Discrete Mathematics 46 (1983) 159–171
North-Holland

ARBRES MINIMAUX D'UN GRAPHE PREORDONNE

Claude FLAMENT

Centre de Mathématique Sociale, E.H.E.S.S., Marseille, France

Bruno LECLERC

Centre de Mathématique Sociale, E.H.E.S.S., 75270 Paris Cedex 06, France

Received 14 January 1981
Revised 10 September 1982

We study the minimal spanning trees of a connected graph $G = (X, U)$ where U is partially preordered (or quasi-ordered). We characterize several kinds of optimal spanning trees and give conditions for existence of strongly optimal tress. Generalizations to bases of matroïds (binary matroïds in part 2) are immediate. Some of our results are given in terms of Krogdahl's dependance graphs. They imply previous results of Rosenstiehl and Gale in the case of linear orders or preorders.

On étudie les arbres minimaux d'un graphe connexe $G = (X, U)$, où U est partiellement préordonné. On caractérise diverses sortes d'arbres optimaux et on donne des conditions d'existence des arbres fortement optimaux. Des généralisations aux bases de matroïdes (matroïdes binaires dans la partie 2) sont immédiates. Certains de nos résultats utilisent les graphes de dépendance de Krogdahl. Ils impliquent des résultats de Rosenstiehl et de Gale dans les cas d'ordres et de préordres totaux.

0. Introduction

L'arbre minimum d'un graphe dont les arêtes sont valuées par des nombres réels positifs est l'un des objets combinatoires les mieux connus. Son étude, commencée sans doute par Boruvka [2], a établi l'intérêt de ses nombreuses propriétés et s'est prêtée à d'importantes généralisations: l'algorithme A de Kruskal [11] a été le premier exemple d'algorithme glouton. En pratique, l'arbre minimum joue un rôle important en recherche opérationnelle et en taxonomie mathématique.

C'est à propos de cette dernière, utilisée dans les sciences sociales où l'on est fréquemment amené à considérer des variables non numériques, que nous nous sommes intéressé au cas où il peut y avoir des paires d'arêtes incomparables, c'est-à-dire où l'ensemble U des arêtes du graphe G considéré est muni d'un préordre P quelconque, non forcément total. L'intérêt du problème est aussi apparu dans des contextes plus théoriques: Flament [5, 6] a caractérisé les familles de sous-arbres d'un arbre par l'existence d'un arbre minimum dans un certain graphe (partiellement) préordonné.

Le préordre $\leqslant_P$ induit sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des arbres de G par le préordre P n'admet en effet pas toujours d'élément minimum. On distingue immédiatement quatre types d'arbres optimaux, l'existence des deux derniers étant seule assurée: arbre seul minimum, arbre minimum, arbre minimal, arbre localement minimal (pour le dernier 'localement' se réfère au graphe des arbres d'un graphe étudié par Hakimi [8] et généralisé au graphe des bases d'un matroide par Maurer [14, 15]).

Un certain nombre de résultats sur l'existence et la caractérisation de ces arbres optimaux avaient été obtenus par deux approches différentes. L'une, suivant les travaux de Rosenstiehl [16] dans le cas classique, considère les restrictions de P aux cycles et cocycles de G (Flament [5], Leclerc [13]). L'autre part de la considération d'ordres et de préordres totaux liés à P, de façon à se ramener au cas classique (Leclerc [12]). Cependant, on n'était pas parvenu à caractériser les arbres minimaux dans le cas le plus général. C'est ce qui est fait ici, grâce à l'utilisation des propriétés du graphe de dépendance Γ_A associé à tout arbre A (Krogdahl [10]). Nous obtenons deux caractérisations des arbres minimaux, l'une par l'exclusion d'un certain type de configurations (Théorème 4.3.), l'autre comme arbres minimums correspondant à certains préordres totaux sur U (Théorème 4.4.). La seconde caractérisation permet d'obtenir pratiquement des arbres minimaux. De plus nous simplifions et unifions une bonne partie des résultats obtenus précédemment.

Les définitions et propriétés concernant les graphes sont prises dans le livre de Berge [1], sauf celles données au Paragraphe 1. Au Paragraphe 2, nous définissons la relation de dépendance Γ_A et nous donnons un théorème préliminaire qui complète un des résultats de Krogdahl. Au Paragraphe 3, nous étudions le préordre $\leqslant_P$. Les caractérisations des arbres optimaux sont données au Paragraphe 4 et les conditions d'existence pour les plus forts types d'optimalité au Paragraphe 5. Enfin, on précise au Paragraphe 6 les cas où P est un ordre (partiel) ou un préordre total.

L'article a été rédigé dans les termes qui nous sont les plus familiers, ceux des arbres d'un graphe. Les résultats du Paragraphe 2 concernent en fait les matroides binaires. En substituant au Corollaire 2.4.1., un résultat classique plus général de Brualdi [3], les résultats des Paragraphes 3 à 6 se généralisent sans difficulté aux bases d'un matroide fini. On a pris soin de rédiger les démonstrations de sorte que cette transposition soit immédiate, avec les équivalents arbre/base, coarbre/cobase, cycle élémentaire/circuit, cocycle élémentaire/cocircuit, en se référant au livre de Welsh [17].

