Journal of Number Theory **76**, 66–93 (1999)
Article ID jnth.1998.2355, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Sur la proximité des diviseurs des entiers

A. Raouj

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Semlalia, Université Cadi Ayyad, B.P. S15, Marrakech, Marocco

et

A. Stef

Institut Élie Cartan, Faculté des Sciences, Université Henri Poincaré-Nancy I, B.P. 239, Vandoeuvre Cedex 54506, France

Communicated by A. Hildebrand

À LA MÉMOIRE DU PROFESSEUR PAUL ERDŐS

Denote, for $r \in \mathbf{N}^*$ and $\lambda \geqslant 0$, by $\mathscr{E}(r, \lambda)$ the statement that, for almost all r-tuples $(n_1, n_2, ..., n_r) \in \mathbf{N}^r$, there exist divisors $d_j \mid n_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ such that

$$0 < \log(d_j/d_1) \leqslant (\log n_1)^{-\lambda} \qquad (2 \leqslant j \leqslant r).$$

In the case $r=2$, the first author proved that, if $\lambda_2^* = \log 4 - 1$, $\mathscr{E}(2, \lambda)$ holds when $\lambda < \lambda_2^*$, but fails when $\lambda > \lambda_2^*$. In this paper, we study the case when $r \geqslant 3$. We show that there exists a critical point $\lambda_3^* = -1 + (3/2) \log 2$ such that $\mathscr{E}(3, \lambda)$ holds when $\lambda < \lambda_3^*$, but fails when $\lambda > \lambda_3^*$. We also show that for $r \geqslant 4$, $\mathscr{E}(r, \lambda)$ never holds.
© 1999 Academic Press

1.

On rappelle que l'ensemble des multiples $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ d'une suite $\mathscr{A} \subset \mathbb{N}$ est défini par la contrainte multiplicative suivante: $\mathscr{M}(\mathscr{A}) := \mathscr{A} \cdot \mathbb{N} = \{an\colon a \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}\}$. On définit sous réserve d'existence la densité naturelle d'une suite $\mathscr{S} \subset \mathbb{N}$ par

$$\mathbf{d}\mathscr{S} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} |\mathscr{S} \cap [0, x]|.$$

Nous convenons de désigner par pp (presque partout) une relation valable sur une partie de densité unité. Notre motivation s'insère dans l'évaluation

0022-314X/99 $30.00

de la densité de certains ensembles de multiples. Commençons par remarquer que l'ensemble des multiples d'une suite finie $\mathscr{A} \subset \mathbb{N}$ peut s'écrire comme une réunion finie de certaines classes de congruence modulo un entier s, ce qui entraîne en particulier l'existence de sa densité naturelle. Le principe d'inclusion-exclusion permet de donner une expression de la densité évoquée, mais en pratique une telle expression est difficile à évaluer. Lorsque $\mathscr{A}$ est infini, l'existence de la densité de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ n'est pas en général assurée. Dans ce contexte, l'étude de l'ensemble des multiples de la suite $\mathscr{A}_T =]T, 2T] \cap \mathbb{N}$ $(T > 0)$ a suscité de l'intérêt. En 1934, Besicovitch [B34] a montré que

$$\liminf_{T \to +\infty} \mathbf{d}\mathscr{M}(\mathscr{A}_T) = 0,$$

ce qui lui a permis de construire une suite $\mathscr{A}$ dont l'ensemble de multiples n'admet pas de densité naturelle, réfutant ainsi une conjecture de l'époque. Pour des renseignements complémentaires, nous invitons le lecteur à consulter les livres [HR66], [HT88], et [H96].

Dans le même cadre, Raouj s'est intéressé dans [R95a] et [R95b] à l'étude de l'ensemble des multiples $\mathscr{B}(n)$ de la suite $\mathscr{D}(n) := \bigcup_{d \mid n} \mathscr{A}_d$. Le point de départ de sa motivation était la conjecture d'Erdős selon laquelle

$$\mathbf{d}\mathscr{B}(n) = 1 + o(1) \qquad \text{pp} \tag{1.1}$$

et que Raouj a établie et précisée en prouvant un résultat général, présenté ci-dessous, relatif à l'ensemble des multiples $\mathscr{B}_\lambda(n)$ de la suite

$$\mathscr{D}_\lambda(n) := \bigcup_{d \mid n} \,]d, (1 + (\log n)^{-\lambda})\, d] \cap \mathbb{N},$$

où n est un entier strictement supérieur à 1 et λ un nombre réel positif ou nul. Nous notons $Q(\alpha) := \alpha \log \alpha - \alpha + 1$ $(\alpha > 0)$.

THÉORÈME A (Raouj [R95a]). *On a pour* $0 \leqslant \lambda < \lambda^* := \log 4 - 1$,

$$1 - \mathrm{e}^{-c_\lambda \sqrt{\log 2n}} \leqslant \mathbf{d}\mathscr{B}(n) \leqslant 1 - (\log n)^{-Q(\beta) + o(1)} \qquad \text{pp},$$

où $\beta := \{(1 + \lambda)/\log 2\} - 1$ *et* c_λ *est une constante positive, dépendant au plus de* λ.

La minoration précédente de $\mathbf{d}\mathscr{B}_\lambda(n)$ est une conséquence de l'estimation suivante pour le nombre des entiers exceptionnels.

Théorème B (Raouj [R95a]). *Pour tout* $0 \leqslant \lambda < \log 4 - 1$, *il existe* $c_\lambda > 0$ *et* $x_0(\lambda) > 1$ *tel que, pour* $x_2 \geqslant x_1 \geqslant x_0(\lambda)$, *on ait*

$$\exists d_1 \mid n_1, \qquad \exists d_2 \mid n_2 \qquad 0 < \log(d_2/d_1) \leqslant (\log n_1)^{-\lambda}$$

pour tous les couples $(n_1, n_2) \in [1, x_1] \times [1, x_2]$ *sauf au plus*

$$x_1 x_2 \, \mathrm{e}^{-c_\lambda \sqrt{\log \log x_1}}.$$

Dans le cas $\lambda > \lambda^*$, Raouj obtient le résultat suivant.

Théorème C (Raouj [R95b]). *On a, pour tout* $\lambda > \lambda^* := \log 4 - 1$,

$$\mathbf{d}\mathscr{B}_\lambda(n) = (\log n)^{-F(\lambda) + o(1)} \qquad \text{pp},$$

où l'on a posé

$$F(\lambda) := \begin{cases} Q(\beta) & \textit{si} \quad \lambda \leqslant \lambda^{**} := \log 8 - 1, \textit{ où } \beta := \{(1+\lambda)/\log 2\} - 1, \\ \lambda - \log 2 & \textit{si} \quad \lambda > \lambda^{**}. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire D. *On a pour* $\lambda > \log 4 - 1$, $x_2 \geqslant 3$, $x_1 \geqslant 3$,

$$\min_{\substack{d_1 \mid n_1,\, d_2 \mid n_2, \\ d_1 < d_2}} \log(d_2/d_1) > (\log n_1)^{-\lambda}, \tag{1.2}$$

pour tous les couples $(n_1, n_2) \in [1, x_1] \times [1, x_2]$ *sauf au plus* $o_\lambda(x_1 x_2)$.

Définissons maintenant, sous réserve d'existence, la densité naturelle d'une suite $\mathscr{S} \subset \mathbb{N}^r$ $(r \geqslant 1)$ par

$$\mathbf{d_r}\mathscr{S} = \lim_{\substack{x_i \to +\infty \\ i = 1, ..., r}} \left| \mathscr{S} \cap \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} [0, x_i] \right| \Big/ \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} x_i.$$

Comme dans $\mathbb{N}$, nous convenons de désigner, dans $\mathbb{N}^r$, par pp (presque partout) une relation valable sur une partie de densité unité.

Le but du présent travail est d'étudier dans $\mathbb{N}^r$, $r \geqslant 3$, une généralisation du Théorème B. Il s'agit donc de savoir si l'ensemble des r-uplets $(n_1, n_2, ..., n_r)$ vérifiant

$$\exists d_1 \mid n_1, \qquad \exists d_2 \mid n_2, ..., \qquad \exists d_r \mid n_r, \qquad \max_{j \neq i} \left| \frac{d_j}{d_i} - 1 \right| < \varepsilon \tag{1.3}$$

est de densité 1 pour chaque $\varepsilon > 0$. Nous allons voir que cela n'est vrai que pour $r = 3$. Commençons par donner un argument heuristique analogue à celui qui a constitué la motivation initiale d'Erdős concernant (1.1). On pose $\omega(n) := \sum_{p \mid n} 1$. Désignons par $\omega(n_j, n_1)$ le nombre des facteurs premiers de n_j ne dépassant pas n_1. Pour m, n entiers on pose

$$m(n) := \prod_{p \mid m,\, p \nmid n} p.$$

Considérons un r-uplet d'entiers $(n_1, n_2, ..., n_r)$. Le nombre des $(r-1)$-uplets de la forme $(d_2/d_1, ..., d_r/d_1)$ avec $d_j \mid n_j$, $0 \leqslant d_j \leqslant 2n_1$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, est au moins égal à

$$2^{\omega(n_1)} \prod_{i=2}^{r} 2^{\omega(m_i(n_1),\, n_1)}.$$

En utilisant, par exemple, le Lemme 4.6 *infra*, on peut montrer que la dernière quantité est minorée pp par

$$(\log n_1)^{r \log 2 + o(1)}.$$

En supposant une répartition uniforme des quantités $|\log(d_j/d_1)|$ on s'attend donc à ce qu'un pavé de la forme $\prod_{j=2}^{r} [0, (\log n_1)^{-\lambda_j}] \subset [0, 1]^{r-1}$ contienne une quote-part de

$$(\log n_1)^{r \log 2 + o(1)} (\log n_1)^{-\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j} (\log n)^{-r+1}$$

valeurs distinctes $|\log(d_j/d_1)|$ $(2 \leqslant j \leqslant r)$. Sous la condition

$$(1 - \log 2)(r-1) + \sum_{j=2}^{r} \lambda_j < \log 2,$$

cette quote-part est > 1.

Dans le cas où tous les λ_j sont tous égaux, avec λ pour valeur commune, la condition précédente signifie

$$\lambda < \lambda_r^* := -1 + \frac{r}{r-1} \log 2.$$

Cela permet d'expliquer que (1.3) est vérifié presque partout uniquement dans le cas où $r \in \{2, 3\}$, puisque $\lambda_2^* = \log 4 - 1 > \lambda_3^* = (3/2) \log 2 - 1 > 0$, alors que $\lambda_r^* < 0$ pour $r \geqslant 4$.

