tau_j \quad (7)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta k_{\tau}^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{\delta\gamma}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\gamma k_{\tau}^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{-\delta\alpha}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta k_{\tau}^2 \\ 0 \\ \gamma k_{\tau}^2 \\ R(\gamma^2 - \beta\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Las salidas representadas corresponden a los estados  $x_1 = \phi$ ,  $x_2 = \dot{\phi}$ ,  $x_3 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{\theta}$ , que a su vez representan las variables controladas del sistema, y como variable manipulada se tiene al voltaje ( $v$ ) aplicado al motor, comprendido entre  $\pm 24$  V.

Tabla 1: Parámetros nominales del PF.

Parámetro	Valor
Masa de brazo horizontal ( $m_a$ )	0.078 kg
Masa del péndulo ( $m_p$ )	0.014 kg
Longitud del brazo horizontal ( $l_a$ )	0.084 m
Longitud del péndulo ( $l_p$ )	0.203 m
Gravedad ( $g$ )	9.8 m/s <sup>2</sup>
Constantes del motor	
Resistencia ( $R$ )	12.1 $\Omega$
Inercia ( $J$ )	9.89 e-7 kgm <sup>2</sup>
Constante de torque ( $k_{\tau}$ )	27.4 e-3 Nm/A
Constante de fuerza electromotriz ( $k_e$ )	27.4 e-3 Vs/rad
Torque de fricción estática ( $\tau_s$ )	25 e-3 Nm
Fricción de Coulomb ( $\tau_c$ )	9 e-4 Nm

Sustituyendo los parámetros nominales de la Tabla 1 en el modelo lineal en espacio de estados del péndulo representado por (8), se obtienen las matrices mostradas en (9).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.412782 & -102.603297 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.342518 & 182.011525 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.065037 \\ 0 \\ -12.500657 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 2.1. Modelo de fricción para el péndulo de Furuta

La fricción es un fenómeno inherente a todo sistema electromecánico y deteriora el desempeño de los mismos, esta ha sido estudiada ampliamente en la ingeniería mecánica clásica y últimamente ha tenido un fuerte resurgimiento; esto se debe entre otras cosas a grandes necesidades en la ingeniería en un amplio rango de aplicaciones que van desde los discos duros hasta los vehículos.

En los sistemas pendulares la fricción en el motor es más notable que en el punto de pivote del péndulo, por lo cual se desprecia esta última. A fin de modelar el efecto de la fricción en

los sistemas se utilizan los modelos clásicos, entre ellos el modelo de Coulomb y el de Karnopp; y los modelos dinámicos.

En este trabajo se utiliza el modelo de fricción de Karnopp (Karnopp, 1985), el cual fue desarrollado para solucionar el problema de detectar cuándo la velocidad es cero y para evitar la conmutación entre diferentes ecuaciones para adhesión y deslizamiento. El modelo de Karnopp se representa en la Figura 2.

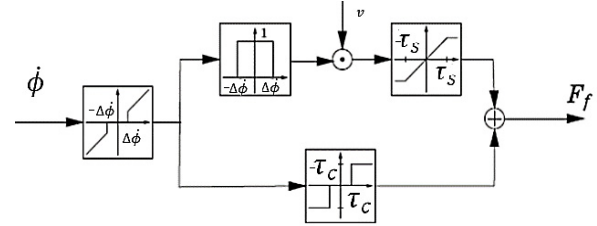


Figura 2: Modelo de fricción de Karnopp.

El modelo define un intervalo de velocidad cero,  $|\dot{\phi}| < \Delta\dot{\phi}$ . Para velocidades dentro de este intervalo, la velocidad puede cambiar y ser diferente de cero pero la salida del bloque se mantiene en cero por una zona muerta. Dependiendo de si  $|\dot{\phi}| < \Delta\dot{\phi}$  o no, la fuerza de fricción ( $F_f$ ) es una versión saturada de la fuerza externa o una función estática arbitraria de la velocidad.

### 3. Estrategias de Control para el Péndulo de Furuta

Muchas son las estrategias de control usadas para lograr ubicar al PF en el punto de equilibrio inestable (posición invertida). A continuación se brindan las estrategias empleadas en este trabajo, tanto para el balanceo como para el control en la posición invertida.

#### 3.1. Control basado en la energía del sistema

El control basado en la energía representó un avance significativo en la solución del problema del control del balanceo y los resultados obtenidos han sido generalizados a múltiples esquemas pendulares. El modelo a emplear en el control de la energía del PF relaciona el voltaje con la energía ( $E$ ) del péndulo, la acción de control programada para realizar el balanceo por el método propuesto por Åström y Furuta se muestra en la ecuación (10) (Åström & Furuta, 2000):

$$v = \frac{R}{k_{\tau}} \left[ \frac{J}{l_a} k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) + \frac{k_{\tau}^2}{R} \dot{\phi} \right] \quad (10)$$

donde  $E_0$  es la energía inicial del sistema y  $k$  es un parámetro de diseño.

La expresión que relaciona el par del motor con el voltaje aplicado a sus terminales, se muestra en (11):

$$\tau_{\phi} = \frac{k_{\tau}}{R} v - \frac{k_{\tau}^2}{R} \dot{\phi} \quad (11)$$

#### 3.2. Control por Realimentación de Variables de Estado

Este enfoque resulta ser uno de los más utilizados para lograr el control en la posición invertida de un PF, el problema principal de este consiste en la elección apropiada de los polos y ceros del compensador a usar para alterar el lugar geométrico de las raíces con el propósito de cumplir las especificaciones de diseño (Ogata, 2002).

Para el diseño de un control por RVE se debe implementar el esquema del lazo de control en espacio de estados mediante la Figura 3, donde A, B, C son matrices del modelo del péndulo y la matriz de ganancias de realimentación de estado **K** puede ser determinada a partir de la ecuación de Ackerman (Ogata, 2002):

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{T}^{-1} \tag{12}$$

donde  $\mathbf{K}_c$  es un vector de ganancias de realimentación de la forma  $\mathbf{K}_c = [k_{c1} \ k_{c2} \ \dots \ k_{cn}]$ .

La matriz de transformación **T**, está definida por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} \tag{13}$$

donde **M** es la matriz de controlabilidad dada por el sistema matricial  $\{\mathbf{A}_c; \mathbf{B}_c\}$ , y **W** es:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

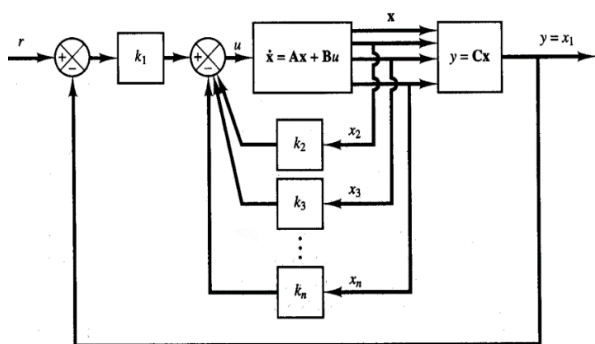


Figura 3: Esquema del lazo de control en espacio de estados con una señal de referencia.