1. Généralités

1.1.1. On considère un graphe simple connexe $G=(X, U)$, où X est l'ensemble fini des sommets de G et U une partie de l'ensemble des parties de X de cardinal 2. U est l'ensemble des arêtes de G. On pose $|X|=n$, $|U|=m$.

Un cycle C est une partie de U telle qu'il existe une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_{|C|})$ d'éléments de x telle que $\{x_i, x_{i+1}\} \in C$, pour $i = 1, \ldots, |C|$ (modulo $|C|$). Un cycle élémentaire est un cycle minimal pour l'inclusion. Un cycle généralisé est une union de cycles disjoints, ou bien l'ensemble vide. On note $\bar{\mathscr{C}}$ (resp. $\mathscr{C}$) l'ensemble des cycles généralisés (resp. des cycles élémentaires) de G.

Soit $X' \subseteq X$. On pose $D(X') = \{u \in U : |u \cap X'| = 1\}$. Un cocycle est un élément de $\bar{\mathscr{D}} = \{D(X') : X' \subseteq X\}$. Un cocycle élémentaire est un cocycle non vide minimal pour l'inclusion. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des cocyles élémentaires de G.

Soit $A \subseteq U$. Deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième: (i) $\forall D \in \bar{\mathscr{D}}$, $A \cap D \neq \emptyset$, (ii) $|A| = n - 1$, (iii) $\forall C \in \mathscr{C}$, $C \not\subseteq A$. A est un arbre de G si A vérifie ces propriétés. Un coarbre B est un ensemble d'arêtes tel que $U - B$ est un arbre. On note $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ l'ensemble des arbres et des coarbres de G.

1.1.2. L'ensemble $\mathscr{P}(U)$ des parties de U est un vectoriel sur le corps de Galois GF(2), avec pour addition la différence symétrique Δ définie par:

$$\forall V, V' \subseteq U \quad V \Delta V' = (V \cup V') - (V \cap V').$$

$\bar{\mathscr{C}}$ et $\bar{\mathscr{D}}$ sont des sous-espaces orthogonaux de $P(U)$ pour la forme bilinéaire

$$\langle V, V' \rangle = |V \cap V'| \text{ (modulo 2)}.$$

En conséquence, $\mathscr{C}$ est l'ensemble des circuits d'un matroide binaire $\mathscr{M}(G)$ sur U dont l'ensemble $\mathscr{A}$ est l'ensemble des bases. $\mathscr{D}$ et $\mathscr{B}$ sont les ensembles des circuits et des bases du matroide dual $\mathscr{M}^*(G)$, ou des cocircuits et cobases de $\mathscr{M}(G)$.

1.2.1. Soient deux ensembles finis E et F. Une relation de Φ de E vers F est une partie de $E \times F$. On lui associe le graphe biparti (E, F, Φ). Soient $E' \subseteq E$, $F' \subseteq F$. On écrira (E', F', Φ) le sous-graphe biparti $(E', F', \Phi \cap (E' \times F'))$. On considèrera souvent le cas où $|E| = |F|$ et où l'on a une bijection $\beta : E \to F$. β sera parfois identifiée à l'ensemble $\{(e, \beta(e)) : e \in E\}$.

1.2.2. Lemme. *Soit (E, F, Φ) un graphe biparti tel que pour tout $E' \subseteq E$, le sous-graphe biparti (E', F, Φ) a un sommet de F de degré impair. Alors il existe un couplage de E dans F.*

Démonstration. Soit $E' \subseteq E$, et soit $F' = \{f \in F : \exists e \in E' : (e, f) \in \Phi\}$. On considère, comme en 1.1.2, le vectoriel $\mathscr{P}(F')$ sur le corps GF(2) et les vecteurs $\Phi(e) = \{f \in F' : (e, f) \in \Phi\}$, $e \in E'$. La condition d'imparité équivaut à $\Delta_{e \in E'} \Phi(e) \neq \emptyset$. Les $|E'|$ vecteurs $\Phi(e)$, $e \in E'$ sont des vecteurs indépendants dans un espace de dimension $|F'|$, ce qui implique $|E'| \leq |F'|$ (et en particulier $|E| \leq |F|$). Le Théorème de König-Hall (cf. M. Hall, Jr. [9], Ch. 5, et Berge [1], Ch. 7) établit alors l'existence d'un couplage de E dans F.

2. Relation de dépendance associée à un arbre

2.1. Soient A un arbre du graphe $G=(X,U)$, $u\in A$, $v\in U-A$. On note C_v^A le cycle unique inclus dans $A\cup\{v\}$ et D_u^A le cocycle unique tel que $D_u^A\cap A=\{u\}$. On a $u\in C_v^A \Leftrightarrow v\in D_u^A$. $\{D_u^A: u\in A\}$ est une base du vectoriel $\bar{\mathscr{D}}$ et l'application $D\to D\cap A$ est un isomorphisme entre les vectoriels $\bar{\mathscr{D}}$ et $\mathscr{P}(A)$. De même, $\{C_v^A: v\in U-A\}$ est une base du vectoriel $\bar{\mathscr{C}}$ et l'application $C\to C-A$ est un isomorphisme entre les vectoriels $\bar{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{P}(U-A)$.

