JOURNAL OF ALGEBRA 24, 551-564 (1973)

Quotients simples de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_2$

JACQUES DIXMIER

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Paris, Université Paris VI, Paris, France

Communicated by A. W. Goldie

Received October 19, 1971

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit A_n l'algèbre associative complexe à élément unité définie par $2n$ générateurs $p_1, q_1, ..., p_n, q_n$ et les relations

$$[p_i, q_i] = 1 \qquad (i = 1,..., n)$$
$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = [p_i, q_j] = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente complexe, U son algèbre enveloppante. Alors, pour tout idéal primitif I de U, il existe un entier n tel que U/I soit isomorphe à A_n; cet entier n est le même pour "presque tous" les idéaux primitifs de U [2]. Par exemple, supposons que $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre de Lie admettant, par rapport à une base (x, y, z), la table de multiplication $[x, y] = z$, $[x, z] = 0$, $[y, z] = 0$. Les idéaux primitifs de U sont les suivants: (1) les idéaux de codimension 1 (qui contiennent tous l'élément z); (2) les idéaux de la forme $U(z - \lambda)$ où $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$. Si I appartient à la première famille (qui est, en un sens facile à préciser, exceptionelle), U/I est isomorphe à $\mathbf{C} = A_0$; si I appartient à la deuxième famille, U/I est isomorphe à A_1.

Soient maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, U son algèbre enveloppante. Quand I parcourt l'ensemble des idéaux primitifs de U, les quotients U/I ont-ils les mêmes propriétés de stabilité que dans le cas nilpotent? Nous verrons dans ce mémoire qu'il n'en est rien, en analysant le cas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$.

Supposons désormais que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Posons

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = H$. Soit

$$Q = 4FE + H^2 + 2H = 4EF + H^2 - 2H = 2EF + 2FE + H^2 \in U.$$

Il est bien connu que le centre de U est égal à $\mathbf{C}[Q]$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, soit $I_\lambda = U(Q - \lambda)$. Alors l'application $\lambda \mapsto I_\lambda$ est une bijection de $\mathbf{C}$ sur l'ensemble des idéaux primitifs de U de codimension infinie. Si λ n'est pas de la forme $n^2 + 2n$ ($n = 0, 1, 2,...$), I_λ est un idéal bilatère maximal de U. Si λ est de la forme $n^2 + 2n$ ($n = 0, 1, 2,...$), il existe un idéal bilatère et un seul I_λ' de U tel que $I_\lambda \subset I_\lambda' \subset U$, $I_\lambda \neq I_\lambda' \neq U$; cet idéal I_λ' est de codimension $(n + 1)^2$ dans U; c'est le noyau de la représentation simple de dimension $n + 1$ de U. Les I_λ' sont exactement les idéaux primitifs de U de codimension finie. Ces faits sont, pour la plupart, énoncés dans [2], assez faciles à démontrer, et maintenant très connus.

Posons $B_\lambda = U/U(Q - \lambda)$. Si $\lambda \neq 0, 3, 8, 15,...$, B_λ est simple. Si $\lambda = n^2 + 2n$ ($n = 0, 1, 2,...$), B_λ admet un idéal non trivial et un seul, et cet idéal est de codimension $(n + 1)^2$; par suite, B_0, B_3, B_8,... sont deux à deux non isomorphes. Il s'agit maintenant de comparer les algèbres simples B_λ ($\lambda \neq 0, 3, 8,...$). *Nous verrons qu'elles sont deux à deux non isomorphes.* En l'absence d'invariants utiles dans la classification des algèbres simples, une étude détaillée des B_λ est pour cela nécessaire, reposant sur les résultats de [1]. Nous obtiendrons d'ailleurs en même temps certaines propriétés positives des B_λ; par exemple, toute dérivation de B_λ est intérieure, et *le groupe des automorphismes de B_λ est engendré par les* $\exp(D)$ *(D, dérivation localement nilpotente de B_λ).* Ces propriétés rapprochent B_λ de A_1. Il serait intéressant d'étudier de ce point de vue les algèbres de Lie semi-simples quelconques.

Pour toute algèbre A, nous noterons $\mathrm{Der}(A)$ l'ensemble des dérivations de A et $\mathrm{Aut}(A)$ l'ensemble des automorphismes de A. Dans la suite, λ désigne un nombre complexe fixé.

1. Propriétés élémentaires des B_λ

1.1. Il est clair que l'algèbre B_λ est primitive, noethérienne à gauche et à droite. Il est facile de voir que son centre est $\mathbf{C} \cdot 1$.

1.2. La filtration canonique de U définit par passage au quotient une filtration de B_λ. L'algèbre graduée associée à B_λ est isomorphe à $\mathbf{C}[X, Y, Z]/(4XZ + Y^2)$ donc intègre. Donc B_λ est intègre, et les seuls éléments inversibles de B_λ sont les scalaires. D'autre part, pour tout $x \in B_\lambda$ non scalaire, les éléments $1, x, x^2,...$ sont linéairement indépendants.

1.3. Nous noterons e, f, h les images canoniques de E, F, H dans B_λ. On a

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f, \qquad [e, f] = h, \tag{1}$$

$$\lambda = 4fe + h^2 + 2h = 4ef + h^2 - 2h = 2ef + 2fe + h^2. \tag{2}$$

1.4. D'après le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, les $F^m H^n E^r$ (m, n, r entiers $\geqslant 0$) forment une base de l'espace vectoriel U. Donc les $f^m h^n e^r$ engendrent l'espace vectoriel B_λ. D'autre part

$$eh = (h - 2)e, \qquad fh = (h + 2)f, \tag{3}$$

donc, si p est un polynôme à coefficients complexes en une indéterminée,

$$e^r p(h) = p(h - 2r)\, e^r, \qquad f^m p(h) = p(h + 2m) f^m. \tag{4}$$

Compte tenu de la relation (2), on voit facilement que les $f^m h^n$ et les $h^n e^r$ (m, n, r entiers $\geqslant 0$) engendrent l'espace vectoriel B_λ (cf. aussi Lemme 1.9).