### 3.3. Control Fuzzy

La configuración básica del control Fuzzy se representa en la Figura 4, donde se evidencia que este posee 4 elementos fundamentales: *fuzzificador*, *base de conocimiento*, *toma de decisiones* y *defuzzificador*.

El *fuzzificador* consiste en la medición de las variables de entrada al regulador, eventual normalización de los valores de dichas variables en una gama preestablecida y su conversión a valores lingüísticos que puedan ser vistos como rótulos de conjuntos borrosos, los que se definirían como se muestra en (15).

$$A = \{(x, \mu_A(x)); \forall x \in U\} \tag{15}$$

donde,  $x$ : variable  
 $\mu$  función de pertenencia  
 $U$ : universo de discurso (rango, gama, etc.) de  $x$

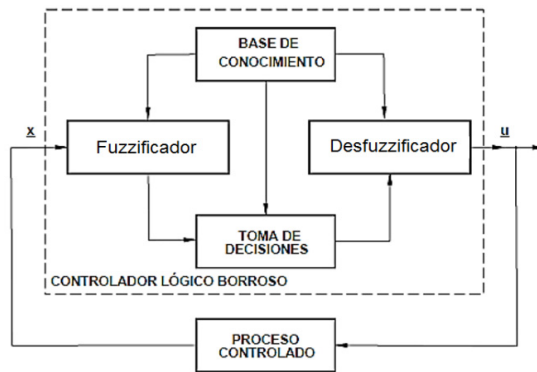


Figura 4: Diagrama en bloques del lazo con regulador borroso.

La *base de conocimiento* comprende lo que se sabe de la esfera de aplicación y las metas de control del operador, dadas por un conjunto de reglas (implicaciones). En el bloque funcional correspondiente a esta se incluyen los datos e informaciones suministradas al CLB, tales que posibiliten el procesamiento matemático de las variables medidas del proceso a fin de generar las acciones de control. Forman parte de esta base los parámetros necesarios para la discretización (cuantificación) de las variables.

Para la *toma de decisiones* se supone que la base de regla es del tipo clásico: *SI <estado del proceso> ENTONCES <acción de control>*.

Entonces, un estado dado  $x^0$  dará lugar a la “activación” de un número de reglas y a la “desactivación” momentánea de las restantes. Serán activadas solamente aquellas reglas en las que todos los conjuntos borrosos del antecedente resulten ser, para el estado dado, no nulos (Reznik, 1997).

El *defuzzificador* es el elemento del CLB encargada de entregar al proceso acciones de control deterministas a partir de salidas borrosas resultantes de la composición de reglas. La estrategia del *defuzzificador* ha de tener como objetivo que la acción de control determinista generada sea la que mejor represente a la distribución possibilística en cuestión. No existe, sin embargo un procedimiento sistemático para la selección de tal estrategia (Tejada, 2002), (Tibaduiza et al., 2011).

### 3.4. Control Predictivo Basado en Modelo

A fin de implementar esta estrategia, se usa la estructura básica mostrada en la Figura 5. Un modelo es usado para predecir las salidas futuras de la planta, basadas en valores pasados, actuales y en las acciones futuras óptimas de control propuestas. Estas acciones son calculadas por el optimizador tomando en cuenta la función de costo (donde se considera el error futuro) así como las restricciones (Camacho & Bordons, 2010).

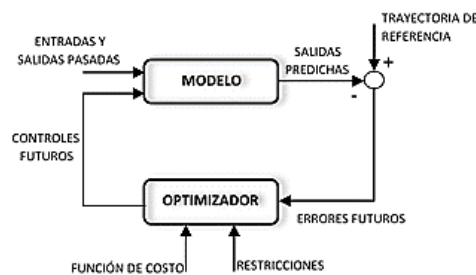


Figura 5: Estructura básica del MPC.



La función de costo más empleada en MPC es la cuadrática y se muestra en (16),

$$FC[y(k),u(k)] = \sum_{i=1}^P \alpha_i (r(k+i) - \hat{y}(k+i|k))^2 + \sum_{i=1}^M \beta_i [\Delta u(k+i-1)]^2 + \sum_{i=1}^P \gamma_i [\Delta \hat{y}(k+i|k)]^2 \tag{16}$$

donde  $\hat{y}$  es la salida predicha,  $r$  es el valor de referencia para la salida,  $\Delta u(k+i) = [u(k+i) - u(k+i-1)]$  es el cambio en la acción de control.  $\Delta \hat{y}(k+i|k) = [\hat{y}(k+i+1|k) - \hat{y}(k+i|k)]$  es el cambio estimado en la salida predicha,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  son términos de ponderación dependientes de la aplicación, que efectúan un escalado y P, M son los horizontes de predicción y control, respectivamente.

Queda abierta la posibilidad de incluir otros términos en el funcional de costo (FC), siempre que puedan calcularse a partir de datos disponibles en el instante  $t$ . El efecto de la minimización del término relacionado con el error (primer término en el FC) no es más que garantizar una buena regulación (o seguimiento) del proceso. En cambio, la minimización del segundo y tercer términos del FC busca disminuir las oscilaciones en la salida, buscando una respuesta lo más suave posible. Particularmente, el tercer término del FC hace una penalización explícita sobre los movimientos bruscos de la salida predicha.

El control predictivo presenta una serie de ventajas sobre otros métodos, entre las que se pueden citar las siguientes:

- Es capaz de manipular restricciones en las variables de entrada y salida, las cuales pueden ser incluidas de forma sistemática durante el proceso de diseño.
- Permite tratar de forma sencilla sistemas multivariables con distinto número de entradas y salidas.
- Puede utilizarse en sistemas con dinámicas complejas: fase no mínima, inestables y con grandes retardos de tiempo.
- Si se conoce a priori la evolución futura de la referencia, el sistema puede empezar a reaccionar antes de que el cambio se haya efectivamente realizado, evitando los efectos del retardo en la respuesta del proceso. En muchas aplicaciones la evolución futura de la referencia  $r(t+k)$  es conocida de antemano, como en robótica, servomotores o procesos por lotes; en otras aplicaciones aunque la referencia sea constante, se puede conseguir una sensible mejora de prestaciones simplemente conociendo el instante de cambio de valor y adelantándose a esa circunstancia.

**4. Diseño de las estrategias de control en el péndulo de Furuta**

En esta sección se muestra el diseño de las estrategias de control usadas tanto como para el balanceo como el posterior control en la posición invertida del péndulo de Furuta.

Para el control del balanceo se utilizan dos técnicas: control de la energía del sistema y control Fuzzy; mientras que para mantener al péndulo en la posición invertida se utilizan: RVE y MPC.

Las combinaciones probadas fueron:

- 1) Control de la energía del sistema + RVE.
- 2) Control Fuzzy + RVE.
- 3) Control Fuzzy + MPC.