2.2. Définition. A étant un arbre de G et $B=U-A$ son coarbre, la *relation de dépendance Γ_A de A vers B* est définie par (Krogdahl [12]):

$$(u,v)\in\Gamma_A \;\Leftrightarrow\; v\in D_u^A \;\Leftrightarrow\; u\in C_v^A.$$

2.3. Proposition. *Soient A un arbre du graphe G et $Z\subseteq A$, $Z'\subseteq B=U-A$. Alors $A'=(A-Z)\cup Z'$ contient un arbre ssi pour toute partie non vide $Y\subseteq Z$, le sous-graphe biparti (Y,Z',Γ_A) a un élément de Z' de degré impair.*

Démonstration. Il faut montrer que, pour tout $D\in\mathscr{D}$, on a $D\cap A'\neq\emptyset$. Ceci est évident si $D\cap A\nsubseteq Z$. Sinon, posons $Y=D\cap A$. On a $D=\sum_{u\in Y} D_u^A$ et la condition équivaut à $D\cap Z'\neq\emptyset$.

Théorème. *Soient A un arbre de G, $Z\subseteq A$, $Z'\subseteq B=U-A$. $A'=(A-Z)\cup Z'$ est un arbre de G ssi deux des trois conditions suivantes sont réalisées:*

(a) $|Z|=|Z'|$.

(b) *Pour toute partie non vide $Y\subseteq Z$, le sous-graphe biparti (Y,Z',Γ_A) a un élément de Z' de degré impair.*

(c) *Pour toute partie non vide $Y'\subseteq Z'$, le sous-graphe biparti (Z,Y',Γ_A) a un élément de Z de degré impair.*

Démonstration. (a) équivaut à $|A'|=n-1$. (a) et (b) entraînent donc que A' est un arbre. Par dualité arbre/coarbre, cycles/cocycles on obtient une analogue à la proposition précédente établissant que (c) équivaut à ce que $B'=(B-Z')\cup Z$ contienne un coarbre. Donc (a) et (c) entraînent que B' soit un coarbre et A' un arbre. Enfin (b) et (c) entraîne que A contient et est inclus dans un arbre, donc est un arbre.

Remarque. Le théorème précédent porte en fait sur les matroides binaires. Il complète et symétrise le Lemme 8.1 de Krogdahl. L'obtention d'une caractérisation analogue des bases d'un matroide quelconque est un problème non résolu à notre connaissance.

Corollaire. *Soient A un arbre de G, $u\in A$, $v\in U-A$. $(A-\{u\})\cup\{v\}$ est un arbre ssi $(u,v)\in\Gamma_A$.*

2.4.1. Théorème (Brualdi [3]). *Soient A et A' deux bases d'un matroïde sur U. Il existe un bijection* $\beta: A - A' \rightarrow A' - A$ *telle que* $\beta \subseteq \Gamma_A$.

Dans le cas des arbres d'un graphe $G = (X, U)$ (et des bases d'un matroïde binaire), ce théorème s'obtient comme corollaire du Lemme 1.2.2 et du Thèorème 2.3 ci-dessus.

2.4.2. Soient $\mathscr{A}$ l'ensemble des arbres de G et, pour $A \in \mathscr{A}$, $V(A) = \{A' \in \mathscr{A} : |A \Delta A'| = 2\}$ l'ensemble des voisins de A. Dans la suite, on associera une fois pour toutes, à tout couple (A, A') d'arbres distincts, l'une des bijections dont l'existence a été établie par le Théorème 2.4.1, et on notera $\gamma_{A/A'}$ cette bijection.

Proposition. $\Gamma_A = \bigcup_{A' \in \mathscr{A}} \gamma_{A/A'} = \bigcup_{A'' \in V(A)} \gamma_{A/A''}$.

Démonstration. $\bigcup_{V(A)} \gamma_{A/A''} \subseteq \bigcup_{\mathscr{A}} \gamma_{A/A'} \subseteq \Gamma_A$ est évident. Le Corollaire 2.3. entraîne $\Gamma_A \subseteq \bigcup_{V(A)} \gamma_{A/A''}$.

3. Préordre sur les arbres d'un graphe préordonné

3.1. Graphe préordonné

Si P est un préordre sur l'ensemble U des arêtes d'un graphe G, on dit que $G = (X, U, P)$ est un graphe préordonné. Le préordre P n'est pas supposé total. Nous notons:

P_S la partie stricte de P:

$$P_S = \{(u, v) \in P : (v, u) \notin P\}.$$

P_E l'ensemble des couples de U équivalents pour P:

$$P_E = \{(u, v) \in P : (v, u) \in P\}.$$

P_I l'ensemble des couples de U incomparables pour P:

$$P_I = \{(u, v) \in U \times U - P : (v, u) \notin P\}.$$

P_S est un ordre strict sur U et P_E une équivalence sur U. Nous noterons indifféremment $(u, v) \in P$ ou $u \leqslant v$, $(u, v) \in P_S$ ou $u < v$, $(u, v) \in P_E$ ou $u \equiv v$.

3.2. Préordre induit sur les arbres

3.2.1. Définition. Soit un graphe préordonné $G = (X, U, P)$. V et V' étant deux parties de U de même cardinal, on pose $V \leqslant_P V'$ ssi il existe une bijection β de V sur V' telle que $\beta \subset P$. En particulier, la relation $\leqslant_P$ définit un préordre sur $\mathscr{A}$:

- $A \leqslant_P A$: il suffit de considérer l'application identité;
- $A \leqslant_P A'$ et $A' \leqslant_P A''$: on a les bijections β de A sur A', et β' de A' sur A'';

donc, $\beta' \circ \beta$ est une bijection de A sur A''; puisque $\beta \subset P$ et $\beta' \subset P$, on a: $\beta' \circ \beta \subset P \circ P$; mais, P étant un préordre, $P \circ P = P$, et donc: $A \leqslant_P A''$.