1.5. Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, soit $B_\lambda{}^\alpha$ l'ensemble des $b \in B_\lambda$ tels que $[h, b] = \alpha b$. On a $h \in B_\lambda{}^0$, $e \in B_\lambda{}^2$, $f \in B_\lambda^{-2}$, donc $B = \bigoplus_{\alpha \in 2\mathbf{Z}} B_\lambda{}^\alpha$, et l'algèbre B_λ est graduée par les $B_\lambda{}^\alpha$.

1.6. Montrons, conformément à une remarque de P. Gabriel, que les $f^m h^n$ et les $h^n e^r$ (m, n, r entiers $\geqslant 0$, $r > 0$) forment une base de l'espace vectoriel B_λ. On a $f^m h^n \in B_\lambda^{-2m}$ et $h^n e^r \in B_\lambda^{2r}$. Il suffit donc de prouver que: 1) les éléments f^m, $f^m h$, $f^m h^2$,... sont linéairement indépendants; 2) les éléments e^r, he^r, $h^2 e^r$,... sont linéairement indépendants. Or si par exemple on a une relation linéaire non triviale entre f^m, $f^m h$, $f^m h^2$,..., elle s'écrit $f^m p(h) = 0$ où p est un polynôme non identiquement nul; alors

$$f^m (h - \lambda_1)(h - \lambda_2) \cdots (h - \lambda_s) = 0,$$

ce qui contredit le fait que B_λ est intègre.

1.7. LEMME. *Soient $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie semi-simple, V son algèbre enveloppante, I un idéal bilatère de V.*

(i) *Toute dérivation de V/I est intérieure.*

(ii) $\operatorname{Der}(V)$ *laisse stable I, et l'application canonique* $\operatorname{Der}(V) \to \operatorname{Der}(V/I)$ *est surjective.*

Soient D une dérivation de V/I, j l'application canonique de V sur V/I, et $\varphi = (D \circ j) \mid \mathfrak{s}$. Soit $(V_0, V_1, V_2, \ldots)$ la filtration canonique de V. Il existe un entier, soit n, tel que $\varphi(\mathfrak{s}) \subset V_n/(V_n \cap I)$. On a, pour $x, y \in \mathfrak{s}$,

$$\varphi([x, y]) = D([jx, jy]) = [Djx, jy] + [jx, Djy] = [\varphi x, jy] + [jx, \varphi y]. \tag{5}$$

Considérons $V_n/(V_n \cap I)$ comme un $\mathfrak{s}$-module pour la représentation adjointe. Ce $\mathfrak{s}$-module est de dimension finie, et (5) peut s'écrire

$$\varphi([x, y]) = x \cdot \varphi(y) - y \cdot \varphi(x).$$

Comme $H^1(\mathfrak{s}, V_n/(V_n \cap I)) = 0$, il existe un $v \in V_n/(V_n \cap I)$ tel que $\varphi(x) = x \cdot v$, c'est-à-dire $D(j(x)) = -[v, j(x)]$, pour tout $x \in \mathfrak{s}$. Ainsi, les dérivations D et $\mathrm{ad}(-v)$ coïncident sur $j(\mathfrak{s})$ et par suite sur V/I tout entier. Cela prouve (i).

En particulier, tout élément de $\mathrm{Der}(V)$ est intérieur, donc laisse stable I. Tout élément de $\mathrm{Der}(V/I)$, étant intérieur, se relève en une dérivation de V, d'où (ii).

1.8. En particulier, toute dérivation de B_λ est intérieure.

1.9. Lemme. *Soient a, b des entiers $\geqslant 0$. Si $a \geqslant b$, on a*

$$f^a e^b = (-4)^{-b} f^{a-b}(h^{2b} + 2b^2 h^{2b-1} + \lambda_2 h^{2b-2} + \lambda_3 h^{2b-3} + \cdots + \lambda_{2b})$$
$$e^b f^a = (-4)^{-b} f^{a-b}(h^{2b} - 2b(2a-b)\, h^{2b-1} + \mu_2 h^{2b-2} + \mu_3 h^{2b-3} + \cdots + \mu_{2b}).$$

Si $a \leqslant b$, on a

$$f^a e^b = (-4)^{-a}(h^{2a} + 2a^2 h^{2a-1} + \nu_2 h^{2a-2} + \nu_3 h^{2a-3} + \cdots + \nu_{2a})\, e^{b-a}$$
$$e^b f^a = (-4)^{-a}(h^{2a} - 2a(2b-a)\, h^{2a-1} + \rho_2 h^{2a-2} + \rho_3 h^{2a-3} + \cdots + \rho_{2a})\, e^{b-a}.$$

Dans ces formules, les λ_i, μ_i, ν_i, ρ_i sont des nombres complexes.

Cela résulte par récurrence sur $\inf(a, b)$ des formules (2) et (4), grâce à des calculs fastidieux et faciles.

1.10. Soit Z le centre de U. Il est bien connu que $U = Z \oplus [U, U]$ et que $Z \cdot [U, U] = [U, U] \cdot Z = [U, U]$. Comme I_λ est engendré par l'élément $4FE + H^2 + 2H - \lambda$ de Z, on a $I_\lambda = (I_\lambda \cap Z) \oplus (I_\lambda \cap [U, U])$, et $B_\lambda = \mathbf{C} \oplus [B_\lambda, B_\lambda]$.

2. Polynômes associés aux éléments de B_λ

2.1. Soient X, Y des indéterminées. Dans $\mathbf{C}[X, Y]$, soit $\mathbf{C}_+[X, Y]$ la sous-algèbre à unité engendrée par X^2, XY, Y^2. L'espace vectoriel $\mathbf{C}_+[X, Y]$ admet pour base les monômes $X^m Y^n$ tels que $m + n$ soit pair. Soit φ l'application linéaire de $\mathbf{C}_+[X, Y]$ dans B_λ telle que

$$\varphi(X^{2m+n} Y^n) = 2^m f^m (h^n + (1/2)\, n^2 h^{n-1})$$
$$\varphi(X^n Y^{n+2r}) = (-2)^r (h^n + (1/2)\, n^2 h^{n-1})\, e^r.$$

Il résulte de 1.6 que φ est *bijective.* Nous noterons $*$ la multiplication sur $\mathbf{C}_+[X, Y]$ transportée de celle de B_λ grâce à φ^{-1}. La puissance n^{eme} d'un élément p de $\mathbf{C}_+[X, Y]$ pour la loi $*$ sera notée p^{*n}.