En la Figura 6 se muestra el diagrama en bloques para el control global de PF, en la cual, cuando el péndulo está con una condición inicial ( $\theta_0$ ), muy cercana al punto de equilibrio estable, el controlador para el balanceo comienza a proporcionar la acción de control, hasta que el ángulo del péndulo ( $\theta$ ) se encuentre a  $\pm 25^\circ$  del punto de equilibrio inestable; en este punto el conmutador

(Figura 7) cambia a cero la acción de control para evitar que el péndulo llegue con una aceleración muy grande al contorno del  $0^\circ$  y se mantiene con este valor hasta que el ángulo del péndulo sea menor a  $\pm 15^\circ$  y a partir de este momento la acción de control que recibe la planta es la encargada de mantener al péndulo en la posición invertida y de seguir los cambios de referencia del ángulo del brazo ( $\phi$ ).

En la Figura 6 a la salida del conmutador se coloca un bloque saturación para simular los límites de alimentación del motor ( $\pm 24V$ ). Puede observarse además, en el diagrama en bloques, la acción de la fuerza de fricción expresada en voltaje, la cual se opone al movimiento del eje del motor. Para compensar el efecto de la fricción se diseña un compensador el cual se basa en una estimación de la velocidad del brazo.

En la Figura 7 se puede observar la actuación del conmutador.

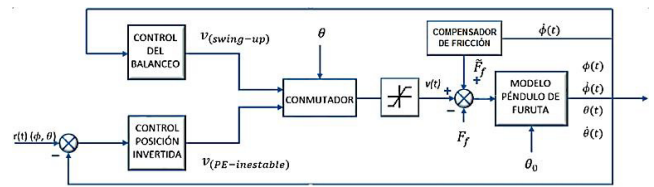


Figura 6: Diagrama en bloque para el control global del PF.

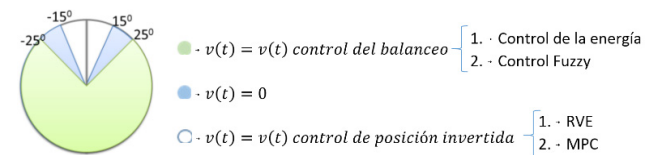


Figura 7: Actuación del conmutador.

**Compensación de la fricción.**

Con el objetivo de mejorar el desempeño de los controladores propuestos, en cada una de las estrategias se incluye un compensador de fricción (Figura 6), basado en el modelo de fricción de Karnopp (Figura 2).

Para esto se estima el valor de la fuerza fricción ( $\tilde{F}_f$ ), la cual está definida por (17) y luego de convertirla a voltaje se le suma a la ley de control.

Idealmente  $F_f - \tilde{F}_f = 0$ , con lo que se eliminaría el efecto de la fricción. Para propósitos de simulación, se considera que existe un error de estimación ( $F_f \neq \tilde{F}_f$ ), esto se logra multiplicando el valor estimado por una ganancia ( $k_f$ ) que toma valores  $0 < k_f < 1$ .

$$\tilde{F}_f = \begin{cases} sat_{\tau_v}(v) & si \ abs(\phi) < \Delta\phi \\ \frac{\tau_c \operatorname{sgn}(\dot{\phi}) R}{k_f} & si \ abs(\dot{\phi}) \geq \Delta\dot{\phi} \end{cases} \tag{17}$$

El valor del intervalo de velocidad cero ( $\Delta\dot{\phi}$ ) considerado es 0.1 rad/s.

**4.1. Alternativa de control basada en la energía del sistema + RVE**

Para lograr el balanceo del PF, se parte del modelo no lineal del mismo mostrado de (1) a (4), donde la variable manipulada es el voltaje aplicado al motor y la variable controlada es el ángulo del brazo ( $\theta$ ). Dicho voltaje es la acción de control programada para

realizar el balanceo por el método del control de la energía y se muestra en (10).

Para el diseño del controlador por RVE, se toman como variables controladas a  $\theta$  y  $\phi$ , y como variable manipulada al voltaje aplicado al motor. Luego partiendo del modelo lineal del PF representado en (9), y haciendo uso del software Matlab, se siguen los siguientes pasos:

1. Verificar la condición de controlabilidad del sistema:  $M=ctrb(A,B)$ ;  $rank(M)=4$ ;  $n=4$  y el sistema es totalmente controlable.
2. Del polinomio característico de  $A$ :  $|sI-A|=s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n$ , se determinan los autovalores:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , los cuales son los polos del sistema:  $[-13.6; -0.22; 0; 13.4]$ .
3. Teniendo en cuenta estos polos, se seleccionan los polos deseados a lazo cerrado:  

$$P=[-6+i; -6-i; -5.5; -5.0]$$
4. Empleando la ecuación de Ackerman (12) se obtiene  $K$ :  

$$K=[0.6972 \quad -0.5197 \quad -0.6396 \quad -2.392]$$
5. Se implementa el lazo de control según la Figura 3.

En las Figuras 8 y 9 se muestran el comportamiento de  $\theta$  y  $\phi$ , respectivamente. Se puede observar cómo el péndulo oscila hasta que se estabiliza al cabo de aproximadamente 10 s en 0 rad, que representa la posición vertical (Figura 8), y cómo  $\phi$  luego de estabilizado  $\theta$  sigue los cambios en su referencia (Figura 9).

En la Figura 8, al cabo de 30 s se puede observar una pequeña variación de la posición del péndulo, esta es debido al cambio de referencia que se le hace en ese mismo tiempo al ángulo del brazo  $\phi$ .

Las Figuras 10 y 11 muestran la acción de control  $v(t)$  y la energía suministrada al sistema. En la primera se puede observar cómo la señal de control varía a los 30 s para evitar que el péndulo caiga debido a la interacción con el brazo.

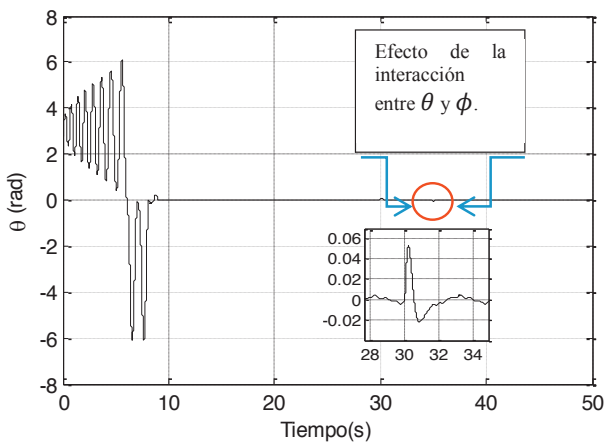


Figura 8: Salida del ángulo del péndulo  $\theta$  - Energía + RVE.