3.2.2. On dit qu'une bijection β de V sur V' est *concluante* ssi $\beta \subset P$ ou $\beta^{-1} \subset P$.

Supposons que: $V \leqslant_P V'$ et $V' \leqslant_P V$, c'est-à-dire qu'on a deux bijections concluantes de V sur V':

$\beta^{-1} \subset P$ et $\beta' \subset P$, alors, $\beta^{-1} \circ \beta'$ est une permutation sur V, et on a nécessairement $\beta^{-1} \circ \beta' \subset P_E$, ce qui ne se peut que si $\beta^{-1} \subset P_E$ et $\beta' \subset P_E$. On en conclut qu'il existe trois types de bijections concluantes, *exclusifs* les uns des autres pour un couple (V, V') de parties de U de même cardinal:

I. $\beta \subset P_E$ (d'où: $V \equiv_P V'$),
II. $\beta \subset P$ et $\beta \not\subset P_E$ (d'ou: $V <_P V'$),
III. $\beta^{-1} \subset P$ et $\beta^{-1} \not\subset P_E$ (d'où: $V' <_P V$).

Proposition. *Il existe une bijection concluante d'un certain type, β, de V sur V', ssi il existe une bijection concluante de même type, $\hat{\beta}$, de $(V - V')$ sur $(V' - V)$.*

Condition suffisante. Si $\hat{\beta}$ existe, il suffit de complèter par l'application identité sur $(V \cap V')$ pour obtenir β, qui est de même type que $\hat{\beta}$.

Condition nécessaire. Si β existe, considérons-la comme un relation sur $(V \cup V')$; ses trajectoires sont *disjointes*. Elles comprennent:

- d'une part des chemins allant d'un élément de $(V - V')$ à un élément de $(V' - V)$, et passant par k éléments de $(V \cap V')$ si le chemin est de longueur $(k+1)$ (tout élément de $(V - V')$ est départ d'un tel chemin, et tout élément de $(V' - V)$ est arrivée d'un tel chemin).
- d'autre part, éventuellement, des circuits de P_E à sommets éléments de $(V \cap V')$.

On définit alors $\hat{\beta}$ par: si $u \in (V - V')$, alors $\hat{\beta}(u)$ est l'élément de $(V' - V)$ arrivée du chemin inclus dans β partant de u. On a $\hat{\beta} \subset P_E \Leftrightarrow \beta \subset P_E$. $\hat{\beta}$ est donc du même type que β.

Corollaire. *Soient $A \in \mathscr{A}$ et $A' \in \mathcal{V}(A)$. Soit u l'élément unique de $A - A'$, v celui de $A' - A$. Alors $(u, v) \in P \Leftrightarrow A \leqslant_P A'$. En particulier A et A' sont incomparables pour $\leqslant_P$ ssi $(u, v) \in P_I$.*

3.3. Comparaison de deux arbres

3.3.1. Si R et S sont deux relations sur un même ensemble, un circuit K de $R \cup S$ est dit *alterné* si, dans K, tout arc de R (ou: arc R) est suivi d'un arc S et tout arc S d'un arc R. Il y a une correspondance évidente entre les circuits alternés de $R \cup S$ et les circuits de $R \circ S$.

Si R et S sont des relations transitives, tout circuit de $R \cup S$, d'intersection non vide avec R et avec S définit un circuit alterné, chaque séquence homogène pouvant être remplacée par un arc unique. On utilisera notamment ce fait dans le cas où R est un préordre et S une relation bipartie.

3.3.2. Proposition. *A et A' étant deux arbres d'un graphe préordonné, on a $A' \leqslant_P A$ ssi $P \cup \gamma_{A/A'}$ contient une famille de circuits alternés sommets-disjoints passant par tous les éléments de $A \Delta A'$. De plus on a $A' <_P A$ ssi un au moins de ces circuits contient un arc P_S.*

Condition nécessaire. Si $A' \leqslant_P A$, il existe un bijection $\hat{\beta}$ de $A - A'$ sur $A' - A$ telle que $\hat{\beta}^- \subset P$: $\hat{\beta}^-$ et $\gamma_{A/A'}$ étant deux bijections entre les mêmes ensembles, mais de sens opposés, le graphe biparti $[(A - A'), (A' - A), (\hat{\beta}^- \cup \gamma_{A/A'})]$ est régulier de degré 2, c'est-à-dire qu'il est composé de circuits alternés disjoints utilisant tous les éléments de $(A \Delta A')$; puisque $\hat{\beta}^- \subset P$, ces circuits se retrouvent dans $(P \cup \gamma_{A/A'})$.

Si A est strictement minoré par A', c'est que: $\hat{\beta}^- \subset P$ et $\hat{\beta}^- \not\subset P_E$, et donc au moins un des circuits considérés recontre P_S.

