JOURNAL OF ALGEBRA 36, 448–491 (1975)

Cohomologische Invarianten Quadratischer Formen*

JÓN KR. ARASON

Raunvisindastofnun Háskólans, Dunhaga 3, Reykjavik, Island

Received July 10, 1974

EINLEITUNG

Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $W(K)$ der Wittring der Ähnlichkeitsklassen nicht ausgearteter quadratischer Formen über K. Die klassischen Invarianten dieser Ähnlichkeitsklassen sind:

der Dimensionsindex e: $W(K) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

die Diskirminante d: $W(K) \to K^{\cdot}/K^{\cdot 2}$ (Quadratklassengruppe),

und die Algebrenklasse c: $W(K) \to Br_2(K)$ (Gruppe der Algebrenklassen der Ordnung $\leqslant 2$).

Es ist dabei e immer ein Homomorphismus und der Kern von e ist das maximale Ideal $M(K)$ der Klassen gerade-dimensionaler Formen. d und c sind aber i.a. keine Homomorphismen. Es ist jedoch die Einschränkung $d|_{M(K)}$ ein Homomorphismus, dessen Kern das Quadrat $M^2(K)$ von $M(K)$ ist, und die Einschränkung $c|_{M^2(K)}$ ein Homomorphismus, dessen Kern die dritte Potenz $M^3(K)$ von $M(K)$ enthält. Insbesondere können diese Invarianten die Ähnlichkeitsklassen höchstens dann (sogar genau dann, wie aus unserem Corollar 3.7 folgt) vollständig charakterisieren, wenn $M^3(K) = 0$ ist. Es stellt sich daher das Problem, weitere Invarianten zu finden. Sei jetzt K_s ein separabler Abschluß von K, $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ die volle Galoisgruppe von K und $H^n(K, 2) := H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Dann ist $H^0(K, 2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^1(K, 2) \cong K^{\cdot}/K^{\cdot 2}$ und $H^2(K, 2) \cong Br_2(K)$. Als Zielgruppen weiterer Invarianten bieten sich daher die höheren Cohomologiegruppen $H^n(K, 2)$ an. Die Stiefel-Whitney Klassen von A. Delzant (siehe [11: §3]) liefern in der Tat Invarianten w_n: $M(K) \to H^n(K, 2)$ für alle n. Diese sind aber leider nicht geeignet, das Problem der vollständigen Charakterisierung der Ähnlichkeitsklassen quadratischer Formen zu lösen, da z.B. alle w_i ($i > 0$) auf $M^3(K)$ verschwinden, falls -1 in K ein Quadrat ist (siehe [11, Lemma 3.2]).

In Analogie zu e, $d|_{M(K)}$ und $c|_{M^2(K)}$ kann man aber versuchen, allgemeiner Homomorphismen e_K^n: $M^n(K) \to H^n(K, 2)$ zu finden. In weiterer Analogie würde man dabei verlangen, daß e_K^n auf $M^{n+1}(K)$ verschwindet und daß die

* D77-Dissertation Mainz 1974.

e_K^n zusammen einen Ringhomomorphismus von dem graduierten Wittring $\bigoplus_{n=0}^{\infty} M^n(K)/M^{n+1}(K)$ in den Cohomologiering $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(K, 2)$ induzieren. Dadurch ist dann e_K^n eindeutig bestimmt, falls es existiert—die Frage ist also, ob e_K^n wohldefiniert ist. Für globale Körper und deren Lokalisierungen ist das von J. Milnor in der schon zitierten Arbeit bewiesen und auch gezeigt worden, daß in diesen Fällen der eben erwähnte Ringhomomorphismus ein Isomorphismus ist. Da allgemein $M(K)$ von den Klassen zweidimensionaler Formen additiv erzeugt ist, ist $M^n(K)$ von den Klassen der n-fachen Produkte zweidimensionaler Formen additiv erzeugt. Wir werden im ersten Paragraphen dieser Arbeit unter Anderem zeigen, daß allgemein—etwas ungenau ausgedrückt—e_K^n wenigstens auf diesen Erzeugenden wohldefiniert ist.

Man hat in gewissen Fällen Homomorphismen (Ring- oder Gruppen-) vom Wittring eines Körpers in den Wittring eines anderen Körpers (Änderung des Körpers). Dazu gehören $W(K) \to W(L)$ für eine Körpererweiterung L/K, $W(L) \to W(K)$ für eine endliche Körpererweiterung L/K (Verlagerung, Einschränkung der Skalare) und $W(K) \to W(K/v)$ für eine diskrete Bewertung v von K, wobei K/v den Restklassenkörper bezeichnet (Restklassenhomomorphismen). Wir werden diese im zweiten Paragraphen studieren. Im dritten Paragraphen werden wir zeigen, daß diese Homomorphismen auch für die graduierten Wittringe definiert sind und sie darauf studieren. Im vierten Paragraphen werden wir dann entsprechende Homomorphismen für die Cohomologieringe konstruieren und zeigen, daß im Falle der Existenz von e_K^n und e_L^n bzw. $e_{K/v}^{n-1}$ die auftretenden Diagramme kommutativ sind. Wir werden ferner zeigen, daß viele Sätze über das Verhalten des Wittringes bei Änderung des Körpers auch für den graduierten Wittring bzw. den Cohomologierung gültig sind. Im fünften Paragraphen werden wir dann die Resultate der anderen Paragraphen benutzen um u.A. zu zeigen, daß e_K^3 für alle Körper K wohldefiniert ist. Wir werden oft Resultate aus der Theorie der Cohomologie von (proendlichen) Gruppen und aus der Bewertungstheorie ohne Zitat benutzen. Wir weisen dazu auf [21], [9] und [2] hin.

Ich möchte an dieser Stelle meinem Doktorvater Prof. Dr. A. Pfister für die vielen Anregungen, die er mir während der Arbeit an dieser Dissertation gegeben hat, herzlichst danken. Prof. Pfister war es auch, der ursprünglich mein Interesse für die Theorie der quadratischen Formen erweckte.

1. Bezeichnungen. Cohomologische Invarianten von Pfisterformen

In dieser Arbeit verstehen wir unter einem Körper stets einen kommutativen Körper der Charakteristik $\neq 2$. $K^{\cdot}$ bezeichnet die multiplikative Gruppe des Körpers K. Unter einer Bewertung v eines Körpers K verstehen wir (wenn nicht anders gesagt) eine diskrete, einrangige Bewertung v von K, so daß der Restklassenkörper, den wir mit K/v bezeichnen, Charakteristik $\neq 2$ hat. Eine quadratische Form, oder einfach Form, über einem Körper ist in dieser Arbeit stets eine nicht ausgeartete quadratische Form. Äquivalenz zweier quadratischen Formen φ und ψ wird mit $\varphi \cong \psi$ angezeigt und Ähnlichkeit (im Sinne von [24]) mit $\varphi \sim \psi$. Die Ähnlichkeitsklasse von φ wird hier mit $\tilde{\varphi}$ oder $\varphi^{\sim}$ bezeichnet (anders als üblich). Die Dimension der anisotropen Kernform der Form φ wird mit $\operatorname{diman}(\varphi)$ bezeichnet. Für Summe und Produkt zweier Formen φ und ψ schreiben wir $\varphi \oplus \psi$ bzw. $\varphi \otimes \psi$. Wir sagen φ sei eine Teilform von ψ wenn eine Form ρ existiert mit $\psi \cong \varphi \oplus \rho$. Für Diagonalformen mit Diagonalgliedern $a_1, \ldots, a_n \in K^{\cdot}$ schreiben wir $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ($=0$, die Nullform, falls $n = 0$). Statt $\langle a \rangle \otimes \varphi$ schreiben wir oft einfach $a\varphi$. Die Formen

$$\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle := \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle \qquad (=\langle 1 \rangle, \text{ falls } n = 0)$$

und die, die solchen Formen äquivalent sind, werden (n-fache) Pfisterformen genannt (Die Bezeichnung stammt aus [3], nur sind hier die Vorzeichen anders gewählt). Diese Formen sind genau die stark multiplikativen Formen der Dimension 2^n in der Terminologie von Pfister [13]. Wir werden desöfters von den verschiedenen Eigenschaften dieser Formen Gebrauch machen ohne es besonders zu erwähnen (siehe dazu [13], [10], [19]). Wir werden auch von der Tatsache Gebrauch machen, daß wenn eine Pfisterform ρ eine Pfisterform τ enthält, etwa $\rho \cong \tau \oplus \varphi$, und $a \neq 0$ ein von φ dargestelltes Element ist, daß dann ρ die Form $\tau \otimes \langle 1, a \rangle$ enthält. Das ist in [13, Beweis von Theorem 2] (oder [10, Beweis von 2.11]) implizit bewiesen (Der Fall ρ isotrop ist trivial). Mit $W(K)$ bezeichnen wir den Wittring des Körpers K. Mit $M(K)$ bezeichnen wir das maximale Ideal der Klassen gerade-dimensionaler Formen und mit $M^n(K)$ (oder einfach M^nK) die n-te Potenz von $M(K)$, $M^0(K) = W(K)$ wie üblich. M^nK ist dann von den Klassen $a\tilde{\varphi} := \widetilde{a\varphi}$, $a \in K^{\cdot}$ und φ n-fache Pfisterform, additiv erzeugt. Mit $\bar{M}^n(K)$ (oder $\bar{M}^nK$) bezeichnen wir die Faktorgruppen $M^n(K)/M^{n+1}(K)$ ($n \geqslant 0$). Sollte $\bar{M}^{-1}(K)$ vorkommen, so ist darunter 0 zu verstehen.

Wir werden öfters den Hauptsatz in [1] benutzen und zitieren ihn hier in der folgenden Form:

SATZ 1.1. *Sei φ eine quadratische Form über K,* $\operatorname{diman}(\varphi) < 2^n$ *und $\tilde{\varphi} \in M^nK$. Dann ist $\varphi \sim 0$.*

Die in [1] angewandte Methode, Formen durch Körpererweiterungen einfacher zu machen, werden wir auch oft benutzen. Dazu eine Definition und einige Sätze.

Sei $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ eine quadratische Form über den Körper K, $n = \dim \varphi > 1$. Dann setzen wir

$$K(\varphi) := K(x_2, \ldots, x_n)((-a_1^{-1}(a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2))^{1/2})$$

mit unabhängigen Unbestimmten $x_2, \ldots, x_n$. $K(\varphi)$ ist dann (bis auf Isomorphie) nur von der Äquivalenzklasse von φ abhängig. Ist nämlich $\varphi \cong \langle a_1, -a_1 b^2 \rangle$ eine hyperbolische Ebene, so ist $K(\varphi) = K(x_2)$ und sonst ist $K(\varphi)$ der Quotientenkörper des Integritätsbereiches $K[x_1, \ldots, x_n]/(a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2)$, der offenbar nur von der Äquivalenzklasse von φ abhängt. Trivialerweise gilt $K(a\varphi) = K(\varphi)$ für $a \in K^{\cdot}$. Offenbar ist φ über $K(\varphi)$ isotrop.

Satz 1.2. *Genau dann ist $K(\varphi)$ rein transzendent über K, wenn φ schon über K isotrop ist.*

Beweis. Ist $K(\varphi)$ rein transzendent über K, so muß φ isotrop über K sein, denn φ ist isotrop über $K(\varphi)$. Ist umgekehrt φ isotrop über K, o.E. $\varphi \cong \langle 1, -1 \rangle \oplus \rho$ und $x' = (x_3, \ldots, x_n)$, so ist $K(\varphi) = K(x')(x_2)((x_2^2 - \rho(x'))^{1/2})$. Ist $n = 2$, so ist also $K(\varphi) = K(x_2)$ und ist $n > 2$, so ist $K(\varphi) = K(x')(y)$ mit $y = x_2 - (x_2^2 - \rho(x'))^{1/2}$, denn $x_2 = (2y)^{-1}(y^2 + \rho(x'))$.

Der folgende Satz ist fast im Beweis des Hauptsatzes in [1] enthalten.

Satz 1.3. *Seien φ und ψ quadratische Formen über K, $\dim \varphi > 1$ und ψ anisotrop. Sei $\psi \sim 0$ über $K(\varphi)$. Ist dann $\psi \neq 0$, so gibt es ein $a \in K^{\cdot}$ so daß $a\varphi$ in ψ enthalten ist. Ist φ eine Pfisterform, so ist $\psi = \rho \otimes \varphi$ mit einer Form ρ über K.*

Beweis. Sei o.E. $\varphi \cong \langle 1 \rangle \oplus \varphi'$. Sei $n = \dim \varphi$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein unbestimmter Vektor und $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, also $K(\varphi) = K(x')((-\varphi'(x'))^{1/2})$. ψ ist anisotrop über $K(x')$, aber hyperbolisch über $K(\varphi)$, damit $\psi \cong \langle 1, \varphi'(x') \rangle \otimes \psi'$ über $K(x')$ (siehe [10, 10.2]). Es folgt

$$\varphi(x)\psi \cong (x_1^2 + \varphi'(x'))\langle 1, \varphi'(x') \rangle \otimes \psi' \cong \langle 1, \varphi'(x') \rangle \otimes \psi' \cong \psi$$

über $K(x)$. Ist also $a \in K^{\cdot}$ ein von ψ dargestelltes Element, so wird $a\varphi(x)$ von ψ über $K(x)$ dargestellt. Nach dem Teilformensatz ([13, Satz 3], [10, 1.3]) enthält ψ die Form $a\varphi$, etwa $\psi \cong a\varphi \oplus \chi$. Damit ist der erste Teil bewiesen. Ist φ eine Pfisterform, so ist $a\varphi \sim 0$ über $K(\varphi)$ da φ isotrop über $K(\varphi)$, also auch $\chi \sim 0$ über $K(\varphi)$. Der zweite Teil folgt daher durch Induction nach $\dim \psi$.

Man kann übrigens als eine Art Umkehrung des zweiten Teiles des Satzes zeigen, daß wenn unter den Voraussetzungen des ersten Teiles noch $\psi \cong b\varphi$ ist, $b \in K^{\cdot}$, daß dann φ eine Vielfaches $c\tau$ einer Pfisterform τ ist, $c \in K^{\cdot}$. Mit den Bezeichnungen des Beweises ist dann nämlich $\varphi(x)\, b\varphi \cong b\varphi$, d.h. $\varphi(x) \cong \varphi$ über $K(x)$, nach Definition also φ stark multiplikativ.

Das folgende Lemma ist eine Verschärfung von [1, Corollar 3] (und Satz 1.1).

LEMMA 1.4. *Sei φ eine quadratische Form über K, $\dim \varphi < 2^n + 2^l$ mit $0 \leqslant l \leqslant n$ und $\tilde{\varphi} \in M^n K$. Es sei in φ eine Form $a_0\langle\langle a_1, \ldots, a_l\rangle\rangle$ enthalten. Dann gibt es $a_{l+1}, \ldots, a_n \in K^\cdot$ mit $\varphi \sim a_0\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$.*

Beweis. Sei m maximal so, daß φ eine Form $a_0\langle\langle a_1, \ldots, a_m\rangle\rangle$ enthält. Wir setzen $\tau = \langle\langle a_1, \ldots, a_m\rangle\rangle$ und schreiben $\varphi \sim a_0\tau \oplus \psi$ mit ψ anisotrop. Es ist dann $a_0\tau \oplus \psi$ in φ enthalten und $\dim \psi < 2^n$. Es folgt $\psi = 0$. Ist nämlich $m = 0$, so muß $\varphi \cong \langle a_0\rangle$ eindimensional sein, damit $\psi = 0$. Ist $m > 0$, so ist über $K(\tau)$ betrachtet $a_0\tau \sim 0$, also $\tilde{\psi} \in M^n(K(\tau))$, nach Satz 1.1 damit $\psi \sim 0$ über $K(\tau)$, nach Satz 1.3 also $\psi \cong \rho \otimes \tau$ über K. Wäre jetzt $a \neq 0$ von ρ dargestellt, so würde ψ die Form $a\tau$ enthalten, damit φ die Form $a_0\tau \otimes \langle 1, a_0^{-1}a\rangle$ enthalten im Widerspruch zur Wahl von m. Es folgt $\rho = 0$, also $\psi = 0$. Wir haben daher $\varphi \sim a_0\tau$. Aus Dimensionsgründen ist ferner $m \leqslant n$. Ist $m = n$, so sind wir fertig. Ist $m < n$, so folgt aus Satz 1.1, daß $\varphi \sim a_0\tau \sim 0$ ist, damit $\varphi \sim a_0\langle\langle a_1, \ldots, a_m, 1, \ldots, 1\rangle\rangle$ ($(n - m)$-mal die 1).

Wir können jetzt den folgenden, für uns wichtigen Satz über Relationen zwischen n-fachen Pfisterformen beweisen. Dieser Satz ist von uns unabhängig auch von R. Elman und T. Y. Lam [3, Th. 4.8] bewiesen worden.

SATZ 1.5. *Seien φ, ψ und χ n-fache Pfisterformen über K, $n > 0$. Sei $\tilde{\varphi} + \tilde{\psi} \equiv \tilde{\chi} \bmod M^{n+1}(K)$. Dann existiert eine $(n-1)$-fache Pfisterform τ und $a, b \in K^\cdot$ mit $\varphi \cong \tau \otimes \langle 1, -a\rangle$, $\psi \cong \tau \otimes \langle 1, -b\rangle$, $\chi \cong \tau \otimes \langle 1, -ab\rangle$.*

Beweis. Sei $\psi \cong \langle 1\rangle \oplus \psi'$, $\chi \cong \langle 1\rangle \oplus \chi'$. Dann ist nach Voraussetzung $(\varphi \oplus \psi' \oplus -\chi')^\sim \in M^{n+1}(K)$ und es ist $\dim(\varphi \oplus \psi' \oplus -\chi') < 2^{n+1} + 2^n$. Nach Lemma 1.4 existiert ein d mit $\varphi \oplus \psi' \oplus -\chi' \sim \varphi \otimes \langle 1, -d\rangle$, d.h. $\psi \oplus -\chi \sim -d\varphi$. Sei τ eine Pfisterform maximaler Dimension $\leqslant 2^{n-1}$, die in ψ und χ enthalten ist. Angenommen es sei $\dim \tau < 2^{n-1}$. Dann ist $\psi \cong \tau \oplus \rho$ und $\chi = \tau \oplus \sigma$ mit $\dim \rho = \dim \sigma > 2^{n-1}$, also $\dim(\rho \oplus -\sigma) > 2^n$. Wegen $\rho \oplus -\sigma \sim -d\varphi$ folgt $\rho \oplus -\sigma$ isotrop, d.h. ρ und σ stellen beide ein $e \neq 0$ dar. Dann ist aber $\tau \otimes \langle 1, e\rangle$ in ψ und χ enthalten im Widerspruch zur Maximalität von τ. Es ist daher τ eine $(n-1)$-fache Pfisterform und damit $\psi \cong \tau \otimes \langle 1, -b\rangle$ und $\chi \cong \tau \otimes \langle 1, -c\rangle$. Setzen wir $c = ab$, so folgt $\tau \otimes \langle b, -ab\rangle \sim -\psi \oplus \chi \sim d\varphi$, also $b\tau \otimes \langle 1, -a\rangle \cong d\varphi$. Insbesondere stellt φ bd^{-1} dar, also $\varphi \cong bd^{-1}\varphi$, damit $\varphi \cong \tau \otimes \langle 1, -a\rangle$.

Wir wenden uns jetzt der Galois-Cohomologie zu. Sei K ein Körper,

K_s ein separabler Abschluß von K und $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ die volle Galoisgruppe von K. Wir setzen dann

$$H^n(K, 2) := H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Diese Gruppen sind bekanntlich nicht von der speziellen Wahl von K_s abhängig. Die direkte Summe

$$H^*(K, 2) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(K, 2),$$

ist mit dem Cupproduct ein graduierter, kommutativer Ring. Wir haben $H^0(K, 2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und natürliche Isomorphismen $H^1(K, 2) \cong K^{\cdot}/K^{\cdot 2}$ (Quadratklassengruppe) und $H^2(K, 2) \cong Br_2(K)$ (die Untergruppe der Elemente der Ordnung $\leqslant 2$ in der Brauergruppe von K). Für Einzelheiten siehe z.B. [19, Appendix] oder [11, §6]. Ist $a \in K^{\cdot}$, so bezeichnen wir mit $(a) \in H^1(K, 2)$ das unter dem Isomorphismus $K^{\cdot}/K^{\cdot 2} \cong H^1(K, 2)$ der Quadratklasse von a entsprechende Element. Schreiben wir $H^1(K, 2) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, so ist (a) der Homomorphismus $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit dem genauen Kern $\mathrm{Gal}(K_s/K(a^{1/2}))$. Statt $(a_1) \cup \cdots \cup (a_n)$ schreiben wir einfach $(a_1, \ldots, a_n) \in H^n(K, 2)$. (a_1, a_2) ist dann das der Klasse der Quaternionenalgebra $(a_1, a_2/K)$ entsprechende Element.