Plus précisément, désignons, pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \geqslant 0$, par $\mathscr{E}(r, \lambda)$ l'assertion selon laquelle la relation

$$\exists d_1 \mid n_1, \qquad \exists d_j \mid n_j, \qquad 2 \leqslant j \leqslant r \colon 0 < \log(d_j/d_1) \leqslant (\log n_1)^{-\lambda}$$

est satisfaite pp dans $\mathbb{N}^r$. Le raisonnement heuristique décrit plus haut nous conduit à l'hypothèse que $\mathscr{E}(r, \lambda)$ a lieu si, et seulement si, $r = 2$ ou $r = 3$ et

$\lambda < \lambda_r^*$. Le Théorème B confirme l'hypothèse dans le cas $r=2$, $0 \leqslant \lambda < \lambda_2^*$ et le Corollaire C dans le cas $r=2$, $\lambda > \lambda_2^*$. Nous complétons cette confirmation aux Théorèmes 1, 2, 3 ci-dessous qui correspondent respectivement aux cas ($r=3$, $0 \leqslant \lambda < \lambda_3^*$), ($r=3$, $\lambda > \lambda_3^*$) et ($r \geqslant 4$, $\lambda \geqslant 0$).

Posons maintenant, pour $n_1, n_2, ..., n_r \in \mathbb{N}$, $\psi \in \,]0, \infty[$, $\zeta_2, ..., \zeta_r \in \mathbb{R}$,

$$E(n_1, n_2, ..., n_r; \zeta_2, ..., \zeta_r : \psi) := \min_{\substack{d_j \mid n_j,\, d_j > \psi \\ j=1, ..., r \\ \mu(d_1 \cdots d_r)^2 = 1}} \max_{2 \leqslant j \leqslant r} \left| \log\left(\frac{d_j}{d_1}\right) - \zeta \right|. \tag{1.4}$$

Théorème 1. *Soit $\varrho > 0$. Il existe $c > 0$ tel que, pour $3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, $\xi \in [1, \sqrt{\log_2 x_1}\,]$, $\max\{|\zeta_2|, |\zeta_3|, \log \psi\} \leqslant (\log x_1) \exp(-\varrho\xi\sqrt{\log_2 x_1})$, on a*

$$E(n_1, n_2, n_3; \zeta_2, \zeta_3; \psi) \leqslant (\log x_1)^{1-(3/2)\log 2}\, e^{\xi\sqrt{\log_2 x_1}}, \tag{1.5}$$

pour tous les triplets d'entiers (n_1, n_2, n_3), $n_1 \leqslant x_1$, $n_2 \leqslant x_2$, $n_3 \leqslant x_3$, sauf au plus $O_\varrho(x_1 x_2 x_3\{e^{-c\xi^{1/2}(\log_2 x_1)^{1/4}} + e^{-\xi^2/66}\})$.

Nous appliquons ce résultat pour

$$\zeta_2 = (\log x)^{1-(3/2)\log 2}\, e^{\xi\sqrt{\log_2 x_1}}, \qquad \zeta_3 = 3\zeta_2.$$

Corollaire 1. *Soit $\varrho > 0$. Il existe $c > 0$ tel que pour $3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, $\xi \in [1, \sqrt{\log_2 x_1}\,]$, $\psi > 0$, $\log \psi \leqslant (\log x_1) \exp(-\varrho\xi\sqrt{\log_2 x_1})$, il existe un triplet (d_1, d_2, d_3), $d_1 \mid n_1$, $d_2 \mid n_2$, $d_3 \mid n_3$ vérifiant $\mu(d_1 d_2 d_3)^2 = 1$ et*

$$\psi < d_1 < d_2 < d_3 < d_1(1 + (\log x_1)^{1-(3/2)\log 2}\, e^{\xi\sqrt{\log_2 x_1}}),$$

pour tous les triplets d'entiers (n_1, n_2, n_3), $n_1 \leqslant x_1$, $n_2 \leqslant x_2$, $n_3 \leqslant x_3$, sauf au plus

$$O_\varrho(x_1 x_2 x_3\{e^{-c\xi^{1/2}(\log_2 x_1)^{1/4}} + e^{-\xi^2/66}\}).$$

Théorème 2. *On a pour $3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, $\xi \in [1, \sqrt{\log_2 x_1}\,]$,*

$$E(n_1, n_2, n_3; 0, 0; 0) \geqslant (\log x_1)^{1-(3/2)\log 2}\, e^{-\xi\sqrt{\log_2 x_1}}, \tag{1.6}$$

pour tous les triplets d'entiers (n_1, n_2, n_3), $n_1 \leqslant x_1$, $n_2 \leqslant x_2$, $n_3 \leqslant x_3$, sauf au plus $O(x_1 x_2 x_3 (\log_2 x_1)\, e^{-\xi^2/109})$.

Le Théorème 2 est encore valable si on supprime la condition $\mu(d_1 d_2 \cdots d_r)^2 = 1$ dans la définition (1.4) de E. C'est ce que nous établissons d'ailleurs dans la démonstration du Théorème 2.

Le résultat suivant est une conséquence des Théorèmes 1 et 2. Il est analogue, par son expression, au *Theorem* 54 de [HT88], concernant la proximité des diviseurs d'un entier.

COROLLAIRE 2. *Soit $\xi(n) \to_{n\to\infty} +\infty$. On a, posant $n = \min(n_1, n_2, n_3)$,*

$$E(n_1, n_2, n_3; 0, 0; 0) = (\log n)^{1-(3/2)\log 2}\, \mathrm{e}^{O(\xi(n)\sqrt{(\log_2 n)\log_3 n})} \qquad \text{pp.}$$

On remarque que, par des méthodes analogues à celles employées pour les démonstrations des Théorèmes 1 et 2, on peut préciser le cas $r = 2$, $\lambda = \lambda_2^* + o(1)$, obtenant ainsi, pour $\xi(n) \to_{n\to\infty} +\infty$, $n = \min(n_1, n_2)$,

$$E(n_1, n_2; 0, 0; 0) = (\log n)^{1-\log 4}\, \mathrm{e}^{O(\xi(n)\sqrt{(\log_2 n)\log_3 n})} \qquad \text{pp.}$$

Le résultat suivant montre que le Corollaire 1 ne peut être étendu en dimension $\geqslant 4$.

Soit $r \geqslant 4$, nous notons y_r, l'unique racine dans $]\frac{1}{2}, 1[$ de l'équation $Q(y_r)(r-1) = y_r \log 2$.

THÉORÈME 3. *Il existe $C > 0$ tel que, pour $r \geqslant 4$, $3 \leqslant \psi \leqslant x_1$, $\psi x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r$, on ait*

$$E(n_1, n_2, ..., n_r; 0, 0, ..., 0; \psi) > 1 \tag{1.7}$$

pour tous les r-uplets d'entiers $(n_1, ..., n_r)$, $n_j \leqslant x_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$, sauf au plus $O(C^r x_1 x_2 \cdots x_r (\log \psi)^{-Q(2y_r)})$.

Dans le cas où $\psi = \psi(x_1)$, il est nécessaire que $\psi(x_1) \to +\infty$, lorsque $x_1 \to \infty$, pour que le nombre des r-uplets $(n_1, ..., n_r) \in \prod_{j=1}^r [1, x_j]$ ne vérifiant pas (1.7) soit $o(x_1 x_2 \cdots x_r)$. En effet, par le théorème des nombres premiers, pour tout $\psi > \psi_0(r)$, $\psi_0(r)$, assez grand, il existe un r-uplet $(p_1, p_2, ..., p_r)$ de nombres premiers vérifiant $\psi < p_1 < p_2 < \cdots < p_r < 2\psi$. Dès lors, l'ensemble $\mathscr{M}(p_1, p_2, ..., p_r) := \mathbb{N}p_1 \times \cdots \times \mathbb{N}p_r$ est constitué de r-uplets $(n_1, n_2, ..., n_r)$ vérifiant tous $E(n_1, n_2, ..., n_r; 0, ..., 0; \psi) \leqslant \log 2 \leqslant 1$. Et l'on constate aisément que $\mathbf{d_r}\mathscr{M}(p_1, p_2, ..., p_r) = 1/(p_1, p_2, ..., p_r) > (2\psi)^{-r}$.

Cependant, on remarque que par une méthode analogue à celle utilisée pour la démonstration du Théorème 2, on peut montrer que l'on a pour $\varepsilon > 0$ et tout r-uplet $(n_1, n_2, ..., n_r)$,

$$E(n_1, n_2, ..., n_r; 0, 0, ..., 0; 0) \geqslant \varepsilon,$$

sauf pour un ensemble de densité supérieure $f(\varepsilon)$ avec $f(\varepsilon) \to_{\varepsilon\to 0} 0$.

2. NOTATIONS ET CONVENTIONS POUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Les lettres n, m, j, k, r, s, u, v, avec ou sans indice, désignent des entiers positifs alors que les lettres x, y, z, w, T, γ, ϑ, η désignent des nombres réels. Les lettres p, q, avec ou sans indice, désignent exclusivement des nombres premiers. Les lettres $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$ désignent des triplets d'entiers et nous noterons $(n_1, n_2, n_3) := \mathbf{n}$, $(u_1, u_2, u_3) := \mathbf{u}$.

La fonction d'Euler est notée $\varphi(n)$, celle de Möbius $\mu(n)$. Nous désignons, pour chaque entier $n > 1$, par $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier de n, et nous convenons que $P^+(1) = 1$, $P^-(1) = \infty$. La partie entière d'un nombre réel x est désignée par $[x]$. Nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

La lettre c, avec ou sans indice, désigne une constante strictement positive dépendant au plus de ϱ. Les constantes impliquées dans les majorations $\ll$ et O dépendront au plus de ϱ.

Par convention tout produit portant sur l'ensemble vide vaut 1.

Soient m, k des nombres entiers supérieurs à 1, on pose

$$m_k := \prod_{\substack{p \mid m \\ \log p \leqslant \mathrm{e}^k}} p.$$

Pour $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, on pose $\mathbf{n}_k^* = (n_{1,k}, n_{2,k}, n_{3,k})$ où

$$n_{j,k} := \prod_{\substack{p \mid n_j,\, \log p \leqslant \mathrm{e}^k \\ p \nmid n_1 \cdots n_{j-1}}} p \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3).$$

Ainsi $\mathbf{n}_k^*$ est un triplet de nombres entiers sans facteur carré, premiers entre eux deux à deux, sans facteur premier supérieur à $\exp \mathrm{e}^k$. Nous définissons, pour $k \geqslant 0$, $y > 0$,

$$p_k(n, y) := \min\{p \colon p \mid n,\ p > \exp(y\, \mathrm{e}^k)\},$$

avec la convention $\min \varnothing = +\infty$.