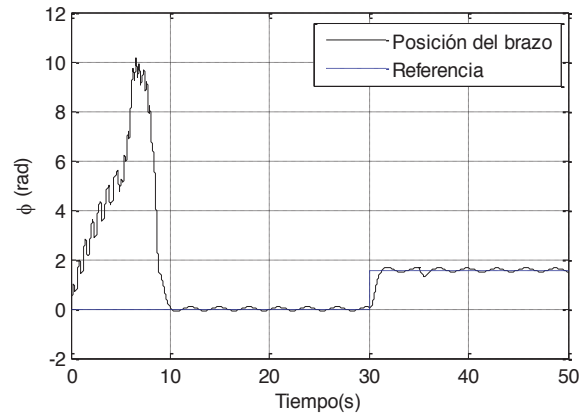


Figura 9: Salida del ángulo del brazo  $\phi$  - Energía + RVE.

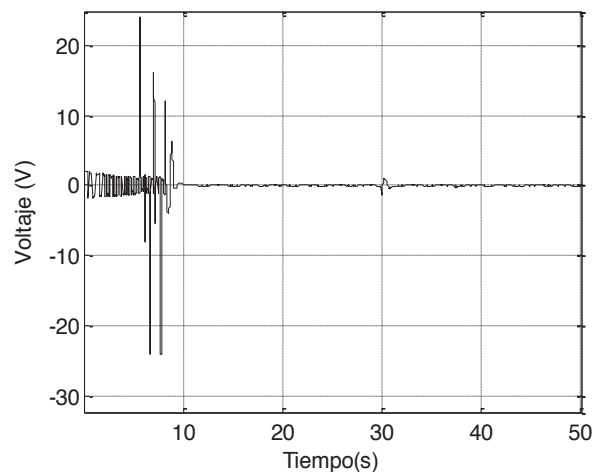


Figura 10: Acción de control - Energía + RVE.

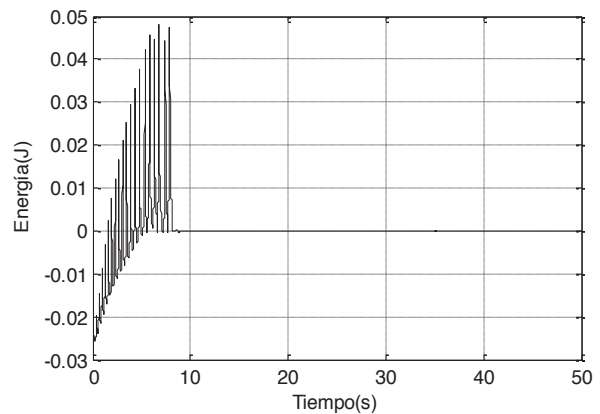


Figura 11: Energía del péndulo - Energía + RVE.

*Comportamiento de la alternativa de control frente una variación del ángulo del péndulo.*

Al ángulo del péndulo, en la posición invertida (0 rad), se le suma un valor de 0.0175 rad en forma de pulso a los 35 s. La Figura 12 muestra una ampliación de la gráfica del ángulo del péndulo representado en la Figura 8, en la misma se puede observar el efecto a los 30 s, de la interacción con el brazo, y a los 35 s el efecto correspondiente a la variación en forma de pulso descrita anteriormente. Como se puede apreciar el péndulo retorna a la posición de 0 rad. De igual manera la Figura 13 muestra el comportamiento del ángulo del brazo ante esta variación, el cual se establece nuevamente en la referencia deseada.

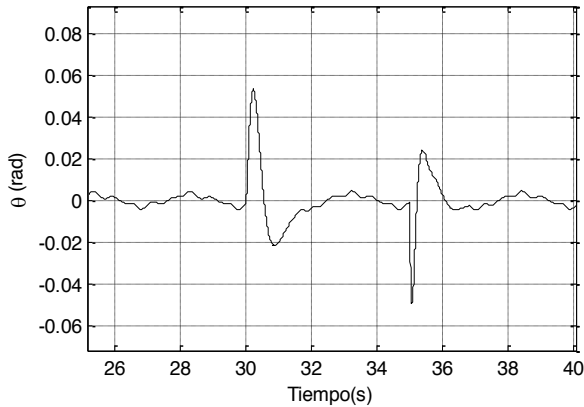


Figura 12: Salida del ángulo del péndulo  $\theta$  - frente una variación en forma de pulso - Energía + RVE.

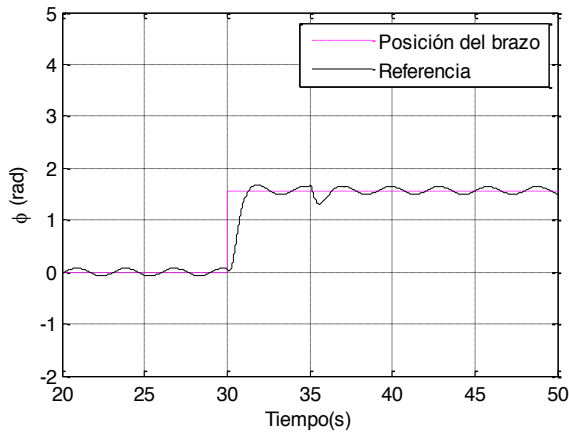


Figura 13: Salida del ángulo del brazo frente a una variación en forma de pulso en  $\theta$  - Energía + RVE.

**4.2. Alternativa de control Fuzzy + RVE**

En esta alternativa se combina el control Fuzzy para el balanceo, con la técnica de RVE para el control en el punto de equilibrio inestable del PF. Para realizar el balanceo del péndulo se parte del modelo no lineal del mismo mostrado en las ecuaciones (1) a (4); en este caso se toman como variables controladas Theta ( $\theta$ ) y Thetap ( $\dot{\theta}$ ), que se corresponden con el ángulo del péndulo y la derivada de este, es decir su velocidad de cambio, respectivamente; y como variable manipulada el voltaje ( $v$ ) comprendido entre  $\pm 24$  V. En la ecuación (11), el voltaje aparece implícito en el  $\tau_\phi$ , los cuales son directamente proporcionales.

El método de tipo Mamdani tiene una aceptación generalizada, es muy intuitivo y es el más apropiado para las entradas humanas, es por ello que fue el escogido para resolver el control del balanceo del PF.

En las Figuras 14 y 15 se muestran las cinco funciones de pertenencia (neg-larg, neg-med, zero, pos-med y pos-larg) escogidas para las variables Theta y Thetap, estas fueron seleccionadas del tipo gaussianas, debido a la suavidad de cambio que ofrece este tipo de función.

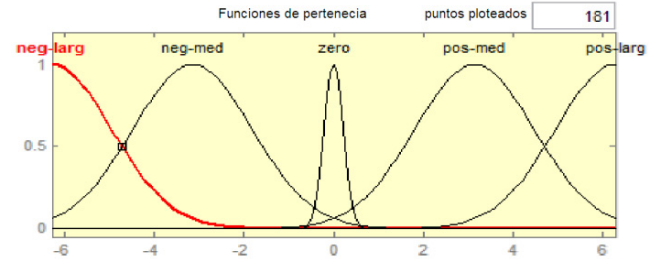


Figura 14: Funciones de pertenencia de Theta.