Die Invarianten e (Dimensionsindex), d (Diskriminante) und c (Algebrenklasse) quadratischer Formen über K können jetzt als Abbildungen $W(K) \to H^n(K, 2)$ gedeutet werden, $n = 0$, 1 bzw. 2.

$$e_K^0 := e \colon W(K) \to H^0(K, 2)$$

ist dabei ein Homomorphismus und es ist $\mathrm{Ker}(e_K^0) = M(K)$. d ist i.a. kein Homomorphismus, es gilt aber $d(\varphi + \psi) = d\varphi + d\psi$ falls $\psi \in M(K)$ ist, insbesondere ist die Einschränkung

$$e_K^1 := d\,|_{M(K)} \colon M(K) \to H^1(K, 2)$$

ein Homomorphismus. Es gilt $\mathrm{Ker}(e_K^1) = M^2(K)$ [14, Satz 13]. c ist i.a. auch kein Homomorphismus, aber es gilt $c(\varphi + \psi) = c(\varphi) + c(\psi)$ falls $\psi \in M^2(K)$, insbesondere ist

$$e_K^2 := c\,|_{M^2(K)} \colon M^2(K) \to H^2(K, 2)$$

ein Homomorphismus. Es gilt $M^3(K) \subseteq \mathrm{Ker}(e_K^2)$. Ob $M^3(K)$ für alle K der genaue Kern von e_K^2 ist, ist bisher ungeklärt, man weiß jedoch, daß für $\varphi \in \mathrm{Ker}(e_K^2)$ mit $\mathrm{diman}(\varphi) \leqslant 12$ auch $\varphi \in M^3K$ gilt [14, Satz 14].

Eine sich jetzt aufdrängende Frage ist ob entsprechende Homomorphismen

$$e_K^n\colon M^nK \to H^n(K, 2)$$

existieren. Wir haben schon erwähnt daß M^nK von den Klassen $a_0\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle^\sim$ additiv erzeugt wird, also ist ein solcher Homomorphismus durch die Bilder dieser Formen eindeutig bestimmt. Für $n = 0$ haben wir $e_K^0(a_0\langle 1\rangle^\sim) = 1 \in H^0(K, 2)$, für $n = 1$ ist $e_K^1(a_0\langle\langle a_1\rangle\rangle^\sim) = (a_1) \in H^1(K, 2)$ und für $n = 2$ ist $e_K^2(a_0\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle^\sim) = (a_1, a_2) \in H^2(K, 2)$, also wäre $e_K^n(a_0\langle\langle a_1,\dots, a_n\rangle\rangle^\sim) = (a_1,\dots, a_n) \in H^n(K, 2)$ zu verlangen. Das bedeutet, daß $M^{n+1}(K) \subseteq \operatorname{Ker}(e_K^n)$ ist und daß im Falle der Existenz aller e_K^n der Homomorphismus

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{M}^n(K) \to H^*(K, 2)$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung. *J. Milnor hat in* [11] *für jedes* $n \geqslant 0$ *eine Gruppe* k_nK, *einen Epimorphismus* $s_n\colon k_nK \to \overline{M}^nK$ *und einen Homomorphismus* $h_n\colon k_nK \to H^n(K, 2)$ *definiert. Die obigen Bedingungen für* e_K^n *bedeuten genau, daß* $e_K^n \circ s_n = h_n$ *ist. Ist insbesondere* s_n *ein Isomorphismus, so ist das Problem gelöst wie in den Fällen globaler Körper und ihren Komplettierungen* [11, Section 4]. *Es ist aber nich bekannt ob im allgemeinen* s_n *für* $n > 2$ *injektiv ist.*

Die Frage ob denn wenigstens $(a_1,\dots, a_n)$ durch den Ausdruck $a_0\langle\langle a_1,\dots, a_n\rangle\rangle^\sim$ eindeutig bestimmt ist, beantwortet der folgende Satz.

Satz 1.6. *Ist* $a_0\langle\langle a_1,\dots, a_n\rangle\rangle^\sim \equiv b_0\langle\langle b_1,\dots, b_n\rangle\rangle^\sim \mod M^{n+1}(K)$, *so ist* $(a_1,\dots, a_n) = (b_1,\dots, b_n)$.

Beweis. Offenbar folgt $\sigma := \langle\langle a_1,\dots, a_n\rangle\rangle \equiv \langle\langle b_1,\dots, b_n\rangle\rangle =: \tau \mod M^{n+1}(K)$, d.h. es ist $(\sigma \oplus -\tau)^\sim \in M^{n+1}(K)$. Da σ und τ beide die 1 darstellen ist $\sigma \oplus -\tau$ isotrop, also $\operatorname{diman}(\sigma \oplus -\tau) < 2^{n+1}$. Aus Satz 1.1 folgt, daß $\sigma \oplus -\tau \sim 0$ ist, also $\sigma \cong \tau$. Es ist daher zu zeigen, daß aus $\langle\langle a_1,\dots, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1,\dots, b_n\rangle\rangle$ auch $(a_1,\dots, a_n) = (b_1,\dots, b_n)$ folgt. Dazu brauchen wir ein Lemma.

Lemma 1.7. *Sei* $\langle\langle a_1,\dots, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1,\dots, b_n\rangle\rangle$, $n > 0$. *Dann gibt es ein* $c \neq 0$ *mit* $\langle\langle a_1,\dots, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle a_1,\dots, a_{n-1}, c\rangle\rangle$ *und* $\langle\langle b_1,\dots, b_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1,\dots, b_{n-1}, c\rangle\rangle$.

Beweis. Sei $\sigma_0 := \langle\langle a_1,\dots, a_{n-1}\rangle\rangle$, $\tau_0 := \langle\langle b_1,\dots, b_{n-1}\rangle\rangle$, $\sigma_0 = \langle 1\rangle \oplus \sigma_0'$ und $\tau_0 = \langle 1\rangle \oplus \tau_0'$. Dann ist nach Voraussetzung $\sigma_0' \oplus -a_n\sigma_0 \cong \tau_0' \oplus -b_n\tau_0$, d.h. es ist $\varphi := (\tau_0' \oplus -\sigma_0') \oplus (a_n\sigma_0 \oplus -b_n\tau_0) \sim 0$. Wegen $\dim(a_n\sigma_0 \oplus -b_n\tau_0) > \frac{1}{2}\dim \varphi$ muß $a_n\sigma_0 \oplus -b_n\tau_0$ isotrop sein, also stellen

$a_n\sigma_0$ und $b_n\tau_0$ beide ein $c \neq 0$ dar. Dann ist aber $\sigma_0 \otimes \langle 1, -a_n\rangle \cong \sigma_0 \otimes \langle 1, -c\rangle$ und $\tau_0 \otimes \langle 1, -b_n\rangle \cong \tau_0 \otimes \langle 1, -c\rangle$.

Ist jetzt $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$, so folgt durch mehrmaliges Anwenden des Lemmas, daß wir schrittweise von $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ über äquivalente Pfisterformen $\langle\langle c_1, \dots, c_n\rangle\rangle$ zu $\langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$ gelangen können, so daß bei jedem Schritt nur ein Koeffizient c_i verändert wird. Für den Beweis von Satz 1.6 genügt es daher zu zeigen, daß aus $\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}, a\rangle\rangle \cong \langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}, b\rangle\rangle$ auch $(c_1, \dots, c_{n-1}, a) = (c_1, \dots, c_{n-1}, b)$, d.h. $(c_1, \dots, c_{n-1}, ab) = 0$ folgt. Ist aber $\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}, a\rangle\rangle \cong \langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}, b\rangle\rangle$, d.h. $a\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}\rangle\rangle \cong b\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}\rangle\rangle$, so stellt $\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}\rangle\rangle$ das Produkt ab dar, was gleichbedeutend mit $\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}, ab\rangle\rangle \sim 0$ ist. Es genügt daher zu zeigen, daß aus $\langle\langle c_1, \dots, c_n\rangle\rangle \sim 0$ auch $(c_1, \dots, c_n) = 0$ folgt. Das beweisen wir durch Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Sei also $n > 1$ une die Behauptung schon für $n - 1$ bewiesen. $\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}\rangle\rangle$ stellt c_n dar, also ist $c_n = \varphi(u) - c_{n-1}\varphi(v)$ wobei $\varphi := \langle\langle c_1, \dots, c_{n-2}\rangle\rangle$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(c_1, \dots, c_{n-2}, \varphi(w)) = 0$, falls $\varphi(w) \neq 0$. Ist $\varphi(v) = 0$, so ist $c_n = \varphi(u)$ und schon $(c_1, \dots, c_{n-2}, c_n) = 0$. Sei also $\varphi(v) \neq 0$, damit $(c_1, \dots, c_n) = (c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}\varphi(v), c_n)$. Ist jetzt $\varphi(u) = 0$, also $c_n = -c_{n-1}\varphi(v)$, so ist schon $(c_{n-1}\varphi(v), c_n) = 0$. Sei also auch $\varphi(u) \neq 0$. Nun gilt allgemein $(a, b) = (a + b, ab(a + b))$ für $a, b, a + b \neq 0$, für $a = c_{n-1}\varphi(v)$ und $b = c_n = \varphi(u) - c_{n-1}\varphi(v)$ also $(c_{n-1}\varphi(v), c_n) = (\varphi(u), d)$ mit $d = c_{n-1}c_n\varphi(u)\varphi(v)$. Es folgt $(c_1, \dots, c_n) = (c_1, \dots, c_{n-2}, \varphi(u), d) = 0$. Damit ist der Satz 1.6 bewiesen.

BEMERKUNG. *Da die Relationen* $l(c)\,l(-c) = 0$ *und* $l(a)\,l(b) = l(a + b)\,l(ab(a + b))$ *in* k_2K *(siehe [11]) gültig sind, zeigt der Beweis, daß aus* $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$ *auch* $l(a_1) \cdots l(a_n) = l(b_1) \cdots l(b_n)$ *in* k_nK *folgt. Es folgt, daß Milnors* $s_n\colon k_nK \to \overline{M}^nK$ *auf Erzeugende* $l(a_1) \cdots l(a_n)$ *injektiv ist. Das haben auch R. Elman und T. Y. Lam bewiesen* [3, Main Theorem 3.2]. *Es folgt auch daß* k_nK *beschrieben werden kann als der von den Symbolen* $l(a_1) \cdots l(a_n)$ *erzeugte* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-Vektorraum mit den definierenden Relationen* $l(a_1) \cdots l(a_n) = l(b_1) \cdots l(b_n)$, *falls* $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$ *und*

$$l(a_1) \cdots l(a_{n-1})\, l(b) + l(a_1) \cdots l(a_{n-1})\, l(c) = l(a_1) \cdots l(a_{n-1})\, l(bc).$$

Um besser mit Satz 1.6 arbeiten zu können definieren wir

$$P^nK := \{a_0\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle^\sim \mid a_0, \dots, a_n \in K^\cdot\} \subseteq M^nK$$

und

$$\overline{P}^nK := \{\varphi + M^{n+1}(K) \mid \varphi \in P^nK\} \subseteq \overline{M}^nK.$$

Wegen Satz 1.6 sind durch $a_0\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle^\sim \mapsto a_0\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle^\sim + M^{n+1}(K) \mapsto (a_1, \dots, a_n)$ Abbildungen

$$e^n_{PK}\colon P^nK \to H^n(K, 2)$$

und

$$\bar{e}^n_{PK}\colon \bar{P}^n K \to H^n(K, 2)$$

definiert. Insbesondere ist $e^n_{PK}(\varphi)$ eine Invariante der n-fachen Pfisterform φ. Läßt sich e^n_{PK} zu einem Homomorphismus

$$e_K{}^n\colon M^n K \to H^n(K, 2)$$

fortsetzen, so sagen wir $e_K{}^n$ sei wohldefiniert und bezeichnen mit

$$\bar{e}_K{}^n\colon \bar{M}^n K \to H^n(K, 2)$$

den induzierten Homomorphismus.

Aus den Sätzen 1.5 und 1.6 folgt sofort der

SATZ 1.8. *Seien φ, ψ und χ in P^nK. Sei $\varphi + \psi \equiv \chi \bmod M^{n+1}(K)$. Dann ist $e^n_{PK}(\varphi) + e^n_{PK}(\psi) = e^n_{PK}(\chi)$.*

Wir werden später zeigen, daß $e_K{}^3$ für alle Körper K wohldefiniert ist.

2. DER WITTRING BEI ÄNDERUNG DES KÖRPERS

Ist L/K eine Körpererweiterung, so sei

$$i_{L/K}\colon W(K) \to W(L)$$

der kanonische Ringhomomorphismus. Ist N ein Zwischenkörper, so gilt trivialerweise

$$i_{L/K} = i_{L/N} \circ i_{N/K}\colon W(K) \to W(L).$$

Ist L/K algebraisch von ungeradem Grad, so ist nach einem Satz von T. A. Springer [22] jede anisotrope Form über K auch über L anisotrop, insbesondere $i_{L/K}$ injektiv. Ist L/K rein inseparabel, so ist $i_{L/K}$ sogar ein Isomorphismus, denn für $c \in L^\cdot$ ist $a := c^{[K(c):K]} \in K^\cdot$ und $cL^{\cdot 2} = aL^{\cdot 2}$, also $K^\cdot/K^{\cdot 2} \to L^\cdot/L^{\cdot 2}$ surjektiv, damit $i_{L/K}$ surjektiv.

Ist L/K rein transzendent, so ist bekanntlich jede anisotrope Form über K auch über L anisotrop, insbesondere $i_{L/K}$ injektiv.

Ist $L = K((d^{1/2}))$ eine quadratische Erweiterung, so ist $\operatorname{Ker}(i_{L/K}) = \langle 1, -d\rangle^\sim W(K)$. Nach Satz 1.3 ist ferner $\operatorname{Ker}(i_{K(\tau)/K}) = \tilde{\tau} W(K)$ für eine Pfisterform τ der Dimension > 1. Etwas allgemeiner ist der folgende Satz.

SATZ 2.1. *Sei τ eine Pfisterform der Dimension > 1. Sei φ eine Teilform von τ und* $\dim \varphi > \frac{1}{2}\dim \tau$. *Dann ist* $\operatorname{Ker}(i_{K(\varphi)/K}) = \tilde{\tau} W(K)$.

Beweis. τ ist hyperbolisch über $K(\tau)$ und $\dim\varphi > \frac{1}{2}\dim\tau$, also ist φ isotrop über $K(\tau)$, nach Satz 1.2 damit $K(\tau)(\varphi)$ rein transzendent über $K(\tau)$, deshalb $\mathrm{Ker}(i_{K(\tau)(\varphi)/K}) = \mathrm{Ker}(i_{K(\tau)/K}) = \tilde{\tau}W(K)$. Andererseits ist τ isotrop über $K(\varphi)$, also analog $\mathrm{Ker}(i_{K(\varphi)(\tau)/K}) = \mathrm{Ker}(i_{K(\varphi)/K})$. Da $K(\varphi)(\tau)$ und $K(\tau)(\varphi)$ offenbar isomorph sind, ist die Behauptung damit bewiesen.

Als Beispiel betrachten wir eine Quaternionenform $\tau = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ und $\varphi = \langle 1, -b, ab\rangle$. Dann ist

$$K(\varphi) = K(x_2, x_3)((b(x_2^2 - ax_3^2))^{1/2}) = K(x, (b(x^2 - a))^{1/2})(x_3)$$

mit $x = x_2x_3^{-1}$. Für $L = K(x, (b(x^2 - a))^{1/2})$ folgt $\mathrm{Ker}(i_{L/K}) = \langle\langle a, b\rangle\rangle^{\sim}W(K)$.

Ist jetzt L/K eine endliche Erweiterung, $s: L \to K$ eine nichttriviale K-lineare Abbildung, so wird jeder Form φ über L eine Form $s^*\varphi = s \circ \varphi$ über K zugeordnet. Das induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$s^*: W(L) \to W(K)$$

(die Verlagerung von Scharlau, [16]). Betrachtet man $W(L)$ mit $i_{L/K}$ als $W(K)$-Modul, so ist s^* ein $W(K)$-Modulhomomorphismus. Ist N ein Zwischenkörper und $s = s_2 \circ s_1$ mit $s_1: L \to N$ N-linear und $s_2: N \to K$ K-linear, so ist offenbar

$$s^* = s_2^* \circ s_1^*: W(L) \to W(K).$$

Für Körpererweiterungen haben wir:

Satz 2.2. *Seien L/K und K'/K Körpererweiterungen, L/K endlich und $K' \otimes_K L = L_1' \oplus \cdots \oplus L_r'$ eine direkte Summe von Körpern. Sei $s: L \to K$ eine nicht-triviale K-lineare Abbildung und $s_i': L_i' \to K'$ die Einschränkung auf L_i' der induzierten K'-linearen Abbildung $s': K' \otimes_K L \to K'$. Dann gilt*

$$i_{K'/K} \circ s^* = \sum_{i=1}^{r} s_i'^* \circ i_{L_i'/L}: W(L) \to W(K').$$

Beweis. Für eine Form ψ über L gilt sogar $s^*\psi = \oplus\, s_i'\psi$ über K'. Sei nämlich o.E. ψ eindimensional durch die Bilinearform $\psi(x, y) = cxy$ für $x, y \in L$ gegeben, $c \in L^{\cdot}$. Für $a, b \in K'$ gilt dann $s^*\psi(a \otimes x, b \otimes y) = abs^*\psi(x, y) = abs(cxy) = s'(ab \otimes cxy) = s'((1 \otimes c)(a \otimes x)(b \otimes y))$ auf $K' \otimes_K L$. Für $s^*\psi$ über K' betrachtet und $x, y \in K' \otimes_K L$ gilt also $s^*\psi(x, y) = s'((1 \otimes c)xy) = \sum s_i'((1 \otimes c)_i x_i y_i) = (\oplus\, s_i'^*\psi)((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = (\oplus\, s'^*\psi)(x, y)$ wobei z_i die i-te Komponente von $z \in K' \otimes_K L = L_1' \oplus \cdots \oplus L_r'$ bezeichnet.

Das folgende Lemma werden wir später brauchen.

LEMMA 2.3. *Sei $L = K(c)$ eine einfache algebraische Erweiterung vom Grade n. Sei $s: L \to K$ definiert durch $s(c^{n-1}) = 1$ und $s(c^i) = 0$ für $0 \leqslant i < n-1$. Dann gilt*

$$s^*\langle 1\rangle \sim \begin{cases} 0, & \textit{falls } n \textit{ gerade} \\ \langle 1\rangle, & \textit{falls } n \textit{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$s^*\langle c\rangle \sim \begin{cases} \langle 1, -N_{L/K}(c)\rangle, & \textit{falls } n \textit{ gerade} \\ \langle N_{L/K}(c)\rangle, & \textit{falls } n \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Bezüglich des Basis $1, c, \ldots, c^{n-1}$ von L über K hat $x \mapsto s(x^2)$ bzw. $x \mapsto s(c^{-1}x^2)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & \cdot & & & * & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} b & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & * & \\ 0 & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

wobei $b = s(c^{-1}) = (-1)^{n-1}N_{L/K}(c)^{-1}$. Daraus liest man das Lemma ab. Man kann es auch leicht aus dem Satz 2.8 folgern.

Aus diesem Satz folgt sofort, daß es für beliebige endliche Erweiterungen L/K von ungeradem Grad ein K-lineares $s: L \to K$ mit $s^*\langle 1\rangle \sim \langle 1\rangle$ gibt, woraus insbesondere die Injektivität von $i_{L/K}$ folgt (vgl. [17, Lemma 1.1]). Ist L/K endlich und rein inseparabel so gibt es also ein $s: L \to K$ mit $s^* = i_{L/K}^{-1}$.

Wir können jetzt das Verhalten des Wittringes bei quadratischen Erweiterungen genauer beschreiben.

SATZ 2.4. *Sei $L = K(d^{1/2})$ eine quadratische Erweiterung. Sei $s: L \to K$ definiert durch $s(d^{1/2}) = 1$ und $s(1) = 0$. Dann gilt:*

(1) *Sei ψ eine quadratische Form über L. Dann stellt ψ genau dann ein $a \in K^\cdot$ dar, wenn $s^*\psi$ über K isotrop ist. Genau dann kommt ψ von einer Form φ über K (d.h. $\psi = \varphi$ über L), wenn $s^*\psi \sim 0$ ist.*

(2) *Sei φ eine quadratische Form über K. Dann ist genau dann $\varphi \cong s^*\psi$ für eine Form ψ über L, wenn $\langle 1, -d\rangle \otimes \varphi \sim 0$ ist.*

(3) *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \langle 1, -d\rangle^\sim W(K) \hookrightarrow W(K) \xrightarrow{i_{L/K}} W(L)$$
$$\xrightarrow{s^*} W(K) \xrightarrow{\mu} \langle 1, -d\rangle^\sim W(K) \longrightarrow 0$$

ist exakt, wo μ die Multiplikation mit $\langle 1, -d\rangle^\sim$ ist.

Beweis. (1) Stellt ψ ein $a \in K^{\cdot}$ dar, etwa $a = \psi(w)$, so ist $s^*\psi(w) = s(\psi(w)) = 0$, also $s^*\psi$ isotrop. Ist umgekehrt $s^*\psi$ isotrop, so gibt es ein $w \neq 0$ mit $0 = s^*\psi(w) = s(\psi(w))$, d.h. $\psi(w) \in K$. Ist $\psi(w) \in K^{\cdot}$, so sind wir fertig. Ist aber $\psi(w) = 0$, so ist ψ isotrop, damit universell. Die zweite Behauptung unter (1) folgt aus der ersten durch Induktion nach $\dim \psi$.