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\varrho < 10^{-3}$ et l'on pose

$$\alpha := 1 - \varrho > 0, \qquad \beta := \alpha \log 2. \tag{2.1}$$

On remarque que $2\beta - 1 > 3\beta - 2 > 1 > \beta$. Nous introduisons de plus les nombres entiers

$$h := [\xi^{1/2}(\log_2 x_1)^{1/4}], \qquad \ell := \left[\frac{\varrho^2}{2}h\right],$$
$$\kappa := [\log_2 x_1 - \varrho\xi\sqrt{\log_2 x_1}], \qquad \kappa^* := L + h\ell, \tag{2.2}$$

et l'ensemble

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}(x_1) := \{\kappa + jh : j = 1, ..., \ell\}. \tag{2.3}$$

On vérifie immédiatement que

$$\max\{|\zeta_2|, |\zeta_3|, \log\psi\} \leqslant e^{\kappa}. \tag{2.4}$$

On pose

$$\eta = \eta(x_1, \xi) := (\log x_1)^{1-(3/2)\log 2}\, e^{\xi\sqrt{\log_2 x_1}}.$$

3. SCHÉMA DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

L'argumentation, analogue à celle de [R95a], s'inspire de la technique de Maier et Tenenbaum [MT84], que nous avons cherché à affiner. Le principe de base consiste à mettre en place un procédé itératif pour majorer la probabilité conditionnelle que $E(n_{1,k+h}, n_{2,k+h}, n_{3,k+h}; \zeta_2, \zeta_3; \psi) > \eta$ sachant que $E(n_{1,k}, n_{2,k}, n_{3,k}; \zeta_2, \zeta_3; \psi) > \eta$, lorsque, d'une part, l'indice k est astreint à parcourir une suite convenable $\mathscr{K}^* = \mathscr{K}^*(\mathbf{n}) \subset [\frac{1}{2}\log_2 n_1, \log_2 n_1]$ vérifiant $\min \mathscr{K}^* > \log_2 \psi$, contenant autant d'éléments que possible, et, d'autre part, le paramètre entier h est convenablement choisi tel que $k + h \in \mathscr{K}^*(\mathbf{n})$.

Une étape cruciale dans la réalisation de ce programme consiste à estimer la mesure de Lebesgue $\lambda(\mathbf{u}; \eta)$ de l'ensemble d'accroissement

$$\mathscr{L}(\mathbf{n}; \eta) := \bigcup_{\substack{d_1 \mid u_1,\, d_2 \mid u_2,\, d_3 \mid u_3 \\ \mu(d_1 d_2 d_3)^2 = 1}} (\log(d_1/d_2) + [-\eta, \eta]) \times (\log(d_1/d_3) + [-\eta, \eta]),$$

pour $u_1 = n_{1,k}$, $u_2 = n_{2,k}$, $u_3 = n_{3,k}$. En effet, une minoration adéquate, pour presque tous les triplets d'entiers $\mathbf{n}$, de la mesure $\lambda(\mathbf{n}_k^*; \eta)$ lorsque $k \in \mathscr{K}^*(\mathbf{n})$, permet d'exhiber, avec une probabilité assez grande, un triplet de nombres premiers (q_1, q_2, q_3) tel que $q_1 \mid (n_{1,k+h}/n_{1,k})$, $q_2 \mid (n_{2,k+h}/n_{2,k})$, $q_3 \mid (n_{2,k+h}/n_{3,k})$ et

$$(\log q_2 - \log q_1 - \zeta_2, \log q_3 - \log q_1 - \zeta_3) \in \mathscr{L}(\mathbf{n}_k^*, \eta),$$

ce qui implique $E(n_{1,k}q_1, n_{2,k}q_2, n_{3,k}q_3; \zeta_2, \zeta_3; \psi) \leqslant \eta$.

4. LEMMES GÉNÉRAUX CONCERNANT LA RÉPARTITION DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES, DES FACTEURS PREMIERS ET DES DIVISEURS

Nous commençons par énoncer un lemme, version affaiblie d'un résultat de Halberstam et Richert [HRi79], relatif aux moyennes de fonctions multiplicatives.

LEMME 4.1 ([T95])[1]. *Soient $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \in [0, 2[$, et f une fonction multiplicative positive ou nulle telle que, pour tout nombre premier p et tout entier $j > 0$, on ait $f(p^j) \leqslant \lambda_1 \lambda_2^{j-1}$. Alors, pour tout réel $x \geqslant 2$, on a*

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \leqslant 4\left(1 + 9\lambda + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(2-\lambda_2)^2}\right) x \prod_{p \leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{j \geqslant 0} \frac{f(p^j)}{p^j}.$$

Nous désignons par $\Phi(x, z)$ le nombre des entiers $n \leqslant x$ vérifiant $P^-(n) > z$.

LEMME 4.2 ([HT88])[2]. *On a pour $x \geqslant 2z \geqslant 4$,*

$$\Phi(x, z) \asymp \frac{x}{\log z}.$$

LEMME 4.3 ([T95])[3]. *On a pour $n \geqslant 3$,*

$$n/\varphi(n) \ll \log_2 n.$$

Les deux énoncés qui suivent concernent la répartition des facteurs premiers et des diviseurs. Nous omettons les démonstrations, que le lecteur pourra trouver dans [R95a].[4]

LEMME 4.4. *Soient k et x tels que $1 \leqslant k \leqslant \log_2 x$. On a*

$$\omega(m_k) < 2k$$

pour tous les entiers $m \leqslant x$ sauf au plus $O(x\mathrm{e}^{-Q(2)k})$.

[1] Voir chapitre III.5.
[2] Voir p. 4 de ce travail.
[3] Voir le Théorème I.5.4.
[4] Voir aussi les Lemmes 51.1 et 51.2 de [HT88].

LEMME 4.5. *Soient* $1 \leqslant h < k \leqslant \log_2 x$, $u \geqslant 1$. *La minoration*

$$\min_{h \leqslant s \leqslant k} \frac{\omega(m_k(u)) - \omega(m_{k-s}(u))}{s} > \alpha$$

est satisfaite pour tous les entiers $m \leqslant x$ *sauf au plus*

$$O(xu_k \varphi(u_k)^{-1}\ Q(\alpha)^{-1}\ \mathrm{e}^{-hQ(\alpha)}).$$

LEMME 4.6. *Soit* $x \geqslant 3$. *Soit* u *un entier,* $3 \leqslant u \leqslant x^2$. *Soit* $\xi \in [1, \sqrt{\log_2 x}]$. *On a*

$$\min_{k \in \mathscr{K}} \frac{\omega(m_k(u)) - k}{\sqrt{k}} \geqslant -\frac{\xi}{3},$$

pour tous les entiers $m \leqslant x$ *sauf au plus* $o(x\mathrm{e}^{-\xi^2/33})$.

Démonstration. On rappelle que $\kappa = \min \mathscr{K} = [\log_2 x_1 - \varrho\xi \sqrt{\log_2 x_1}]$. On montre d'abord que pour presque tout entier m, on a

$$\omega(m_\kappa(u)) \geqslant \kappa - \frac{1}{4}\xi\sqrt{\kappa}. \tag{4.1}$$

Soit $y \in\,]0, 1]$. D'après le Lemme 4.1, le nombre des entiers inférieurs à x ne satisfaisant pas (4.1) est majoré par

$$\begin{aligned}
&\sum_{m \leqslant x} y^{\omega(m_\kappa(u)) - \kappa + (1/4)\xi\sqrt{\kappa}} \\
&\qquad \ll x\mathrm{e}^{(-\kappa + (1/4)\xi\sqrt{\kappa})\log y} \prod_{\substack{p \leqslant \exp(\mathrm{e}^\kappa) \\ p \nmid u}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{y}{p-1}\right) \\
&\qquad \ll x \prod_{p \mid u} \left(1 - \frac{1-y}{p}\right)^{-1} \mathrm{e}^{-\kappa \log y + (1/4)\sqrt{\kappa}\log y + (y-1)\kappa}.
\end{aligned}$$

Pour le choix optimal $y_\kappa = 1 - (\xi/4\sqrt{\kappa})$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{m \leqslant x} y_\kappa^{\omega(m_\kappa(u)) - \kappa + (1/4)\xi\sqrt{\kappa}} &\ll x \left(\frac{u}{\varphi(u)}\right)^{\xi/\sqrt{\log_2 x}} \mathrm{e}^{-\kappa Q(y)} \\
&\ll x\mathrm{e}^{\xi(\log_3 x)/\sqrt{\log_2 x}}\ \mathrm{e}^{-\xi^2/32} \ll x\mathrm{e}^{-\xi^2/33},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 4.3. Pour tout m vérifiant (4.1) et tout $k \in \mathscr{K}$, on a alors

$$\omega(m_k(u)) - k + \tfrac{1}{3}\xi\sqrt{k} \geqslant \omega(m_\kappa(u)) - k + \tfrac{1}{3}\xi\sqrt{k}$$
$$\geqslant \kappa - k + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4})\,\xi\sqrt{\kappa} \geqslant 0,$$

ce qui fournit bien l'estimation annoncée.

Le prochain lemme fournit une minoration du nombre de facteurs premiers d'un entier dans un petit intervalle, mais établit une propriété statistique de cette quantité. Il eut être établi de la même manière que le Lemme 5.3 de [R95a]. On rappelle que $\kappa^* = \max \mathscr{K}$.

Lemme 4.7. *Il existe une constante c_0 tel que pour $T \geqslant c_0$, on a*

$$|\{k \in \mathscr{K} : \min_{T \leqslant s \leqslant h} \omega(m_k(u)/m_{k-s}(u))/s > \alpha\}| \geqslant \tfrac{999}{1000}\,|\mathscr{K}| = \tfrac{999}{1000}\,\ell$$

pour tous les entiers $m \leqslant x$ sauf au plus $O(x(\log_2 u_{\kappa^*})\,\mathrm{e}^{-|\mathscr{K}|})$.

Les deux résultats suivants peuvent être établis de la même manière que les Lemmes 5.4 et 5.5 de [R95a]. Nous omettons les détails.

Lemme 4.8. *Il existe une constante c_1 telle qu'on a*

$$|\{k \in \mathscr{K} : \log m_k \leqslant c_1 \mathrm{e}^k\}| \geqslant \tfrac{999}{1000}\,|\mathscr{K}| = \tfrac{999}{1000}\ell$$

pour tous les entiers $m \leqslant x$ sauf au plus $O(x\mathrm{e}^{-|\mathscr{K}|})$.

Lemme 4.9. *Soit y un réel positif. Il existe une constante $c_2 := c_2(y)$ telle qu'on a*

$$|\{k \in \mathscr{K} : p_k(n, y) \leqslant \exp(c_2 \mathrm{e}^k)\}| \geqslant \tfrac{999}{1000}\,|\mathscr{K}| = \tfrac{999}{1000}\ell$$

pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O_y(x\mathrm{e}^{-|\mathscr{K}|})$.

5. LEMMES CONCERNANT LES TRANSFORMÉES DE FOURIER DE FONCTIONS DE RÉPARTITION LIÉES AUX DIVISEURS

Posons d'abord

$$\tau^*(n, \vartheta) := \sum_{d \mid n} \mu(d)^2 d^{i\vartheta}, \qquad \tilde{\tau}(n, \vartheta) := \frac{\tau^*(n, \vartheta)}{2^{\omega(n)}} = \prod_{p \mid n} \left(\frac{1 + p^{i\vartheta}}{2}\right),$$

$$\omega_\vartheta(n) := \sum_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant \exp(1/\vartheta)}} 1, \qquad \mathscr{R}(n, \vartheta) := \frac{|\tau^*(n, \vartheta)|^2}{2^{\omega(n) + \omega_\vartheta(n)}}.$$

On remarque immédiatement que

$$|\tilde{\tau}(n, \vartheta)|^2 = \frac{\mathscr{R}(n, \vartheta)}{2^{\omega(n) - \omega_\vartheta(n)}}. \tag{5.1}$$

Les deux lemmes qui suivent sont établis dans [R95a]. La seconde majoration dans chaque lemme provient de l'application du Lemme 4.3. On rappelle que $m(u) := \prod_{p \mid m,\, p \nmid u} p$.