Condition suffisante. Dans un circuit alterné K de $(P \cup \gamma_{A/A'})$, puisque tout arc $\gamma_{A/A'}$ va d'un élément de $(A - A')$ vers un élement de $(A' - A)$, tout arc P de K va de $(A' - A)$ vers $(A - A')$; si donc nous avons dans $(P \cup \gamma_{A/A'})$ une famille de circuits alternés disjoints utilisant tout $(A \Delta A')$, alors les arcs P de ces circuits constituent une bijection $\hat{\beta}^-$ de $(A' - A)$ sur $(A - A')$, et on a évidemment: $\hat{\beta}^- \subset P$; donc, A est minoré par A'.

Si de plus, l'un des arcs P de ces circuits est un arc P_S, alors $\hat{\beta}^- \not\subset P_E$ et A est strictement minoré par A'.

4. Caractérisation des arbres optimaux

4.1.1. Définitions. Soient un graphe préordonné $G = (X, U, P)$ et A un arbre de G. A peut être optimal de quatre manières différentes:

- A est un arbre localement minimal (LM) ssi A n'est strictement minoré par aucun arbre voisin.
- A est un arbre minimal ssi A n'est strictement minoré par aucun arbre de G.
- A est un arbre minimum ssi: $\forall A' \in A$, $A \leqslant_P A'$.
- A est un arbre seul minimum (ou seul minimal) ssi: $\forall A' \in \mathscr{A}$, $A <_P A'$.

4.1.2. On sera amené aussi à considérer deux types d'arbres optimaux pour des préordres totaux liés à P: par définition, nous dirons qu'un ordre (resp. un préordre) total T sur U est compatible avec P ssi $P_S \subset T$ (resp. $P_S \subseteq T_S$ et $P \subseteq T$). Soit $A \in \mathscr{A}$. S'il existe un ordre total (resp. un préordre total) T compatible avec P et tel que A est un arbre minimum de (X, U, T) on dira que A est un arbre minimum pour un ordre (resp. un préordre) total compatible, en abrégé que A est un arbre MOTC (resp. un arbre MPOTC). Les Théorèmes 4.3 et 4.4 établiront l'intérêt de ces arbres.

Exemple. Si $P = P_E$, $Q = U \times U$ est un préordre total compatible.

Il peut exister des ordres totaux compatibles qui ne soient inclus dans aucun préordre total compatible. La classe des arbres MPOTC est donc plus restreinte que celle des arbres MOTC.

Exemple. $U = \{u, v, v', w\}$, P contient uniquement, outre, les boucles, les couples (u, w), (w, u), (v, v'). L'ordre $u < v < v' < w$ est un OTC, mais n'est compris dans aucun POTC.

4.2. Théorème. *Soit $G = (X, U, P)$ un graphe préordonné, et A un arbre de G; on a:*

(a) *A est un arbre* LM *ssi $\Gamma_A \subset P \cup P_I$.*

(b) *A est un arbre minimum ssi $\Gamma_A \subset P$.*

(c) *A est un arbre seul minimum ssi $\Gamma_A \subsetneq P_S$.*

Démonstration. (a) Le fait que A est un arbre LM équivaut à ce que, pour tout arbre voisin A', on a: $A \not>_P A'$, c'est-à-dire: $(\gamma_{A/A'})^{-} \not\subset P_S$, ou $\gamma_{A/A'} \subset P \cup P_I$, et globalement $\Gamma_A \subset P \cup P_I$.

(b) Si A est un arbre minimum, pour tout arbre voisin A', on a $A \leqslant_P A'$, c'est-à-dire $\gamma_{A/A'} \subset P$, d'où: $\Gamma_A \subset P$. Réciproquement, si $\Gamma_A \subset P$, pour tout arbre $A' \in \mathscr{A}$, on a: $\gamma_{A/A'} \subset P$, et donc: $A \leqslant_P A'$.

(c) Si A est un arbre seul minimum, il est minimum, et, par (b), on a: $\Gamma_A \subset P$; s'il existait un arbre voisin A' tel que $\gamma_{A/A'} \subset P_E$, on aurait $A \sim_P A'$, ce qui contredirait l'hypothèse d'unicité sur A; donc, pour tout arbre voisin A' on a: $\gamma_{A/A'} \subset P$ et $\gamma_{A/A'} \not\subset P_E$, d'où: $\gamma_{A/A'} \subset P_S$ et $\Gamma_A \subsetneq P_S$.

Réciproquement, si $\Gamma_A \subsetneq P_S$, pour tout autre arbre A' de G (voisin ou non de A), on a: $\gamma_{A/A'} \subset P_S$, c'est-à-dire: $\gamma_{A/A'} \subset P$ et $\gamma_{A/A'} \not\subseteq P_E$; d'où: $A <_P A'$.

4.3. Théorème. *Soit $G = (X, U, P)$ un graphe préordonné, et A un arbre de G; on a:*

(a) *A est un arbre* LM *ssi $(P_S \cup \Gamma_A)$ est sans circuit de longueur* 2.

(b) *A est un arbre* MOTC *ssi $(P_S \cup \Gamma_A)$ est sans circuit.*

(c) *A est un arbre minimal ssi $(P \cup \Gamma_A)$ est sans circuit recontrant P_S.*

Démonstration. Remarquons d'abord pour (a) et (b) que P_S et Γ_A étant sans circuit, tout circuit de $P_S \cup \Gamma_A$ définit un circuit alterné; pour (c) que l'existence d'un circuit de $P \cup \Gamma_A$ rencontrant P_S équivaut à celle d'un circuit alterné rencontrant P_S.