(2) Sei $c = a+b(d)^{1/2} \in L^{\cdot}$. Dann ist $s(c(u+v(d)^{1/2})^2) = b(u^2+dv^2)+2auv$. Ist $b = 0$, so folgt $s^*\langle c\rangle$ hyperbolisch. Ist $b \neq 0$, so folgt $s^*\langle c\rangle \cong b\langle 1, -(a^2-db^2)\rangle$. In beiden Fällen ist $\langle 1, -d\rangle \otimes s^*\langle c\rangle \sim 0$. Es folgt $\langle 1, -d\rangle \otimes s^*\psi \sim 0$ für alle ψ. Sei jetzt umgekehrt $\langle 1, -d\rangle \otimes \varphi \sim 0$, d.h. $\varphi \cong d\varphi$. Sei $a \neq 0$ ein von φ dargestelltes Element. Dann muß φ auch da darstellen, o.E. $\varphi \cong \langle a, b\rangle \oplus \varphi'$ so daß $\langle a, b\rangle$ auch da darstellt, etwa $da = av^2 + bu^2$. Dann ist $u \neq 0$, da sonst d ein Quadrat wäre, o.E. $u = 1$. Dann its $b = -a(v^2 - d)$, also $\langle a, b\rangle \cong s^*\langle av + a(d)^{1/2}\rangle$. Es folgt $\langle 1, -d\rangle \otimes \varphi' \sim 0$ und der Rest durch Induktion nach $\dim \varphi$.

(3) $\mathrm{Ker}(i_{L/K}) = \langle 1, -d\rangle^{\sim} W(K)$ ist bekannt. Das Übrige folgt aus (1) und (2).

ZUSATZ. *Ist bei* (1) ψ *eine* n-*fache Pfisterform, so kann auch* φ *als eine* n-*fache Pfisterform gewählt werden. Ist bei* (2) φ *eine* n-*fache Pfisterform so gibt es eine* n-*fache Pfisterform* τ *über* L *mit* $\varphi \sim s^*\tau$.

Beweis. (1) Es ist $\langle 1\rangle$ in ψ enthalten. Sei ρ eine Pfisterform über K die, über L betrachtet, in ψ enthalten ist, etwa $\psi \cong \rho \oplus \psi'$. Es gilt dann $s^*\psi' \sim 0$. Ist $\psi' \neq 0$, so folgt, daß ψ' ein $a \in K^{\cdot}$ darstellt, damit ist auch $\rho \otimes \langle 1, a\rangle$ in ψ enthalten, u.s.w.

(2) Wir nehmen im Beweis oben $a = 1$. Dann folgt $\langle 1, -(v^2 - d)\rangle$ in φ enthalten. Da φ eine Pfisterform ist, folgt $\varphi \cong \langle 1, -(v^2-d)\rangle \otimes \sigma$ mit einer $(n-1)$-fachen Pfisterform σ. Ferner

$$\varphi \cong s^*(\langle v + (d)^{1/2}\rangle \otimes \sigma) \sim s^*(\langle 1, v + (d)^{1/2}\rangle \otimes \sigma).$$

Sei jetzt v eine diskrete Bewertung des Körpers K, $\mathrm{char}(K/v) \neq 2$. Ist $p \in K$ ein Primelement, so können wir jede quadratische Form φ über K in der Form

$$\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_r\rangle \oplus p\langle a_{r+1}, \ldots, a_n\rangle$$

mit Einheiten a_i schreiben. Durch $\tilde{\varphi} \mapsto \langle \bar{a}_{r+1}, \ldots, \bar{a}_n\rangle^{\sim} \in W(K/v)$ ist dann ein Gruppenhomomorphismus

$$\partial_{v,p}\colon W(K) \to W(K/v)$$

gegeben (Springer–Knebusch). Durch $\tilde{\varphi} \mapsto \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle^{\sim} \in W(K/v)$ ist ein Ringhomomorphismus

$$\Delta_{v,p}\colon W(K) \to W(K/v)$$

gegeben (siehe z.B. [12, Ch. IV, §1]). Es gilt übrigens offenbar

$$\Delta_{v,p}\varphi = \partial_{v,p}(\langle 1, p\rangle^{\sim}\varphi) \tag{1}$$

für alle $\varphi \in W(K)$.

Ist K henselsch, so ist durch $\varphi \to \Delta_{v,p}\varphi - (\partial_{v,p}\varphi)x$ ein Ring isomorphismus

$$W(K) \to W(K/v)[x]/(x^2 - \langle 1, 1\rangle x) \tag{2}$$

gegeben. Das ist eine (etwas sonderbare) Form eines Satzes von T. A. Springer (siehe [10, §7] und setze $x = \langle 1\rangle - \Pi$).

Ist $(L, w)/(K, v)$ eine Erweiterung bewerteter Körper mit trivialem Verzweigungsindex $e(w/v) = 1$, so ist offenbar

$$\partial_{w,p} \circ i_{L/K} = i_{(L/w)(K/v)} \circ \partial_{v,p}\colon W(K) \to W(L/w)$$

und analog für Δ. Insbesondere ist

$$\partial_{w,p} \circ i_{L/K} = \partial_{v,p} \tag{3}$$

falls (L, w) eine Henselisation oder Komplettierung von (K, v) ist. Allgemeiner hat man offenbar

$$\partial_{w,q} \circ i_{L/K} = i_{(L/w)/(K/v)} \circ \partial_{v,p} \tag{4}$$

falls $e(w/v)$ ungerade ist und $q \equiv p \bmod L^{\cdot 2}$, und

$$\partial_{w,q} \circ i_{L/K} = 0, \tag{5}$$

falls $e(w/v)$ gerade ist.

Die Verlagerung s^* mit dem $\partial_{v,p}$ zu kombinieren ist viel schwieriger. Für extreme Fälle haben wir jedoch die beiden folgenden Sätze.

SATZ 2.5. *Sei $(L, w)/(K, v)$ eine endliche Erweiterung mit maximalem Trägheitsgrad $f(w/v) = [L : K]$ (damit $e(w/v) = 1$). Sei $s\colon L \to K$ eine nichttriviale K-lineare Abbildung mit $s(\mathcal{O}_L) = \mathcal{O}_K$, wobei $\mathcal{O}_L$ und $\mathcal{O}_K$ die Ganzheitsbereiche von L bzw. K sind, und $\bar{s}\colon L/w \to K/v$ die induzierte (K/v)-lineare Abbildung. Sei $p \in K$ ein Primelement (damit auch prim in L). Dann gilt*

$$\partial_{v,p} \circ s^* = \bar{s}^* \circ \partial_{w,p}\colon W(L) \to W(K/v).$$

Beweis. Trivial (eine unimodulare Form wird in eine unimodulare übergeführt).

SATZ 2.6. *Sei $(L, w)/(K, v)$ eine endliche Erweiterung mit maximalem Verzweigungsindex $e(w/v) = [L : K] =: n$ (damit $L/w = K/v$). Sei $q \in L$ ein Primelement, also $L = K(q)$, und $p := (-1)^{n+1} N_{L/K}(q)$. Sei $s: L \to K$ definiert durch $s(q^{n-1}) = 1$ und $s(q^i) = 0$ für $0 \leqslant i < n-1$. Dann gilt*

$$\partial_{v,p} \circ s^* = \partial_{w,q}: W(L) \to W(K/v).$$

Beweis. Ist $n = 1$, so ist der Satz trivial. Sei also $n > 1$. Sei zunächst K henselsch. Dann ist auch L henselsch und wegen $L/w = K/v$ ist für jede Einheit $c \in L$ $\langle c \rangle \cong \langle b \rangle$ über L mit einer Einheit $b \in K$. Jede Form φ über L läßt sich also in der Form

$$\varphi \cong \langle b_1, \dots, b_r \rangle \oplus q \langle b_{r+1}, \dots, b_m \rangle$$

schreiben mit Einheiten $b_i \in K$. Es ist dann

$$\begin{aligned} s^*(\varphi) &\cong \langle b_1, \dots, b_r \rangle \otimes s^*\langle 1 \rangle \oplus \langle b_{r+1}, \dots, b_m \rangle \otimes s^*\langle q \rangle \\ &\sim \begin{cases} \langle b_{r+1}, \dots, b_m \rangle \otimes \langle 1, -N_{L/K}(q) \rangle & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \langle b_1, \dots, b_r \rangle \oplus N_{L/K}(q) \langle b_{r+1}, \dots, b_m \rangle & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

nach dem Lemma 2.3. In jedem Fall folgt

$$\partial_{v,p} s^* \tilde{\varphi} = \langle \bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_m \rangle^{\sim} = \partial_{w,q} \tilde{\varphi} \in W(K/v).$$

Ist K nicht henselsch so gehen wir zu einer Henselisation K' von K über und wenden Satz 2.2 und (3) an ($K' \otimes_K L$ ist bekanntlich ein Körper, eine Henselisation von L).

Für henselsche Körper haben wir allgemein:

SATZ 2.7. *Sei (K, v) henselsch, (L, w) eine endliche Erweiterung, $p \in K$ und $q \in L$ Primelemente. Dann gibt es nicht-triviale $s: L \to K$ und $\bar{s}: L/w \to K/v$ mit*

$$\partial_{v,p} \circ s^* = \bar{s}^* \circ \partial_{w,q}: W(L) \to W(K/v).$$

Beweis. Zunächst ist klar daß wenn $N \subseteq L$ ein Zwischenkörper ist und der Satz für N/K und L/N richtig ist, daß er dann auch für L/K richtig ist. Ferner können wir uns die Primelemente p und q beliebig vorgeben, denn für andere Primelemente $p' = ap$ und $q' = bq$ mit Einheiten $a \in K$ und $b \in L$ gilt dann

$$\partial_{v,p'} s^* \varphi = \langle \bar{a}^{-1} \rangle \partial_{v,p} s^* \varphi = \langle \bar{a}^{-1} \rangle \bar{s}^* \partial_{w,q} \varphi = \langle \bar{a}^{-1} \rangle \bar{s}^* (\langle \bar{b} \rangle \partial_{w,q'} \varphi) = \tilde{s}^* \partial_{w,q'} \varphi$$

mit $\tilde{s}(x) := \bar{s}(\bar{a}^{-1}\bar{b}x)$ für $x \in L/w$. Ist jetzt $K_1 \subseteq L$ die maximale unverzweigte separable Zwischenerweiterung, so folgt der Satz für K_1/K aus Satz 2.5. Ist $K_2 \subseteq L$ die maximale zahm verzweigte separable Zwischenerweiterung, so folgt der Satz für K_2/K_1 aus Satz 2.6. Es bleibt also nur der Fall einer Erweiterung L/K mit ungeradem Verzweigungsindex e und rein inseparabler Restklassenkörpererweiterung. Dann ist $[L:K]$ ungerade. Wir wählen uns $s: L \to K$ und $\bar{s}: L/w \to K/v$ mit $s^*\langle 1\rangle \sim \langle 1\rangle$ bzw. $\bar{s}^*\langle 1\rangle \sim \langle 1\rangle$. Ist jetzt $c \in L$ eine Einheit, so existiert eine ungerade natürliche Zahl k mit $\bar{b} := \bar{c}^k \in K/v$. Da L henselsch ist, folgt wie im vorigen Beweis, daß $\langle c\rangle \cong \langle b\rangle$ über L mit einer Einheit b in K. Nun ist $q^e = cp$ mit einer Einheit c, also $q^e = bu^2p$ mit b Einheit in K, o.E. $b = 1$. Dann läßt sich jede Form φ über L in der Form

$$\varphi \cong \langle b_1, \dots, b_r\rangle \oplus q\langle b_{r+1}, \dots, b_m\rangle \cong \langle b_1, \dots, b_r\rangle \oplus p\langle b_{r+1}, \dots, b_m\rangle$$

schreiben mit Einheiten $b_i \in K$, also

$$s^*\varphi \cong (\langle b_1, \dots, b_r\rangle \oplus p\langle b_{r+1}, \dots, b_m\rangle) \otimes s^*\langle 1\rangle^{\sim} \langle b_1, \dots, b_r\rangle \oplus p\langle b_{r+1}, \dots, b_m\rangle.$$

Es folgt $\partial_{v,p}s^*\tilde{\varphi} = \langle \bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_m\rangle = \bar{s}^*\langle \bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_m\rangle^{\sim} = \bar{s}^*\partial_{w,q}\,\tilde{\varphi}$.

Ich zitiere hier den folgenden wichtigen Satz von G. Harder und W. Scharlau über den Wittring des rationalen Funktionenkörpers $K(x)$. Für Beweise siehe [11], [18, Th. 4.1] und [7, §13].

Satz 2.8. *Ist $\mathfrak{p}$ die zu dem normierten Primpolynom $p \in K[x]$ gehörige Stelle von $K(x)$ über K, so definieren wir*

$$s_{\mathfrak{p}}: K(x)/\mathfrak{p} = K[x]/(p) \to K$$

durch $s_{\mathfrak{p}}(x^{n-1}) = 1$ und $s_{\mathfrak{p}}(x^i) = 0$ für $0 \leqslant i < n-1$ ($n = \operatorname{grad}(p)$) und K-lineare Fortsetzung. Wir schreiben kurz $\partial_{\mathfrak{p}}$ für $\partial_{\mathfrak{p},p}$. Ist $\mathfrak{p} = \infty$ die unendliche Primstelle von $K(x)$ über K, so sei

$$s_{\mathfrak{p}} := -id : K(x)/\mathfrak{p} = K \to K$$

und $\partial_{\mathfrak{p}} = \partial_{\mathfrak{p},1/x}$. Dann ist die Sequenz

$$0 \to W(K) \xrightarrow{i_{K(x)/K}} W(K(x)) \xrightarrow{\oplus_{\mathfrak{p}}\partial_{\mathfrak{p}}} \bigoplus_{\mathfrak{p}} W(K(x)/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\Sigma_{\mathfrak{p}}s_{\mathfrak{p}}^*} W(K) \to 0$$

exakt.

3. Der graduierte Wittring bei Änderung des Körpers

Wir wollen jetzt betrachten wie die Potenzen M^n des Ideals M sich bei Änderung des Körpers verhalten. Trivial ist zunächst

$$i_{L/K}(P^nK) \subseteq P^nL \qquad \text{damit} \qquad i_{L/K}(M^n(K)) \subseteq M^n(L).$$

Wir haben also auch Homomorphismen

$$i_{L/K}\colon \overline{M}^nK \to \overline{M}^nL.$$

Es gilt auch der

SATZ 3.1. *Sei v eine Bewertung von K, $p \in K$ ein Primelement. Dann gilt*

$$\Delta_{v,p}(P^nK) = P^n(K/v) \qquad \textit{damit} \qquad \Delta_{v,p}(M^n(K)) = M^n(K/v)$$

und (für $n > 0$)

$$\partial_{v,p}(P^nK) = P^{n-1}(K/v) \cup P^n(K/v) \qquad \textit{damit} \qquad \partial_{v,p}(M^n(K)) = M^{n-1}(K/v).$$

Die induzierten Homomorphismen (für $n = 0$ die 0)

$$\partial_v\colon \overline{M}^nK \to \overline{M}^{n-1}(K/v)$$

sind von der speziellen Wahl des Primelements p unabhängig. Es gilt $\partial_v(\overline{P}^nK) = \overline{P}^{n-1}(K/v)$.

Beweis. Für $\Delta_{v,p}$ is die Behauptung klar. Jedes $\varphi \in P^nK$ können wir in der Form

$$\varphi \sim a_0 p^{\epsilon_0}\langle\langle a_1 p^{\epsilon_1}, \ldots, a_n p^{\epsilon_n}\rangle\rangle$$

mit Einheiten a_i und $\epsilon_i = 0$ oder 1 schreiben. Wegen $ap\langle 1, -bp\rangle \cong -ab\langle 1, -bp\rangle$ und $\langle 1, -ap\rangle \otimes \langle 1, -bp\rangle \cong \langle 1, ab\rangle \otimes \langle 1, -bp\rangle$ können wir φ in der Form $\varphi \sim a_0\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ oder $\varphi \sim a_0 p\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ oder $\varphi \sim a_0\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n p\rangle\rangle$ schreiben mit Einheiten a_i. Im ersten Fall ist $\partial_{v,p}\varphi = 0$, im zweiten Fall $\partial_{v,p}\varphi = \bar{a}_0\langle\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\rangle\rangle^\sim \in P^n(K/v)$ und im dritten Fall $\partial_{v,p}\varphi = -\bar{a}_0\bar{a}_n\langle\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}\rangle\rangle^\sim \in P^{n-1}(K/v)$. Ist $q = bp$ ein zweites Primelement, so ist $\partial_{v,p}\varphi = \partial_{v,q}b\varphi$ für alle $\varphi \in W(K)$, also $\partial_{v,q}\varphi - \partial_{v,p}\varphi = \partial_{v,q}(\langle 1, -b\rangle^\sim\varphi) \in M^n(K/v)$ falls $\varphi \in M^nK$. Die letzte Behauptung folgt sofort aus dem Obigen.

In Gegensatz zu ∂_v sind die induzierten Homomorphismen

$$\Delta_{v,p}\colon \overline{M}^nK \to \overline{M}^n(K/v)$$

von dem Primelement p abhängig!

Aus (4) und (5) von §2 ergibt sich

$$\partial_w \circ i_{L/K} = e(w/v) i_{(L/w)/(K/v)} \circ \partial_v : \overline{M}^n K \to \overline{M}^{n-1}(L/w) \tag{6}$$

für eine Erweiterung $(L, w)/(K, v)$ bewerteter Körper.

Für das Betrachten des Verhaltens von M^n unter der Verlagerung zunächst ein Lemma.

LEMMA 3.2. *Mit den Bezeichnungen von Satz 2.8 ist $s_{\mathfrak{p}}^*(M^n(K(x)/\mathfrak{p})) \subseteq M^n(K)$ für alle n.*

Beweis. Für die unendliche Primstelle ist das trivial. Sei also $\mathfrak{p}$ endlich, $\varphi_{\mathfrak{p}} \in M^n(K(x)/\mathfrak{p})$. Nach Milnor [11, Lemma 5.7] gibt es ein $\varphi \in M^{n+1}(K(x))$ mit $\partial_{\mathfrak{p}}\varphi = \varphi_{\mathfrak{p}}$ und $\partial_{\mathfrak{q}}\varphi = 0$ für alle endlichen $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Nun ist $0 = \sum_{\mathfrak{q}} s_{\mathfrak{q}}^* \partial_{\mathfrak{q}}\varphi = s_{\mathfrak{p}}^*\varphi_{\mathfrak{p}} - \partial_\infty\varphi$ nach Satz 2.8, also $s_{\mathfrak{p}}^*\varphi_{\mathfrak{p}} = \partial_\infty\varphi \in M^n(K)$ nach Satz 3.1.

SATZ 3.3. *Sei L/K eine endliche Erweiterung, $s: L \to K$ eine nicht-triviale K-lineare Abbildung. Dann ist $s^*(M^n(L)) \subseteq M^n(K)$ für alle n. Die induzierten Homomorphismen*

$$\mathrm{cor}_{L/K} : \overline{M}^n L \to \overline{M}^n K$$

sind von der speziellen Wahl von s unabhängig.

Beweis. Nach dem Lemma 3.2 gibt es für jede einfache Erweiterung L/K ein nicht-triviales $s_0 : L \to K$ mit $s_0^*(M^n L) \subseteq M^n K$, für alle n. Durch Komposition überträgt sich das auf beliebige endliche Erweiterungen L/K. Dann gibt es ein $c \in L^\cdot$ mit $s(x) = s_0(cx)$ für alle $x \in L$, damit $s^*(\varphi) = s_0^*(c\varphi)$ für alle $\varphi \in W(L)$. Ist jetzt $\varphi \in M^n L$, so auch $c\varphi$, damit $s^*(\varphi) \in M^n K$. Ferner gilt $s_0^*(\varphi) - s^*(\varphi) = s_0^*(\varphi - c\varphi) = s_0^*(\langle 1, -c\rangle^\sim \varphi) \in M^{n+1}(K)$ da $\langle 1, -c\rangle^\sim \varphi \in M^{n+1}(L)$.

Aus Satz 2.2 folgt

$$i_{K'/K} \circ \mathrm{cor}_{L/K} = \sum_i \mathrm{cor}_{L_i'/K'} \circ i_{L_i'/L} : \overline{M}^n L \to \overline{M}^n K' \tag{7}$$

falls L/K endlich und $K' \otimes_K L = L_1' \oplus \cdots \oplus L_r'$ eine direkte Summe von Körpern ist.

Ist $\varphi \in M^n(K)$, so ist $c\varphi \equiv \varphi \bmod M^{n+1}(K)$ für alle $c \in K^\cdot$. Ist also L/K endlich, $s: L \to K$ K-linear und nicht-trivial, so folgt $s^*\varphi \simeq \varphi \otimes s^*\langle 1\rangle \equiv [L:K]\varphi \bmod M^{n+1}(K)$. Damit haben wir

$$\mathrm{cor}_{L/K} \circ i_{L/K} = [L:K] \cdot id : \overline{M}^n K \to \overline{M}^n K,$$

also 0 wenn $[L:K]$ gerade und id wenn $[L:K]$ ungerade ist. Insbesondere ist, dem Satz von Springer entsprechend, $i_{L/K}\colon \overline{M}^n K \to \overline{M}^n L$ injektiv für algebraische Erweiterungen L/K von ungeradem (ev. unendlichem) Grad.

SATZ 3.4. *Sei v eine Bewertung des Körpers K. Sei L/K eine endliche Erweiterung. Dann gilt*

$$\partial_v \circ \operatorname{cor}_{L/K} = \sum_{w|v} \operatorname{cor}_{(L/w)/(K/v)} \circ \partial_w\colon \overline{M}^n L \to \overline{M}^{n-1}(K/v)$$

wobei w die paarweise nicht äquivalenten Fortsetzungen von v auf L durchläuft.