Lemme 5.1. *Soit $x \geqslant 3$. On a pour $u \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}^+$,*

$$\sum_{m \leqslant x} \mathscr{R}(m_k(u), \vartheta) \ll x \frac{u_k}{\varphi(u_k)} \{\log(2+\vartheta)\}^2 \ll x(\log_2 u_k)\{\log(2+\vartheta)\}^2.$$

Lemme 5.2. *Il existe $c_4 > 0$ tel que, pour $x \geqslant 3$, $u \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, $0 = k_0 < k_1 < \cdots k_s$ des entiers et $(\vartheta_1, ..., \vartheta_s) \in \prod_{i=1}^{s}]\mathrm{e}^{-k_i}, \mathrm{e}^{-k_{i-1}}]$, on a*

$$\sum_{m \leqslant x} \prod_{i=1}^{s} \mathscr{R}(m_{k_i}(u), \vartheta_i) \ll x \frac{u_{k_s}}{\varphi(u_{k_s})} c_4^s \ll x(\log_2 u_{k_s})\, c_4^s.$$

6. LEMMES SUR LES MESURES D'ENSEMBLES D'ACCROISSEMENT

Nous utilisons une technique d'analyse de Fourier pour minorer dans un premier temps la mesure de Lebesgue $\lambda(\mathbf{u}; \eta)$ de $\mathscr{L}(\mathbf{u}; \eta)$ par des quantités faisant intervenir des fonctions multiplicatives. À cet effet, nous introduisons

$$I(\mathbf{u}; \eta) := \iint_{[-2/\eta,\, 2/\eta]^2} |\tilde{\tau}(u_1, \vartheta_1)\, \tilde{\tau}(u_2, \vartheta_2)\, \tilde{\tau}(u_3, \vartheta_1 + \vartheta_2)|^2 \,\mathrm{d}\vartheta_2 \,\mathrm{d}\vartheta_1.$$

Lemme 6.1. *Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant $\mu(u_1 u_2 u_3)^2 = 1$. On a*

$$\lambda(\mathbf{u}; \eta) \geqslant \tfrac{1}{4} I(\mathbf{u}; \eta)^{-1}.$$

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{R}$, posons

$$W(y) := (\sin(y/2)/(y/2))^2 = \int_{-1}^{+1} (1 - |\gamma|)\, \mathrm{e}^{i\gamma y} \,\mathrm{d}\gamma$$

et introduisons pour z, w réels, la fonction

$$V(\mathbf{u}; z, w; \eta) := \sum_{\substack{d_1 \mid u_1,\, d_2 \mid u_2,\, d_3 \mid u_3 \\ |z - \log(d_1/d_2)| \leqslant \eta \\ |w - \log(d_1/d_3)| \leqslant \eta}} \mu(d_1 d_2 d_3)^2.$$

On a

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{u}; z, w; \eta) &\leqslant \frac{10^2}{9^2} \sum_{\substack{d_r \mid u_r \\ 1 \leqslant r \leqslant 3}} W\left(\frac{z+\log(d_2/d_1)}{\eta}\right) \\
&\quad \times W\left(\frac{w+\log(d_3/d_1)}{\eta}\right) \mu(d_1)^2 \mu(d_2)^2 \mu(d_3)^2 \\
&\leqslant \frac{10^2}{9^2} \eta^2 \iint_{[-1/\eta,\, 1/\eta]^2} (1-|\gamma_2|\,\eta)(1-|\gamma_3|\,\eta) \\
&\quad \times \left(\prod_{r=1}^{3} \tau^*(u_r, \gamma_r)\right) \mathrm{e}^{i(\gamma_2 z+\gamma_3 w)}\, \mathrm{d}\gamma_3\, \mathrm{d}\gamma_2,
\end{aligned}
$$

où l'on a posé $\gamma_1 = -(\gamma_2+\gamma_3)$. En utilisant la formule de Parseval, il suit

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2} V(\mathbf{u}; z, w, \eta)^2\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}w \\
&\qquad \leqslant 4\pi^2 (\tfrac{10}{9})^4\, \eta^2 \iint_{[-1/\eta,\, 1/\eta]^2} \prod_{r=1}^{3} |\tau^*(u_r, \gamma_r)|^2\, \mathrm{d}\gamma_3\, \mathrm{d}\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Il en résulte alors, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz, la majoration

$$
\begin{aligned}
&\eta^4 4^{2+\omega(u_1)+\omega(u_2)+\omega(u_3)} \\
&\quad = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} V(\mathbf{u}; z, w; \eta)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}w\right)^2 \\
&\quad \leqslant 4\pi^2\, (\tfrac{10}{9})^4\, \eta^4 \lambda(\mathbf{u}; \eta) \iint_{[-1/\eta,\, 1/\eta]^2} \left|\prod_{r=1}^{3} \tau^*(u_r, \gamma_r)\right|^2 \mathrm{d}\gamma_3\, \mathrm{d}\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Le changement de variable $\vartheta_1 = -\gamma_2 - \gamma_3$, $\vartheta_2 = \gamma_2$, fournit l'inégalité requise, grâce à la parité de $|\tau^*|^2$ en la deuxième variable.

On rappelle la notation $\eta = (\log x_1)^{1-(3/2)\log 2} \exp(\xi \sqrt{\log_2 x_1})$.

Lemme 6.2. *Soit* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$. *Soit* $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$. *Il existe* c_1, c_2, c_3 *tel que, pour* $T \geqslant c_3$ *et notant* $\mathscr{K}^*(\mathbf{n}) \subset \mathscr{K}$ *l'ensemble des* k *de* $\mathscr{K}$ *vérifiant*

(i) $\lambda(\mathbf{n}_k^*; \eta) \geqslant \mathrm{e}^{2k-3T}$,

(ii) $\min\limits_{T \leqslant s \leqslant k} s^{-1} \omega(n_{r,k}/n_{r,k-s}) > \alpha \qquad (r = 1, 2, 3)$,

(iii) $k - \frac{1}{3}\xi\sqrt{k} \leqslant \omega(n_{r,k}) \leqslant 2k \qquad (r = 1, 2, 3)$,

(iv) $\log n_{r,k} \leqslant c_1 \mathrm{e}^k \qquad (r=1, 2, 3),$

(v) $p_k(n_1, c_1+1) \leqslant \exp(c_2 \mathrm{e}^k),$

on a alors $|\mathscr{K}^*(\mathbf{n})| \geqslant (3/4)\,\ell$ *pour tous les triplets d'entiers* (n_1, n_2, n_3), $n_r \leqslant x_r$, $1 \leqslant r \leqslant 3$ *sauf au plus* $O(x_1 x_2 x_3 \{(\log_2 x_1)\, \mathrm{e}^{-\ell} + \mathrm{e}^{-\xi^2/33}\})$.

Démonstration. Soient c_0, c_1, c_2 les constantes définies aux Lemmes 4.7, 4.8, et 4.9. Soit $T \geqslant c_0$. On note $\mathscr{K}_1(\mathbf{n})$, l'ensemble des entiers $k \in \mathscr{K}$ vérifiant

$$\min_{T \leqslant s \leqslant k} s^{-1} \omega(n_{r,k}/n_{r,k-s}) > \alpha \qquad r \in \{1, 2, 3\}, \tag{6.1}$$

$$k - \tfrac{1}{3}\xi \sqrt{k} \leqslant \omega(n_{r,k}) \leqslant 2k \qquad r \in \{1, 2, 3\}, \tag{6.2}$$

$$\log n_{r,k} \leqslant c_1 \mathrm{e}^k \qquad r \in \{1, 2, 3\}, \tag{6.3}$$

$$p_k(n_1, c_1+1) \leqslant \exp(c_2 \mathrm{e}^k). \tag{6.4}$$

Par les Lemmes 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, et la remarque $n_1 n_2 \leqslant x_3^2$, on a

$$|\mathscr{K}_1(\mathbf{n})| \geqslant \tfrac{99}{100}\ell \tag{6.5}$$

pour tous les triplets d'entiers (n_1, n_2, n_3), $n_r \leqslant x_r$, $1 \leqslant r \leqslant 3$ sauf au plus $O(x_1 x_2 x_3 \{(\log_2 x_1)\, \mathrm{e}^{-\ell} + \mathrm{e}^{-\xi^2/33}\})$.

D'après le Lemme 6.1, montrer (i) revient à montrer que

$$I(\mathbf{n}_k^*; \eta) \leqslant \tfrac{1}{4} \mathrm{e}^{3T-2k}, \tag{6.6}$$

avec un nombre acceptable d'exceptions. On pose

$$I^*(\mathbf{u}; \eta) := \iint_{0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 \leqslant 4/\eta} |\tilde{\tau}(u_1, \vartheta_1)\, \tilde{\tau}(u_2, \vartheta_2)\, \tilde{\tau}(u_3, \vartheta_1+\vartheta_2)|^2 \,\mathrm{d}\vartheta_2\, \mathrm{d}\vartheta_1.$$

Soit $\mathfrak{S}_3$, l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$. On note pour la suite de la démonstration $\vartheta_3 = \vartheta_1 + \vartheta_2$. On définit pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$,

$$\Omega_\sigma := \{(\vartheta_1, \vartheta_2) \colon 0 < |\vartheta_{\sigma(1)}| \leqslant |\vartheta_{\sigma(2)}| \leqslant |\vartheta_{\sigma(3)}| \leqslant 4/\eta\}.$$

On remarque que $[-2/\eta, 2/\eta]^2 \subset \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \bar{\Omega}_\sigma$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, par le changement de variables $\vartheta_1' = |\vartheta_{\sigma(1)}|$, $\vartheta_2' = |\vartheta_{\sigma(2)}|$ et la parité de $|\tilde{\tau}|^2$ en la deuxième variable, on obtient, en intégrant sur chaque composante connexe de Ω_σ,

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u};\eta) &\leqslant \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \iint_{\bar{\Omega}_\sigma} \prod_{r=1}^{3} |\tilde{\tau}(u_r,\vartheta_r)|^2\, d\vartheta_2\, d\vartheta_1 \\ &\leqslant 4 \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} I^*(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, u_{\sigma(3)};\eta). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Soit $k \in \mathscr{K}$. On définit

$$\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_1(k) := \{(\vartheta_1,\vartheta_2) \colon 0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 < e^{T-k}\} \cap [-4/\eta, 4/\eta]^2,$$

$$\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}_2(k) := \{(\vartheta_1,\vartheta_2) \colon e^{T-k} \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2,\ e^{h-k} \leqslant \vartheta_2\} \cap [-4/\eta, 4/\eta]^2,$$

$$\mathscr{D}_3 = \mathscr{D}_3(k) := \{(\vartheta_2,\vartheta_2) \colon 0 \leqslant \vartheta_1 < e^{T-k} < e^{h-k} \leqslant \vartheta_2\} \cap [-4/\eta, 4/\eta]^2,$$

$$\mathscr{D}_4 = \mathscr{D}_4(k) := \{(\vartheta_1,\vartheta_2) \colon e^{T-k} \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 < e^{h-k}\} \cap [-4/\eta, 4/\eta]^2,$$

$$\mathscr{D}_5 = \mathscr{D}_5(k) := \{(\vartheta_1,\vartheta_2) \colon 0 \leqslant \vartheta_1 < e^{T-k} \leqslant \vartheta_2 < e^{h-k}\} \cap [-4/\eta, 4/\eta]^2.$$