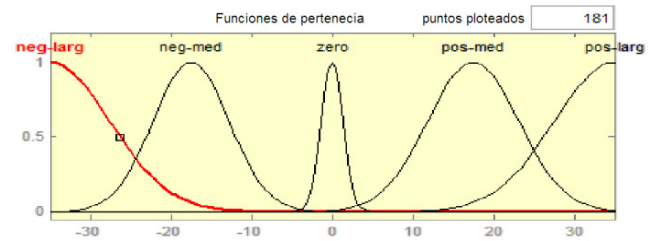


Figura 15: Funciones de pertenencia de Thetap.

La acción de control fue definida, a su vez, por 3 funciones de pertenencia (pos, neg y zer); estas del tipo trapezoidal, pues lo que se persigue en este caso son cambios bruscos en la polaridad del voltaje para balancear al péndulo, dichas funciones se observan en Figura 16.

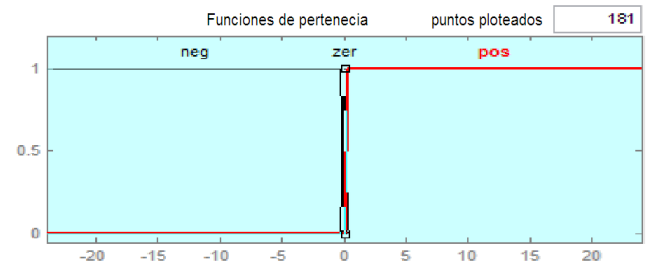


Figura 16: Funciones de pertenencia de la acción de control  $v$ .

Teniendo en cuenta las funciones de pertenencia propuestas para las variables controladas y para la variable manipulada fueron definidas un conjunto de 13 reglas con las que se obtienen buenos resultados.

Cuando se utiliza el control Fuzzy para el balanceo se obtienen los resultados mostrados en la Figura 17, donde se muestra el comportamiento del ángulo del péndulo ( $\theta$ ) y puede observarse cómo el tiempo de establecimiento del mismo es alrededor de 1 s, disminuyendo notablemente comparado con la técnica de control de la energía. La Figura 18 de igual manera muestra el comportamiento del ángulo del brazo ( $\phi$ ), quien se establece en la referencia a los 8 s. La Figura 19 muestra el comportamiento de la

velocidad ( $d\phi/dt$ ), la misma a partir del establecimiento del péndulo en la posición invertida toma valor igual a cero como resultado esperado. La Figura 20 muestra el voltaje suministrado al motor que mueve al brazo del péndulo.

En esta alternativa, para el control en el punto de equilibrio inestable del PF se utiliza la estrategia RVE, y los resultados de simulación obtenidos fueron los mismos que en la combinación anterior: control de la energía + RVE (Figuras 8 a la 11).

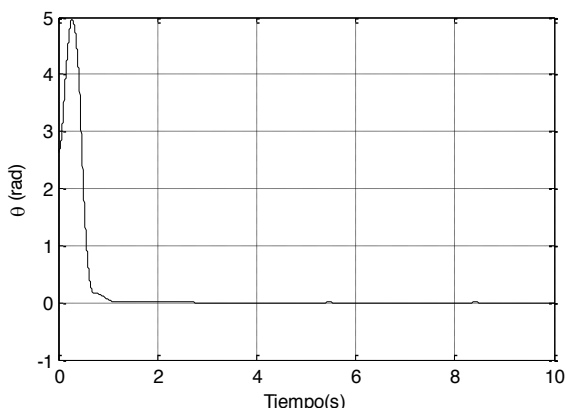


Figura 17: Salida del ángulo del péndulo  $\theta$  - Fuzzy + RVE.

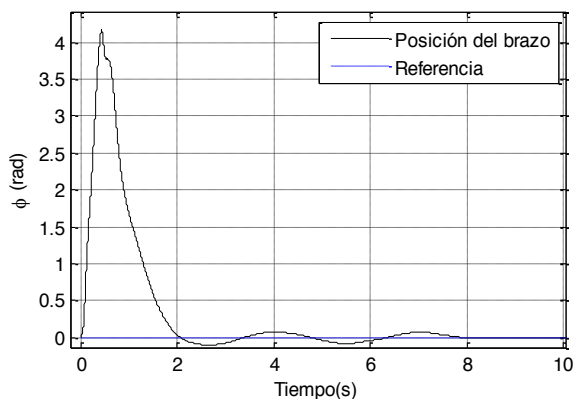


Figura 18: Salida del ángulo del brazo  $\phi$  - Fuzzy + RVE.

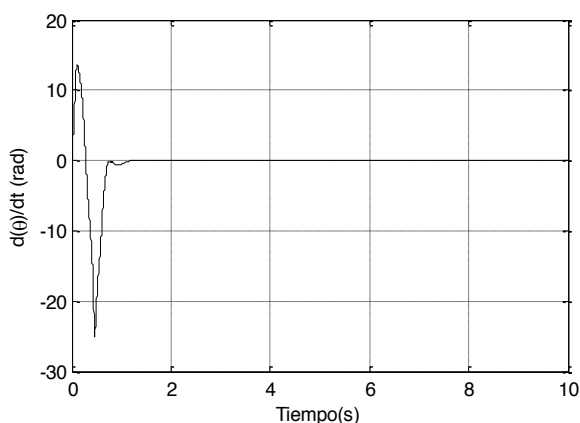


Figura 19: Salida de velocidad de cambio de  $\theta$  - Fuzzy + RVE.

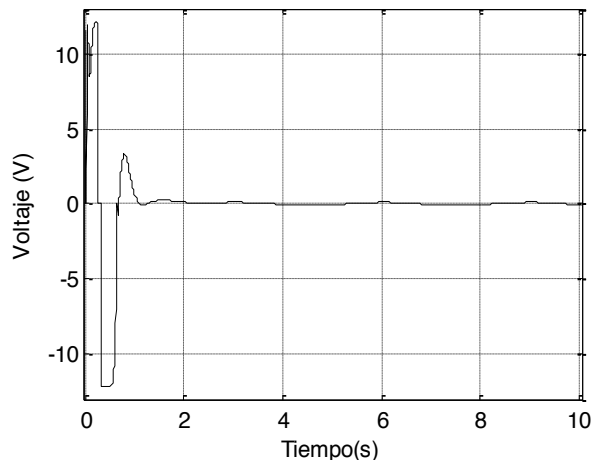


Figura 20: Acción de control ( $v$ ) - Fuzzy + RVE.

### 4.3. Alternativa de control Fuzzy + MPC

Para el diseño del MPC, que es usado para mantener al péndulo en el PE inestable, se utiliza el modelo lineal del PF mostrado en (9), se escogieron además como variable manipulada el voltaje aplicado al motor ( $v$ ), y como variables controladas el ángulo del péndulo ( $\theta$ ) y ángulo del brazo ( $\phi$ ). El controlador predictivo se programó mediante el Toolbox MPC de Matlab.

La acción de control calculada por el controlador predictivo en cada instante de tiempo, se obtiene resolviendo el problema de optimización dado por el funcional de costo planteado en (16). Se emplean los parámetros de sintonía del controlador mostrados en la Tabla 2.