Beweis. Ist K henselsch, so gibt es nur eine Fortsetzung von v auf L und der Satz folgt aus Satz 2.7. Sei im allgemeinen Fall (K', v') eine Henselisation von (K, v). K'/K ist separabel, also ist $K' \otimes_K L = L_1' \oplus \cdots \oplus L_r'$ eine direkte Summe von Körpern. Die L_i' sind dabei bekanntlich die Henselisationen von L bezüglich der verschiedenen Fortsetzungen von v auf L. Der allgemeine Fall folgt daher aus (7) mit (3).

Nach Satz 2.4 haben wir jetzt für quadratische Erweiterungen $L = K(d^{1/2})$ eine Nullsequenz

$$\cdots \to \overline{M}^{n-1}K \xrightarrow{\mu} \overline{M}^n K \xrightarrow{i_{L/K}} \overline{M}^n L \xrightarrow{\operatorname{cor}_{L/K}} \overline{M}^n K \xrightarrow{\mu} \overline{M}^{n+1}K \to \cdots \tag{8}$$

wobei μ die Multiplikation mit $\langle 1, -d\rangle^\sim$ ist. Leider wissen wir nicht ob diese Sequenz immer exakt ist. Sie ist jedoch wenigstens "für Pfisterformen exakt", denn:

(1) Sei φ eine n-fache Pfisterform über K und $i_{L/K}\tilde{\varphi} \in M^{n+1}(L)$. Dann ist (Satz 1.1) $i_{L/K}\tilde{\varphi} = 0$, damit $\varphi = \langle 1, -d\rangle \otimes \tau$ mit einer $(n-1)$-fachen Pfisterform τ über K.

(2) Sei s wie im Satz 2.4. Sei ψ eine n-fache Pfisterform über L und $s^*\psi \in M^{n+1}(K)$. $s^*\psi$ ist 2^{n+1}-dimensional, aber da ψ die 1 darstellt ist $s^*\psi$ isotrop. Es folgt (Satz 1.1) $s^*\psi \sim 0$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4 damit $\psi \cong \varphi$ über L mit einer n-fachen Pfisterform φ über K.

(3) Sei φ eine n-fache Pfisterform über K und $\langle 1, -d\rangle^\sim\varphi^\sim \in M^{n+2}(K)$. Dann ist (Satz 1.1) $\langle 1, -d\rangle \otimes \varphi \sim 0$. Mit dem Zusatz zu Satz 2.4 folgt $\varphi \sim s^*(\psi)$ für eine n-fache Pfisterform ψ über L.

Insbesondere ist der Anfang

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \overline{M}^0 K \xrightarrow{i_{L/K}} \overline{M}^0 L \xrightarrow{\operatorname{cor}_{L/K}} \overline{M}^0 K \\ \xrightarrow{\mu} \overline{M}^1 K \xrightarrow{i_{L/K}} \overline{M}^1 L \xrightarrow{\operatorname{cor}_{L/K}} \overline{M}^1 K \xrightarrow{\mu} \overline{M}^2 K \end{aligned}$$

von (8) exakt, da in den betreffenden Gruppen jedes Element durch eine

Pfisterform repräsentiert wird. Kann man zeigen, daß (8) an der nächsten Stelle

$$\xrightarrow{\mu} \overline{M}^2K \xrightarrow{i_{L/K}}$$

immer exakt ist, so folgt $\mathrm{Ker}(e_K{}^2) = M^3K$ für alle K. Etwas genauer:

SATZ 3.5. *Sei S ein System von Körpern, das mit jedem Körper K auch jede quadratische Erweiterung $L = K(d^{1/2})$ von K (bis auf Isomorphie) enthält. Sei für jedes solches Paar in S die Sequenz* (8) *an der Stelle*

$$\xrightarrow{\mu} \overline{M}^2K \xrightarrow{i_{L/K}}$$

exakt. Dann ist $\mathrm{Ker}(e_K{}^2) = M^3K$ *für alle K in S.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß für eine quadratische Form φ über K mit $\tilde{\varphi} \in M^2K$ und $c(\varphi) = e_K{}^2(\tilde{\varphi}) = 0$ sogar $\tilde{\varphi} \in M^3K$ gilt. Wir beweisen das durch Induktion nach $n = \dim \varphi$. Induktionsanfang ($n = 0$) ist trivial. Sei dann $n > 0$ und die Behauptung für alle Formen niedrigerer Dimension über alle Körper in S bewiesen. Wir können dann annehmen es sei φ anisotrop. φ enthält dann eine zweidimensionale anisotrope Form $a\langle 1, -d\rangle$. Sei $L = K(d^{1/2})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $i_{L/K}\tilde{\varphi} \in M^3L$, also nach der Voraussetzung des Satzes $\tilde{\varphi} \equiv \langle 1, -d\rangle^\sim\tilde{\rho} \bmod M^3K$ mit einer geradedimensionalen Form ρ über K. Nun ist $\tilde{\rho} \equiv \langle 1, -a\rangle^\sim \bmod M^2K$ mit $a = d(\rho)$, also $\tilde{\varphi} \equiv \langle 1, -d\rangle^\sim\langle 1, -a\rangle^\sim \bmod M^3K$, damit $(d, a) = c(\varphi) = 0$. Es folgt $\langle 1, -d\rangle \otimes \langle 1, -a\rangle \sim 0$ und so $\tilde{\varphi} \in M^3K$.

Ist die Sequenz für alle K und alle $L = K(d^{1/2})$ sogar an den beiden Stellen

$$\xrightarrow{\mu} \overline{M}^2K \xrightarrow{i_{L/K}} \overline{M}^2L \xrightarrow{\mathrm{cor}_{L/K}}$$

exakt, so folgt noch daß für alle Körper K $e_K{}^2$ surjektiv ist, d.h. die Gruppe $Br_2(K)$ von den Klassen der Quaternionenalgebren erzeugt ist. Das werden wir später beweisen.

Aus des Exaktheit von (8) für Pfisterformen folgt der folgende Satz (vgl. [10, §12]):

SATZ 3.6. *Sei $L = K(d^{1/2})$ eine quadratische Erweiterung. Dann gilt*

(i) *Ist $M^nK = 0$, so ist $M^nL = 0$.*

(ii) *Ist $M^nL = 0$ so ist $M^nK = 0$ oder K reell.*

Beweis. Sei $s: L \to K$ wie im Satz 2.4.

(i) Sei ψ eine n-fache Pfisterform über L. Wegen Satz 3.3 ist dann

$s^*\psi \sim 0$. ψ kommt also von einer n-fachen Pfisterform über K, die aber nach Voraussetzung ~ 0 ist.

(ii) Sei φ eine m-fache Pfisterform über K, $m \geqslant n$. Angenommen es sei $\langle 1, -d\rangle \otimes \varphi$ isotrop. Dann ist $\langle 1, -d\rangle \otimes \varphi \sim 0$, also (Satz 2.4, Zusatz) $\varphi \sim s^*\tau$ mit einer m-fachen Pfisterform τ über L. Nach Voraussetzung ist aber $\tau \sim 0$, also $\varphi \sim 0$. Ist also $M^nK \neq 0$, d.h. gibt es eine anisotrope n-fache Pfisterform φ über K, so ist $\langle 1, -d\rangle^l \otimes \varphi \cong \langle 1, 1\rangle^{l-1} \otimes \langle 1, -d\rangle \otimes \varphi$ anisotrop für alle l, damit K reell.

COROLLAR 3.7. *Ist $M^3K = 0$, so ist* $\mathrm{Ker}(e_K^2) = M^3K$.

Beweis. Sei S die Menge der Körper die durch sukzessive quadratische Erweiterungen aus K entstehen (etwa in einem algebraischen Abschluß von K). Nach Satz 3.6 ist $M^3L = 0$ für alle L in S. Sei L in S, $L' = L(d^{1/2})$ eine quadratische Erweiterung, $\varphi \in M^2L$ mit $i_{L'/L}\varphi \in M^3L' = 0$. Dann ist $\varphi = \langle 1, -d\rangle^{\sim}\rho$ mit $\rho \in W(L)$. Wegen $L^{\cdot 2} = d(\varphi) = (d)^{e(\rho)}L^{\cdot 2}$ ist $\rho \in M(L)$. Es folgt, daß die Voraussetzungen von Satz 3.5 erfüllt sind und wir sind fertig.

COROLLAR 3.8. *Gibt es eine quadratische Erweiterung $L = K(d^{1/2})$ mit $M^3L = 0$, so ist* $\mathrm{Ker}(e_K^2) = M^3K$.

Beweis. Sei $\varphi \in M^2K$, $e_K^2(\varphi) = 0$. Dann ist $e_L^2(i_{L/K}\varphi) = 0$, damit $i_{L/K}\varphi \in M^3L = 0$ (Corollar 3.7). Es folgt $\varphi = \langle 1, -d\rangle^{\sim}\rho$ mit $\rho \in MK$ (wie oben) und damit $\varphi \in M^3K$ wie im Beweis von Satz 3.5.

Die beiden Corollare lassen sich z.B. auf lokale Körper, globale Körper und algebraische Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $\leqslant 2$ über separabel abgeschlossenen oder reell-abgeschlossenen Körpern anwenden. Sie sind unabhängig auch von R. Elman un T. Y. Lam, [4], bewiesen worden.

Dem Satz von Harder-Scharlau (Satz 2.8) entsprechend, haben wir den:

SATZ 3.9. *Mit den Bezeichnungen von Satz 2.8 ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow M^nK \xrightarrow{i_{K(x)/K}} M^n(K(x)) \xrightarrow{\oplus_{\mathfrak{p}}\partial_{\mathfrak{p}}} \bigoplus_{\mathfrak{p}} M^{n-1}(K(x)/\mathfrak{p})$$
$$\xrightarrow{\Sigma_{\mathfrak{p}} s_{\mathfrak{p}}^*} M^{n-1}(K) \longrightarrow 0$$

für alle $n > 0$ exakt. Ebenso die Sequenz

$$0 \longrightarrow \overline{M}^nK \xrightarrow{i_{K(x)/K}} \overline{M}^n(K(x)) \xrightarrow{\oplus_{\mathfrak{p}}\partial_{\mathfrak{p}}} \bigoplus_{\mathfrak{p}} \overline{M}^{n-1}(K(x)/\mathfrak{p})$$
$$\xrightarrow{\Sigma_{\mathfrak{p}} \mathrm{cor}_{(K(x)/\mathfrak{p})/K}} \overline{M}^{n-1}(K) \longrightarrow 0$$

Beweis. Nach Milnor [11, Lemma 5.7] ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow M^n K \longrightarrow M^n(K(x)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\ \text{endlich}} M^{n-1}(K(x)/\mathfrak{p}) \longrightarrow 0$$

exakt. Da $s_\infty{}^*\colon M^{n-1}(K(x)/\infty) \to M^{n-1}(K)$ ein Isomorphismus ist, folgt die erste Behauptung mit Satz 2.8. Die zweite Behauptung ist eine Folgerung aus der ersten.

Für Funktionenkörper allgemein haben wir nur den

SATZ 3.10. *Sei L/K ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen. Dann ist*

$$\bar{M}^n K \xrightarrow{i_{L/K}} \bar{M}^n L \xrightarrow{\oplus_\mathfrak{p} \partial_\mathfrak{p}} \bigoplus_{\mathfrak{p}} \bar{M}^{n-1}(L/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/K}} \bar{M}^{n-1}(K),$$

wobei $\mathfrak{p}$ *alle Primstellen von L über K durchläuft, eine Nullsequenz.*

Beweis. $\partial_\mathfrak{p} \circ i_{L/K} = 0$ ist klar. Wir schreiben jetzt L als eine endliche Erweiterung von $K(x)$. Sei $\mathfrak{q}$ eine Primstelle von $K(x)$. Dann ist nach Satz 3.4

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} \operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/K} \circ \partial_\mathfrak{p} &= \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} \operatorname{cor}_{(K(x)/\mathfrak{q})/K} \circ \operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/(K(x)/\mathfrak{q})} \circ \partial_\mathfrak{p} \\ &= \operatorname{cor}_{(K(x)/\mathfrak{q})/K} \circ \partial_\mathfrak{q} \circ \operatorname{cor}_{L/K(x)} .\end{aligned}$$

Summieren über alle $\mathfrak{q}$ ergibt dann mit Satz 3.9 die Gleichung

$$\textstyle\sum_\mathfrak{p} \operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/K} \circ \partial_\mathfrak{p} = 0.$$

Die Gleichung $\sum_\mathfrak{p} \operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/K} \circ \partial_\mathfrak{p} = 0$ kann als ein Residuensatz aufgefaßt werden (vgl. [5]).

4. DER COHOMOLOGIERING BEI ÄNDERUNG DES KÖRPERS

Ist L/K eine Körpererweiterung, so haben wir einen kanonischen Ringhomomorphismus

$$i_{L/K}\colon H^*(K, 2) \to H^*(L, 2).$$

Ist nämlich L_s ein separabler Abschluß von L, so ist der separable Abschluß K_s von K in L_s ein separabler Abschluß von K und jeder Automorphismus von L_s über L bildet K_s in sich ab. Die Einschränkung auf K_s gibt uns deshalb einen kanonischen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Gal}(L_s/L) \to \mathrm{Gal}(K_s/K)$ der einen Ringhomomorphismus $H^*(\mathrm{Gal}(K_s/K), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(\mathrm{Gal}(L_s/L), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

induziert (siehe z.B. [21, Ch. II, 1.4]). Ist $N = K_s \cap L$ der separable Abschluß von K in L, so ist $\mathrm{Gal}(K_s/N) \cong \mathrm{Gal}(K_sL/L)$ und $i_{L/K}$ ist die Komposition

$$\begin{aligned} H^*(K, 2) &= H^*(\mathrm{Gal}(K_s/K), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\text{res}} H^*(\mathrm{Gal}(K_s/N), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &\cong H^*(\mathrm{Gal}(K_sL/L), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\text{inf}} H^*(\mathrm{Gal}(L_s/L), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^*(L, 2). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $i_{L/K}$ die Restriktion, falls L/K eine separable algebraische Erweiterung ist, und die Inflation, falls K separabel abgeschlossen in L ist. Offenbar gilt allgemein

$$i_{L/K} = i_{L/N} \circ i_{N/K}: H^n(K, 2) \to H^n(L, 2),$$

falls N ein Zwischenkörper ist.

Es ist offenbar $i_{L/K}: H^0(K, 2) \to H^0(L, 2)$ die Identität $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $K^{\cdot}/K^{\cdot 2} \cong H^1(K, 2) \to^{i_{L/K}} H^1(L, 2) \cong L^{\cdot}/L^{\cdot 2}$ der von der Inklusion induzierte kanonische Homomorphismus. Daraus folgt der folgende Satz.

Satz 4.1. *Ist L/K eine Körpererweiterung und $\varphi \in P^nK$, so ist $i_{L/K}e^n_{PK}\varphi = e^n_{PL}i_{L/K}\varphi$. Insbesondere ist*

$$i_{L/K} \circ e_K{}^n = e_L{}^n \circ i_{L/K}: M^n(K) \to H^n(L, 2),$$

falls $e_K{}^n$ und $e_L{}^n$ wohldefiniert sind.

$i_{L/K}: H^0(K, 2) \to H^0(L, 2)$ ist immer injektiv. Ist φ eine quadratische Form über K, $\dim \varphi > 2$, so ist auch $i_{K(\varphi)/K}: H^1(K, 2) \to H^1(K(\varphi), 2)$ injektiv, denn K ist dann algebraisch abgeschlossen in $K(\varphi)$. Ist $\dim \varphi > 4$, so ist auch $i_{K(\varphi)/K}: H^2(K, 2) \to H^2(K(\varphi), 2)$ injektiv. Sei nämlich $D \neq K$ eine zentrale Divisionsalgebra über K, die über $K(\varphi)$ zerfällt. Sei $n = \dim \varphi$, $x = (x_2, \ldots, x_n)$. Dann ist $K(x) \otimes_K D$ eine zentrale Divisionsalgebra über $K(x)$ die über der quadratischen Erweiterung $K(\varphi)$ zerfällt, also ist $K(x) \otimes_K D$ eine Quaternionenalgebra, damit auch D eine Quaternionenalgebra, etwa $D = (a, b/K)$. Nun zerfällt D über $K(\varphi)$, also ist $\tau := \langle\langle a, b\rangle\rangle \sim 0$ über $K(\varphi)$, nach Satz 1.3 damit $\dim \varphi \leqslant \dim \tau = 4$. Wir werden später zeigen, daß für $\dim \varphi > 8$ $i_{K(\varphi)/K}: H^3(K, 2) \to H^3(K(\varphi), 2)$ injektiv ist. Aus dem folgenden Satz folgt dann daß $e_K{}^3$ für alle K wohldefiniert ist.

Satz 4.2. *Sei $n > 0$. Ist für alle Körper K und alle Formen φ über K mit $\dim \varphi > 2^n$ der Homomorphismus $i_{K(\varphi)/K}: H^n(K, 2) \to H^n(K(\varphi), 2)$ injektiv, so ist $e_K{}^n$ wohldefiniert für alle K.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß aus jeder Relation $\sum a_i\varphi_i \sim 0$ zwischen n-fachen Pfisterformen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ über einem Körper K und $a_1, \ldots, a_r \in K^{\cdot}$ die Gleichung $\sum e^n_{PK}\tilde{\varphi}_i = 0$ folgt. Wir werden das durch Induktion nach der Anzahl r der Summanden beweisen. Für $r \leqslant 3$ folgt die Behauptung aus Satz 1.8. Sei also $r > 3$ und die Behauptung für alle kürzeren Relationen über alle Körper bewiesen. Wir machen dann eine innere Induktion nach der anisotropen Dimension $m = \operatorname{diman}(a_{r-1}\varphi_{r-1} \oplus a_r\varphi_r)$. Ist $m \leqslant 2^n$, so ist nach Lemma 1.4 $a_{r-1}\varphi_{r-1} \oplus a_r\varphi_r \sim b\psi$ mit einer n-fachen Pfisterform ψ, also

$$\left(\sum_{i=1}^{r-2} a_i\varphi_i\right) \oplus b\psi \sim 0,$$

nach Induktionsvoraussetzung damit

$$\left(\sum_{i=1}^{r-2} e^n_{PK}\tilde{\varphi}_i\right) + e^n_{PK}\tilde{\psi} = 0.$$

Nach Satz 1.8 ist aber $e^n_{PK}\tilde{\psi} = e^n_{PK}\tilde{\varphi}_{r-1} + e^n_{PK}\tilde{\varphi}_r$ und wir sind fertig. Sei dann $m > 2^n$, φ die anisotrope Kernform von $a_{r-1}\varphi_{r-1} \oplus a_r\varphi_r$. Dann ist $\operatorname{diman}(a_{r-1}\varphi_{r-1} \oplus a_r\varphi_r) < m$ über $K(\varphi)$, nach der Voraussetzung der inneren Induktion damit $\sum_{i=1}^r e^n_{PK(\varphi)} i_{K(\varphi)/K}\tilde{\varphi}_i = 0$, mit Satz 4.1 also $i_{K(\varphi)/K}(\sum_{i=1}^r e^n_{PK}\tilde{\varphi}_i) = 0$. Aus der Injektivität von $i_{K(\varphi)/K}$ folgt dann die Behauptung.

BEMERKUNG. *Genauso kann man beweisen, daß wenn für alle Körper K und alle Formen φ über K mit* $\dim \varphi > 2^n$ *der natürliche Homomorphismus $k_nK \to k_nK(\varphi)$ injektiv ist, daß dann für alle K der Epimorphismus s_n: $k_nK \to \bar{M}^nK$ von Milnor* ([11]) *ein Isomorphismus ist. Es ist aber nicht mal bekannt ob die Voraussetzung für $n = 2$ gültig ist, obwohl s_2 immer ein Isomorphismus ist. Wäre hingegen die Voraussetzung für $n = 2$ bewiesen, so könnte man mit einem ähnlichen Induktionsargument zeigen, daß für alle K* $\operatorname{Ker}(e_K{}^2) = M^3K$ *ist.*

Für algebraische Erweiterungen ungeraden Grades haben wir (dem Satz von Springer entsprechend):

SATZ 4.3. *Sei L/K algebraisch von ungeradem Grad. Dann ist $i_{L/K}$: $H^*(K, 2) \to H^*(L, 2)$ injektiv. Ist L/K rein inseparabel, so ist $i_{L/K}$ sogar ein Isomorphismus.*

Beweis. Ist L/K rein inseparabel, so ist der separable Abschluß L_s von L die Komposition K_sL von dem separablen Abschluß K_s von K mit L. Wegen $K_s \cap L = K$ folgt, daß die Einschränkungsabbildung $\operatorname{Gal}(L_s/L) \to \operatorname{Gal}(K_s/K)$ ein Isomorphismus ist, also ist $i_{L/K}$ ein Isomorphismus. Ist L/K separabel so ist $i_{L/K}$ die Restriktion und sie ist injektiv [21, Ch. I, Prop. 9, Corollaire]. Daraus folgt der Satz.