2.2. On déduit de (2), (4) et du lemme 1.9, par des calculs que nous laissons au soin du lecteur, les formules suivantes:

$$\begin{aligned}(X^{2m+n}Y^n) &* (X^{2m'+n'}Y^{n'})\\ &= X^{2m+2m'+n+n'}Y^{n+n'}\\ &\quad - n(2m'+n')\,X^{2m+2m'+n+n'-1}Y^{n+n'-1}\\ &\quad + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i X^{2m+2m'+n+n'-i}Y^{n+n'-i}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(X^nY^{n+2r}) &* (X^{n'}Y^{n'+2r'})\\ &= X^{n+n'}Y^{n+n'+2r+2r'}\\ &\quad - n'(n+2r)\,X^{n+n'-1}Y^{n+n'+2r+2r'-1}\\ &\quad + \sum_{i\geqslant 2} \mu_i X^{n+n'-i}Y^{n+n'+2r+2r'-i}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(X^{2m+n}Y^n) &* (X^{n'}Y^{n'+2r'})\\ &= X^{2m+n+n'}Y^{n+n'+2r'}\\ &\quad - nn'X^{2m+n+n'-1}Y^{n+n'+2r'-1}\\ &\quad + \sum_{i\geqslant 2} \nu_i X^{2m+n+n'-i}Y^{n+n'+2r'-i}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(X^{n'}Y^{n'+2r'}) &* (X^{2m+n}Y^n)\\ &= X^{2m+n+n'}Y^{n+n'+2r'}\\ &\quad - (n'+2r')(2m+n)\,X^{2m+n+n'-1}Y^{n+n'+2r'-1}\\ &\quad + \sum_{i\geqslant 2} \rho_i X^{2m+n+n'-i}Y^{n+n'+2r'-i}\end{aligned} \tag{9}$$

où les λ_i, μ_i, ν_i, ρ_i sont des nombres complexes.

2.3. Nous utiliserons certaines notations de [1], relatives aux éléments de $\mathbf{C}[X, Y]$. Rappelons ces notations en les spécialisant à $\mathbf{C}_+[X, Y]$. Si $p = \sum \alpha_{ij}X^iY^j \in \mathbf{C}_+[X, Y]$, on notera $E(p)$ l'ensemble des couples (i, j) tels que $\alpha_{ij} \neq 0$. Si ρ, σ sont des nombres réels, on posera

$$v_{\rho,\sigma}(p) = \sup_{(i,j)\in E(p)} (\rho i + \sigma j)$$

(on convient que $v_{\rho,\sigma}(0) = -\infty$). On notera $E(p, \rho, \sigma)$ l'ensemble des couples $(i, j) \in E(p)$ tels que $\rho i + \sigma j = v_{\rho,\sigma}(p)$; si $p \neq 0$, on a $E(p, \rho, \sigma) \neq \varnothing$. Si $\rho i + \sigma j = w$ pour tout $(i, j) \in E(p)$, on dira que p est (ρ, σ)-homogène de (ρ, σ)-degré w. En transportant ces notions par φ, on définit $E(x)$, $v_{\rho,\sigma}(x)$, $E(x, \rho, \sigma)$ pour $x \in B_\lambda$. Si $\varphi^{-1}(x) = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$, le polynôme $\sum_{(i,j)\in E(x,\rho,\sigma)} \alpha_{ij} X^i Y^j$ sera appelé le polynôme (ρ, σ)-associé à x.

2.4. Lemme. *Soient $x, y, z \in B_\lambda$ tels que $z = xy$; soient $p = \varphi^{-1}(x)$, $q = \varphi^{-1}(y)$, $r = \varphi^{-1}(z)$. Soient ρ, σ des nombres réels tels que $\rho + \sigma > 0$:*

(i) *On a*

$$r(X, Y) = p(X, Y)\, q(X, Y) - \frac{\partial p}{\partial Y}(X, Y) \frac{\partial q}{\partial X}(X, Y) + l(X, Y)$$

avec $v_{\rho,\sigma}(l) \leqslant v_{\rho,\sigma}(p) + v_{\rho,\sigma}(q) - 2\rho - 2\sigma$.

(ii) *Le polynôme (ρ, σ)-associé à z est le produit des polynômes (ρ, σ)-associés à x et y.*

(iii) $v_{\rho,\sigma}(z) = v_{\rho,\sigma}(x) + v_{\rho,\sigma}(y)$.

Ecrivons $p = \sum p_i$, $q = \sum q_j$, où les p_i, q_j sont des monômes tels que $v_{\rho,\sigma}(p_i) \leqslant v_{\rho,\sigma}(p)$, $v_{\rho,\sigma}(q_j) \leqslant v_{\rho,\sigma}(q)$ quels que soient i et j. Alors $r = \sum_{i,j} p_i * q_j$. D'après (6), (7), (8), (9), on a

$$p_i * q_j = p_i q_j - \frac{\partial p_i}{\partial Y} \frac{\partial q_j}{\partial X} + l_{ij}$$

avec $v_{\rho,\sigma}(l_{ij}) \leqslant v_{\rho,\sigma}(p_i) + v_{\rho,\sigma}(q_j) - 2\rho - 2\sigma \leqslant v_{\rho,\sigma}(p) + v_{\rho,\sigma}(q) - 2\rho - 2\sigma$, d'où (i). Comme $v_{\rho,\sigma}(\partial p/\partial Y) = v_{\rho,\sigma}(p) - \sigma$ et $v_{\rho,\sigma}(\partial q/\partial X) = v_{\rho,\sigma}(q) - \rho$, on en déduit facilement (ii) et (iii).