On définit, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, $1 \leqslant j \leqslant 5$,

$$I_{j,k,\sigma}(\mathbf{n}) := \iint_{\mathscr{D}_j} \prod_{1\leqslant r\leqslant 3} |\tilde{\tau}(n_{\sigma(r),k},\vartheta_r)|^2\, d\vartheta_2\, d\vartheta_1.$$

On a alors, d'après (6.7),

$$I(\mathbf{n}_k^*;\eta) \leqslant 4 \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \sum_{1\leqslant j\leqslant 5} I_{j,k,\sigma}(\mathbf{n}). \tag{6.8}$$

• $j=1$. On majore trivialement $\prod_{1\leqslant r\leqslant 3} |\tilde{\tau}(n_{\sigma(r),k},\vartheta_r)|^2$ par 1. On obtient

$$I_{1,k,\sigma}(\mathbf{n}) \leqslant e^{2T-2k}.$$

On remarquera, d'après (6.1) et (6.2), que pour $k \in \mathscr{K}_1(\mathbf{n})$, on a

$$\begin{aligned} \omega(n_{r,k}) - \omega_\vartheta(n_{r,k}) &\geqslant \alpha(k - \ulcorner \log(1/\vartheta) \urcorner) \\ &\geqslant \alpha_k - 1 + \alpha \log \vartheta, \qquad (e^{T-k} < \vartheta \leqslant 2) \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\omega(n_{r,k}) - \omega_\vartheta(n_{r,k}) = \omega(n_{r,k}) \geqslant K - \tfrac{1}{3}\xi\sqrt{k},\ (\vartheta > 2). \tag{6.10}$$

On définit alors une fonction g_k, minorant $\vartheta \mapsto 2^{\omega(n_{r,k}) - \omega_\vartheta(n_{r,k})}$, par

$$g_k(\vartheta) := \begin{cases} 2^{\alpha k - 1 + \alpha \log \vartheta} & \text{si} \quad e^{T-k} < \vartheta \leqslant 2, \\ 2^{k - (1/3)\,\xi\sqrt{k}} & \text{si} \quad \vartheta > 2. \end{cases} \tag{6.11}$$

• $j=2$. Toutes les sommes suivantes $\sum_{\mathbf{n}}$ porteront sur les triplets d'entiers $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$ vérifiant $n_r \leqslant x_r$, $1 \leqslant r \leqslant 3$. On a, d'après (5.1) et (6.11)

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\mathbf{n}\\ k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n})}} \frac{I_{2,k,\sigma}(\mathbf{n})}{\mathrm{e}^{-2k}} &\ll \sum_{\substack{\mathbf{n}\\ k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n})}} \iint_{\mathbb{D}_2(k)} \mathrm{e}^{2k} \prod_{r=1}^{3} \frac{\mathscr{R}(n_{\sigma(r),k}, \vartheta_r)}{g_k(\vartheta_r)}\, \mathrm{d}\vartheta_2\, \mathrm{d}\vartheta_1\\ &\ll x_1x_2x_3 \sum_{k\in\mathscr{K}} k^2\mathrm{e}^{2k} \int_{\mathrm{e}^{T-k}}^{4/\eta} \int_{\max\{\vartheta_1, \mathrm{e}^{h-k}\}}^{4/\eta} \prod_{r=1}^{3} \frac{\{\log(2+\vartheta_r)\}^2}{g_k(\vartheta_r)}\, \mathrm{d}\vartheta_2\, \mathrm{d}\vartheta_1,\end{aligned}$$

d'après le Lemme 5.1, sommant sur n_3, n_2 puis n_1, et (6.3). On majore l'intégrale double, utilisant (6.11), et l'on obtient que le terme de gauche de l'inégalité précédente est

$$\begin{aligned}&\ll x_1x_2x_3 \sum_{k\in\mathscr{K}} k^2\big(\mathrm{e}^{(2-3\beta)h}\\ &\qquad + (\log_2 x_1)^6\, \mathrm{e}^{(3\log 2-2)\{(\log_2 x_1)-k\}+(\log 2)\,\xi\sqrt{k}-2\xi\sqrt{\log_2 x_1}}\big)\\ &\ll x_1x_2x_3\mathrm{e}^{-\ell}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\sup_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_3\\ k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n})}} \mathrm{e}^{2k} I_{2,k,\sigma}(\mathbf{n}) \leqslant 1$$

pour tous les triplets d'entiers (n_1, n_2, n_3), $n_r \leqslant x_r$, $1 \leqslant r \leqslant 3$, sauf au plus $O(x_1x_2x_3\mathrm{e}^{-\ell})$.

• $j=3$. On majore trivialement $|\tilde{\tau}(n_{\sigma(1),k}, \vartheta_1)|$ par 1. La méthode est alors analogue à celle employée pour traiter le cas $j=2$. On a, d'après (5.1) et (6.11),

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\mathbf{n}\\ k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n})}} \frac{I_{3,k,\sigma}(\mathbf{n})}{\mathrm{e}^{T-2k}} &\ll \sum_{\substack{\mathbf{n}\\ k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n})}} \iint_{\mathscr{D}_3(k)} \mathrm{e}^{2k-T} \prod_{r=2}^{3} \frac{\mathscr{R}(n_{\sigma(r),k}, \vartheta_r)}{g_k(\vartheta_r)}\, \mathrm{d}\vartheta_2\, \mathrm{d}\vartheta_1\\ &\ll x_1x_2x_3 \sum_{k\in\mathscr{K}} k^2\mathrm{e}^{2k-T} \int_0^{\mathrm{e}^{T-k}} \int_{\mathrm{e}^{h-k}}^{4/\eta} \frac{\{\log(2+\vartheta_2)\}^4}{g_k(\vartheta_2)^2}\, \mathrm{d}\vartheta_2\, \mathrm{d}\vartheta_1,\end{aligned}$$

d'après le Lemme 5.1, sommant sur n_3, n_2 puis n_1, et (6.3). On majore l'intégrale en ϑ_2, utilisant (6.11), et l'on obtient que le terme de gauche de l'inégalité précédente est

$$\begin{aligned}&\ll x_1 x_2 x_3 \sum_{k\in\mathscr{K}} k^2 \big(\mathrm{e}^{(1-2\beta)h} \\ &\qquad + (\log_2 x_1)^4\, \mathrm{e}^{(1-2\log 2)k + ((2\log 2)/3)\,\xi\sqrt{k} + ((3/2)\log 2 - 1)\log_2 x_1 - \xi\sqrt{\log_2 x_1}}\big) \\ &\ll x_1 x_2 x_3 \mathrm{e}^{-\ell}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\sup_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_3\\ k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n})}} \mathrm{e}^{2k-T} I_{3,k,\sigma}(\mathbf{n}) \leqslant 1$$

pour tous les triplets d'entiers (n_1, n_2, n_3), $n_r \leqslant x_r$, $1\leqslant r\leqslant 3$, sauf au plus $O(x_1 x_2 x_3 \mathrm{e}^{-\ell})$.

- $j=4$. Soit $\mathscr{E}_{4,\sigma} = \mathscr{E}_{4,\sigma}(\mathbf{n}) := \{k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n})\colon I_{4,k,\sigma}(\mathbf{n}) > \mathrm{e}^{-2k}\}$.

On pose $\ell_1 = [(1/100)\,\ell]$. On note, pour tout entier k, $\vartheta_{3,k} = \vartheta_{1,k} + \vartheta_{2,k}$. Nous convenons qu'une sommation indexée par $\mathbf{n}$ et accentuée par une astérisque porte sur tous les entiers n_1, n_2, n_3 vérifiant $n_r\leqslant x_r$, $1\leqslant r\leqslant 3$, $|\mathscr{K}_1(\mathbf{n})| \geqslant (99/100)\,\ell$. On a, d'après (5.1) et (6.9),

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ |\mathscr{E}|=2\ell_1}}^{*} \prod_{k\in\mathscr{E}\cap\mathscr{K}_1} \frac{I_{4,k,\sigma}(\mathbf{n})}{\mathrm{e}^{-2k}} \\ &\qquad\ll \sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ |\mathscr{E}|=2\ell_1}}^{*} \prod_{k\in\mathscr{E}\cap\mathscr{K}_1} \iint_{\mathscr{D}_4(k)} \mathrm{e}^{2k} \prod_{r=1}^{3} \frac{\mathscr{R}(n_{\sigma(r),k}, \vartheta_r)}{2^{-1}\mathrm{e}^{\beta k}\vartheta_r^{\beta}}\, \mathrm{d}\vartheta_2\, \mathrm{d}\vartheta_1 \\ &\qquad\ll \sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ \ell_1\leqslant|\mathscr{E}|\leqslant 2\ell_1}}^{*} \int_{\prod_{k\in\mathscr{E}}\mathscr{D}_4(k)} \prod_{k\in\mathscr{E}} \mathrm{e}^{2k} \prod_{r=1}^{3} \frac{\mathscr{R}(n_{\sigma(r),k}, \vartheta_{r,k})}{2^{-1}\mathrm{e}^{\beta k}\vartheta_{r,k}^{\beta}}\, \mathrm{d}\vartheta_{2,k}\, \mathrm{d}\vartheta_{1,k} \\ &\qquad\ll x_1 x_2 x_3 (\log_2 x_1)^2\, c_5^{\ell_1} \sum_{\substack{\mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ \ell_1\leqslant|\mathscr{E}|\leqslant 2\ell_1}} \prod_{k\in\mathscr{E}} \mathrm{e}^{(2-3\beta)k} \\ &\qquad\quad \times \int_{\mathrm{e}^{T-k}}^{\mathrm{e}^{h-k}} \int_{\vartheta_1}^{\mathrm{e}^{h-k}} \frac{\mathrm{d}\vartheta_2\, \mathrm{d}\vartheta_1}{\vartheta_1^{\beta}\vartheta_2^{2\beta}},\end{aligned}$$

d'après le Lemme 5.2 et (6.3) et où l'on a posé $c_5=(2c_4)^6$. Intégrant, on a alors

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ |\mathscr{E}|=2\ell_1}}^{*} \prod_{k\in\mathscr{E}} \frac{I_{4,k,\sigma}(\mathbf{n})}{\mathrm{e}^{-2k}}$$

$$\ll x_1x_2x_3(\log_2 x_1)^2\, c_5^{\ell_1} \sum_{\substack{\mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ \ell_1\leqslant|\mathscr{E}|\leqslant 2\ell_1}} \prod_{k\in\mathscr{E}} \mathrm{e}^{(2-3\beta)k}\mathrm{e}^{(T-k)(2-3\beta)}$$

$$\ll x_1x_2x_3(\log_2 x_1)^2\, \mathrm{e}^{((2-3\beta)T+(\log c_5)+100\log 2)\ell_1} \ll x_1x_2x_3e^{-\ell},$$

pour T assez grand. Ainsi on a $|\xi_{4,\sigma}|\leqslant(2/100)\,\ell$ pour tous les triplets d'entiers (n_1,n_2,n_3), $n_r\leqslant x_r$, $1\leqslant r\leqslant 3$, sauf au plus $O(x_1x_2x_3e^{-\ell})$.