Ist L/K eine endliche separable Erweiterung, so haben wir die cohomologische Corestriktion

$$\mathrm{cor}_{L/K}\colon H^n(L, 2) \to H^n(K, 2).$$

Wir definieren die Corestriktion für beliebige endliche Erweiterungen L/K indem wir setzen

$$\mathrm{cor}_{L/K} := \mathrm{cor}_{N/K} \circ i_{L/N}^{-1}\colon H^n(L, 2) \to H^n(K, 2),$$

wobei N der separable Abschluß von K in L ist (Da $[L:N]$ ungerade ist, hätten wir zwischen den beiden Abbildungen eine Multiplikation mit $[L:N]$ einschalten können, was vielleicht natürlicher aussieht). Klar ist, daß $\mathrm{cor}_{L/K}\colon H^0(L, 2) \to H^0(K, 2)$ einfach die Multiplikation mit $[L:K]\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist, wie im separablen Fall. Der Isomorphismus $N^{\cdot}/N^{\cdot 2} \cong H^1(N, 2) \xrightarrow{i_{L/N}} H^1(L, 2) \cong L^{\cdot}/L^{\cdot 2}$ ist durch $xN^{\cdot 2} \mapsto xL^{\cdot 2}$ gegeben. Ist $z \in L^{\cdot}$ so ist $x := z^{[L:N]} = N_{L/N}(z) \in N^{\cdot}$ und $xL^{\cdot 2} = zL^{\cdot 2}$. Das Inverse ist also von der Norm $N_{L/N}$ induziert und damit der ganze Homomorphismus $L^{\cdot}/L^{\cdot 2} \cong H^1(L, 2) \xrightarrow{\mathrm{cor}_{L/K}} H^1(K, 2) \cong K^{\cdot}/K^{\cdot 2}$ von der Norm $N_{L/K}$ induziert, wie im separablen Fall. Unsere Definition scheint also vernünftig zu sein.

Ist jetzt N ein beliebiger Zwischenkörper, so gilt

$$\mathrm{cor}_{L/K} = \mathrm{cor}_{N/K} \circ \mathrm{cor}_{L/N}\colon H^n(L, 2) \to H^n(K, 2).$$

Das folgt sofort aus dem entsprechenden Satz für separable Erweiterungen. Ebenso ist $\mathrm{cor}_{L/K}$ ein $H^*(K, 2)$-Modulhomomorphismus, wenn man $H^*(L, 2)$ mit $i_{L/K}$ und dem Cupprodukt als $H^*(K, 2)$-Modul betrachtet, das heißt

$$\mathrm{cor}_{L/K}(i_{L/K}(\varphi) \cup \psi) = \varphi \cup \mathrm{cor}_{L/K}\psi \qquad \text{für} \quad \varphi \in H^n(K, 2),\ \psi \in H^m(L, 2).$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{cor}_{L/K} \circ i_{L/K} = [L:K].\ id\colon H^n(K, 2) \to H^n(K, 2).$$

Der Formel (7) entsprechend haben wir den

SATZ 4.4. *Seien L/K und K'/K Körpererweiterungen, L/K endlich und $K' \otimes_K L = L_1' \oplus \cdots \oplus L_r'$ eine direkte Summe von Körpern. Dann gilt*

$$i_{K'/K} \circ \mathrm{cor}_{L/K} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{cor}_{L_i'/K'} \circ i_{L_i'/L}\colon H^n(L, 2) \to H^n(K', 2).$$

Beweis. Sei N der separable Abschluß von K in L und $K' \otimes_K N = N_1' \oplus \cdots \oplus N_s'$. Dann ist $K' \otimes_K L = \bigoplus (N_i' \otimes_N L)$. Da L/N rein inseparabel ist kann diese Summe nur dann eine direkte Summe von Körpern sein, wenn jedes $N_i' \otimes_N L$ ein Körper ist. Wir haben also $s = r$ und nach einer eventuellen Umnumerierung $L_i' = N_i' \otimes_N L$. Ist der Satz jetzt für N statt L bewiesen, so folgt $i_{K'/K} \circ \mathrm{cor}_{L/K} = i_{K'/K} \circ \mathrm{cor}_{N/K} \circ \mathrm{cor}_{L/N} = \sum \mathrm{cor}_{N_i'/K'} \circ i_{N_i'/N} \circ \mathrm{cor}_{L/N}$. Nun ist $i_{L_i'/N_i'} \circ i_{N_i'/N} = i_{L_i'/L} \circ i_{L/N}$ also $i_{N_i'/N} \circ \mathrm{cor}_{L/N} = i_{N'/N} \circ i_{L/N}^{-1} = i_{L_i'/N_i'}^{-1} i_{L_i'/L} = \mathrm{cor}_{L_i'/N_i'} i_{L_i'/L}$. Damit folgt $i_{K'/K} \circ \mathrm{cor}_{L/K} = \sum \mathrm{cor}_{N_i'/K'} \circ \mathrm{cor}_{L_i'/N_i'} \circ i_{L_i'/L} = \sum \mathrm{cor}_{L_i'/K'} \circ i_{L_i'/L}$ der Satz für L/K. Wir können daher o.E. annehmen es sei L/K separabel. Analog zeigt man, daß o.E. K' über K separabel (damit algebraisch) ist, denn ist K^0 der separable Abschluß von K in K', so analog $K^0 \otimes_K L = L_1{}^0 \oplus \cdots \oplus L_r{}^0$ und $L_i' = K' \otimes_{K^0} L_i^0$ und $i_{K'/K^0} \circ \mathrm{cor}_{L_i^0/K^0} = \mathrm{cor}_{L_i'/K'} \circ i_{L_i'/L_i^0}$ weil hier i_{K'/K^0} bzw. i_{L_i'/L_i^0} die Inflation ist und mit der Corestriktion kommutiert (z.B. [9, Ch. II, Prop. 4]). Sei also auch K' separabel über K. Dann sind auch die L_i' separable Erweiterungen von K. Wir denken uns alle diese Erweiterungen in einen separablen Abschluß K_s von K eingebettet. Sei G die Galoisgruppe von K, H die von L, G' die von K' und H_i' die von L_i'. Wir wählen uns ferner für jedes i ein $\omega_i \in G$ mit $\omega_i L \subseteq L_i'$. Dann gilt $L_i' = \omega_i(L) K'$ und $H_i' = G' \cap \omega_i H \omega_i^{-1}$. Nun wissen wir, daß die L_i' genau die paarweise nicht isomorphen Kompositionen von L und K' über K repräsentieren (siehe z.B. Bourbaki: Algèbre, Ch. 8, §8 oder betrachte einfach die Zerlegung über K' des Minimalpolynoms eines erzeugenden Elements von L über K). Das heißt aber, daß die ω_i genau die Doppelnebenklassen $G'\backslash G/H$ repräsentieren. Wir bekommen jetzt $\mathrm{cor}_{L_i'/K'} \circ i_{L_i'/L}$, indem wir erst mit ω_i von L nach $\omega_i L$ übergehen, dann nach L_i' und schließlich hinunter nach K', das heißt

$$\mathrm{cor}_{L_i'/K'} \circ i_{L_i'/L} = \mathrm{cor}_{G'}^{G' \cap \omega_i H \omega_i^{-1}} \circ \mathrm{res}_{G' \cap \omega_i H \omega_i^{-1}}^{\omega_i H \omega_i^{-1}} \circ \omega_i^{*-1}$$

wobei ω^* der von dem Isomorphismus $H \to \omega_i H \omega_i^{-1}$ induzierte Isomorphismus $H^n(\omega_i H \omega_i^{-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist (Konjugation). Nach einem allgemeinem Satz (siehe [9, Ch. II, Prop. 22]) ist nun die Summe über i der rechten Seite in der Gleichung oben gleich $\mathrm{res}_{G'}^G \circ \mathrm{cor}_G{}^H = i_{K'/K} \circ \mathrm{cor}_{L/K}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Um das Verhalten des Cohomologieringes bei quadratischen Erweiterungen zu bestimmen beweisen wir einen Satz aus der allgemeinen Theorie der Cohomologie von Gruppen.

SATZ 4.5. *Sei G eine diskrete (bzw. proendliche) Gruppe. H eine Untergruppe vom Index 2. Sei $\alpha \in H^1(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{stet})}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ der Homomorphismus mit dem Kern H. Dann haben wir eine lange exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^0(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mu} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{\mathrm{res}} H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{cor}} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mu} H^{n+1}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

wobei μ das Cupprodukt mit α ist.

Beweis. Sei $A = M_G^H(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ der G-Modul der (stetigen) Abbildungen $\beta: G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $\beta(hg) = \beta(g)$ für $h \in H$. Es ist dann (Lemma von Shapiro) $H^n(G, A) = H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (siehe [21, Ch. I, 2.5]). A hat vier Elemente, nämlich die konstanten Abbildungen 0 und 1, das α und $\alpha + 1$. Wir haben eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

von G-Moduln mit $i(1) = 1$ und $\pi(\alpha) = 1$ u.s.w., und die zugehörige lange exakte Sequenz der Cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{\pi^*} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Nun ist i^* die Restriktion und π^* die Corestriktion (loc. cit.), also bleibt nur ∂ auszurechnen. Wir definieren den Schnitt $s: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to A$ durch $s(0) = 0$, $s(1) = \alpha$. Dann ist für alle $g \in G$ $gs(\epsilon) - s(\epsilon) = i(\alpha(g) \cdot \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wie man sofort sieht. Sei jetzt $f: G^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein (stetiger) inhomogener Cozyklus. Dann ist bekanntlich $d(s \circ f)(G^{n+1}) \subseteq i(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und $\partial \bar{f}$ ist repräsentiert durch $d(s \circ f): G^{n+1} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $\bar{f}$ die Klasse von f in $H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist. Nun ist s additiv und $df = 0$, also ist $d(s \circ f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 s(f(g_2, \ldots, g_{n+1})) - s(f(g_2, \ldots, g_{n+1})) = i(\alpha(g_1) \cdot f(g_2, \ldots, g_{n+1}))$ nach dem obigen. $(g_1, \ldots, g_{n+1}) \mapsto \alpha(g_1) \cdot f(g_2, \ldots, g_{n+1})$ repräsentiert aber $\alpha \cup \bar{f}$ und wir sind fertig. (D. L. Johnson (On the Cohomology of finite 2-Groups, *Inv. Math.*, 7 (1969)) hat für endliche 2-Gruppen den Kern der Restriktion schon mit anderen Methoden bestimmt).

Aus dem Satz folgt sofort

COROLLAR 4.6. *Sei $L = K(d^{1/2})$ eine quadratische Erweiterung. Dann haben wir eine lange exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(K, 2) \xrightarrow{i_{L/K}} H^0(L, 2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^n(K, 2)$$
$$\xrightarrow{i_{L/K}} H^n(L, 2) \xrightarrow{\mathrm{cor}_{L/K}} H^n(K, 2) \xrightarrow{\mu} H^{n+1}(K, 2) \xrightarrow{i_{L/K}} \cdots$$

wobei μ das Cupprodukt mit (d) ist.

Um für die Cohomologiegruppen zu einer diskreten Bewertung v von K etwas dem $\partial_v: \bar{M}^n(K) \to \bar{M}^{n-1}(K/v)$ Entsprechendes zu konstruieren, brauchen wir den folgenden Satz von Hochschild-Serre:

SATZ 4.7. *Sei G eine proendliche Gruppe, A ein diskreter G-Modul. Sei*

$U \subseteq G$ ein abgeschlossener Normalteiler mit $H^i(U, A) = 0$ für $i \geqslant 2$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{d_2} H^n(G/U, A^U) \xrightarrow{\text{inf}} H^n(G, A)$$
$$\xrightarrow{r} H^{n-1}(G/U, H^1(U, A)) \xrightarrow{d_2} H^{n+1}(G/U, A^U) \xrightarrow{\text{inf}} \cdots$$

Der Satz wird aus der Hochschild-Serre-Spektralsequenz abgeleitet. Ein Beweis, nur für diskrete Gruppen ausgeführt, steht in [6, Ch. III, Th. 3]. In der Sequenz bezeichnet inf die Inflation und d_2 ist das Differential d_2: $E_2^{n-1,1} \to E_2^{n+1,0}$ der Spektralsequenz. Ist $\bar{\varphi} \in H^n(G, A)$, so folgt aus den Voraussetzungen, daß $\bar{\varphi}$ durch einen normalisierten inhomogenen Cozyklus $\varphi\colon G^n \to A$ repräsentiert wird, so daß $\varphi(g_1, \ldots, g_n)$ nur von g_1 und den Nebenklassen $g_2U, \ldots, g_nU$ abhängt. r wird dann durch φ auf $U \times (G/U) \cdots \times (G/U)$ repräsentiert. Der natürliche Anfang der Sequenz ist $0 \to H^1(G/U, A^U) \to \cdots$ Mit $H^{-1}(G/U, \cdot) := 0$ können wir aber offenbar bei $0 \to H^0(G/U, A^U) \to \cdots$ anfangen.

Um diesen Satz von Hochschild-Serre für unsere Zwecke benutzen zu können brauchen wir einen Satz über die cohomologische 2-Dimension henselscher Körper. Der Satz scheint bekannt zu sein, ist aber in der einschlägigen Literatur nur unter einschränkenden Voraussetzungen bewiesen. Aus beweistechnischen Gründen formulieren wir ihn nicht nur für diskrete Bewertungen und weil es keinen Mehraufwand bedeutet, nicht nur für die 2-Dimension.

SATZ 4.8. *Sei K mit der Bewertung $v\colon K^{\cdot} \to \mathbb{Q}$ henselsch (v nicht notw. diskret und* char(K) *wie* char(K/v) *beliebig). Sei K/v separabel abgeschlossen. Dann ist die cohomologische p-Dimension $cd_p(K) \leqslant 1$ für jede Primzahl $p \neq$* char(K/v).

Beweis. Sei K_s ein separabler Abschluß von K, $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ die Galoisgruppe von K. Sei G_p eine p-Sylowgruppe von G, K_p der zugehörige Körper. Dann erfüllt K_p mit der (eindeutig bestimmten) Fortsetzung von v auf K_p alle Voraussetzungen des Satzes und es gilt $cd_pK = cd_pG \leqslant cd_pG_p = cd_pK_p$ ([21, Ch. I, Prop. 14]). Wir können deshalb annehmen es sei G eine pro-p-Gruppe. Nach [21, Ch. II, Prop. 5] genügt es zu zeigen, daß für jede algebraische Erweiterung K' von K und jede endliche, galoissche Erweiterung L von K' die Norm $N_{L/K'}\colon L^{\cdot} \to K'^{\cdot}$ surjektiv ist. Da jetzt jede endliche p-Gruppe auflösbar ist, genügt es dies für zyklische Erweiterungen vom Grade p zu beweisen. Da K' mit K alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, können wir unseren Beweis auf den Fall $K' = K$ beschränken. Sei also $L = K(c)$ mit $c^p = a \in K^{\cdot}$ eine zyklische Erweiterung vom Grade p. Es ist offenbar $K^{\cdot p} \subseteq N_{L/K}L^{\cdot} \subseteq K^{\cdot}$. Da K henselsch ist und K/v alle p-ten Wurzeln enthält, ist jede Einheit in K eine p-te Potenz, also $v\colon K^{\cdot}/K^{\cdot p} \to v(K^{\cdot})/pv(K^{\cdot})$ ein Isomorphismus. Nun ist $v(K^{\cdot}) \subseteq \mathbb{Q}$ also hat $v(K^{\cdot})/pv(K^{\cdot})$ höchstens p Elemente, damit $K^{\cdot}/K^{\cdot p}$ auch. Wegen $(-1)^{p-1} \in K^{\cdot p}$ ist $N_{L/K}(c) = (-1)^{p-1}a \notin K^{\cdot p}$, also $K^{\cdot p}$ echt in $N_{L/K}L^{\cdot}$ enthalten. Es folgt $N_{L/K}L^{\cdot} = K^{\cdot}$.

Sei jetzt v eine diskrete Bewertung des Körpers K und $\operatorname{Char}(K/v) \neq 2$. Wir wollen, wie gesagt, "Restklassenhomomorphismen"

$$\partial_v\colon H^n(K, 2) \to H^{n-1}(K/v, 2)$$

konstruieren (Setzen $H^{-1}(K/v, 2) := 0$). Wir legen dazu einen separablen Abschluß K_s von K fest und setzen $G := \operatorname{Gal}(K_s/K)$.

Sei zunächst K henselsch. Sei N die maximale unverzweigte Erweiterung von K, u die (eindeutig bestimmte) Fortsetzung von v auf N und $U \subseteq G$ die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(K_s/N)$ von N. Dann ist bekanntlich N/u ein separabler Abschluß von K/v, N galoisch über K und $H = G/U$ kanonisch isomorph der vollen Galoisgruppe $\operatorname{Gal}((N/u)/(K/v))$ von K/v. Nach Satz 4.8 ist $cd_2(U) \leqslant 1$, insbesondere $H^i(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ für $i \geqslant 2$. Nach dem Satz von Hochschild-Serre haben wir damit eine lange exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{d_2} H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\inf} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \xrightarrow{r} H^{n-1}(H, H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) &\xrightarrow{d_2} \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

Die Bewertung u induziert einen Isomorphismus

$$\bar{u}\colon H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong N^{\cdot}/N^{\cdot 2} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(Isomorphismus weil N henselsch ist und N/u quadratisch abgeschlossen ist) und damit auch Isomorphismen

$$\bar{u}\colon H^{n-1}(H, H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \to H^{n-1}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^{n-1}(K/v, 2).$$

Wir definieren

$$\partial_v := \bar{u} \cdot r\colon H^n(K, 2) = H^n(G, 2) \to H^{n-1}(K/v, 2).$$

Aus der nach Satz 4.7 angegebenen Formel für r folgt sofort das

LEMMA 4.9. *Es gilt* $\partial_v(\psi \cup \inf \varphi) = \partial_v \psi \cup \varphi$ *für alle* $\psi \in H^m(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^m(K, 2)$ *und* $\varphi \in H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^n(K/v, 2)$.

COROLLAR 4.10. *Ist* $\pi \in H^1(K, 2) \cong K^{\cdot}/K^{\cdot 2}$ *die Quadratklasse eines Primelements in* K, *so gilt* $\partial_v(\pi \cup \inf \varphi) = \varphi$ *für alle* $\varphi \in H^n(K/v, 2)$.

Beweis. Folgt aus dem Lemma mit $\partial_v(\pi) = \bar{u}(r(\pi)) = \bar{u}(\operatorname{res} \pi) = 1 \in H^0(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Ist jetzt K nicht henselsch, so wählen wir uns eine Henselisation $(K', v') \subseteq K_s$ von K. Es ist dann $K'/v' = K/v$ und wir definieren:

$$\partial_v := \partial_{v'} \circ i_{K'/K}\colon H^n(K, 2) \to H^{n-1}(K/v, 2).$$

Da die verschiedenen Henselisationen von K paarweise konjugiert sind, ist diese Definition von der Wahl von K' unabhängig.

SATZ 4.11. *Ist v eine Bewertung des Körpers K und $\varphi \in \bar{P}^n K$, so ist $\partial_v \bar{e}^n_{PK}\varphi = \bar{e}^{n-1}_{P(K/v)}\, \partial_v\varphi$. Insbesondere ist*

$$\partial_v \circ e_K{}^n = e_{K/v}^{n-1} \circ \partial_{v,p}\colon M^n K \to H^{n-1}(K/v, 2),$$

falls $e_K{}^n$ und $e_{K/v}^{n-1}$ wohldefiniert sind ($p \in K$ ein Primelement).

Beweis. Es genügt (wegen (6) und Satz 4.1) den ersten Teil für K henselsch zu beweisen und wir übernehmen die Bezeichnungen oben. Dann ist für eine Einheit a in K $(a) = \inf(\bar{a}))$ wobei $\bar{a}$ die Klasse von a in K/v ist. Nun ist φ repräsentiert durch eine Pfisterform $\langle\langle a_1 p^\epsilon, a_2, \ldots, a_n\rangle\rangle$ mit Einheiten a_i und $\epsilon = 0$ oder 1 (siehe Beweis zu Satz 3.1). Ist $\epsilon = 0$, so ist $\partial_v\varphi = 0$ und $\partial_v\bar{e}^n_{PK}\varphi = \partial_v((a_1, \ldots, a_n)) = \partial_v \inf((\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)) = 0$. Ist $\epsilon = 1$, so ist $\bar{e}^{n-1}_{P(K/v)}\partial_v\varphi = (\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ und $\partial_v\bar{e}^n_{PK}\varphi = \partial_v((a_1 p) \cup (a_2, \ldots, a_n)) = \partial_v((a_1 p) \cup \inf(\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)) = (\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ nach dem Corollar 4.10.

BEMERKUNG. *Ist $h_n\colon k_n K \to H^n(K, 2)$ der Homomorphismus von Milnor* [11, Lemma 6.1], *$\partial_v\colon k_n K \to k_{n-1}(K/v)$ wie in* [11, Lemma 2.1], *so ist genauso* $\partial_v \circ h_n = h_{n-1} \circ \partial_v$.

Ist p ein Primelement in K, so definieren wir die Homomorphismen

$$\Delta_{v,p}\colon H^n(K, 2) \to H^n(K/v, 2)$$

durch $\Delta_{v,p}\varphi := \partial_v((-p) \cup \varphi)$ (vgl. Formel (1)).