Tabla 2: Parámetros de sintonía del MPC.

Parámetro	Valor
P	11
M	10
Tiempo de muestreo ( $T_s$ )	0.1s
$\alpha$ para $v$	1
$\beta$ para $\theta$ ---- $\beta$ para $\phi$	0 ---- 0.115
Restricciones	$-2V \leq v \leq 2V$ $-0.1rad \leq \theta \leq 0.1rad$

Para las aplicaciones que se implementen en un sistema embebido, deben tenerse en cuenta las características de hardware y software de este, a fin de seleccionar parámetros de sintonía del MPC acorde a las características del mismo.

Los resultados de simulación obtenidos para el control Fuzzy en la zona de balanceo fueron los mismos que en la alternativa anterior: Control Fuzzy + RVE (Figuras 17 a la 20).

La Figura 21 muestra el resultado del comportamiento del controlador predictivo en la zona de posición invertida del PF, donde se limita a mostrar el comportamiento de  $\theta$  ante a un cambio de referencia en forma de escalón de  $\phi$ , lo que evidencia la interacción presente entre ambas variables. Puede observarse que la variación del ángulo del péndulo es aproximadamente de  $3 \times 10^{-3} rad$ , y para el caso de estabilización con RVE, la variación debido a la interacción presente es de  $0.06 rad$  (ver Figuras 9 y 13), demostrando las potencialidades del MPC ante las interacciones.



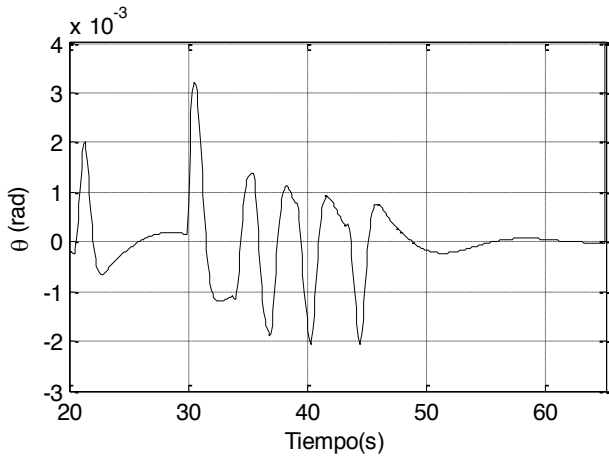


Figura 21: Salida del ángulo del péndulo  $\theta$  - Fuzzy + MPC.

La Figura 22 muestra el comportamiento del ángulo brazo  $\phi$  ante un cambio de  $\pi/2$  rad en su referencia. El hecho de que en esta alternativa el ángulo del brazo demore más en alcanzar la referencia deseada radica en la prioridad del MPC de cumplir las restricciones en  $\theta$ .

En la Figura 23 se puede observar cuan pequeña es la acción de control para llevar al brazo a la referencia deseada, esto provoca que no sea un desplazamiento rápido, sobre todo si se compara con la técnica de RVE, pero garantiza que la variación de Theta ( $\theta$ ) debido a la interacción con Phi ( $\phi$ ) sea del orden de  $10^{-3}$  rad (Figura 21).

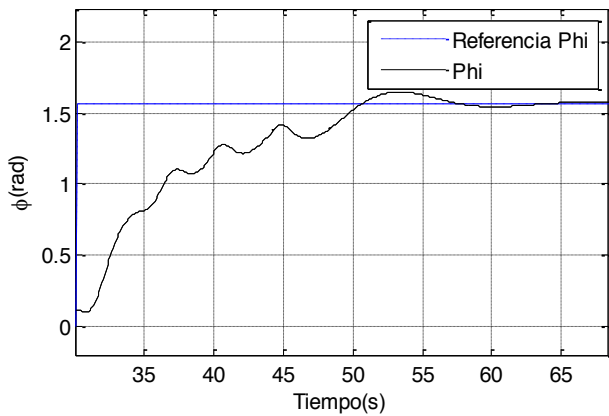


Figura 22: Salida del ángulo del brazo  $\phi$  - Fuzzy + MPC.

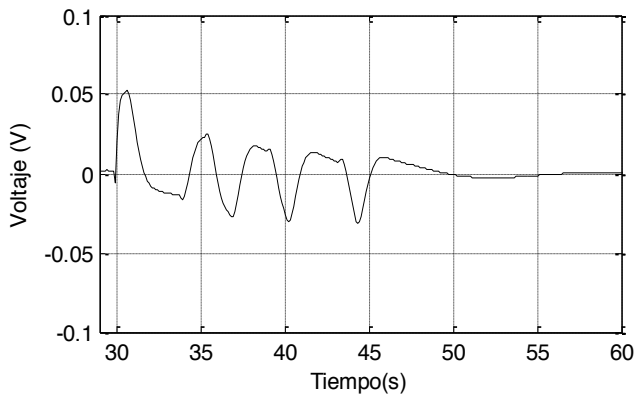


Figura 23: Acción de control - Fuzzy + MPC.

Comportamiento de la alternativa de control frente una variación del ángulo del péndulo.

Al ángulo del péndulo  $\theta$ , en la posición invertida ( $0$  rad), se le suma un valor de  $0.0175$  rad en forma de pulso a los  $65$  s.

La Figura 24 muestra una ampliación de la gráfica del ángulo del péndulo  $\theta$ , a los  $65$  s se observa el efecto correspondiente a la variación en forma de pulso descrita anteriormente. Como se puede apreciar la variación de dicha variable es de aproximadamente de  $4 \times 10^{-2}$  rad y el péndulo retorna a la posición de  $0$  rad.

De igual manera la Figura 25 muestra el comportamiento del ángulo del brazo  $\phi$  ante esta variación, el cual se establece nuevamente en la referencia deseada.

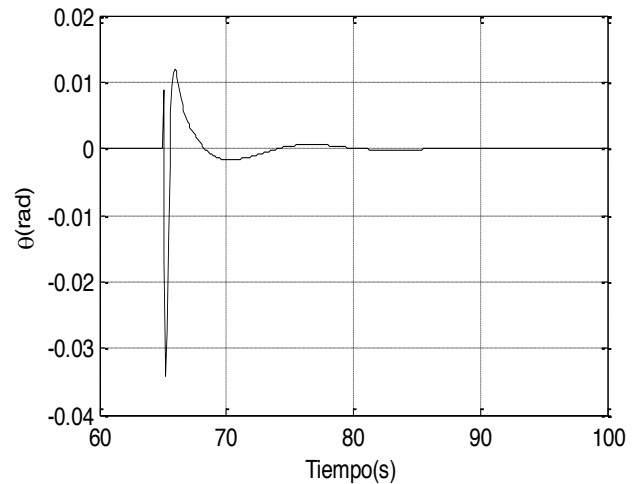


Figura 24: Salida de  $\theta$  frente una variación en forma de pulso - Fuzzy + MPC.