2.5. Lemme. *Soient $x, y, z \in B_\lambda$ tels que $z = [x, y]$; soient $p = \varphi^{-1}(x)$, $q = \varphi^{-1}(y)$, $r = \varphi^{-1}(z)$. Soient ρ, σ des nombres réels tels que $\rho + \sigma > 0$. Posons $v = v_{\rho,\sigma}(x)$, $w = v_{\rho,\sigma}(y)$. Soient p_1 et q_1 les polynômes (ρ, σ)-associés à x et y.*

(i) *On a*

$$r(X, Y) = \frac{\partial p}{\partial X}(X, Y) \frac{\partial q}{\partial Y}(X, Y) - \frac{\partial p}{\partial Y}(X, Y) \frac{\partial q}{\partial X}(X, Y) + l(X, Y)$$

avec $v_{\rho,\sigma}(l) \leqslant v + w - 2\rho - 2\sigma$.

(ii) *Il existe un couple (t, u) d'éléments de B_λ et un seul possédant les propriétés suivantes:*

(a) $z = t + u$;

(b) *t est (ρ, σ)-homogène de degré $v + w - \rho - \sigma$;*

(c) $v_{\rho,\sigma}(u) < v + w - \rho - \sigma$.

(iii) *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(iii$_1$) $t = 0$;

(iii$_2$) $(\partial p_1/\partial X)(\partial q_1/\partial Y) - (\partial p_1/\partial Y)(\partial q_1/\partial X) = 0$.

Si v et w sont des entiers, ces conditions sont encore équivalentes à la suivante:

(iii$_3$) *$q_1{}^v$ est proportionnel à $p_1{}^w$.*

(iv) *Si $t \neq 0$, le polynôme (ρ, σ)-associé à z est* $(\partial p_1/\partial X)(\partial q_1/\partial Y) - (\partial p_1/\partial Y)(\partial q_1/\partial X)$.

Cela se déduit facilement de 2.4 (cf., dans [1], le passage de 2.2, 2.4 à 2.6, 2.7).

Ces lemmes nous permettront d'imiter de très près les démonstrations de [1].

3. Classification des éléments de B_λ

3.1. Les définitions données en [1], 6.1 à 6.3, pour une algèbre associative quelconque, s'appliquent naturellement à B_λ. Si $x \in B_\lambda$ et $\mu \in \mathbf{C}$, on peut donc considérer les sous-espaces vectoriels $F(x, \mu)$ et $D(x, \mu)$ de B_λ, les sous-algèbres $F(x) = \bigoplus_{\mu \in \mathbf{C}} F(x, \mu)$, $D(x) = \bigoplus_{\mu \in \mathbf{C}} D(x, \mu)$ et $N(x) = F(x, 0)$. Rappelons le sens de ces notations. D'abord, $F(x)$ est l'ensemble des $y \in B_\lambda$ tels que y, $(\operatorname{ad} x) \cdot y$, $(\operatorname{ad} x)^2 \cdot y, \ldots$ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie; et $F(x, \mu)$ est l'ensemble des $y \in B_\lambda$ tels que $(\operatorname{ad} x - \mu)^n \cdot y$ soit nul pour n assez grand; on a $F(x, \mu) F(x, \mu') \subset F(x, \mu + \mu')$. Ensuite $D(x, \mu)$ est le sous-espace propre de $\operatorname{ad} x$ relativement à la valeur propre μ; on a $D(x, \mu)\, D(x, \mu') \subset D(x, \mu + \mu')$. Si $\mu \in \mathbf{C} - \{0\}$, alors $D(x, \mu) = F(x, \mu)$ (cf. [1], 6.5; la démonstration de [1] reposait uniquement sur le fait que A_1 est intègre et que la dimension de Gelfand–Kirillov de A_1 est 2; or cela se démontre pour B_λ comme pour A_1). On a $F(x) = D(x)$ ou $F(x) = N(x)$ (même démonstration que pour [1], 6.6).

3.2. On peut donc classer les éléments de B_λ comme nous avons classé en [1], 6.7 et 6.8, les éléments de A_1. Nous nous contenterons de ceci: un élément x de B_λ est dit *de type strictement semi-simple* si $D(x) = B_\lambda$ (autrement dit si $\operatorname{ad} x$ est diagonalisable), et *de type strictement nilpotent* si $N(x) = B_\lambda$ (autrement dit si $\operatorname{ad} x$ est localement nilpotent).

3.3. Lemme. *Soient ρ, σ des entiers > 0, x un élément de B_λ, $v = v_{\rho,\sigma}(x)$, et q le polynôme (ρ, σ)-associé à x. On suppose que*:

(1) $v > \rho + \sigma$;

(2) *q n'est pas un monôme*;

(3) *on n'est pas dans l'un des cas* a), b), c) *ci-dessous*:

(a) $\sigma > \rho$, *σ est multiple de* ρ, *et* $q(X, Y) = \lambda X^{\alpha}(X^{\sigma/\rho} + \mu Y)^{\beta}$ *où* $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ *et* α, β *sont des entiers* $\geqslant 0$;

(b) $\rho > \sigma$, *ρ est multiple de* σ, *et* $q(X, Y) = \lambda Y^{\alpha}(Y^{\rho/\sigma} + \mu X)^{\beta}$ *où* $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ *et* α, β *sont des entiers* $\geqslant 0$;

(c) $\rho = \sigma$.

Alors $F(x)$ *se réduit au commutant de* x *dans* B_λ.

On peut recopier mot pour mot la démonstration de [1], 7.2 à 7.4.

4. Certains automorphismes de B_λ

4.1. Si $x \in B_\lambda$ est de type strictement nilpotent, et si $y \in B_\lambda$ est un polynôme en x, il est immédiat que y est de type strictement nilpotent (car on voit par récurrence sur n que $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad} y)^n \supset \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} x)^n$).