(a) $[(P_S \cup \Gamma_A)$ contient un circuit de longueur 2]

$\Leftrightarrow$ $[\exists u, u' \in U: (u, u') \in \Gamma_A$ et $(u', u) \in P_S]$

$\Leftrightarrow$ $[\exists u, u' \in U: (u, u') \in \Gamma_A$ et $(u, u') \notin (P \cup P_I)]$

$\Leftrightarrow$ $[\Gamma_A \neq \emptyset$ et $\Gamma_A \not\subset (P \cup P_I]$

(b) Si A est un arbre MOTC, il existe un ordre total $T \supset P_S$; A étant minimum pour T, on a: $T \supset \Gamma_A$; d'où, $(P_S \cup \Gamma_A) \subset T$, et $(P_S \cup \Gamma_A)$ est sans circuit.

Réciproquement, si $(P_S \cup \Gamma_A)$ est sans circuit, il existe un ordre total $T \supset (P_S \cup \Gamma_A)$, et A est minimum pour T (i.e. $\Gamma_A \subset T$), ordre total compatible avec P (i.e. $P_S \subset T$).

(c) Nous allons montrer qu'un arbre A n'est pas minimal ssi $P \cup \Gamma_A$ contient un circuit alterné recontrant P_S.

Condition nécessaire. Si A est strictement minoré par un arbre A', c'est que $P \cup \gamma_{A/A'}$, donc $P \cup \Gamma_A$, contient au moins un circuit alterné rencontrant P_S.

Condition suffisante. Si $(P \cup \Gamma_A)$ contient un circuit alterné rencontrant P_S, soit K_0 un tel circuit de longueur minimale $2k$. On note la suite des sommets de $K_0: u_1, u'_1, u_2, u'_2, \ldots, u_k, u'_k$ de telle sorte que tout arc (u_i, u'_i) soit un élément de Γ_A et tout arc (u'_i, u_{i+1}) (modulo k) un élément de P. On choisit de plus u_1 pour avoir $(u'_k, u_1) \in P_S$. On pose $Z = \{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq A$ et $Z' = \{u'_1, \ldots, u'_k\} \subseteq \beta = U - A$. Soit $A' = (A - Z) \cup Z'$. Si A' est un arbre, il minore strictement A: en effet, la bijection $\hat{\beta}$ de $(A' - A) = Z'$ sur $(A - A') = Z$ définie par $\hat{\beta}(u'_i) = u_{i+1}$ (modulo k) vérifie $\hat{\beta} \subset P$ et $\hat{\beta} \not\subset P_E$.

Nous allons établir que A' est un arbre, en conséquence du Théorème 2.3., en montrant que $|Z'| = |Z|$ et que, pour toute partie non vide $Y \subseteq Z$, le sous-graphe biparti (Y, Z', Γ_A) a un élément de Z' de degré impair.

La minimalité de la longueur de K_0 nous garantit que tous les les u_i de Z et tous les u'_i de Z' sont distincts, et que l'on a $|Z'| = |Z|$. Sinon, on aurait $u_i = u_j$ (ou $u'_i = u'_j$), avec $1 \leq i < j \leq k$. Il existerait une corde $(u_i, u'_j) \in \Gamma_A$ définissant un circuit $(u_1 \cdots u_i u'_j \cdots u'_k u_1)$ alterné, contenant un arc P_S et de longueur strictement inférieure à $2k$, ce qui contredirait l'hypothèse de minimalité.

Supposons qu'existe un partie non vide Y de Z, telle que dans (Y, Z', Γ_A), tous les éléments de Z' soient de degré pair. Soit u_j l'élément de Y d'indice maximum; u'_j extrémité de l'arc (u_j, u'_j) élément de Γ_A, étant de degré pair, est extrémité d'au moins un autre arc Γ_A dont l'origine u_i est dans Y, et on a $1 \leq i < i \leq k$, ce qui permet encore de définir un circuit qui contredit la minimalité de K_0.

Remarque. La condition suffisante (c) repose en fait sur l'existence, dans tout (Y, Z', Γ_A), d'un élément de Z' de degré égal à 1: alors A' est un arbre de G. C'est précisément ce qu'établit le Lemme 4.6 de Krogdahl [10], moins fort que le Théorème 2.3, mais vrai pour les bases d'un matroïde quelconque, auxquelles le théorème précédent s'étend donc.

4.4 Théorème. *Soit $G=(X, U, P)$ un graphe préordonné. Un arbre A de G est minimal ssi il est* MPOTC.

Condition suffisante. Soient Q un préordre total compatible avec P et A un arbre minimum de (X, U, Q). D'après le Théorème 4.2(b), on a $\Gamma_A \subset Q$. Si A n'est pas minimal, il existe un circuit alterné K_0 de $P \cup \Gamma_A$ contenant un arc P_S. Reprenons pour ce circuit les notations de la démonstration du Théorème 4.3(c). On a, pour $i=1, 2, \ldots, k$, $(u_i, u_i') \in \Gamma_A \subset Q$ et, pour $i=1, 2, \ldots, k-1$, $(u_i', u_{i+1}) \in P \subseteq Q$. On a donc $(u_1, u_k') \in Q$ et $(u_k', u_1) \in P_S \subseteq Q_S$, ce qui est impossible.