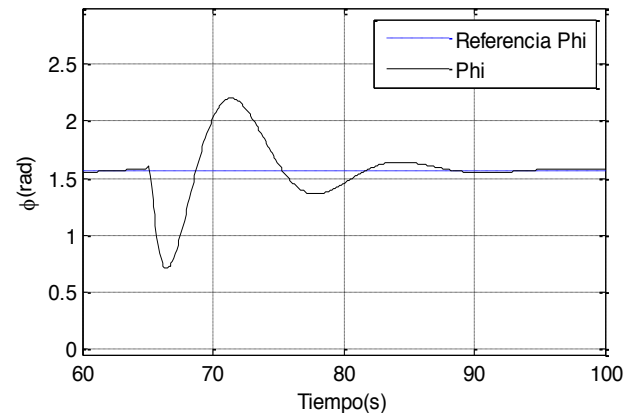


Figura 25: Salida de  $\phi$  frente a una variación tipo pulso en  $\theta$  - Fuzzy + MPC.

Como puede observarse en los resultados mostrados en las Figuras 21, 23 y 24, el MPC cumple con las restricciones de voltaje ( $v$ ) y ángulo del péndulo ( $\theta$ ) definidas en la Tabla 2, corroborando una de las ventajas de esta estrategia de control avanzado.

### 5. Análisis de los resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada alternativa de control propuesta en esta investigación para el control del PF.

La Figura 26 muestra el comportamiento de  $\theta$ , para las tres alternativas de control. Se observa cómo en el control del balanceo del péndulo la estrategia Fuzzy presenta un tiempo de establecimiento menor de 2 s, mucho menor que el control de la energía que logra estabilizarse a los 10 s.

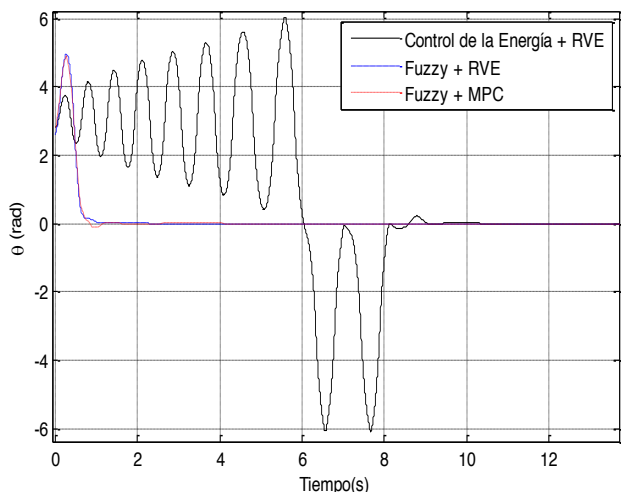


Figura 26: Salida de  $\theta$  para las distintas alternativas de control.

Para el control del punto de equilibrio inestable, se comparan las estrategias RVE y MPC, para ello en la Figura 27 se muestra el comportamiento de  $\theta$  ante un cambio de referencia en el ángulo del brazo  $\phi$  a los 30 s, evidenciando el efecto de la interacción presente. En esta simulación puede observarse que para la estrategia RVE la variación de  $\theta$  es de 0.06 rad y para MPC es de  $3 \times 10^{-3}$  rad, demostrando las potencialidades del MPC ante las interacciones, además se observa que ante variaciones tipo pulso aplicado a  $\theta$  a los 65 s, el MPC posee un máximo sobrepaso menor que RVE.

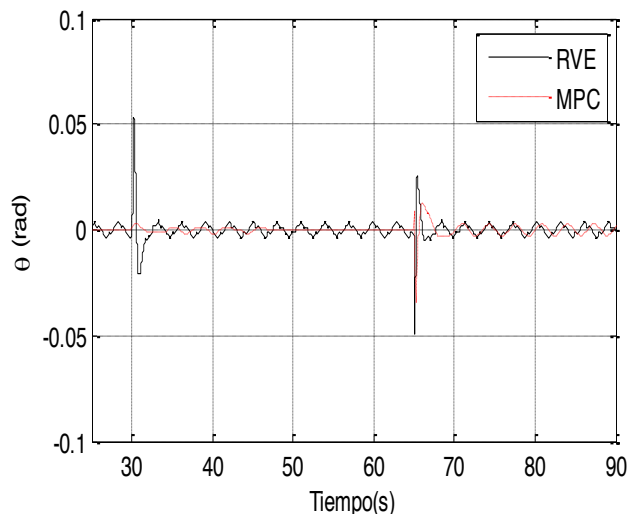


Figura 27: Salida de  $\theta$  ante un cambio en la referencia de  $\phi$  a los 30 segundos y frente a una variación en forma de pulso en  $\theta$  a los 65 s.

Las Figuras 28 y 29 muestran las gráficas correspondientes al comportamiento del ángulo del péndulo ( $\phi$ ) y a la acción de control ( $v$ ), respectivamente.

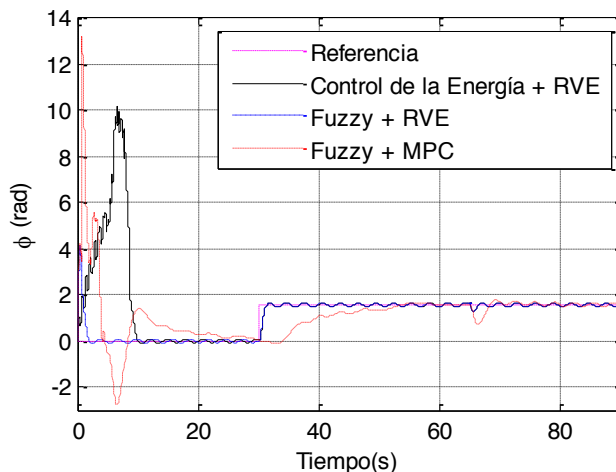


Figura 28: Salida de  $\phi$  para las distintas alternativas de control.

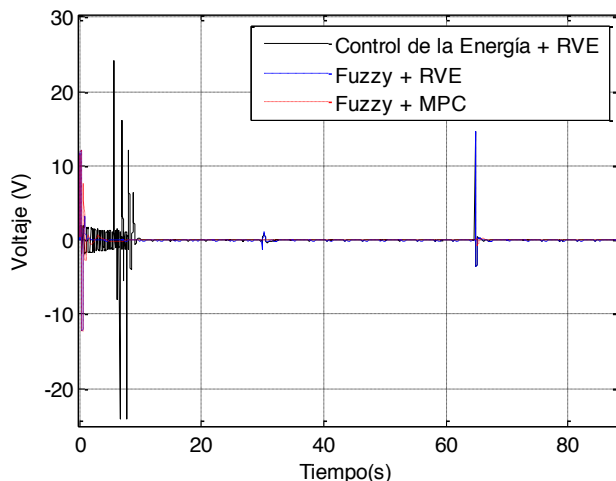


Figura 29: Acción de control ( $v$ ) para las distintas alternativas de control.

En la Tabla 3 se muestra el resultado de la comparación de los índices de desempeño para los controladores RVE y MPC, que son los que se encargan de mantener al péndulo en el punto de equilibrio inestable. Verificándose que con el uso de la estrategia MPC se obtienen mejores índices de desempeño.