Sei K wieder henselsch und die Bezeichnungen wie oben unter dieser Voraussetzung. Nach Corollar 4.10 ist $\Delta_{v,p} \circ \inf$ die Identität auf $H^n(K/v, 2)$, also zerfällt die lange exakte Sequenz (9) in kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow H^n(K/v, 2) \xrightarrow{\inf} H^n(K, 2) \xrightarrow{\partial_v} H^{n-1}(K/v, 2) \longrightarrow 0.$$

Definieren wir für den Augenblick $s\colon H^{n-1}(K/v, 2) \to H^n(K, 2)$ durch $s(\rho) := (p) \cup \inf \rho$, so ist nach dem selben Corollar $\partial_v \circ s$ die Identität auf $H^{n-1}(K/v, 2)$. Ferner ist $\Delta_{v,p} \circ s = 0$ da $(-p) \cup (p) = 0$ ist. Es folgt für alle $\varphi \in H^n(K, 2)$

$$\varphi = \inf \Delta_{v,p}\varphi + (p) \cup \inf \partial_v\varphi.$$

Da die Inflation ein Ringhomomorphismus ist und $(p) \cup (p) = (-1) \cup (p)$ ist folgt hieraus, daß durch $\varphi \to \Delta_{v,p}\varphi + (\partial_v \varphi)x$ ein Isomorphismus

$$H^*(K, 2) \to H^*(K/v, 2)[x]/(x^2 - (-1)x)$$

graduierter Ringe gegeben ist ($\mathrm{grad}(x) = 1$). Insbesondere ist $\Delta_{v,p}$ in diesem Fall ein Ringhomomorphismus. Dies entspricht der Formel (2) (Satz von Springer).

SATZ 4.12. *Sei v eine Bewertung des Körpers K, $p \in K$ ein Primelement. Dann ist*

$$\Delta_{v,p}: H^*(K, 2) \to H^*(K/v, 2)$$

ein Ringhomomorphismus. Für $\varphi \in P^n K$ gilt $\Delta_{v,p} e^n_{PK}\varphi = e^n_{P(K/v)} \Delta_{v,p}\varphi$. Insbesondere ist

$$\Delta_{v,p} \circ e_K{}^n = e^n_{K/v} \circ \Delta_{v,p}: M^n K \to H^n(K/v, 2)$$

falls $e_K{}^n$ und $e^n_{K/v}$ beide wohldefiniert sind.

Beweis. Sei (K', v') eine Henselisation von (K, v). Dann ist $\Delta_{v,p}\varphi = \partial_v((-p) \cup \varphi) = \partial_{v'} \circ i_{K'/K}((-p) \cup \varphi) = \partial_{v'}((-p) \cup i_{K'/K}\varphi) = \Delta_{v',p} i_{K'/K}\varphi$. Da $i_{K'/K}$ und $\Delta_{v',p}$ Ringhomomorphismen sind, folgt $\Delta_{v,p}$ Ringhomomorphismus. Die zweite Behauptung folgt wie im Beweis von Satz 4.11 und die dritte aus der zweiten.

BEMERKUNG. *Dem $\Delta_{v,p}$ entspricht in der k-Theorie das ψ in* [11, Lemma 2.2].

Entsprechend der Formel (6) haben wir den

SATZ 4.13. *Ist $(L, w)/(K, v)$ eine Erweiterung bewerteter Körper, so gilt*

$$\partial_w \circ i_{L/K} = e(w/v)\, i_{(L/w)/(K/v)} \circ \partial_v: H^n(K, 2) \to H^{n-1}(L/w, 2)$$

Beweis. Wir können o.E. annehmen es seien K und L henselsch. Seien die Bezeichnungen wie bei und vor der Sequenz (9) mit Indizes K und L und $\alpha: G_L \to G_K$ die Einschränkung auf K_s. Dann ist offenbar $\alpha(u_L) \subseteq U_K$ und der induzierte Homomorphismus $H_L \to H_K$ der Einschränkungshomomorphismus der vollen Galoisgruppe von L/w in die von K/v. Ferner ist

$$\begin{array}{ccc} H^n(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_K} & H^{n-1}(H_K, H^1(U_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ H^n(G_L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_L} & H^{n-1}(H_L, H^1(U_L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \end{array}$$

kommutativ. Es ist auch offenbar die Komposition

$$\bar{u}_L \circ \alpha^* \circ \bar{u}_K^{-1}\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} N_K^{\cdot}/N_K^{\cdot 2} \longrightarrow N_L^{\cdot}/N_L^{\cdot 2} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

die Multiplikation mit $e(w/v)$. Daraus folgt der Satz.

Nach dem Satz ist zum Beispiel $\partial_v = \partial_w \circ i_{L/K}$, falls (L, w) die Komplettierung von (K, v) ist.

Dem Satz 3.4 entsprechend gilt der

SATZ 4.14. *Sei v eine Bewertung des Körpers K. Sei L/K eine endliche Erweiterung. Dann gilt*

$$\partial_v \circ \operatorname{cor}_{L/K} = \sum_{w|v} \operatorname{cor}_{(L/w)/(K/v)} \circ \partial_w\colon H^n(L, 2) \to H^{n-1}(K/v, 2).$$

Beweis. Wegen Satz 4.4 können wir uns wie im Beweis von Satz 3.4 auf den Fall K henselsch beschränken. Dann gibt es nur eine Fortsetzung w von v auf L und es ist L henselsch. Wegen der Transitivität von cor können wir uns wie im Beweis zu Satz 2.7 auf drei Fälle beschränken:

(1) L/K separabel und unverzweigt

(2) L/K separabel und $L/w = K/v$

(3) $e(w/v)$ ungerade und L/w rein inseparabel über K/v.

Wir übernehmen die Bezeichnungen im vorigen Beweis und in der Diskussion vor Satz 4.12 und kennzeichnen die Inflationen auch mit K bzw. L. Wir schreiben $\bar{K} = K/v$ und $\bar{L} = L/w$. Wir haben $H^n(K, 2) = \inf_K H^n(\bar{K}, 2) \oplus (p) \cup \inf_K H^{n-1}(\bar{K}, 2)$, falls $p \in K$ ein Primelement ist, und entsprechend für L. Im ersten Fall ist ein Primelement p in K auch ein Primelement in L, also $H^n(L, 2) = \inf_L H^n(\bar{L}, 2) \oplus (p) \cup \inf_L H^{n-1}(\bar{L}, 2)$. Ferner ist $U_L = U_K$ und da dann die Corestriktion mit der Inflation kommutiert ([9, Ch. II, Prop. 11]) haben wir für $\chi = \inf_L \varphi + (p) \cup \inf_L \psi \in H^n(L, 2)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{cor}_{L/K}\chi &= \operatorname{cor}_{L/K} \inf_L \varphi + (p) \cup \operatorname{cor}_{L/K} \inf_L \psi \\ &= \inf_K \operatorname{cor}_{\bar{L}/\bar{K}} \varphi + (p) \cup \inf_K \operatorname{cor}_{\bar{L}/\bar{K}} \psi, \end{aligned}$$

damit $\partial_v \operatorname{cor}_{L/K}\chi = \operatorname{cor}_{\bar{L}/\bar{K}} \psi = \operatorname{cor}_{\bar{L}/\bar{K}} \partial_w \chi$. Im zweiten Fall ist $\bar{L} = \bar{K}$. Sei $q \in L$ ein Primelement. Dann ist $N_{L/K}(q)$ ein Primelement in K und für $\chi = \inf_L \varphi + (q) \cup \inf_L \psi = i_{L/K} \inf_K \varphi + (q) \cup i_{L/K} \inf_K \psi \in H^n(L, 2)$ haben wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{cor}_{L/K} \chi &= \operatorname{cor}_{L/K} i_{L/K} \inf_K \varphi + \operatorname{cor}_{L/K}((q) \cup i_{L/K} \inf_K \psi) \\ &= [L : K] \inf_K \varphi + (N_{L/K}(q)) \cup \inf_K \psi, \end{aligned}$$

damit $\partial_v \operatorname{cor}_{L/K} \chi = \psi = \partial_w \chi$. Im dritten Fall ist $i_{\bar{L}/\bar{K}}$: $H^*(\bar{K}, 2) \to H^*(\bar{L}, 2)$ ein Isomorphismus. Wir wählen uns wie im Beweis von Satz 1.7 Primelemente $q \in L$ und $p \in K$ mit $qL^{\cdot 2} = pL^{\cdot 2}$. Für $\chi = \inf_L i_{\bar{L}/\bar{K}} \varphi + (q) \cup \inf_L i_{\bar{L}/\bar{K}} \psi = i_{L/K} \inf_K \varphi + (p) \cup i_{L/K} \inf_K \psi \in H^n(L, 2)$ folgt dann:

$$\begin{aligned}\operatorname{cor}_{L/K} \chi &= \operatorname{cor}_{L/K} i_{L/K} (\inf_K \varphi + (p) \cup \inf_K \psi) = [L:K](\inf_K \varphi + (p) \cup \inf_K \psi) \\ &= \inf_K \varphi + (p) \cup \inf_K \psi,\end{aligned}$$

weil $[L:K]$ ungerade ist. Es folgt $\partial_w \operatorname{cor} \chi = \psi = i_{\bar{L}/\bar{K}}^{-1}(i_{\bar{L}/\bar{K}} \psi) = \operatorname{cor}_{\bar{L}/\bar{K}} \partial_w \chi$ nach der Definition der Corestriktion für rein inseparable Erweiterungen.

Bei der Definition von ∂_v für henselsche Körper haben wir nur wenige Eigenschaften der maximalen unverzweigten Erweiterung benutzt, die auch sonst vorkommen können. Sei genauer v eine Bewertung des Körpers K und N eine galoissche Erweiterung von K, so daß v nur eine Fortsetzung u auf N hat, u über v unverzweigt ist und N/u ein separabler Abschluß von K/v ist. Sei ferner $H^i(N, 2) = 0$ für $i \geqslant 2$. Die Galoisgruppe H von N über K ist dann kanonisch isomorph der Galoisgruppe von N/u über K/v. Wir haben wie früher nach dem Satz von Hochschild-Serre eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^n(K/v, 2) \longrightarrow H^n(K, 2) \xrightarrow{r} H^{n-1}(H, N^{\cdot}/N^{\cdot 2}) \longrightarrow \cdots$$

und einen von u induzierten Homomorphismus

$$\bar{u}\colon N^{\cdot}/N^{\cdot 2} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

von G-Moduln. Wir setzen jetzt

$$\partial := \bar{u} \circ r\colon H^n(K, 2) \to H^{n-1}(K/v, 2).$$

Dann gilt:

Satz 4.15. *Mit den Bezeichnungen oben ist* $\partial = \partial_v$.

Beweis. Es gibt eine Henselisation (K', v') von (K, v) so daß (N, u) in der maximalen unverzweigten Erweiterung (N', u') von (K', v') enthalten ist. Sei G die volle Galoisgruppe von K, U die von N, G' die von K' und U' die von N'. Dann ist $H = G/U \cong G'/U' =: H'$. Das Diagram

$$\begin{array}{ccc} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad r \quad} & H^{n-1}(H, H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \\ {\scriptstyle \operatorname{res}^G_{G'} = i_{K'/K}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \operatorname{res}^U_{U'}} \\ H^n(G', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad r' \quad} & H^{n-1}(H', H^1(U', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \end{array}$$

ist kommutativ (nach der Formel für r). Ferner ist offenbar

$$\begin{tikzcd} H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = N^{\cdot}/N^{\cdot 2} \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "\mathrm{res}^U_{U'}"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ H^1(U', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = N'^{\cdot}/N'^{\cdot 2} \arrow[r, "\bar{u}'"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

kommutativ. Daraus folgt der Satz.

Sei jetzt L ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen mit dem genauen Konstantenkörper K. Sei L_s ein separabler Abschluß von L, $K_s \subseteq L_s$ der separable Abschluß von K, $G := \mathrm{Gal}(L_s/L)$ die Galoisgruppe von L, $U := \mathrm{Gal}(L_s/K_sL)$ die von K_sL und $H := \mathrm{Gal}(K_sL/L) \cong \mathrm{Gal}(K_s/K) \cong G/U$. Es ist $cd(K_sL) = 1$ (siehe [21, Ch. II, Prop. 11]), insbesondere $H^i(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ für $i \geqslant 2$. Nach dem Satz von Hochschild-Serre haben wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \xrightarrow{d_2} H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\inf} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{r} H^{n-1}(H, H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \xrightarrow{d_2} \cdots$$

insbesondere die Homomorphismen

$$r\colon H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{n-1}(H, H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$$

Sei D_s die Divisorengruppe von K_sL über K_s. Die Nullsequenz

$$(K_sL)^{\cdot} \xrightarrow{w} D_s \xrightarrow{\mathrm{grad}} \mathbb{Z}$$

induziert eine Nulssequenz

$$\begin{array}{l} H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{w}} D_s/2D_s \xrightarrow{\overline{gr}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \\ \quad\quad \wr\| \\ (K_sL)^{\cdot}/(K_sL)^{\cdot 2} \end{array}$$

Wir haben daher Nullsequenzen

$$H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\inf} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{w}\circ r} H^{n-1}(H, D_s/2D_s) \xrightarrow{\overline{gr}} H^{n-1}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Es ist $H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^n(K, 2)$, $H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^n(L, 2)$ und die Inflation ist $i_{L/K}$. Ebenso $H^{n-1}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^{n-1}(K, 2)$. Aus dem Lemma von Shapiro folgt

$$H^{n-1}(H, D_s/2D_s) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^{n-1}(L/\mathfrak{p}, 2),$$

wobei $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren von L über K durchläuft. Genauer: Ist für jedes $\mathfrak{p}$ $\bar{D}_s(\mathfrak{p}) := \bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\mathfrak{P})$ die von den über $\mathfrak{p}$ liegenden Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von K_sL über K_s erzeugte Untergruppe von $D_s/2D_s$, so ist $D_s/2D_s = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \bar{D}_s(\mathfrak{p})$ als H-Modul. Ist $\mathfrak{P}$ ein bestimmter über $\mathfrak{p}$ liegender Primdivisor von K_sL, $H_{\mathfrak{P}} \subseteq H$ die Stabilitätsgruppe (Zerlegungsgruppe) von $\mathfrak{P}$, so ist nach dem Lemma von Shapiro $H^{n-1}(H, \bar{D}_s(\mathfrak{p})) = H^{n-1}(H_{\mathfrak{P}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. $H_{\mathfrak{P}}$ ist aber isomorph der vollen Galoisgruppe von $L/\mathfrak{p}$ (siehe [2, Ch. III, §19]). Wir möchten jetzt $\bar{w} \circ \bar{r}$ und $\overline{gr}$ bestimmen.

Liegt über $\mathfrak{p}$ nur ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K_sL über K_s, so ist nach Satz 4.15 der $\mathfrak{p}$-Anteil von $w \circ r$ das $\partial_{\mathfrak{p}}$. Im allgemeinen Fall nehmen wir ein $\mathfrak{P}$ das über $\mathfrak{p}$ liegt und bezeichnen mit $K'L \subset K_sL$ den Fixkörper der Stabilitätsgruppe $H_{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$, mit $\mathfrak{p}'$ die Einschränkung von $\mathfrak{P}$ auf $K'L$. Über $\mathfrak{p}'$ liegt dann nur ein Primdivisor, nämlich $\mathfrak{P}$, von K_sL über K_s und wir können die obige Überlegung auf $\mathfrak{p}'$ anwenden. Nun ist $\mathfrak{p}'$ unverzweigt über $\mathfrak{p}$ und $K'L/\mathfrak{p}' = L/\mathfrak{p}$, also $\partial_{\mathfrak{p}} = \partial_{\mathfrak{p}'} \circ i_{K'L/L}$ nach Satz 4.13. Es folgt, daß auch im allgemeinen Fall der $\mathfrak{p}$-Anteil von $\bar{w} \circ r$ genau das $\partial_{\mathfrak{p}}$ ist.

Für jeden Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K_sL über K_s gilt $\operatorname{grad}(\mathfrak{P}) = [K_sL/\mathfrak{P} : K_s] \equiv 1 \bmod 2\mathbb{Z}$. Für einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von L über K folgt

$$\overline{gr}\Big(\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \epsilon_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P})\Big) = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \epsilon_{\mathfrak{P}} \qquad \text{für alle} \quad \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \epsilon_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P}) \in \bar{D}_s(\mathfrak{p}).$$

Mit den Bezeichnungen oben ist damit (siehe [21, Ch. I, 2.5]) $\overline{gr}$ beschränkt auf $H^{n-1}(H_{\mathfrak{P}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genau die Corestriktion $H^{n-1}(H_{\mathfrak{P}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{n-1}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Nach der Definition der Corestriktion für beliebige endliche Körpererweiterungen ist damit $\overline{gr}$ beschränkt auf $H^{n-1}(L/\mathfrak{p}, 2)$ genau das $\operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/K}$. Dem Satz 3.10 entsprechend haben wir also den folgenden Satz:

Satz 4.16. *Sei L ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen mit dem genauen Konstantenkörper K. Dann ist*

$$H^n(K, 2) \xrightarrow{i_{L/K}} H^n(L, 2)$$
$$\xrightarrow{\oplus_{\mathfrak{p}} \partial_{\mathfrak{p}}} \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^{n-1}(L/\mathfrak{p}, 2) \xrightarrow{\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/K}} H^{n-1}(K, 2),$$

wobei $\mathfrak{p}$ alle Primstellen von L über K durchläuft, eine Nullsequenz.

Im allgemeinen ist diese Nullsequenz nirgends exakt. Besitzt L aber einen Primdivisor $\mathfrak{q}$ vom Grade 1, so ist offenbar $\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{cor}_{(L/\mathfrak{p})/K}$ surjektiv. Ist ferner $q \in L$ ein zu $\mathfrak{q}$ gehöriges Primelement, so folgt wie im Corollar 4.10, daß $\Delta_{\mathfrak{q},q} \circ \inf$ die Identität auf $H^n(K, 2)$ ist, insbesondere $i_{L/K}: H^n(K, 2) \to H^n(L, 2)$ injektiv. Für den rationalen Funktionenkörper $K(x)$ über K haben wir dem Satz 3.9 entsprechend allgemeiner (vgl. [20]).

SATZ 4.17. *Die Sequenz*

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow H^n(K, 2) &\xrightarrow{i_{K(x)/K}} H^n(K(x), 2)\\ &\xrightarrow{\oplus_\mathfrak{p} \partial_\mathfrak{p}} \bigoplus_\mathfrak{p} H^{n-1}(K(x)/\mathfrak{p}, 2) \xrightarrow{\Sigma_\mathfrak{p} \operatorname{cor}_{(K(x)/\mathfrak{p})/K}} H^{n-1}(K, 2) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

ist exakt.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Satz 4.16 ist nach den Überlegungen oben die Inflation $H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ injektiv. Die lange exakte Sequenz vorne zerfällt also in kurze exakte Sequenzen

$$0 \to H^n(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{inf}} H^n(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{r} H^{n-1}(H, H^1/U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \to 0.$$

Nun ist bekanntlich in diesem Fall die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{w}} D_s/2D_s \xrightarrow{\overline{gr}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

exakt und zerfallend, also zerfällt auch die lange exakte Sequenz der Cohomologie in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow H^{n-1}(H, H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))\\ &\xrightarrow{\bar{w}} H^{n-1}(H, D_s/2D_s) \xrightarrow{\overline{gr}} H^{n-1}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt der Satz.

Wir sind jetzt in der Lage zu beweisen, daß die Corestriktion für den Cohomologiering der Corestriktion für den "graduierten Wittring" entspricht.

SATZ 4.18. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Sei $e_K{}^n$ wohldefiniert. Ist dann $\varphi \in \bar{P}^n L$, so ist $\bar{e}_K{}^n \operatorname{cor}_{L/K} \varphi = \operatorname{cor}_{L/K} \bar{e}_{PL}^n \varphi$. Insbesondere gilt*

$$\bar{e}_K{}^n \circ \operatorname{cor}_{L/K} = \operatorname{cor}_{L/K} \circ \bar{e}_L{}^n \colon \bar{M}^n L \to H^n(K, 2),$$

falls $e_K{}^n$ und $e_L{}^n$ wohldefiniert sind.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst für einfache Erweiterungen L/K durch Induktion nach dem Grad $[L : K] =: m$. Der Fall $m = 1$, d.h. $L = K$ ist trivial. Sei also $m > 1$ und der Satz für alle einfachen Erweiterungen vom Grad $< m$ bewiesen. Wir schreiben o.E. $L = K[x]/(q)$ mit einem Primpolynom q. Sei $\mathfrak{P}$ die zu q gehörige Stelle von $K(x)$ über K. Es gibt dann offenbar ein $\psi \in \bar{P}^{n+1}K(x)$ mit $\partial_\mathfrak{P}\psi = \varphi$ und $\partial_\mathfrak{p}\psi = 0$ für alle endlichen Primstellen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{P}$ von $K(x)$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{p} \geqslant m$ (Repräsentiere φ durch eine Pfisterform mit Koeffizienten vom Grad $< m$ und nehme dann ψ als die

Klasse dieser Pfisterform über $K(x)$ mit $\langle 1, q\rangle$ multipliziert). Dann gilt nach Satz 3.9

$$\mathrm{cor}_{L/K}\varphi = \partial_\infty\psi - \sum_{\substack{\mathfrak{p}\,\text{endl.}\\ \text{grad}\,\mathfrak{p}<m}} \mathrm{cor}_{(K(x))\mathfrak{p}/K}\,\partial_\mathfrak{p}\psi.$$

Wegen $\partial_\mathfrak{p}\psi \in \bar{P}^n(K(x)/\mathfrak{p})$ folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\bar{e}_K{}^n \,\mathrm{cor}_{L/K}\varphi = \bar{e}_K{}^n\partial_\infty\psi - \sum_{\substack{\mathfrak{p}\,\text{endl.}\\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}} \mathrm{cor}_{(K(x)/\mathfrak{p})/K}\bar{e}^n_{P(K(x)/\mathfrak{p})}\partial_\mathfrak{p}\psi.$$

Nun ist nach Satz 4.11

$$\bar{e}^n_{P(K(x)/\mathfrak{p})}\partial_\mathfrak{p}\psi = \partial_\mathfrak{p}\bar{e}^{n+1}_{PK(x)}\psi$$

also

$$\bar{e}_K{}^n \,\mathrm{cor}_{L/K}\,\varphi = \partial_\infty\bar{e}^{n+1}_{PK(x)}\psi - \sum_{\substack{\mathfrak{p}\,\text{endl.}\\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}} \mathrm{cor}_{(K(x)/\mathfrak{p})/K}\,\partial_\mathfrak{p}\bar{e}^{n+1}_{PK(x)}\psi$$

mit Satz 4.16 damit

$$\bar{e}_K{}^n \,\mathrm{cor}_{L/K}\,\varphi = \mathrm{cor}_{(K(x)/\mathfrak{q})/K}\,\partial_\mathfrak{q}\bar{e}^{n+1}_{PK(x)}\psi$$

mit Satz 4.11 dann

$$\bar{e}_K{}^n \,\mathrm{cor}_{L/K}\,\varphi = \mathrm{cor}_{(K(x)/\mathfrak{q})/K}\,\bar{e}^n_{P(K(x)/\mathfrak{q})}\partial_\mathfrak{q}\psi = \mathrm{cor}_{L/K}\,\bar{e}^n_{PL}\varphi.$$

Damit ist der Satz für einfache Erweiterungen bewiesen. Sei jetzt L/K beliebig endlich, $N \subseteq L$ der separable Abschluß von K in L. Dann ist L/N rein inseparabel, damit $\varphi = i_{L/N}\chi$ mit $\chi \in \bar{P}^nN$ und es gilt $\mathrm{cor}_{L/N}\varphi = \chi$. Da N/K einfach ist haben wir

$$\bar{e}_K{}^n \,\mathrm{cor}_{L/K}\,\varphi = \bar{e}_K{}^n \,\mathrm{cor}_{N/K}\,\chi = \mathrm{cor}_{N/K}\,\bar{e}^n_{PN}\chi.$$

Wegen $\mathrm{cor}_{L/N} = i^{-1}_{L/N}$ und $i_{L/N}\bar{e}^n_{PN}\chi = \bar{e}^n_{PL}i_{L/N}\chi$ folgt $\bar{e}_K{}^n \,\mathrm{cor}_{L/K}\,\varphi = \mathrm{cor}_{L/K}\bar{e}^n_{PL}\varphi$ wie behauptet.