Condition nécessaire. Soit A un arbre minimal de (X, U, P) et soit R la fermeture transitive de $P \cup \Gamma_A$. On a $P_S \subseteq R_S$, car sinon, il existerait un couple d'arêtes $(u, v) \in P_S - R_S$, et (u, v) serait dans un circuit de $P \cup \Gamma_A$, dont l'existence contredirait la minimalité de A. Soit Q un préordre total compatible avec R, donc avec P. On a $\Gamma_A \subset R \subseteq Q$ et d'après le Théorème 4.2(b), A est un arbre minimum de (X, U, Q).

5. Condition d'existence d'un arbre minimum

5.1. Lemme. *Nulle arête d'un graphe préordonné ne peut être à la fois seule minimale dans un cocycle (resp. seule maximale dans un cycle) et maximale dans un cycle (resp. minimale dans un cocycle).*

Démonstration. On sait que pour tout cycle C et pour tout cocycle D, on a $|C \cap D| \neq 1$.

Supposons donc une arête u seule minimale dans D et maximale dans C: $(C \cap D)$ contient u et au moins une autre arête soit v; dans D, on a: $u < v$, et dans C: $u \nless v$, ce qui est impossible. On montre de même qu'une arête u ne peut être à la fois seule maximale dans un cycle $(u > v)$ et minimale dans un cocycle $(u \ngtr v)$.

5.2. Théorème. *Un graphe préordonné $G=(X, U, P)$ admet un arbre seul minimum ssi toute arête de G est: soit seule minimale dans un cocyle, soit seule maximale dans un cycle.*

Condition nécessaire. Si G admet un arbre A seul minimum, on a: $\Gamma_A \subset P_S$, et toute arête u de A est strictement inférieure à tout élément de $\Gamma_A(u)$, c'est-à-dire, est seule minimale dans le cocycle D_u^A; dualement, toute arête v du coarbre $B=U-A$ est strictement supérieure à tout élément de $\Gamma_A'(v)$, c'est-à-dire, est seule maximale dans le cycle C_v^A. Par le lemme, une arête de A ne saurait être seule maximale dans un cycle, et une arête de B ne saurait être seule minimale dans un cocycle.

Condition suffisante. Supposons que toute arête de G soit seule minimale dans un cocycle, soit seule maximale dans un cycle. Soit A l'ensemble des arêtes seules minimales dans un cocyle. montrons d'abord que A *est un arbre.*

A rencontre tous les cocycles: sinon soient $D \in \mathscr{D}$ tel que $D \cap A = \emptyset$ et u une arète minimale de D, l'arête u, n'étant pas dans A, est seule maximale dans un cycle, ce qui, par le lemme, est impossible.

A *est sans cycle:* sinon, soit C un cycle inclus dans A; ce cycle a une arête maximale, qui, étant dans A, est seule minimale dans un cocycle, ce qui, par le lemme, est impossible.

A étant donc un arbre, montrons qu'il est *seul minimum:* pour toute arête u de A, considérons le cocycle D_u^A: aucune arête v de D_u^A, distincte de u, ne saurait être minimale dans ce cocyle, puisque n'étant pas dans A, elle est seule maximale dans un cycle. Donc, u est seule minimale dans D_u^A, et on a: $\Gamma_A \subset P_S$.

5.3. Théorème. *Un graphe préordonné $G = (X, U, P)$ admet un arbre minimum ssi il existe une numérotation $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de U telle que toute arête de G est:*

- *soit minimum dans un cocycle dont les autres arêtes minimums sont d'indice supérieur*
- *soit maximum dans un cycle dont les autres arêtes maximums sont d'indice inférieur.*

Condition nécessaire. Si A est un arbre minimum de G, c'est un arbre minimal, et donc un arbre MOTC; numérotons U à partir d'un ordre total T pour lequel A est arbre minimum: $i<j \Leftrightarrow (u_i, u_j) \in T$, $u_i \neq u_j$; puisque $\Gamma_A \subset T$, pour toute arête u_i de A, on a: $(u_i, u_j) \in \Gamma_A \Rightarrow i<j$, et u_i est l'arête d'indice minimum parmi les arêtes du cocycle $D_{u_i}^A$; donc, toute arête, autre que u_i, minimum pour P dans ce cocycle, est d'indice supérieur. On a un résultat dual pour les arêtes v_i du coarbre $B = U - A$ en considérant les cycles $C_{v_i}^A$.

Condition suffisante. Les arêtes de G ayant la propriété annoncée, définissons, à partir de P et de la numérotation de U, un ordre P':

$$P' = \{(u_i, u_j) \in P : (u_i, u_j) \in P_S, \text{ ou: } (u_i, u_j) \in P_E \text{ et } i<j, \text{ ou: } u_i = u_j\};$$

Il est clair que, *pour* P', toute arête de G est alors, soit seule minimale dans un cocycle, soit seule maximale dans un cycle; par le Théorème 4.2, il existe un arbre A seul minimal pour P', et on a: $\Gamma_A \subset P'_S$; mais $P' \subseteq P$ et on obtient: $\Gamma_A \subset P$: A est un arbre minimum pour P.