4.2. Il résulte de 4.1 que, pour tout $\mu \in \mathbf{C}$ et tout entier $n > 0$, $\operatorname{ad}(\mu f^n)$ est une dérivation localement nilpotente de B_λ. *Notons* $\Phi_{n,\mu}$ *l'automorphisme* $\exp \operatorname{ad}(\mu f^n)$ *de* B_λ. *De même, soit* $\Psi_{n,\mu}$ *l'automorphisme* $\exp \operatorname{ad}(\mu e^n)$ *de* B_λ. *Notons provisoirement* G le sous-groupe de $\operatorname{Aut}(B_\lambda)$ engendré par les $\Phi_{n,\mu}$ et les $\Psi_{n,\mu}$ (on verra en 6.1 que $G = \operatorname{Aut}(B_\lambda)$).

4.3. On sait que les $\exp \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mu E$ et $\exp \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mu F$ engendrent le groupe $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. Donc tout automorphisme de $\mathfrak{g}$ se prolonge de manière unique en un automorphisme de U qui laisse stable I_λ; cet automorphisme définit par passage au quotient un automorphisme de B_λ. Nous avons ainsi défini un homomorphisme, évidemment injectif, de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ dans $\operatorname{Aut}(B_\lambda)$. Nous identifierons $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ à un sous-groupe de $\operatorname{Aut}(B_\lambda)$ grâce à cet homomorphisme. Il est clair que $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) \subset G$.

4.4. En particulier, nous noterons Ω l'automorphisme de B_λ tel que $\Omega(e) = f$, $\Omega(f) = e$, $\Omega(h) = -h$. Ce qui précède prouve que $\Omega \in G$.

4.5. On a

$$\Phi_{n,\mu}(f) = f. \tag{10}$$

Puis $[f^n, h] = 2nf^n$, donc

$$\Phi_{n,\mu}(h) = h + 2\mu n f^n. \tag{11}$$

Enfin,

$$[f^n, e] = -hf^{n-1} - fhf^{n-2} - \cdots - f^{n-1}h = -nf^{n-1}h + n(n-1)f^{n-1}$$

d'où

$$\Phi_{n,\mu}(e) = e - \mu n f^{n-1}h + \mu n(n-1) f^{n-1} - \mu^2 n^2 f^{2n-1}. \tag{12}$$

4.6. Nous noterons $\Phi'_{n,\mu}$, G' les objets transportés de $\Phi_{n,\mu}$, G par la bijection φ. Ainsi, les $\Phi'_{n,\mu}$ sont des automorphismes de $\mathbf{C}_+[X, Y]$ muni de la multiplication $*$.

4.7. LEMME. *On a*

$$\Phi'_{n,\mu}(X^{2m}) = X^{2m} \qquad \textit{pour tout entier } m \geqslant 0. \tag{13}$$

$$\Phi'_{n,\mu}(XY) = XY + 2^{1-n}\mu n X^{2n} \tag{14}$$

$$\Phi'_{n,\mu}(Y^2) = (Y + 2^{1-n}\mu n X^{2n-1})^2 - 2^{1-n}\mu n(2n-1)\, X^{2n-2}. \tag{15}$$

La formule (13) résulte de (10). On a, d'après (11),

$$\Phi'_{n,\mu}(XY) = \varphi^{-1}(\Phi_{n,\mu}(h + \tfrac{1}{2})) = \varphi^{-1}(h + \tfrac{1}{2} + 2\mu n f^n) = XY + 2\mu n 2^{-n} X^{2n},$$

d'où (14). Enfin, d'après (12),

$$\begin{aligned}
\Phi'_{n,\mu}(Y^2) &= \varphi^{-1}(\Phi_{n,\mu}(-2e)) \\
&= \varphi^{-1}(-2e + 2\mu n f^{n-1} h - 2\mu n(n-1) f^{n-1} + 2\mu^2 n^2 f^{2n-1}) \\
&= \varphi^{-1}(-2e + 2\mu n f^{n-1}(h + \tfrac{1}{2}) - \mu n(2n-1) f^{n-1} + 2\mu^2 n^2 f^{2n-1}) \\
&= Y^2 + 2\mu n 2^{1-n} X^{2(n-1)+1} Y - \mu n(2n-1)\, 2^{1-n} X^{2n-2} \\
&\quad + 2\mu^2 n^2 2^{1-2n} X^{4n-2},
\end{aligned}$$

d'où (15).

4.8. LEMME. (i) *On a*

$$\Phi'_{n,\mu}(X^{i+2j} Y^i) = (XY + 2^{1-n}\mu n X^{2n})^i X^{2j} + l(X, Y) \tag{16}$$

$$\Phi'_{n,\mu}(X^i Y^{i+2j}) = (XY + 2^{1-n}\mu n X^{2n})^i (Y + 2^{1-n}\mu n X^{2n-1})^{2j} + l'(X, Y) \tag{17}$$

avec $v_{1,2n-1}(l) < 2ni + 2j$, $v_{1,2n-1}(l') < 2ni + 2(2n-1)j$.

(ii) *Dans* $\Phi'_{n,\mu}(X^{i+2j}Y^i)$, *le terme en* X^{2ni+2j} *a pour coefficient* $2^{i(1-n)} n^i \mu^i$. *Dans* $\Phi'_{n,\mu}(X^i Y^{i+2j})$, *le terme en* $X^{2ni+2(2n-1)j}$ *a pour coefficient* $2^{(i+2j)(1-n)} n^{i+2j} \mu^{i+2j}$.

Soit a un entier > 0. Supposons (16) et (17) prouvés pour les monômes M tels que $v_{1,2n-1}(M) < a$. Soient i, j tels que $2ni + 2j = a$. D'après 2.4(ii), on a

$$X^{i+2j} Y^i = (XY)^{*i} * (X^2)^{*j} + \sum_{r+(2n-1)s < a} \alpha_{rs} X^r Y^s.$$

D'après (13), (14), 2.4(ii) et l'hypothèse de récurrence, on en déduit (16). La formule (17) se démontre de manière analogue. L'assertion (ii) se déduit aussitôt de (i).