Man kann diesen Satz insbesondere auf $e_K{}^0$, $e_K{}^1$ und $e_K{}^2$ anwenden, da diese immer wohldefiniert sind. Genauer: Ist L/K eine endliche Körpererweiterung, $s: L \to K$ eine nicht-triviale K-lineare Abbildung, so gilt

$$\begin{aligned} e(s^*\varphi) &= \mathrm{cor}_{L/K}\,e(\varphi) && \text{für}\quad \varphi \in W(L) \\ d(s^*\varphi) &= \mathrm{cor}_{L/K}\,d(\varphi) && \text{für}\quad \varphi \in M(L) \qquad \text{und} \\ c(s^*\varphi) &= \mathrm{cor}_{L/K}c(\varphi) && \text{für}\quad \varphi \in M^2(L) \end{aligned}$$

(e = Dimensionsindex, d = Diskriminante und c = Algebrenklasse). Die erste Formel ist natürlich trivial. Die zweite kann man mit Hilfe von Lemma 2.3 beweisen. Die dritte kann man auch mit Hilfe eines Satzes von C. Riehm (Corestriction of Algebraic Structures, *Inv. Math.* **11** (1970), §6, Cor 1) beweisen, Satz 3.3 immer vorausgesetzt. Mann kann übrigens für separable endliche Erweiterungen L/K die Corestriktion $\mathrm{Cor}_{L/K}: BrW(L) \to BrW(K)$ für die Brauer–Wall–Gruppen Klassen zentraler, einfacher graduierter Algebren definieren, genauso wie Riehm es in der eben zitierten Arbeit für die Brauergruppen gemacht hat. Dann gilt $\mathrm{Cor}_{L/K}(\mathrm{cl}(\varphi)) = \mathrm{cl}(Sp^*(\varphi))$ für alle $\varphi \in W(L)$, wobei $\mathrm{cl}: W(\cdot) \to BrW(\cdot)$ die graduierte Cliffordalgebrenklasse ist ([23], [19, Ch. III, 3.5]) und $Sp: L \to K$ die Spur ist.

Wir können jetzt auch ein schon angekündigtes Resultat bewiesen.

SATZ 4.19. *Ist die Sequenz* (8) *für alle Körper K und alle quadratische Erweiterungen $L = K(d^{1/2})$ von K an den beiden Stellen*

$$\xrightarrow{\mu} \bar{M}^2K \xrightarrow{i_{L/K}} \bar{M}^2L \xrightarrow{\mathrm{cor}_{L/K}}$$

exakt, so ist für alle K

$$\bar{e}_K{}^2: \bar{M}^2K \to H^2(K, 2)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Die Injektivität wurde schon bewiesen (Satz 3.5). Sei $\rho \in H^2(K, 2)$ und für eine quadratische Erweiterung $L = K(d^{1/2})$ sei $i_{L/K}\rho \in \mathrm{Bild}(\bar{e}_L{}^2)$, etwa $i_{L/K}\rho = \bar{e}_L{}^2(\psi)$, $\psi \in \bar{M}^2L$. Dann ist (Corollar 4.6) $0 = \mathrm{cor}_{L/K}i_{L/K}\rho = \mathrm{cor}_{L/K}\bar{e}_L{}^2(\psi) = \bar{e}_K{}^2\, \mathrm{cor}_{L/K}\,\psi$ nach Satz 4.18. Aus der Injektivität folgt $\mathrm{cor}_{L/K}\,\psi = 0$, also nach Voraussetzung $\psi = i_{L/K}\varphi$ mit $\varphi \in \bar{M}^2K$, damit $i_{L/K}\rho = \bar{e}_L{}^2 i_{L/K}\varphi = i_{L/K}\bar{e}_K{}^2(\varphi)$. Nach Corollar 4.6 ist dann $\rho = \bar{e}_K{}^2(\varphi) + (d) \cup (a)$ mit $a \in K^\cdot$. Es folgt $\rho = \bar{e}_K{}^2(\varphi + (\langle\langle d, a\rangle\rangle + M^3K))$, d.h. $\rho \in \mathrm{Bild}(\bar{e}_K{}^2)$. Durch Induktion folgt, daß wenn $\rho \in H^2(K, 2)$ über einem Körper zerfällt, der durch sukzessive quadratische Erweiterungen aus K entsteht, daß dann $\rho \in \mathrm{Bild}(\bar{e}_K{}^2)$ ist. Möglicherweise zerfällt jedes ρ über so einem Körper; das ist aber noch nicht bekannt (Das heißt $H^2(K, 2) = 0$ für alle quadratisch abgeschlossenen Körper K). Jedenfalls gibt es eine endliche galoissche Erweiterung L/K über der ρ zerfällt. Ist N der Fixkörper einer 2-Sylowgruppe von $\mathrm{Gal}(L/K)$, so ist nach dem obigen $i_{N/K}\rho \in \mathrm{Bild}(\bar{e}_N{}^2)$, etwa $i_{N/K}\rho = \bar{e}_N{}^2\chi$ mit $\chi \in \bar{M}^2N$. $[N : K]$ ist ungerade, also $\rho = \mathrm{cor}_{N/K}i_{N/K}\rho = \mathrm{cor}_{N/K}\bar{e}_N{}^2\chi = \bar{e}_K{}^2\, \mathrm{cor}_{N/K}\,\chi$ nach Satz 4.18, d.h. $\rho \in \mathrm{Bild}\ (\bar{e}_K{}^2)$.

Eine weitere interessante Folgerung aus dem Satz 4.17 mit Satz 3.9 und Satz 4.11 ist, daß $\bar{e}^2_{K(x)}: \bar{M}^2(K(x)) \to H^2(K(x), 2)$ genau dann injektiv bzw.

surjektiv ist, wenn $\bar{e}_K^2\colon \bar{M}^2K \to H^2(K, 2)$ injektiv bzw. surjektiv ist. Das folgt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \bar{M}^2(K) & \longrightarrow & \bar{M}^2(K(x)) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{\mathfrak{p}\,\text{endl.}} \bar{M}^1(K(x)/\mathfrak{p}) & \longrightarrow 0 \\
& \big\downarrow \bar{e}_K^2 & & \big\downarrow \bar{e}^2_{K(x)} & & \big\downarrow \wr\Vert & \\
0 \longrightarrow & H^2(K, 2) & \longrightarrow & H^2(K(x), 2) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{\mathfrak{p}\,\text{endl.}} H^1(K(x)/\mathfrak{p}, 2) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

mit exakten Zeilen.

5. Der Kern von $i_{K(\varphi)/K}\colon H^3(K, 2) \to H^3(K(\varphi), 2)$

Wir haben gesehen, daß für eine Pfisterform τ der Dimension > 1 $\operatorname{Ker}(i_{K(\tau)/K}\colon W(K) \to W(K(\tau))) = \tilde{\tau}W(K)$ gilt. Es ist zu vermuten, daß ein entsprechendes Resultat auch für den Cohomologierung gilt, nämlich $\operatorname{Ker}(i_{K(\tau)/K}\colon H^*(K, 2) \to H^*(K(\tau), 2)) = e^n_{PK}(\tilde{\tau}) \cup H^*(K, 2)$ falls τ eine n-fache Pfisterform ist ($n > 0$). Das ist richtig wenn τ isotrop ist, denn dann ist $e^n_{PK}(\tilde{\tau}) = 0$ und $K(\tau)$ rein transzendent über K, damit $i_{K(\tau)/K}$ injektiv (Satz 4.17). Für 1-fache Pfisterformen ist es auch richtig nach Corollar 4.6 mit Satz 4.17. Beschränkt auf $H^0(K, 2)$, $H^1(K, 2)$ und $H^2(K, 2)$ ist es auch immer richtig, wie die Betrachtungen vor Satz 4.2 zeigen. Für $H^2(K, 2)$ hatten wir genauer: Ist $\alpha \in H^2(K, 2)$, $\alpha \neq 0$ und $i_{K(\varphi)/K}\alpha = 0$ ($\dim \varphi > 1$), so gibt es $d_0, d_1, d_2 K^{\cdot}$ mit $\alpha = (d_1, d_2)$, so daß φ in $d_0\langle\langle d_1, d_2\rangle\rangle$ enthalten ist. Wir wollen jetzt ein entsprechendes Resultat für $H^3(K, 2)$ beweisen. Dabei werden wir öfters die Sätze 2.8 und 4.17 benutzen und übernehmen die Bezeichnungen dort. Der Einfachkeit halber schreiben wir jedoch für endliche Primstellen $\mathfrak{p}$ von $K(x)$ über K statt $s_{\mathfrak{p}}$ und $\partial_{\mathfrak{p}}$ jetzt s_p und ∂_p wo p das zu $\mathfrak{p}$ gehörige normierte Primpolynom ist. Ferner K_p statt $K(x)/\mathfrak{p} = K[x]/(p)$ und statt $i_{K_p/K}$ und $\operatorname{cor}_{K_p/K}$ einfach i_p und cor_p. Auch $\sum_p$ statt $\sum_{\mathfrak{p}\,\text{endl.}}$ u.s.w. Wir betrachten $W(K)$ (bzw. $H^*(K, 2)$) als Teilmenge von $W(K(x))$ (bzw. $H^*(K(x), 2)$), d.h. wir lassen das $i_{K(x)/K}$ meistens fort.

Wir betrachten zunächst den Körper $L = K(x)(b(x^2 - a))^{1/2}$ mit $a, b \in K^{\cdot}$. Da wir dabei nur den Satz 5.4 ansteuern und dieser für den Fall $\langle\langle a, b\rangle\rangle \sim 0$ nichts Neues aussagt, werden wir bis dann $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ anisotrop voraussetzen. Mit $s\colon L \to K(x)$ bezeichnen wir die $K(x)$-lineare Abbildung mit $s(1) = 0$, $s(b(x^2 - a))^{1/2} = 1$. Ist dann $\psi \in W(L)$, so gilt nach Satz 2.4 $\langle 1, -b(x^2 - a)\rangle^{\sim} s^*\psi = 0$. Es folgt $\langle 1, -b(x_p{}^2 - a)\rangle^{\sim} \partial_p s^*\psi = 0$ für alle $p \neq x^2 - a$ und $\langle 1, -b\rangle^{\sim} \partial_\infty s^*\psi = 0$, d.h. (nach Satz 2.8) $\langle 1, -b\rangle^{\sim} \sum_p s_p{}^* \partial_p s^*\psi = 0$. Es gilt aber auch die Umkehrung:

SATZ 5.1. *Sei* $(\varphi_p)_p \in \bigoplus_p W(K_p)$. *Sei*

$$\langle 1, -b(x_p{}^2 - a)\rangle^{\sim} \varphi_p = 0 \qquad \textit{für alle} \quad p \neq x^2 - a$$

und

$$\langle 1, -b\rangle^{\sim} \sum_p s_p{}^* \varphi_p = 0.$$

Dann gibt es ein $\psi \in W(L)$ *mit* $\varphi_p = \partial_p s^* \psi$ *für alle* p. ψ *kann sogar aus* ML *gewählt werden. Ist* $\varphi_p \in MK_p$ *für alle* p, *so kann* ψ *aus* M^2L *gewählt werden.*

Beweis. Nach Satz 2.8 gibt es ein $\varphi_0 \in W(K(x))$ mit $\partial_p\varphi_0 = \varphi_p$ für alle p. Sei $\chi_0 := \langle 1, -b(x^2 - a)\rangle^{\sim}\varphi_0$. Dann gilt nach Voraussetzung $\partial_p\chi_0 = 0$ für alle $p \neq x^2 - a$ und $\partial_\infty\chi_0 = 0$. Wegen $0 = \partial_\infty\chi_0 = s_{x^2-a}\partial_{x^2-a}\chi_0$ (Satz 2.8) folgt aus Satz 2.4 $\partial_{x^2-a}\chi_0 = i_{x^2-a}\rho_0$ mit $\rho_0 \in W(K)$. Dann gilt $\partial_p\rho_0 = 0$ für alle p, $\partial_{x^2-a}(\langle x^2 - a\rangle^{\sim}\rho_0) = \partial_{x^2-a}\chi_0$ und $\partial_p(\langle x^2 - a\rangle^{\sim}\rho_0) = 0$ für alle $p \neq x^2 - a$. Für $\varphi_1 := \varphi_0 + \langle b\rangle^{\sim}\rho_0$ und $\chi_1 := \langle 1, -b(x^2 - a)\rangle^{\sim}\varphi_1$ folgt $\partial_p\varphi_1 = \varphi_p$ für alle p und $\partial_p\chi_1 = 0$ für alle p, d.h. $\chi_1 \in W(K)$. Da offenbar das Bild von χ_1 in $W(L)$ verschwindet ist $\chi_1 \in \mathrm{Ker}(i_{L/K}\colon W(K) \to W(L))$,nach dem Beispiel nach Satz 2.1 also $\chi_1 = \langle\langle a, b\rangle\rangle^{\sim}\rho_1$ mit $\rho_1 \in W(K)$. Nun ist $\langle\langle a, b\rangle\rangle \cong \langle 1, -b(x^2 - a)\rangle \otimes \langle 1, -a\rangle$ über $K(x)$, mit $\varphi := \varphi_1 - \langle 1, -a\rangle^{\sim}\rho_1$ also $\langle 1, -b(x^2 - a)\rangle^{\sim}\varphi = 0$. Es folgt $\varphi = s^*\psi$ mit $\psi \in W(L)$ nach Satz 2.4. Ferner ist $\partial_p\varphi = \partial_p\varphi_1 = \varphi_p$ für alle p. Ist $\psi \notin ML$, so können wir zu ψ die $\langle 1\rangle^{\sim}$ addieren, ohne $s^*\psi$ zu verändern, also können wir $\psi \in ML$ wählen. Ist $\varphi_p \in MK_p$ für alle p, so können wir am Anfang schon nach Satz 3.9 $\varphi_0 \in M^2(K(x))$ wählen. Dann folgt $\partial_{x^2-a}\chi_0 \in M^2K_{x^2-a}$ und wir können wegen der Exaktheit des Anfangs der Sequenz (8) $\rho_0 \in M^2K$ wählen, also $\varphi_1 \in M^2(K(x))$. Dann folgt $\chi_1 \in M^3K$, also $\rho_1 \in MK$, damit $\varphi \in M^2(K(x))$. Wegen der Exaktheit des Anfangs der Sequenz (8) können wir dann $\psi \in M^2L$ wählen.

Die Bedingung $\langle 1, -b\rangle \sim \sum_p s_p{}^*\varphi_p = 0$ in dem Satz ist nicht ganz von den anderen unabhängig. Ist nämlich $(\varphi_p)_p \in \bigoplus_p W(K_p)$ und $\langle 1, -b(x_p{}^2 - a)\rangle^{\sim}\varphi_p = 0$ für alle $p \neq x^2 - a$, so gilt $\langle\langle a, b\rangle\rangle^{\sim}\varphi_p = \langle 1, -a\rangle^{\sim}\langle 1, -b(x_p{}^2 - a)\rangle^{\sim}\varphi_p = 0$ für $p \neq x^2 - a$ und $\langle 1, -a\rangle^{\sim}s_{x^2-a}\varphi_{x^2-a} = 0$ nach Satz 2.4, damit $\langle\langle a, b\rangle\rangle^{\sim} \sum_p s_p{}^*\varphi_p = 0$. Hier gibt es wieder eine Umkehrung:

SATZ 5.2. *Sei* $\rho \in W(K)$ *und* $\langle\langle a, b\rangle\rangle^{\sim}\rho = 0$. *Dann gibt es ein* $(\varphi_p)_p \in \bigoplus_p W(K_p)$ *mit* $\langle 1, -b(x_p{}^2 - a)\rangle^{\sim}\varphi_p = 0$ *für alle* $p \neq x^2 - a$ *und* $\rho = \sum_p s_p{}^*\varphi_p$. *Dabei können alle* $\varphi_p \in MK_p$ *gewählt werden. Ist* $\rho \in M^2K$, *so können alle* $\varphi_p \in M^2K_p$ *gewählt werden.*

Zum Beweis brauchen wir ein Lemma:

LEMMA 5.3. *Sei $q \neq 0$ von $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ dargestellt. Dann ist q das Produkt zweier Elemente der Form $c_1^2 - b(c^2 - a)\, c_2^2$.*

Beweis. Sei $q = t_0^2 - at_1^2 - bt_2^2 + abt_3^2$. Wir rechnen in der Quaternionenalgebra $D = (a, b/K)$ mit Basis $1, i, j, k$ ($i^2 = a$, $j^2 = b$, $k = ij = -ji$). Es gibt in D ein Element $d_1 + d_2k \neq 0$, so daß $(t_0 + t_1 i + t_2 j + t_3 k)(d_1 + d_2 k)$ von der Form $c_0 + c_1 j + c_2 k$ ist (d.h. eine nichttriviale Lösung der Gleichung $t_1 d_1 - bt_2 d_2 = 0$). Es folgt, daß q das Produkt eines Elementes der Form $c_0^2 - bc_1^2 + abc_2^2$ mit einem Element der Form $e_1^2 + abe_2^2$ ist. Wir sind dann fertig, vorausgesetzt es ist nicht gleichzeitig $c_2 = 0$ und $c_1 \neq 0$. In diesem Fall ist aber

$$c_0^2 - bc_1^2 + abc_2^2 = c_0^2 - bc_1^2 = c_0^2 - b\left(\left(\frac{1+a}{2}\right)^2 - a\right)\left(\frac{2}{1-a}\, c_1\right)^2.$$

Beweis von Satz 5.2. Ist ρ von der Form $\rho = r\langle 1, -q\rangle^\sim$ (bzw. $\rho = r\langle 1, -t\rangle^\sim\langle 1, -q\rangle^\sim$) und $q = c_1^2 - b(c^2 - a)\, c_2^2$, so nehmen wir $\varphi_{x-c} = \rho$ und $\varphi_p = 0$ für $p \neq x - c$ und sind fertig. Im allgemeinen Fall ist (siehe [8, Th. 4.1 (und Bemerkung 4.4)]) $\rho = \sum r_i\langle 1, -q_i\rangle^\sim$ mit q_i von $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ dargestellt. Wegen $\langle 1, -q'q''\rangle^\sim = \langle 1, -q'\rangle^\sim + q'\langle 1, -q''\rangle^\sim$ folgt aus dem Lemma 5.3, daß sich ρ in der Form $\rho = \sum r_i\langle 1, -q_i\rangle^\sim$ mit q_i von der Form $c_1^2 - b(c^2 - a)\, c_2^2$ schreiben läßt. Daraus folgen, in Verbindung mit dem schon behandelten Spezialfall, die ersten beiden Behauptungen des Satzes. Ist $\rho \in M^2K$, so ist wegen $r'\langle 1, -q'\rangle^\sim + r''\langle 1, -q''\rangle^\sim = \langle r', r''\rangle^\sim\langle 1, -q'\rangle^\sim + r''q'\langle 1, -q'q''\rangle^\sim$ ρ von der Form $\rho = \sum r_i\langle 1, -t_i\rangle^\sim\langle 1, -q_i\rangle^\sim$ mit q_i von $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ dargestellt. Genauso wie oben können wir dabei annehmen, es seien die q_i sogar von der Form $c_1^2 - b(c^2 - a)\, c_2^2$. Daraus folgt die letzte Behauptung des Satzes.