- $j=5$. Soit $\mathscr{E}_{5,\sigma}=\mathscr{E}_{5,\sigma}(\mathbf{n}):=\{k\in\mathscr{K}_1(\mathbf{n}): I_{5,k,\sigma}(\mathbf{n})>\mathrm{e}^{T-2k}\}$.

On majore trivialement $|\tilde{\tau}(n_{1,k},\vartheta_1)|$ par 1. La méthode est alors analogue à celle employée pour traiter le cas $j=4$. On pose $\ell_1=[(1/100)\,\ell]$. On a, d'après (5.1) et (6.9),

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ |\mathscr{E}|=2\ell_1}}^{*} \prod_{k\in\mathscr{E}\cap\mathscr{K}_1} \frac{I_{5,k,\sigma}(\mathbf{n})}{\mathrm{e}^{T-2k}}$$

$$\ll \sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ |\mathscr{E}|=2\ell_1}}^{*} \prod_{k\in\mathscr{E}\cap\mathscr{K}_1} \iint_{\mathscr{D}_5(k)} \mathrm{e}^{2k-T}\prod_{r=2}^{3}\frac{\mathscr{R}(n_{\sigma(r),k},\vartheta_r)}{2^{-1}\mathrm{e}^{\beta k}\vartheta_r^{\beta}}\,\mathrm{d}\vartheta_2\,\mathrm{d}\vartheta_1$$

$$\ll \sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ \ell_1\leqslant|\mathscr{E}|\leqslant 2\ell_1}}^{*} \int_{\prod_{k\in\mathscr{E}}\mathscr{D}_5(k)} \prod_{k\in\mathscr{E}} \frac{\mathscr{R}(n_{\sigma(2),k},\vartheta_{2,k})\,\mathscr{R}(n_{\sigma(3),k},\vartheta_{3,k})}{2^{-2}\mathrm{e}^{(2\beta-2)k+T}\vartheta_{2,k}^{2\beta}}\,\mathrm{d}\vartheta_{2,k}\,\mathrm{d}\vartheta_{1,k}$$

$$\ll x_1x_2x_3(\log_2 x_1)^2\, c_6^{\ell_1} \sum_{\substack{\mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ \ell_1\leqslant|\mathscr{E}|\leqslant 2\ell_1}} \prod_{k\in\mathscr{E}} \mathrm{e}^{(2-2\beta)k-T}$$

$$\times\int_0^{\mathrm{e}^{T-k}}\int_{\mathrm{e}^{T-k}}^{\mathrm{e}^{h-k}} \frac{\mathrm{d}\vartheta_2\,\mathrm{d}\vartheta_1}{\vartheta_2^{2\beta}},$$

d'après le Lemme 5.2 et (6.3) et où l'on a posé $c_6=(2c_4)^4$. Intégrant, on a alors

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ |\mathscr{E}|=2\ell_1}}{}^{*}\prod_{k\in\mathscr{E}}\frac{I_{5,k,\sigma}(\mathbf{n})}{\mathrm{e}^{T-2k}}$$

$$\ll x_1x_2x_3(\log_2 x_1)^2\, c_6^{\ell_1}\sum_{\substack{\mathscr{E}\subset\mathscr{K}\\ \ell_1\leqslant|\mathscr{E}|\leqslant 2\ell_1}}\prod_{k\in\mathscr{E}}\mathrm{e}^{(2-2\beta)k-T}\mathrm{e}^{(T-k)(2-2\beta)}$$

$$\ll x_1x_2x_3(\log_2 x_1)^2\,\mathrm{e}^{((1-2\beta)T+(\log c_6)+100\log 2)\ell_1}\ll x_1x_2x_3\mathrm{e}^{-\ell},$$

pour T assez grand. Ainsi on a $|\mathscr{E}_{5,\sigma}|\leqslant(2/100)\,\ell$ pour tous les triplets d'entiers (n_1, n_2, n_3), $n_r\leqslant x_r$, $1\leqslant r\leqslant 3$, sauf au plus $O(x_1x_2x_3e^{-\ell})$.

Soit $\mathscr{K}_2(\mathbf{n}) := \mathscr{K}_1(\mathbf{n})\setminus\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}(\mathscr{E}_{4,\sigma}\cup\mathscr{E}_{5,\sigma})$. La minoration (i) annoncée est vérifiée pour tout $k\in\mathscr{K}_2(\mathbf{n})$, d'après (6.6) et (6.8), sauf pour un nombre de triplets exceptionnels au plus $O(x_1x_2x_3\mathrm{e}^{-\ell})$, pourvu que T soit pris suffisamment grand.

On a $\mathscr{K}^*(\mathbf{n})\supset\mathscr{K}_2(\mathbf{n})$. La minoration (6.5) de $|\mathscr{K}_1(\mathbf{n})|$, ainsi que les majorations de $|\mathscr{E}_{4,\sigma}|$ et $|\mathscr{E}_{5,\sigma}|$, fournissant alors la minoration annoncée pour $|\mathscr{K}^*(\mathbf{n})|$.

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

La démonstration du Théorème 1 s'obtient en affinant la technique de Maier et Tenenbaum [MT84].[5] Dans ce but, nous pouvons suivre indifféremment la démonstration de la Proposition 1 de [R95a] ou bien celle du Théorème 1 de [St92].

On pose $L=[\ell/2]$. Soit $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$. Soit $c_3\leqslant T\leqslant h$.

Soit $\mathscr{S}=\mathscr{S}(n_1; x_2, x_3) := \{(n_2, n_3)\colon n_2\leqslant x_2, n_3\leqslant x_3, |\mathscr{K}^*(n_1, n_2, n_3)|\geqslant L\}$.

Soit $\mathscr{A}=\mathscr{A}(x_1) := \{n_1\leqslant x_1\colon |\mathscr{S}(n_1)|\geqslant x_2x_3(1-\mathrm{e}^{-L}-\mathrm{e}^{-\xi^2/66}\}$.

D'après le Lemme 6.2, on a

$$|\mathscr{A}(x_1)| = x_1+O(x_1\{(\log_2 x_1)\,\mathrm{e}^{-L}+\mathrm{e}^{-\xi^2/66}\}).$$

On rappelle que pour tout $n_1\in\mathscr{A}(x_1)$, $(n_2, n_3)\in\mathscr{S}(n_1, x_2, x_3)$, $k\in\mathscr{K}^*(n_1, n_2, n_3)$, on a

$$\lambda(\mathbf{n}_k^*, \eta)\geqslant\mathrm{e}^{2k-3T}, \tag{7.1}$$

$$\omega(n_{r,k})\leqslant 2k \qquad (r=1, 2, 3), \tag{7.2}$$

$$\log n_{r,k}\leqslant c_1\mathrm{e}^k \qquad (r=1, 2, 3), \tag{7.3}$$

$$p_k(n_1, c_1+1)\leqslant\exp(c_2\mathrm{e}^k). \tag{7.4}$$

[5] Voir aussi la démonstration du Theorem 51 de [HT88].

Nous fixons jusqu'à la fin de ce paragraphe, l'entier n_1 dans l'ensemble $\mathscr{A}(x_1)$. On pose

$$\begin{aligned} B &= B(n_1; x_2, x_3) \\ &:= |\{(n_2, n_3) \in [1, x_2] \times [1, x_3]: E(n_1, n_2, n_3; \zeta_2, \zeta_3; \psi) > \eta\}|. \end{aligned}$$

Notons par ailleurs pour chaque $(n_2, n_3) \in \mathscr{S}$,

$$k_1(n_2, n_3) < k_2(n_2, n_3) < \cdots < k_L(n_2, n_3)$$

les L premiers entiers comptés dans $\mathscr{K}^*(n_1, n_2, n_3)$. On définit, pour tout s, $1 \leqslant s \leqslant L$,

$$\mathscr{M}_s := \mathscr{S} \cap \{(n_2, n_3): E(n_{1, k_s}, n_{2, k_s}, n_{3, k_s}; \zeta_2, \zeta_3; \psi) > \eta\}.$$

On a alors

$$B \leqslant |\mathscr{M}_L| + |\bar{\mathscr{S}}| \leqslant |\mathscr{M}_L| + x_2 x_3 \{e^{-L} + e^{-\xi^2/66}\}. \tag{7.5}$$

Le principe de base de la démonstration du Théorème 1 consiste à établir une relation de récurrence pour $|\mathscr{M}_s|$, $1 \leqslant s \leqslant L$, dont on tire une majoration de $|\mathscr{M}_L|$. Dans cette perspective, nous introduisons, pour chaque couple $(s, k) \in \{1, ..., L\} \times \mathscr{K}$, l'ensemble

$$\mathscr{M}_{s, k} := \{(n_2, n_3) \in \mathscr{M}_s: k_s(n_2, n_3) = k\}.$$

On a alors, puisque $\mathscr{M}_{s, k} \cap \mathscr{M}_{s, k'} = \varnothing$ pour $k \neq k'$,

$$\mathscr{M}_s = \bigcup_{k \in \mathscr{K}} \mathscr{M}_{s, k}, \qquad |\mathscr{M}_s| = \sum_{k \in \mathscr{K}} |\mathscr{M}_{s, k}|. \tag{7.6}$$

Soit $(n_2, n_3) \in S$, $k \in \mathscr{K}^*(n_1, n_2, n_3)$. On pose $p_k := p_k(n, c_1 + 1)$. On rappelle que $p_k \mid n_1$ et, d'après (7.4), $(c_1 + 1)\, e^k < \log p_k \leqslant c_2 e^k$. Par (2.4), on a $|\zeta_r| \leqslant e^k$, $r \in \{2, 3\}$. On a alors, d'après (7.3),

$$(\log p_k + \zeta_2, \log p_k + \zeta_3) + \mathscr{L}(\mathbf{n}_k^*; \eta) \subset [e^k, (c_1 + c_2 + 1)\, e^k]^2. \tag{7.7}$$

On introduit l'ensemble $\mathscr{D}_{s, k}$ des couples $(n_2, n_3) \in \mathscr{M}_{s, k}$ tels qu'il existe un couple (q_2, q_3) de nombres premiers vérifiant $\mu(p_k q_2 q_3)^2 = 1$ et

$$\begin{gathered} q_r \mid n_r,\ e^k < \log q_r \leqslant (c_1 + c_2 + 1)\, e^k \qquad r \in \{2, 3\}, \\ (\log q_2 - \log p_k - \zeta_2, \log q_3 - \log p_k - \zeta_3) \in \mathscr{L}(\mathbf{n}_k^*; \eta). \end{gathered} \tag{7.8}$$