5. Quelques lemmes

5.1. Lemme. *Soit $p \in \mathbf{C}_+[X, Y]$, de la forme*

$$\alpha_0 + \alpha_2 X^2 + \alpha^4 X_4 + \cdots + \alpha_{2r} X^{2r} + \alpha XY$$

avec $\alpha \neq 0$. Il existe $\Phi \in G'$ tel que $\Phi(p)$ soit de la forme $\beta_0 + \beta XY$.

Le lemme est évident pour $r = 0$. Supposons-le démontré pour $r - 1$. On a

$$\Phi'_{r,\mu}(p) = \alpha_0 + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_{2r-2} X^{2r-2} + \alpha XY + (\alpha_{2r} + 2^{1-r}\alpha\mu r)\, X^{2r}.$$

Il suffit alors de prendre $\mu = -2^{r-1}\alpha_{2r}\alpha^{-1}r^{-1}$, et d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

5.2. Lemme. *Soit $p = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j \in \mathbf{C}_+[X, Y]$. Soit r le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que $\alpha_{i0} = 0$ pour $i > r$. Soit s le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que $\alpha_{0j} = 0$ pour $j > s$. On suppose qu'il existe des entiers i_1, j_1 tels que: 1) $\alpha_{i_1, j_1} \neq 0$; 2) $(i_1, j_1) \neq (1, 1)$; 3) $si_1 + rj_1 > rs$, ou bien $(i_1, j_1) \neq (0, 0)$ si $r = s = 0$. Alors $F(\varphi(p)) \neq B_\lambda$.*

Imitons la démonstration de [1, Lemme 8.7]. Supposons $i_1 = 0$. On a $j_1 \leqslant s$ par définition de s, donc $si_1 + rj_1 \leqslant rs$; d'après l'hypothèse 3, $r = s = 0$, donc $j_1 = 0$, ce qui est contraire à $(i_1, j_1) \neq (0, 0)$. Donc $i_1 > 0$ et de même $j_1 > 0$.

Il existe des nombres $\rho > 0$, $\sigma > 0$, de rapport irrationnel, tels que $\sigma i_1 + \rho j_1 > \rho s$, $\sigma i_1 + \rho j_1 > r\sigma$ (on prend (ρ, σ) suffisamment voisin de (r, s)). Puis il existe des entiers $i_2 \geqslant 0, j_2 \geqslant 0$ tels que $\alpha_{i_2 j_2} \neq 0$, $\sigma i_2 + \rho j_2 = v_{\sigma,\rho}(p)$. Alors $\sigma i_2 + \rho j_2 > \rho s$, $\sigma i_2 + \rho j_2 > r\sigma$. Cela entraîne d'abord $i_2 > 0, j_2 > 0$. Si $i_2 = j_2 = 1$, on a $\sigma + \rho \leqslant \sigma i_1 + \rho j_1 \leqslant \sigma i_2 + \rho j_2 = \sigma + \rho$, d'où $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$ et $(i_1, j_1) = (1, 1)$ contrairement à l'hypothèse. Donc $i_2 > 1$ ou $j_2 > 1$. D'après [1], 1.3(ii), le polynôme (σ, ρ)-associé à $\varphi(p)$ est $\alpha_{i_2 j_2} X^{i_2} Y^{j_2}$.

Supposons $i_2 \leqslant j_2$. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, posons $y_n = (\operatorname{ad} \varphi(p))^n \varphi(Y^2)$. Montrons par récurrence sur n que le polynôme (σ, ρ)-associé à y_n est

$$\beta_n X^{n(i_2-1)} Y^{2+n(j_2-1)}$$

avec $\beta_n \in \mathbf{C}$, $\beta_n \neq 0$. C'est évident pour $n = 0$. Supposons-le établi pour n. On a

$$i_2(2 + n(j_2 - 1)) - j_2 n(i_2 - 1) = 2i_2 + nj_2 - ni_2 \geqslant 2i_2 > 0$$

donc (Lemme 2.5(iv)) le polynôme (σ, ρ)-associé à $y_{n+1} = [\varphi(p), y_n]$ est

$$(2i_2 + nj_2 - ni_2)\, \alpha_{i_2 j_2} \beta_n X^{i_2 + n(i_2-1)-1} Y^{j_2+2+n(j_2-1)-1}$$

d'où notre assertion pour $n + 1$. On a en outre

$$v_{\sigma,\rho}(y_n) = \sigma n(i_2 - 1) + \rho(2 + n(j_2 - 1)).$$

Comme $j_2 > 1$ et $i_2 > 0$, on voit que $v_{\sigma,\rho}(y_n) \to +\infty$ avec n. Donc $\varphi(Y^2) \in F(\varphi(p))$, et $F(\varphi(p)) \neq B_\lambda$.

Si $i_2 \geqslant j_2$, on se ramène au cas précédent en utilisant l'automorphisme Ω.

5.3. Lemme. *Soit $x \in B_\lambda$ tel que $F(x) = B_\lambda$. Il existe $\Phi \in G$ tel que $\Phi(x)$ possède l'une des propriétés suivantes: ou bien $\Phi(x) \in \mathbf{C}[f]$, ou bien $\Phi(x) \in \mathbf{C}e + \mathbf{C}f + \mathbf{C}h + \mathbf{C}1$.*

Imitons la démonstration de [1], Lemme 8.8. Soit $p = \varphi^{-1}(x)$. Introduisons les entiers r, s du Lemme 5.2. Si $r = s = 0$, on a $p \in \mathbf{C} + \mathbf{C}XY$ (Lemme 5.2). donc $x \in \mathbf{C} + \mathbf{C}h$. Si $r > 0$ et $s = 0$, on a $p \in \mathbf{C}XY + \mathbf{C} + \mathbf{C}X^2 + \mathbf{C}X^4 + \cdots$ (Lemme 5.2) et il suffit d'appliquer le Lemme 5.1. De même si $r = 0$ et $s > 0$. Nous supposerons donc $r \geqslant 2$, $s \geqslant 2$, et le lemme établi pour $r + s < n$; nous envisagerons désormais le cas où $r + s = n$. Utilisant l'automorphisme Ω, on peut supposer que $r \geqslant s$. Si $r = 2$, d'où $r = s = 2$, on a $p \in \mathbf{C} + \mathbf{C}X^2 + \mathbf{C}XY + \mathbf{C}Y^2$ (Lemme 5.2), donc $x \in \mathbf{C}e + \mathbf{C}f + \mathbf{C}h + \mathbf{C}1$. Supposons donc $r > 2$, d'où $r + s < rs$. Si $(i, j) \in E(x)$, le Lemme 5.2 prouve que, ou bien $si + rj \leqslant rs$, ou bien $i = j = 1$, et alors $si + rj = s + r < rs$. Donc $v_{s,r}(x) = rs$ et le polynôme (s, r)-associé à x est de la forme

$$q(X, Y) = \beta_0 X^r + \cdots + \beta_s Y^s \qquad \text{avec} \quad \beta_0 \neq 0, \beta_s \neq 0. \tag{18}$$