5.4. Remarque. Si les arêtes d'un graphe préordonné ont la propriété énoncée dans le Théorème 5.3 pour un indiciage de U, elles ont cette propriété *pour toute numérotation* de U. Il suffit de montrer que la propriété est conservée lorsqu'il y a inversion de deux éléments consécutifs u_i et u_{i+1}. Cela est évident si u_i et u_{i+1} ne sont pas équivalents. Supposons donc $(u_i, u_{i+1}) \in P_E$; on examine tous les cas, et on a trois types de résultats:

(1) L'inversion ne change rien (par exemple, si le cycle ou le cocycle mis en jeu pour u_i ne contient pas u_{i+1}, et si le cycle ou le cocycle mis en jeu pour u_{i+1} ne contient pas u_i).

(2) L'inversion oblige à considérer un nouveau cycle ou un nouveau cocycle (par exemple, on considère le cocycle D_1 pour u_i et le cocycle $D_1 \Delta D_2$).

(3) Le cas ne saurait se présenter (par exemple, on considère le cocycle D pour u_i et le cycle C pour u_{i+1}, avec $u_{i+1} \in D$; alors $D \cap C$ contient une arête u_j qui devrait être telle que: $i<j<i+1$, ce qui n'est pas possible).

6. Préordres particuliers

6.1. Si P est un ordre sur U. P_E se réduit à l'identité et le Théorème 4.3 a pour conséquence:

Théorème. *Dans un graphe (X, U, P) ordonné, un arbre est minimal ssi il est* MOTC.

Ce lien entre les arbres d'un graphe, généralisés par les bases d'un matroide, et l'ensemble des ordres totaux contenant un ordre donné est une propriété caractéristique des matroides (Leclerc [12]).

Le Théorème 4.2 permet de construire le plus petit ordre P' contenant P et tel que A soit un arbre minimum de (X, U, P'). P' est la fermeture transitive de la relation sans circuits $P \cup \Gamma_A$.

Une autre conséquence du Théorème 4.2 est qu'un arbre minimum d'un graphe ordonné est seul minimum.

6.2. Si P est une équivalence $(P = P_E)$, tout arbre est minimal.

6.3. Si P est un préordre total sur U $(P_I = \emptyset)$, tout arbre localement minimal est un arbre minimum. On retrouve le fait que l'existence d'au moins un arbre minimum est assurée, ce qui est à l'origine d'une littérature considérable depuis Boruvka [2], cité par Kruskal [11], et Gale [7] pour les bases minimums d'un matroide.

Cet arbre minimum est unique lorsque P est un ordre total. Dans ce cas, la condition du Théorème 4.2(c) a été donnée pour la première fois par Rosenstiehl [16] qui a montré qu'elle est à la base de toute l'algorithmique de recherche de l'arbre minimum. Gale (op. cit.) et Dawson [4] ont donné des généralisations à la recherche de la base minimum d'un matroide. Les Théorèmes 4.4 et 6.1 établissent que ces algorithmes de l'arbre (ou de la base) minimum sont adaptables au cas général où P n'est pas total.

Références

[1] C. Berge, Graphes et Hypergraphes (Dunod, Paris, 1970).
[2] O. Boruvka, On a minimal problem, Prace Moravske Pridovedecke Spolecnosti 3 (1926).
[3] R. A. Brualdi, Comments on bases in dependance structures, Bull. Austral. Math. Soc. 2 (1969). 161–167.
[4] J. E. Dawson, Optimal matroid bases: an algorithm based on cocircuits, Quart. J. Math. Oxford (2) 31 (1980) 65–69.
[5] C. Flament, Arêtes maximales des cocycles d'un graphe préordonné, Math. Sci. Hum. 51 (1975) 5–12.
[6] C. Flament, Hypergraphes arborés, Discretc Math. 21 (1978) 223–227.
[7] D. Gale, Optimal assignment in an ordered set. An application of matroid theory, J. Combin. Theory 4 (1968) 176–180.
[8] S.L. Hakimi, On the realizability of a set of trees, IRE Trans. Comput. Theory 8 (1961) 11–17.
[9] M. Hall, Jr., Combinatorial Theory (Blaisdell, Waltham, MA 1967).
[10] S. Krogdahl, The dependence graph for bases in matroids, Discrete Math. 19 (1977) 47–59.
[11] J. Kruskal, On the shortest spanning tree of a graph and a travelling salesman problem, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) 48–50.
[12] B. Leclerc, Hypergraphes uniformes préordonnés et arbres minimaux d'un graphe, C.R. Acad. Sci. Paris A-284 (1977) 5–7.
[13] B. Leclerc, Matroides sur un ensemble préordonné. Bases minimales, circuits et cocircuits, parties commençantes, C.R. Acad. Sci. Paris A-286 (1978) 301–304.
[14] S.B. Maurer, Matroid basis graphs I, II, J. Combin Theory (B) 14 (1973) 216–240 et 15 (1973) 121–145.
[15] S.B. Maurer, Intervals in matroid bases graphs, Discrete Math. 11 (1975) 147–159.
[16] P. Rosenstichl, L'arbre minimum d'un graphe, in: P. Rosenstiehl, ed., Théorie des Graphes, Rome 1966 (Dunod, Paris, 1967).
[17] D.J.A. Welsh, Matroid Theory (Academic Press, London, 1976).