On a, d'après (2.4),

$$\bigcup_{k \in \mathscr{K}} \mathscr{D}_{s,k} \subset (\mathscr{M}_s \backslash \mathscr{M}_{s+1}) \cup \bar{\mathscr{S}}. \tag{7.9}$$

Comme $\mathscr{D}_{s,k} \cap \mathscr{D}_{s,k'} = \varnothing$ pour $k \neq k'$ et $\mathscr{M}_{s+1} \subset \mathscr{M}_s$ alors l'inclusion précédente entraîne

$$|\mathscr{M}_{s+1}| \leqslant |\mathscr{M}_s| + |\bar{\mathscr{S}}| - \sum_{k \in \mathscr{K}} |\mathscr{D}_{s,k}|. \tag{7.10}$$

On remarque que $\mathscr{D}_{s,k}$ contient tous les couples d'entiers (n_2, n_3) s'écrivant sous la forme $(\tilde{n}_2 t_2 q_2 b_2, \tilde{n}_3 t_3 q_3 b_3)$ avec

$$(\tilde{n}_2, \tilde{n}_3) \in \widetilde{\mathscr{M}}_{s,k} := \{(n_{2,k}, n_{3,k}) \colon (n_2, n_3) \in \mathscr{M}_{s,k}\},$$
$$t_2 \mid \tilde{n}_2, \; t_3 \mid \tilde{n}_3, \qquad b_2 \leqslant x_2/(\tilde{n}_2 t_2 q_2), \qquad b_3 \leqslant x_3/(\tilde{n}_3 t_3 q_3),$$
$$P^-(b_2 b_3) > \exp(\{c_1 + c_2 + 1\}\ \mathrm{e}^k),$$

et où le couple (q_2, q_3) décrit l'ensemble des valeurs vérifiant (7.8). Par définition de $\mathscr{K}(x_1)$, et d'après (7.3), on a $\exp(\{c_1 + c_2 + 1\}\ \mathrm{e}^k)\tilde{n}_2 \tilde{n}_3 t_2 t_3 q_2 q_3 = o(x_1)$. Par le Lemme 4.2 on obtient

$$|\mathscr{D}_{s,k}| \gg x_2 x_3 \mathrm{e}^{-2k} \sum_{(\tilde{n}_2, \tilde{n}_3)} \frac{1}{\varphi(\tilde{n}_2)\, \varphi(\tilde{n}_3)} \sum_{(q_2, q_3)} \frac{1}{q_2 q_3}. \tag{7.11}$$

D'après (7.2), l'ensemble $\mathscr{L}(\mathbf{n}_k^*; \eta)$ contient au plus $2^{\omega(n_{1,k}) + \omega(\tilde{n}_2) + \omega(\tilde{n}_3)} \leqslant 2^{6k}$ pavés disjoints. Grâce à (7.1) et (7.7), le théorème des nombres premiers permet de donner une minoration de la dernière somme en (q_2, q_3). On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{(q_2, q_3)} \frac{1}{q_2 q_3} &\gg \mathrm{e}^{-2k} \sum_{(q_2, q_3)} \frac{\log q_2}{q_2} \frac{\log q_3}{q_3} \\ &\gg \mathrm{e}^{-2k} \{\lambda(\mathbf{n}_k^*; \eta) + O(2^{6k} \exp(-c_7 \mathrm{e}^{k/2}) + \mathrm{e}^k)\} \gg \mathrm{e}^{-3T}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Ainsi

$$|\mathscr{D}_{s,k}| \gg x_2 x_3 \mathrm{e}^{-2k-3T} \sum_{(\tilde{n}_2, \tilde{n}_3)} \frac{1}{\varphi(\tilde{n}_2)\, \varphi(\tilde{n}_3)}. \tag{7.13}$$

Afin de minorer la somme précédente, on décompose les éléments (n_2, n_3) de $\mathscr{M}_{s,k}$ sous la forme $(n_2, n_3) = (\tilde{n}_2 d_2 b_2, \tilde{n}_3 d_3 b_3)$ avec

$$(\tilde{n}_2, \tilde{n}_3) \in \widetilde{\mathscr{M}}_{s,k}, \qquad p \mid d_2 \Rightarrow p \mid \tilde{n}_2, \qquad p \mid d_3 \Rightarrow p \mid \tilde{n}_3,$$
$$b_2 \leqslant x_2/(\tilde{n}_2 d_2), \qquad b_3 \leqslant x_3/(\tilde{n}_3 d_3), \qquad P^-(b_2 b_3) > \exp(\{c_1 + c_2 + 1\}\ \mathrm{e}^k).$$

Par le Lemme 4.2, la somme en $(\tilde{n}_2, \tilde{n}_3)$ de (7.13) est donc $\gg e^{2k}|\mathscr{M}_{s,k}|/(x_2x_3)$. Il suit

$$|\mathscr{D}_{s,k}| \gg e^{-3T}\,|\mathscr{M}_{s,k}|. \tag{7.14}$$

En reportant cette dernière minoration de $|\mathscr{D}_{s,k}|$ dans (7.10), on a donc, supposant T fixé suffisamment grand, pour $1 \leqslant s < L$,

$$|\mathscr{M}_{s+1}| \leqslant (1-e^{-4T})\,|\mathscr{M}_s| + x_2x_3(e^{-L}+e^{-\xi^2/66}). \tag{7.15}$$

On suppose maintenant que pour un certain couple (x_2, x_3), on a

$$B(n_1; x_2, x_3) \geqslant x_2x_3(1+2e^{4T})\{e^{-L}+e^{-\xi^2/66}\}. \tag{7.16}$$

Alors, pour tout s, $1 \leqslant s \leqslant L$, on a d'après (7.5) et la décroissance de la suite $(|\mathscr{M}_s|)$,

$$|\mathscr{M}_s| \geqslant B - x_2x_3\{e^{-L}+e^{-\xi^2/66}\} \geqslant 2e^{4T}x_2x_3\{e^{-L}+e^{-\xi^2/66}\}.$$

En reportant cette inégalité dans (7.15), on obtient

$$\operatorname{card}|\mathscr{M}_{s+1}| \leqslant (1-\tfrac{1}{2}e^{-4T})\operatorname{card}|\mathscr{M}_s| \qquad (1 \leqslant s \leqslant L).$$

Itérant cette dernière majoration, on obtient donc, sous l'hypothèse (7.16), que

$$\operatorname{card}|\mathscr{M}_L| \leqslant x_2x_3(1-\tfrac{1}{2}e^{-4T})^{L-1} \ll x_2x_3e^{-c_8\ell}.$$

Associé à (7.5) et l'hypothèse (7.16), il vient alors que dans tous les cas, on a

$$B(n_1; x_2, x_3) \ll x_2x_3\{e^{-c_9\ell}+e^{-\xi^2/66}\}.$$

Pour achever la démonstration du Théorème 1, on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n_r \leqslant x_r,\ 1 \leqslant r \leqslant 3\\ E(n_1,n_2,n_3;\zeta_2,\zeta_3;\psi)>\eta}} 1 &\ll x_2x_3(x_1-|\mathscr{A}(x_1)|) + \sum_{n_1 \in \mathscr{A}(x_1)} B(n_1; x_2, x_3)\\ &\ll x_1x_2x_3\{e^{-c\xi^{1/2}(\log_2 x_1)^{1/2}}+e^{-\xi^2/66}\}.\end{aligned}$$

8. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Lemme 8.1 (Shiu [Sh80]). *Soit f une fonction multiplicative, positive telle qu'il existe deux réels strictement positifs A_1 et A_2 tels que pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$f(p^\nu) \leqslant A_1^\nu A_2 \qquad (p \text{ premier}, \nu \geqslant 1), \qquad f(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon.$$

On a alors pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $x^{\alpha} \leqslant y \leqslant x$,

$$\sum_{x-y<n\leqslant x} f(n) \ll_{f,\alpha} \frac{y}{\log x} \exp\left(\sum_{p\leqslant x} f(p)/p\right).$$

Démonstration du Théorème 2. Notons $\eta_1 := (\log x_1)^{1-(3/2)\log 2}\, \mathrm{e}^{-\xi\sqrt{\log_2 x_1}}$. On pose

$$F(x_1, x_2, x_3) := |\{(n_1, n_2, n_3) \colon n_j \leqslant x_j,\ 1 \leqslant j \leqslant 3,$$
$$E(n_1, n_2, n_3; 0, 0; 0) \leqslant \eta_1\}|.$$

Soit $y \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On définit

$$\chi_y(n; z) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \max_{z\leqslant t\leqslant n} \Omega(n, t)/\log_2 t > 2y, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}. \tag{8.1}$$

où $\Omega(n, t)$ est le nombre de facteurs premiers de n aux plus égaux à t, comptés avec leur ordre de multiplicité. On pose $\Omega(n) := \Omega(n, n) = \sum_{p^{\nu} \| n} \nu$. On définit alors

$$F_1(x_1, x_2, x_3) := \sum_{n_i\leqslant x_i,\ 1\leqslant i\leqslant 3} \max_{1\leqslant i\leqslant 3} \{\chi_y(n_i; \mathrm{e}^{1/\eta_1})\},$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) := \sum_{n_1\leqslant x_1} \sum_{\substack{d_1 | n_1 \\ \mathrm{e}^{1/\eta_1} < d_1 \leqslant \sqrt{x_1}}} \sum_{\substack{n_i\leqslant x_i,\ i=2,3 \\ \exists d_i | n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} \times \prod_{1\leqslant i\leqslant 3} y^{\Omega(n_i, 2d_1) - 2y\log_2(2d_1)},$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) := \sum_{n_1\leqslant x_1} \sum_{\substack{m_1 d_1 = n_1 \\ \mathrm{e}^{1/\eta_1} < m_1 \leqslant \sqrt{x_1} < d_1}} \sum_{\substack{n_i\leqslant x_i,\ i=2,3 \\ \exists d_i | n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} \times \prod_{1\leqslant i\leqslant 3} y^{\Omega(n_i, m_1) - 2y\log_2(m_1)},$$

$$F_4(x_1, x_2, x_3) := \sum_{n_1\leqslant x_1} \sum_{\substack{d_1 | n_1 \\ d_1 < \mathrm{e}^{1/\eta_1}}} \sum_{\substack{n_i\leqslant x_i,\ i=2,3 \\ \exists d_i | n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} 1,$$

$$F_5(x_1, x_2, x_3) := \sum_{n\leqslant x_1} \sum_{\substack{d_1 | n_1 \\ xe^{-1/\eta_1} < d_1}} \sum_{\substack{n_i\leqslant x_i,\ i=2,3 \\ \exists d_i | n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} 1.$$