Comme $q \in \mathbf{C}_+[X, Y]$, r et s sont pairs. Appliquons le Lemme 3.3 avec $\rho = s$, $\sigma = r$. Comme $r \geqslant s$, on est dans le cas (a) ou dans le cas (c) de ce lemme. Dans le cas (a), r est multiple de s, et, d'après (18), q est proportionnel à $(X^{r/s} + \mu Y)^s$ avec $\mu \in \mathbf{C}$, $\mu \neq 0$. Comme $q \in \mathbf{C}_+[X, Y]$, les entiers

$$s, s - 1 + \frac{r}{s}, \qquad s - 2 + 2\frac{r}{s}, \ldots, s - s + s\frac{r}{s}$$

sont tous pairs, autrement dit s est pair et r/s est impair. Dans le cas (c), on a $r = s$. Dans tous les cas, on peut donc poser $s = 2t$ et $r = (2n - 1)\,2t$, où n et t sont des entiers > 0. Ainsi,

$$q(X, Y) = \beta_0 X^{(2n-1)2t} + \beta_1 X^{(2n-1)(2t-1)} Y + \beta_2 X^{(2n-1)(2t-2)} Y^2 + \cdots + \beta_{2t} Y^{2t}.$$

Soit $\nu \in \mathbf{C}$. D'après le Lemme 4.8, on a $v_{1,2n-1}(\Phi'_{n,\nu}(p)) \leqslant v_{1,2n-1}(p) = 2t(2n - 1)$, et le terme en $X^{(2n-1)2t}$ dans $\Phi'_{n,\nu}(p)$ a pour coefficient

$$\beta_0 + 2^{1-n} n \beta_1 \nu + 2^{2(1-n)} n^2 \beta_2 \nu^2 + \cdots + 2^{2t(1-n)} n^{2t} \beta_{2t} \nu^{2t}.$$

En choisissant bien ν, on peut supposer que ce coefficient est nul. Si r_1 et s_1 sont les entiers analogues aux entiers r et s du Lemme 5.2, mais relatifs à $\Phi'_{n,\nu}(p)$, on voit que $s_1 \leqslant s$ et $r_1 < r$, donc $r_1 + s_1 < n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\Phi \in G$ tel que $\Phi(\Phi_{n,\nu}(x))$ possède l'une des deux propriétés du lemme.

5.4. LEMME. *Soit* $x \in B_\lambda$.

(i) *Si x est de type strictement nilpotent, il existe $\Phi \in G$ tel que $\Phi(x) \in \mathbf{C}[f]$.*

(ii) *Si x est de type strictement semi-simple, il existe $\Phi \in G$ tel que $\Phi(x) \in \mathbf{C}1 + \mathbf{C}h$.*

Supposons x de type strictement nilpotent. On peut lui appliquer le Lemme 5.3 et on est ramené aux 2 cas suivants: 1) $x \in \mathbf{C}[f]$; 2) $x = \mu e + \nu h + \rho f + \sigma$ avec $\mu, \nu, \rho, \sigma \in \mathbf{C}$. Le cas 1 est immédiat. Envisageons le cas 2. Comme la restriction de $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad}(\mu e + \nu h + \rho f)$ à $\mathbf{C}e + \mathbf{C}h + \mathbf{C}f$ est nilpotente, $\mu e + \nu h + \rho f$ est transformé de f ou de 0 par un élément de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ donc de G, ce qui achève de prouver (i).

Supposons x de type strictement semi-simple. Le Lemme 5.3 ramène encore aux cas 1 et 2 ci-dessus. Dans le cas 1, x est de type strictement nilpotent (4.1), donc $\operatorname{ad} x = 0$ et $x \in \mathbf{C}1$. Envisageons le cas 2. Comme la restriction de $\operatorname{ad}(\mu e + \nu h + \rho f)$ à $\mathbf{C}e + \mathbf{C}h + \mathbf{C}f$ est semisimple, $\mu e + \nu h + \rho f$ est transformé par $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ d'un élément de $\mathbf{C}h$, d'où (ii).

5.5. LEMME. *Soient e_1, f_1, h_1 des éléments de B_λ, engendrant B_λ, tels que $[h_1, e_1] = 2e_1$, $[h_1, f_1] = -2f_1$, $[e_1, f_1] = h_1$. Il existe $\Phi \in G$ tel que $\Phi(e) = e_1$, $\Phi(f) = f_1$, $\Phi(h) = h_1$.*

L'élément h_1 est de type strictement semi-simple. D'après le lemme 5.4(ii), on est ramené au cas où $h_1 = \alpha + \beta h$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$, $\beta \in \mathbf{C}$. Comme $h_1, h \in [B_\lambda, B_\lambda]$, on a $\alpha = 0$ d'après 1.10. L'ensemble des valeurs propres de $\operatorname{ad} h_1$ est $2\mathbf{Z}$, donc $\beta = \pm 1$. Bref, on est ramené au cas où $h_1 = h$.