Tabla 3: Índices de desempeño para posición invertida del péndulo.

Índices de Desempeño	RVE	MPC
IAE	0.3472	0.2460
ITAE	27.7732	19.67
ISE	0.0198	0.0082
ITSE	1.5807	0.6534

## 6. Conclusiones

En esta investigación se presentó el diseño y la simulación de tres alternativas de control utilizadas para el control global de un péndulo de Furuta: Control de la Energía + RVE, Control Fuzzy + RVE y Control Fuzzy + MPC, evidenciándose el comportamiento de cada una de ellas.

Se realizó una comparación de estas estrategias demostrándose que cuando se aplican estrategias avanzadas (Fuzzy + MPC) se logra llevar al péndulo desde su posición colgante natural a la posición invertida en apenas 1 s, además el efecto ante las interacciones existentes en el proceso entre Theta ( $\theta$ ) y Phi ( $\phi$ ) se reduce notablemente. Se mostró además una de las ventajas del control predictivo, como lo es el cumplimiento de las restricciones impuestas a las variables de entradas y de salidas y la efectividad ante el rechazo a una perturbación en forma de pulso en  $\theta$ .

## English Summary

### Alternatives of Control for a Furuta's Pendulum

#### Abstract

In this paper is presented a design of three control strategies for the global control of the Furuta's pendulum: Energy Control plus State - Feedback, Fuzzy Logic Control plus State - Feedback and Fuzzy Logic Control plus MPC. Simulations using Matlab show the advantages of the Fuzzy Logic Control for the pendulum's swinging and the MPC Control for the inverted position.

#### Keywords:

Fuzzy Control, Predictive Control, Modelling, Energy Control, Controlled System.

## Referencias

- Acosta, J., Gordillo, F., Aracil, J. 2001. A new SG law for swinging the Furuta pendulum up. 5th IFAC symposium. Nonlinear Control Systems (NOLCOS). San Petesburgo, Rusia.
- Acosta, J., Gordillo, F., Aracil, J. 2001. Comparative Study of Nonlinear Control Strategies for the Furuta Pendulum. Measurement and Control in 2001 (MECO'01), Pittsburgh, Pennsylvania, (USA).
- Acosta, J., Aracil, J., Gordillo, F., 2002. Nonlinear control strategies for the furuta pendulum. Control and Intelligent Systems, 30, 2.
- Aguilar, C., Sira, H., 2007. A linear differential flatness approach to controlling the Furuta pendulum. IMA Journal of Mathematical Control and Information 24, 31–45. DOI:10.1093/imamci/dnl005.
- Aguilar, C., Suárez, M., Gutiérrez, O., 2010. The direct Lyapunov method for the stabilisation of the Furuta pendulum. International Journal of Control 3, 11, November 2010, 2285–2293. DOI: 10.1080/00207179.2010.520029.
- Aracil, J., Acosta, J., Gordillo, F., 2013. A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the Furuta pendulum. Control Engineering Practice 21, 989–993.
- Åström, K. J., Furuta, K., 2000. Swinging up a pendulum by energy control. Automática 36, 287-295. DOI: 10.1016/S0005-1098(99)00140-5.
- Bordons, C., 2000. Control Predictivo: Metodología, tecnología y nuevas perspectivas. I Curso de Especialización en Automática, Aguadulce, Almería, 1-73.
- Caballín, R., Villafruela, L., 2013. Modelo virtual del péndulo de Furuta, simulación y control. Control Automático. VII Conferencia Internacional de Ingeniería Eléctrica. FIE 2014. Junio 2014. ISBN: 978-959-207-529-0.
- Camacho, E., Bordons, C., 2010. Control Predictivo: pasado, presente y futuro. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 10, 1. DOI: 10.4995/riai.v1i3.10587.
- Fantoni, I., Lozano, R., 2002. Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit. International Journal of Control, 75, 6, 390-398. Disponible en <http://dx.doi.org/10.1080/0020717011011226>.
- Fernández, I. R., 2011. Control predictivo por desacoplo con compensación de perturbaciones para el benchmark de control 2009-2010. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 8, 2, 112-121. DOI: 10.4995/RIAI.2011.02.14.
- Gordillo, F., Acosta, J., Aracil, J., 2003. A new swing-up law for the Furuta Pendulum. International Journal of Control. DOI: 10.1080/0020717031000116506
- Ibargüen, F., Hoyos, J., Cardona, J., 2006. Control de un péndulo invertido por realimentación de espacios de estados generado a través de algoritmos genéticos. Scientia et Technica XII, 32, 51-154. ISSN 0122-1701.
- Ibargüen, F., Morales, J., Moreno, J., Cardona, J., Muñoz, P., 2009. Dinámica hamiltoniana y control por modos deslizantes del Péndulo de Furuta. Ingeniería y Desarrollo, 26, 65-82. ISSN: 2145-9371.
- Karnopp D. 1985. Computer simulation of slip-stick friction in mechanical dynamic systems. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 107,1, 100–103.
- Lorandi, P. A., Hermida, G., Ladrón de Guevar, E., Hernández, J. 2011. Controladores PID y Controladores Difusos. Revista de la Ingeniería Industrial 5, 1. DOI:1940-2163.
- Mancillas, J., Sánchez, P., Reyes-Cortés, F., Michua-Camarillo, A., 2009. Diseño de una Plataforma Gráfica de Simulación Basada en un Péndulo en configuración de Furuta. 8º Congreso Nacional de Mecatrónica, 207-213. Veracruz, México.
- Maravall, D., Zhou, C., Alonso, J., 2005. Hybrid fuzzy control of the inverted pendulum via vertical forces. International journal of intelligent systems 20, 195-211. DOI: 10.1002/int.20062.
- Ogata, K., 2002. Modern Control Engineering, 4th edición. New Jersey: Prentice-Hall, México.
- Reznik, L., 1997. Fuzzy Controllers. Newnes. An imprint of Butterworth-Heinemann. Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP. A division of Reed Educational and Professional Publishing Ltd. Victoria University of Technology, Melbourne, Australia.
- Rubio, J., Figueroa, M., Pérez, J., Yoe, J. 2012. Control para estabilizar y atenuar las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio. Revista Mexicana de Física 58, 2, 107-112. ISSN 1870-3542.
- Tejada, G., 2002. Tutorial de lógica fuzzy. Electrónica-UNMSM, 5, 18-29. Universidad Nacional de San Marcos, Lima, Perú.
- Tibaduiza, D., Amaya, I., Rodríguez, S., Mejía, N., Flores, M., 2011. Implementation of a fuzzy control for the direct kinematic control of a robot manipulator. Revista Chilena de Ingeniería 19, 3, 312-322. DOI: 10.4067/S0718-33052011000300002.
- Valenzuela, J. G., Montoya, O. D., Giraldo, D., 2012. Control global del Péndulo Rotacional Invertido empleando modelos de energía. Scientia Et Technica XVII, 52. ISSN 0122-1701.