On a d'abord

$$F(x_1, x_2, x_3) \leqslant \sum_{j=1}^{5} F_j(x_1, x_2, x_3). \tag{8.2}$$

• $j=1$. En suivant la même technique que celle employée dans le Lemma 50.1 de [HT88] on peut montrer que

$$F_1(x_1, x_2, x_3) \ll Q(2y)^{-1}\, x_1 x_2 x_3 \eta_1^{Q(2y)}. \tag{8.3}$$

• $j=2$. On remarque que pour $d_1 > \mathrm{e}^{1/\eta_1}$, on a $\eta_1 d_1 > d_1^{1/2}$. En appliquant le Lemme 4.1 puis le Lemme 8.1 pour majorer la somme en n_i, $i \geqslant 2$, dans F_2, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_i \leqslant x_i \\ \exists d_i \mid n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} y^{\Omega(n_i,\, 2d_1)} \\
&\leqslant \sum_{\substack{d_i \\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} y^{\Omega(d_i)} \sum_{m_i \leqslant x/d_i} y^{\Omega(m_i,\, 2d_1)} \\
&\ll \frac{x_i}{d_1} (\log d_1)^{y-1} \sum_{\substack{d_i \\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} y^{\Omega(d_i)} \\
&\ll x_i \eta_1 (\log d_1)^{2y-2}.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
F_2(x_1, x_2, x_3) &\ll x_2 x_3 \eta_1^2 \sum_{\substack{d_1 \\ \mathrm{e}^{1/\eta_1} < d_1 \leqslant \sqrt{x_1}}} \sum_{m_1 \leqslant x_1/d_1} y^{\Omega(d_1 m_1,\, 2d_1)} \\
&\qquad \times (\log d_1)^{-4Q(y) - 2y \log y} \\
&\ll x_1 x_2 x_3 \eta_1^2 \sum_{1 < d_1 \leqslant \sqrt{x_1}} \frac{y^{\Omega(d_1)}}{d_1} (\log d_1)^{-5Q(y) - y \log y} \\
&\ll x_1 x_2 x_3 \eta_1^2 (\log x_1)^{1 - 6Q(y)},
\end{aligned} \tag{8.5}$$

par sommation par parties, en remarquant que $6Q(y) < 6Q(1/2) < 1$ pour tout $y \in]\frac{1}{2}, 1[$.

• $j=3$. Par la même méthode que celle employée pour (8.4), on obtient que, pour $n_1 = d_1 m_1$, $\mathrm{e}^{1/\eta} < m_1 \leqslant \sqrt{x_1} < d_1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n_i \leqslant x_i \\ \exists d_i \mid n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} y^{\Omega(n_i,\, m_1)}
&\leqslant \sum_{\substack{d_i \\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} y^{\Omega(d_i,\, m_1)} \sum_{m_i \leqslant x_i/d_i} y^{\Omega(m_i,\, m_1)} \\
&\ll \frac{x_i}{d_1} (\log m_1)^{y-1} \sum_{\substack{d_i \\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} y^{\Omega(d_i,\, m_1)} \\
&\ll x_i \eta_1 (\log m_1)^{2y-2}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
F_3(x_1, x_2, x_3) &\ll x_2 x_3 \eta_1^2 \sum_{\substack{m_1 \\ e^{1/\eta_1} < m_1 \leqslant \sqrt{x_1}}} \sum_{d_1 \leqslant x_1/m_1} y^{\Omega(d_1 m_1,\, m_1)} \\
&\quad \times (\log m_1)^{-4Q(y) - 2y \log y} \\
&\ll x_1 x_2 x_3 \eta_1^2 \sum_{1 < m_1 \leqslant \sqrt{x_1}} \frac{y^{\Omega(m_1)}}{m_1} (\log m_1)^{-5Q(y) - y \log y} \\
&\ll x_1 x_2 x_3 \eta_1^2 (\log x_1)^{1 - 6Q(y)}, \qquad (8.6)
\end{aligned}$$

par sommation par parties, en remarquant que $6Q(y) < 6Q(1/2) < 1$ pour tout $y \in]\frac{1}{2}, 1[$.

- $j = 4$. On a, par des majorations élémentaires,

$$\begin{aligned}
F_4(x_1, x_2, x_3) &\leqslant x_1 x_2 x_3 \sum_{d_1 \leqslant e^{1/\eta_1}} \frac{1}{d_1^3} \sum_{\substack{d_i \leqslant x_i,\ i = 2, 3 \\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant \eta_1}} 1 \\
&\ll x_1 x_2 x_3 \eta_1^2 \sum_{d_1 \leqslant e^{1/\eta_1}} \frac{1}{d_1} \ll x_1 x_2 x_3 \eta_1. \qquad (8.7)
\end{aligned}$$

- $j = 5$. On obtient, de la même manière que pour $j = 4$, que

$$F_5(x_1, x_2, x_3) \ll x_1 x_2 x_3 \eta_1. \qquad (8.8)$$

On a donc, d'après (8.2), (8.3), (8.5), (8.6), (8.7), (8.8),

$$F(x_1, x_2, x_3) \ll x_1 x_2 x_3 (Q(2y)^{-1} \eta_1^{Q(2y)} + \eta_1^2 (\log x_1)^{1 - 6Q(y)}).$$

Pour le choix

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \log 2} \frac{\xi}{\sqrt{\log_2 x_1}},$$

on obtient que

$$F(x_1, x_2, x_3) \ll x_1 x_2 x_3 (\log_2 x_1)\, \mathrm{e}^{-\xi^2/109}.$$

9. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Notons, pour $\psi x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_r$,

$$G_r(x_1, ..., x_r) := |\{(n_1, ..., n_r) \colon n_j \leqslant x_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r,$$
$$E(n_1, ..., n_r; 0, 0, ..., 0; \psi) \leqslant 1\}|.$$

Soit $y \in]\frac{1}{2}, 1[$. On pose

$$\chi_y^*(n; z) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \Omega(n, z) > 2y \log_2 z, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Omega(n, z)$ est le nombre de facteurs premiers de n aux plus égaux à z, comptés avec leur ordre de multiplicité. On définit

$$G_{1,r}(x_1, x_2, ..., x_r) := \sum_{n_i \leqslant x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r} \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \{\chi_y^*(n_i; \psi)\},$$

$$G_{2,r}(x_1, x_2, ..., x_r) := \sum_{n_1 \leqslant x_1} \sum_{\substack{d_1 \mid n_1 \\ \psi < d_1}} \sum_{\substack{n_i \leqslant x_i,\ 2 \leqslant i \leqslant r \\ \exists d_i \mid n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant 1}} \times \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} y^{\Omega(n_i, \psi) - 2y \log_2(\psi)}.$$

On a d'abord

$$G_r(x_1, x_2, ..., x_r) \leqslant G_{1,r}(x_1, x_2, ..., x_r) + G_{2,r}(x_1, x_2, ..., x_r). \tag{9.1}$$

Soit $1 \leqslant i \leqslant r$. Par le Lemme 4.1, on a

$$\sum_{n_i \leqslant x_i} \chi_y^*(n_i, \psi) \leqslant \sum_{n_i \leqslant x_i} (2y)^{\Omega(n_i, \psi) - 2y \log_2 \psi} \ll x_i (\log \psi)^{-Q(2y)}.$$

On en déduit que

$$G_{1,r}(x_1, x_2, ..., x_r) \ll r x_1 x_2 \cdots x_r (\log \psi)^{-Q(2y)}. \tag{9.2}$$

En appliquant le Lemme 4.1, pour majorer la somme en n_i, $i \geqslant 2$, dans $G_{2,r}$, on a

$$\sum_{\substack{n_i \leqslant x_i \\ \exists d_i \mid n_i,\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant 1}} y^{\Omega(n_i, \psi)} \leqslant \sum_{\substack{d_i \\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant 1}} y^{\Omega(d_i, \psi)} \sum_{m_i \leqslant x_i/d_i} y^{\Omega(m_i, \psi)}$$
$$\ll \frac{x_i}{d_1} (\log \psi)^{y-1} \sum_{\substack{d_i \\ |\log(d_i/d_1)| \leqslant 1}} y^{\Omega(d_i, \psi)}$$
$$\ll x_i (\log \psi)^{2y-2}.$$

Ainsi

$$G_{2,r}(x_1, ..., x_r) \ll c_{10}^{r-1} x_2 \cdots x_r \sum_{\substack{d_1 \\ \psi < d_1 \leqslant x_1}} \sum_{m_1 \leqslant x_1/d_1} y^{\Omega(d_1 m_1, \psi)}$$
$$\times (\log \psi)^{-2(r-1)\, Q(y) - 2y \log y}$$
$$\ll c_{10}^{r-1} \frac{x_1 x_2 \cdots x_r}{(\log \psi)^{2(r-1)\, Q(y) + 2y \log y}} \sum_{\psi < d_1 \leqslant x_1} \frac{y^{\Omega(d_1, \psi)}}{d_1}$$
$$\times \left(\log \min\left\{ \psi, \frac{2x_1}{d_1} \right\} \right)^{y-1}$$
$$\ll c_{10}^{r-1} x_1 x_2 \cdots x_r (\log \psi)^{1 - 2rQ(y)}, \tag{9.3}$$

par sommation par parties.

Pour chaque entier $r \geqslant 4$, nous désignons maintenant par h_r la fonction définie sur $[\frac{1}{2}, 1]$ par

$$h_r(y) := 2rQ(y) - 1 - Q(2y) = 2(r-1)\, Q(y) - 2y \log 2.$$

Il est facile de vérifier que h_r est continue, strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et vérifie $h_r(\frac{1}{2}) = r(1 - \log 2) - 1 > 0$ et $h_r(1) < 0$. L'équation $h_r(y) = 0$ admet donc une seule racine y_r, dans $]\frac{1}{2}, 1[$. On remarque que $y_r \to_{r \to +\infty} 1$.

Les relations (9.1), (9.2), et (9.3) impliquent alors la validité de la majoration

$$G_r(x_1, ..., x_r) \ll c_{11}^r x_1 x_2 \cdots x_r (\log \psi)^{-Q(2y_r)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[B34] A. S. Besicovitch, On the density of certain sequences, *Math. Ann.* **110** (1934), 336–344.

[H96] R. R. Hall, "Sets of Multiples," Cambridge Tracts in Math., Vol. 118, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1996.

[HR66] H. Halberstam et K. F. Roth, "Sequences," Oxford Univ. Press, London, 1966.

[HRi79] H. Halberstam et H.-E. Richert, On a result of R. R. Hall, *J. Number Theory* **11**(1) (1979), 76–89.

[HT88] R. R. Hall et G. Tenenbaum, “Divisors,” Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1988.

[MT84] H. Maier et G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.

[R95a] A. Raouj, Sur la densité de certains ensembles de multiples, 1, *Acta Arith.* **69** (1995), 121–152.

[R95a] A. Raouj, Sur la densité de certains ensembles de multiples, 2, *Acta Arith.* **69** (1995), 171–188.

[Sh80] P. Shiu, A Brun–Titchmarsch theorem for multiplicative functions, *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), 161–170.

[St92] A. Stef, “L’ensemble exceptionnel dans la conjecture d’Erdős concernant la proximité des diviseurs,” Thèse de l’Université de Nancy I, Vandoeuvre, France, 1992.

[T95] G. Tenenbaum, “Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,” Cours spécialisés, No. 1, Société Mathématique de France, Paris, 1995.

[TW96] G. Tenenbaum, en collaboration de J. Wu “Exercises corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres,” Cours spécialisés, No. 2, Société Mathématique de France, Paris, 1996.