On a $[h, e_1] = 2e_1$, $[h, f_1] = -2f_1$. D'après 1.5 et 1.6, on peut donc écrire

$$e_1 = \alpha_0 e + \alpha_1 he + \alpha_2 h^2 e + \cdots + \alpha_n h^n e \qquad (\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}, \alpha_n \neq 0),$$
$$f_1 = \beta_0 f + \beta_1 fh + \beta_2 fh^2 + \cdots + \beta_r fh^r \qquad (\beta_0, \ldots, \beta_r \in \mathbf{C}, \beta_r \neq 0).$$

Alors

$$\begin{aligned} h = [e_1, f_1] &= \sum_{ij} \alpha_i \beta_j [h^i e, fh^j] \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \beta_j (h^i efh^j - fh^{i+j} e) \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \beta_j (h^i efh^j - fe(h+2)^{i+j}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{ij} \alpha_i\beta_j \Big(-\frac{1}{4} h^{i+j+2} + \frac{1}{2} h^{i+j+1} + \frac{\lambda}{4} h^{i+j} + \frac{1}{4} h^2(h+2)^{i+j}$$
$$+ \frac{1}{2} h(h+2)^{i+j} - \frac{\lambda}{4}(h+2)^{i+j}\Big)$$
$$= \sum_{ij} \alpha_i\beta_j(\tfrac{1}{2}(i+j+2)\, h^{i+j+1} + \lambda_{ij1}h^{i+j} + \lambda_{ij2}h^{i+j-1} + \cdots).$$

Dans cette dernière somme, le coefficient de h^{n+r+1} est $\alpha_n\beta_r\frac{1}{2}(n+r+2) \neq 0$. Donc $n = r = 0$, de sorte que $e_1 = \alpha_0 e$, $f_1 = \beta_0 f$, avec $\alpha_0\beta_0 = 1$. Alors il existe un $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tel que $\Phi(e) = e_1$, $\Phi(f) = f_1$, $\Phi(h) = h_1$.

6. Les résultats principaux

6.1. Théorème. *Le groupe* $\mathrm{Aut}(B_\lambda)$ *est engendré par les automorphismes* $\Phi_{n,\mu}$ *et* $\Psi_{n,\mu}$ (*n entier* > 0, $\mu \in \mathbf{C}$).

Soit $\Phi \in \mathrm{Aut}(B_\lambda)$. Alors $e_1 = \Phi(e)$, $f_1 = \Phi(f)$, $h_1 = \Phi(h)$ possèdent les propriétés du lemme 5.5. Donc il existe $\Phi' \in G$ tel que $\Phi'(e) = e_1$, $\Phi'(f) = f_1$, $\Phi'(h) = h_1$, d'où $\Phi = \Phi' \in G$.

6.2. Théorème. *Soit* $x \in B_\lambda$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *x est de type strictement nilpotent*;

(ii) *il existe un automorphisme* Φ *de* B_λ *tel que* $\Phi(x) \in \mathbf{C}[f]$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): cela résulte de 4.1.

(i) $\Rightarrow$ (ii): cela résulte de 5.4(i).

6.3. Théorème. *Soit* $x \in B_\lambda$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *x est de type strictement semi-simple*;

(ii) *il existe un automorphisme* Φ *de* B_λ *tel que* $\Phi(x) \in \mathbf{C}1 + \mathbf{C}h$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): c'est évident.

(i) $\Rightarrow$ (ii): cela résulte de 5.4(ii).

6.4. Théorème. *Soient* $\lambda, \lambda' \in \mathbf{C}$. *Si* B_λ *et* $B_{\lambda'}$ *sont isomorphes, on a* $\lambda = \lambda'$.

Soit Φ un isomorphisme de $B_{\lambda'}$ sur B_λ. Soient e', f', h' les images canoniques de E, F, H dans $B_{\lambda'}$. Alors $e_1 = \Phi(e')$, $f_1 = \Phi(f')$, $h_1 = \Phi(h')$ possèdent les propriétés du Lemme 5.5. Donc il existe $\Phi_1 \in \mathrm{Aut}(B_\lambda)$ tel que $\Phi_1(e) = e_1$, $\Phi_1(f) = f_1$, $\Phi_1(h) = h_1$. Par suite

$$\lambda = \Phi_1(\lambda) = \Phi_1(4fe + h^2 + 2h) = \Phi(4f'e' + h'^2 + 2h') = \Phi(\lambda') = \lambda'.$$

7. Remarques diverses

7.1. On a $1 \in [A_1, A_1]$. Si l'on compare à 1.10, on conclut qu'aucune B_λ n'est isomorphe à A_1. D'autre part, il est facile de voir que le corps des fractions de B_λ est isomorphe au corps des fractions de A_1.

7.2. Soient p, q des générateurs de A_1 tels que $[p, q] = 1$. Soit $\mu \in \mathbf{C}$ une racine de $\mu^2 + 2\mu - \lambda = 0$. Comme me l'a fait remarquer N. Conze, il existe un isomorphisme de B_λ sur une sous-algèbre de A_1 qui transforme e en $-\mu q - pq^2$, f en p, h en $\mu + 2pq$.

7.3. Soit $\Phi \in \operatorname{Aut}(U)$. Pour $\lambda = n^2 + 2n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, Φ laisse stable I_λ' (cf. introduction) qui est l'unique idéal bilatère de codimension $(n + 1)^2$ dans U. Donc Φ laisse stable l'idéal du centre Z de U engendré par $Q - \lambda$. Il résulte de là que Φ induit l'identité sur Z, et laisse donc stable chaque I_λ. On en déduit un homomorphisme ω: $\operatorname{Aut}(U) \to \operatorname{Aut}(B_\lambda)$. Le th. 6.1 entraîne que ω est surjectif, car il est clair que les $\Phi_{n,\mu}$ et les $\Psi_{n,\mu}$ se relèvent en automorphismes de U. Il est facile de voir que ω n'est pas injectif.

7.4. Les sous-algèbres commutatives de B_λ possèdent des propriétés analogues à celles des sous-algèbres commutatives de A_1 [1, §§4, 5.1, 5.2]; elles s'établissent de la même façon.

References

1. J. Dixmier, Sur les algèbres de Weyl, *Bull. Soc. Math. France* **96** (1968), 209–242.
2. Y. Nouazé et P. Gabriel, Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *J. Algebra* **6** (1967), 77–99.