Wir können jetzt für L den gesuchten Kern bestimmen:

SATZ 5.4. *Sei $L = K(x)(b(x^2 - a))^{1/2}$ mit $a, b \in K^\cdot$. Dann ist*

$$\operatorname{Ker}(i_{L/K}\colon H^3(K, 2) \to H^3(L, 2)) = (a, b) \cup H^1(K, 2).$$

Beweis. Ist $(a, b) = 0$, d.h. $\langle\langle a, b\rangle\rangle \sim 0$, so ist $\langle 1, -b, ab\rangle$ isotrop und damit L ein rationaler Funktionenkörper über K und der Satz folgt aus Satz 4.17. Sei also $(a, b) \neq 0$, d.h. $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ anisotrop. Sei $\alpha \in H^3(K, 2)$, $i_{L/K}\alpha = 0$. Dann ist nach Corollar 4.6 $\alpha = (b(x^2 - a)) \cup \psi$ mit $\psi \in H^2(K(x), 2)$. Nach Satz 4.17 gilt $0 = \partial_p\alpha = (b(x_p^2 - a)) \cup \partial_p\psi$ für alle $p \neq x^2 - a$ und $0 = \partial_\infty\alpha = (b) \cup \partial_\infty\psi = (b) \cup \sum_p \operatorname{cor}_p \partial_p\psi$. Für jedes p sei $q_p \in K_p^\cdot$ ein Repräsentant der Quadratklasse $\partial_p\psi$ und $\varphi_p^0 := \langle 1, -q_p\rangle^\sim \in MK_p$. Sei $\rho := \sum_p s_p{}^*\varphi_p^0 \in MK$. Wegen $0 = (b(x_p^2 - a)) \cup (q_p)$ ist $\langle 1, -b(x_p^2 - a)\rangle^\sim\varphi_p^0 = 0$ für alle $p \neq x^2 - a$, nach der Bemerkung vor Satz 5.2 damit $\langle\langle a, b\rangle\rangle^\sim\rho = 0$.

Wir schreiben $\rho = \rho' + \langle 1, -q\rangle^\sim$ mit $\rho' \in M^2K$, d.h. q ist ein Repräsentant der Diskriminante $d(\rho)$ von ρ. Nun gilt $d(\rho) = e_K^1(\rho) = \sum_p e_K^1(s_p^* \varphi_p^0) = \sum_p \operatorname{cor}_p e_{K_p}^1 \varphi_p^0 = \sum_p \operatorname{cor}_p \partial_p \psi$ nach Satz 4.18, wegen $(b) \cup \sum_p \operatorname{cor}_p \partial_p \psi = 0$ also $\langle 1, -b\rangle^\sim \langle 1, -q\rangle^\sim = 0$, damit auch $\langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle^\sim \rho' = 0$. Nach Satz 5.2 existiert dann ein $(\varphi_p')_p \in \bigoplus_p M^2K_p$ mit $\langle 1, -b(x_p^2 - a)\rangle^\sim \varphi_p' = 0$ für alle $p \neq x^2 - a$ und $\sum_p s_p^* \varphi_p' = \rho'$. Wir setzen $\varphi_p := \varphi_p^0 - \varphi_p' \in MK_p$. Dann ist $e_{K_p}^1(\varphi_p) = e_{K_p}^1(\varphi_p^0) = \partial_p \psi$ für alle p und $\langle 1, -b(x_p^2 - a)\rangle^\sim \varphi_p = \langle 1, -b(x_p^2 - a)\rangle^\sim \varphi_p^0 - \langle 1, -b(x_p^2 - a)\rangle^\sim \varphi_p' = 0$ für alle $p \neq x^2 - a$. Ferner $\sum_p s_p^* \varphi_p = \sum_p s_p^* \varphi_p^0 - \sum_p s_p^* \varphi_p' = \rho - \rho' = \langle 1, -q\rangle^\sim$, damit $\langle 1, -b\rangle^\sim \sum_p s_p^* \varphi_p = 0$. Nach Satz 5.1 existiert ein $\chi \in M^2L$ mit $\partial_p s^* \chi = \varphi_p$ für alle p, also nach Satz 4.11 $\partial_p e_K^2 s^* \chi = e_{K_p}^1 \partial_p s^* \chi = \partial_p \psi$ für alle p. Mit Satz 4.18 folgt $\partial_p(\operatorname{cor}_{L/K(x)} e_L^2(\chi)) = \partial_p(e_K^2 s^* \chi) = \partial_p \psi$ für alle p. Nach Satz 4.17 ist dann $\psi = \beta + \operatorname{cor}_{L/K(x)} e_L^2(\chi)$ mit $\beta \in H^2(K, 2)$. Wegen $(b(x^2 - a)) \cup \operatorname{cor}_{L/K(x)} e_L^2(\chi) = 0$ (nach Corollar 4.6) ist ferner $\alpha = (b(x^2 - a)) \cup \psi = (b(x^2 - a)) \cup \beta$. Nun ist $\partial_{x^2-a}\alpha = 0$, d.h. $i_{x^2-a}\beta = 0$ (siehe Corollar 4.10), also $\beta = (a) \cup (d)$ mit $d \in K^\cdot$ nach Corollar 4.6. Es folgt $\alpha = (b(x^2 - a)) \cup (a) \cup (d) = (b) \cup (a) \cup (d)$.

COROLLAR 5.5. *Sei* $\varphi \cong \langle 1, -a_1, -a_2\rangle$. *Dann ist* $\operatorname{Ker}(i_{K(\varphi)/K}\colon H^3(K, 2) \to H^3(K(\varphi), 2)) = (a_1, a_2) \cup H^1(K, 2)$.

Beweis. Sei $b := a_1$, $a := -(a_1)^{-1} a_2$, d.h. $-a_2 = ab$. Dann ist $K(\varphi) = K(x_1, x_2)(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2)^{1/2} = K(x)(b(x^2 - a))^{1/2}(x_2)$ mit $x = x_1(x_2)^{-1}$ ein rationaler Funktionenkörper über $L = K(x)(b(x^2 - a))^{1/2}$, damit nach Satz 4.17 $\operatorname{Ker}(i_{K(\varphi)/K}\colon H^3(K, 2) \to H^3(K(\varphi), 2)) = \operatorname{Ker}(i_{L/K}\colon H^3(K, 2) \to H^3(L, 2)) = (a, b) \cup H^1(K, 2)$ nach Satz 5.5. Aus $(a, b) = (-a_1 a_2, a_1) = (a_2, a_1)$ folgt das Corollar.

Sei jetzt $\varphi \cong \langle 1, -a_1, -a_2, -a_3\rangle$ eine vierdimensionale Form, die die 1 darstellt, also $K(\varphi) = K(x_1, x_2, x_3)(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2)^{1/2}$. Sei $\alpha \in H^3(K, 2)$ mit $i_{K(\varphi)/K}\alpha = 0$. Setzen wir $x_2 = x_3 x$, so ist

$$K(\varphi) = K(x)(x_1, x_3)(a_1 x_1^2 + (a_2 x^2 + a_3)\, x_3^2)^{1/2}$$

und damit $i_{K(x)}/_K\alpha = (a_1, a_2 x^2 + a_3, f)$ nach Corollar 5.5, $f \in K(x)^\cdot$. Sei $\tau := \langle\!\langle a_1, a_2 x^2 + a_3, f\rangle\!\rangle$. Dann ist offenbar $\partial_p \tilde{\tau} \in P^2K_p$ für alle p, mit Satz 4.11 damit $e_{K_p}^2 \partial_p \tilde{\tau} = \partial_p e_{PK(x)}^3 \tilde{\tau} = \partial_p(a_1, a_2 x^2 + a_3, f) = \partial_p \alpha = 0$ für alle p (Satz 4.17). Da jedes Element in P^2K_p durch eine vierdimensionale Form vertreten ist, folgt $\partial_p \tilde{\tau} = 0$ für alle p, damit nach Satz 2.8 $\tau \in W(K)$. Es gibt daher $d_1, d_2, d_3 \in K^\cdot$ mit $\tau \cong \langle\!\langle d_1, d_2, d_3\rangle\!\rangle$ über $K(x)$ und es folgt $\alpha = e_{PK(x)}^3 \tilde{\tau} = e_{PK}^3 \langle\!\langle d_1, d_2, d_3\rangle\!\rangle^\sim = (d_1, d_2, d_3)$. Da τ $\langle 1, -a_1\rangle$ enthält können wir o.E. $d_1 = a_1$ annehmen. Es folgt, daß $-(a_2 x^2 + a_3)$ von $\rho := \langle 1, -a_1\rangle \otimes \langle -d_2, -d_3, d_2 d_3\rangle$ über $K(x)$ dargestellt wird. Ist ρ anisotrop, so folgt aus dem Teilformensatz ([13, Satz 3]), daß $\langle -a_2, a_3\rangle$

in ρ enthalten ist, damit $\varphi \cong \langle 1, -a_1, -a_2, -a_3\rangle$ in $\langle\langle d_1, d_2, d_3\rangle\rangle$ enthalten. Ist ρ isotrop, so ist $\langle\langle d_1, d_2, d_3\rangle\rangle$ Summe von 4 hyperbolischen Ebenen, also auch in diesem Fall φ in $\langle\langle d_1, d_2, d_3\rangle\rangle$ enthalten.

Wir haben damit gezeigt, daß wenn φ vierdimensional ist und die 1 darstellt und $\alpha \in \operatorname{Ker}(i_{K(\varphi)/K}: H^3(K, 2) \to H^3(K(\varphi), 2))$ ist, daß dann $\alpha = (d_1, d_2, d_3)$ ist, so daß φ in $\langle\langle d_1, d_2, d_3\rangle\rangle$ enthalten ist. Insbesondere gilt für eine 2-fache Pfisterform τ

$$\operatorname{Ker}(i_{K(\tau)/K}: H^3(K, 2) \to H^3(K(\tau), 2)) = e_K{}^2\tilde{\tau} \cup H^1(K, 2),$$

was man auch ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.1 sofort aus Satz 5.4 folgern kann. Allgemeiner haben wir den folgenden Satz.

Satz 5.6. *Sei φ eine quadratische Form über K,* $\dim \varphi > 2$. *Ist dann* $\alpha \in \operatorname{Ker}(i_{K(\varphi)/K}: H^3(K, 2) \to H^3(K(\varphi), 2))$, $\alpha \neq 0$, so gibt es $d_0, d_1, d_2, d_3 \in K^\cdot$ *mit* $\alpha = (d_1, d_2, d_3)$, *so daß φ in $d_0\langle\langle d_1, d_2, d_3\rangle\rangle$ enthalten ist. Insbesondere ist* $\dim \varphi \leqslant 8$.

Beweis. Wegen $K(a\varphi) = K(\varphi)$ können wir o.E. annehmen es stelle φ die 1 dar, etwa $\varphi = \langle 1, -a_1, \ldots, -a_n\rangle$, $n > 1$, also $K(\varphi) = K(x_1, \ldots, x_n)(a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2)^{1/2}$. Für $n = 2$ folgt der Satz aus Corollar 5.5 und für $n = 3$ haben wir ihn eben bewiesen. Sei also $n > 3$. Wir schreiben $a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + fx_3^2$ mit $f = a_3 + a_4y_4^2 + \cdots + a_ny_n^2 \in N := K(y_4, \ldots, y_n)$, $x_i = x_3y_i$ für $i > 3$. Aus dem eben bewiesenen folgt dann $i_{N/K}\alpha = (g_1, g_2, g_3)$ mit $g_i \in N^\cdot$, so daß $\langle 1, -a_1, -a_2, -f\rangle$ in $\tau := \langle\langle g_1, g_2, g_3\rangle\rangle$ enthalten ist. Da $\langle 1, -a_1, -a_2\rangle$ in $\langle\langle g_1, g_2, g_3\rangle\rangle$ enthalten ist, ist auch $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$ darin enthalten, damit o.E. $g_1 = a_1, g_2 = a_2$. Mit $N = N'(x)$, $N' = K(y_4, \ldots, y_{n-1})$ $x = y_n$, folgt (wie oben) aus Satz 4.11 $0 = \partial_p i_{N/K}\alpha = \partial_p e_{PN}^3(\tilde{\tau}) = e^3_{(N')_p}(\partial_p\tilde{\tau})$ für alle Primpolynome $p \in N'[x]$, damit $\partial_p\tilde{\tau} = 0$ für alle p, also $\tilde{\tau} \in \tilde{W}(N')$, d.h. wir können $g_3 \in N'^\cdot$ nehmen. Durch Induktion folgt, daß wir $g_3 = c \in K^\cdot$ nehmen können. Wir haben dann $\alpha = (a_1, a_2, c)$ und $\langle 1, -a_1, -a_2, -f\rangle$ in $\langle\langle a_1, a_2, c\rangle\rangle$ über N enthalten. Es folgt, daß $f = a_3 + a_4y_4^2 + \cdots + a_ny_n^2$ von $\rho := \langle -a_1a_2\rangle \oplus c\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$ über $N = K(y_4, \ldots, y_n)$ dargestellt wird. ρ ist dabei anisotrop denn sonst ist $\alpha = 0$. Aus dem Teilformensatz folgt dann, daß $\langle a_3, \ldots, a_n\rangle$ in $\langle -a_1a_2\rangle \oplus c\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$ enthalten ist. Dann ist aber $\varphi \cong \langle 1, -a_1, \ldots, -a_n\rangle$ in $\langle\langle a_1, a_2, c\rangle\rangle$ enthalten.

Man bemerke, daß die Umkehrung auch gilt. Ist nämlich φ in $d_0\langle\langle d_1, \ldots, d_n\rangle\rangle$ enthalten, so ist $\langle\langle d_1, \ldots, d_n\rangle\rangle$ isotrop über $K(\varphi)$ damit $i_{K(\varphi)/K}(d_1, \ldots, d_n) = e^n_{PK(\varphi)} i_{K(\varphi)/K}\langle\langle d_1, \ldots, d_n\rangle\rangle^\sim = 0$.

Aus dem Satz folgt insbesondere

$$\operatorname{Ker}(i_{K(\tau)/K}: H^3(K, 2) \to H^3(K(\tau), 2)) = e_K{}^3\tilde{\tau} \cup H^0(K, 2)$$

für eine 3-fache Pfisterform τ. Damit ist das am Anfang dieses Paragraphen angesprochene Problem beschränkt auf $H^3(K, 2)$ gelöst.

Eine andere Folgerung ist der schon angekündigte

SATZ 5.7. *e_K^3: $M^3K \to H^3(K, 2)$ ist für alle Körper K wohldefiniert.*

Beweis. Folgt sofort aus Satz 4.2 mit Satz 5.6.

e_K^0, e_K^1 und e_K^2 kommen von den Invarianten e, d, und c, die auf dem ganzen Wittring definiert sind. Dabei gilt für jede Körpererweiterung L/K $e \circ i_{L/K} = i_{L/K} \circ e$, $d \circ i_{L/K} = i_{L/K} \circ d$ und $c \circ i_{L/K} = i_{L/K} \circ c$. Leider gibt es keine solche Invariante b: $W(K) \to H^3(K, 2)$. Angenommen es gäbe so ein b. Wir betrachten dann die Laurentreihenkörper $L(z_1, \ldots, z_n) := \mathbb{C}((z_1)) \cdots ((z_n))$. Es gilt dann $W(L(z_1, \ldots, z_n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ mit $\zeta_i^2 = 1$, wobei $\zeta_i = \langle z_i \rangle^\sim$ ist (folgt durch Induktion aus einem Satz von Springer, [10, 7.1]), und

$$H^*(L(z_1, \ldots, z_n), 2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\chi_1, \ldots, \chi_n]$$

mit $\chi_i \cup \chi_i = 0$, wobei $\chi_i = (z_i)$ ist (folgt durch Induktion aus den Betrachtungen vor Satz 4.12). Insbesondere ist $H^3(L(z_1, z_2), 2) = 0$, also muß $b(\langle\langle z_1, z_2 \rangle\rangle^\sim) = 0$ sein. Wir betrachten dann

$$\varphi := \langle\langle z_1, z_2 \rangle\rangle^\sim + \langle\langle z_3, z_4 \rangle\rangle^\sim \in W(L(z_1, \ldots, z_4)).$$

Über $L(z_1, \ldots, z_4)(\langle\langle z_3, z_4 \rangle\rangle)$ ist $\varphi = \langle\langle z_1, z_2 \rangle\rangle^\sim$, damit $b(\varphi) = 0$ über $L(z_1, \ldots, z_4)(\langle\langle z_3, z_4 \rangle\rangle)$, also nach Satz 5.6 $b(\varphi) = (z_1, z_2, u)$ über $L(z_1, \ldots, z_4)$ mit $u \in L(z_1, \ldots, z_4)^\cdot$. Analog $b(\varphi) = (z_3, z_4, v)$ über $L(z_1, \ldots, z_4)$. Dann folgt aber $b(\varphi) = 0$. Ist jetzt

$$\psi := \langle\langle z_1, z_2 \rangle\rangle^\sim + \langle\langle z_3, z_4 \rangle\rangle^\sim + \langle\langle z_5, z_6 \rangle\rangle^\sim \in W(L(z_1, \ldots, z_6)),$$

so folgt daraus genauso $b(\psi) = 0$ über $L(z_1, \ldots, z_6)$. Wir betrachten jetzt den Körper

$$K := L(z_1, \ldots, z_6)((z_1 z_2 z_3 z_4)^{1/2}, (z_1 z_3 z_5)^{1/2}, (z_2 z_3 z_6)^{1/2}).$$

Wegen

$$L(z_1, \ldots, z_6) = L(z_1, z_2, z_3, z_1 z_2 z_3 z_4, z_1 z_3 z_5, z_2 z_3 z_6)$$

ist $K = L(z_1, z_2, z_3, w_4, w_5, w_6)$ mit $w_4 = (z_1 z_2 z_3 z_4)^{1/2}$, $w_5 = (z_1 z_3 z_5)^{1/2}$ und $w_6 = (z_2 z_3 z_6)^{1/2}$ damit $(z_1) \cup (z_2) \cup (z_3) \neq 0$ in $H^3(K, 2)$. Nun ist aber über K

$$\psi = \langle\langle z_1, z_2 \rangle\rangle^\sim + \langle\langle z_3, z_1 z_2 z_3 \rangle\rangle^\sim + \langle\langle z_1 z_3, z_2 z_3 \rangle\rangle^\sim = \langle\langle z_1, z_2, z_3 \rangle\rangle^\sim,$$

damit $b(\psi) = e_K^3(\psi) = (z_1, z_2, z_3) \neq 0$ über K. Widerspruch! Es gibt also nicht mal eine Invariante b: $M^2K \to H^3(K, 2)$, die mit den $i_{L/K}$ kommutiert und das e_K^3 liefert.

Literatur

1. J. K. Arason und A. Pfister, Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Wittring, *Invent. Math.* **12** (1971), 173–176.
2. O. Endler, "Valuation Theory," Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
3. R. Elman und T. Y. Lam, Pfister forms and K-theory of fields, *J. Alg.* **23** (1972), 181–213.
4. R. Elman und T. Y. Lam, On the quaternion symbol homomorphism $g_F:K_2F \rightarrow B(F)$, Erscheint demnächst in Springer Lecture Notes.
5. W. D. Geyer, G. Harder, M. Knebusch und W. Scharlau, Ein Residuensatz für symmetrische Bilinearformen, *Invent. Math.* **11** (1970), 319–328.
6. G. Hochschild und J. P. Serre, Cohomology of group extensions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 110–134.
7. M. Knebusch, Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. 1969/70, 3. Abh.
8. M. Knebusch, Runde Formen über semilokalen Ringen, *Math. Ann.* **193** (1971), 21–24.
9. S. Lang, "Rapport sur la Cohomologie des Groupes," Benjamin, New York-Amsterdam, 1966.
10. F. Lorenz, Quadratische Formen über Körpern, "Lecture Notes in Math. 130," Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
11. J. Milnor, Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1970), 318–344.
12. J. Milnor und D. Husemoller, "Symmetric Bilinear Forms," Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
13. A. Pfister, Multiplikative quadratische Formen, *Arch. Math.* **16** (1965), 363–370.
14. A. Pfister, Quadratische Formen in beliebigen Körpern, *Invent. Math.* **1** (1966), 116–132.
15. A. Pfister, Quadratic forms, Cambridge lecture notes, 1967.
16. W. Scharlau, Zur Pfisterschen Theorie der quadratischen Formen, *Invent. Math.* **6** (1969), 327–328.
17. W. Scharlau, Induction theorems and the structure of the Witt group, *Invent. Math.* **11** (1970), 37–44.
18. W. Scharlau, Quadratic reciprocity laws, *J. Number Theory* **4** (1972), 78–97.
19. W. Scharlau, Quadratic forms, "Queen's Papers on Pure and Applied Mathematics 22," Kingston, Ontario: Queen's University, 1969.
20. W. Scharlau, Über die Brauer-Gruppe eines algebraischen Funktionenkörpers in einer Variablen, *J. Reine Angew. Math.* **239–240** (1969), 1–6.
21. J. P. Serre, Cohomologie galoisienne, "Lecture Notes in Math. 5," Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
22. T. A. Springer, Sur les formes quadratiques d'indice zéro. *C.R. Acad. Sci.* **234** (1952), 1517–1519.
23. C. T. C. Wall, Graded Brauer groups, *J. Reine Angew. Math.* **213** (1963/64), 187–199.
24. E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *J. Reine Angew. Math.* **176** (1937), 31–44.