JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 10, 204–211 (1972)

C^*-Algebren mit geordneten Ideal Folgen

H. BEHNCKE, F. KRAUß, AND H. LEPTIN

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, 69 Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 5, Deutschland

Communicated by the Editors

Received March 11, 1971

Let K be a separable infinite-dimensional Hilbert space and let J be a countable totally ordered set. Every decomposition of J,

$$J = \{i \in J \mid i < j\} \cup \{i \in J \mid i \geqslant j\}$$

induces a factorisation of the incomplete tensorproduct H of K over J, $H = H_j \otimes H^j$. Let $\mathscr{K}(H)$ denote the algebra of all compact operators on H. Then $\mathscr{A}_J$ is the C^*-algebra of operators on H generated by $1 \otimes \mathscr{K}(H^j)$, $j \in J$. All ideals of $\mathscr{A}_J$ are primitive and form a chain. They correspond to certain cuts in J. In particular, $\mathscr{A}_J$ has a maximal (minimal) ideal iff J has a largest (smallest) element. Thus $\mathscr{A}_J$ is antiliminal iff J has no smallest element, and $\mathscr{A}_J$ is postliminal iff J is well ordered. In particular, $\mathscr{A}_Z$ is antiliminal and all proper quotients of $\mathscr{A}_Z$ are isomorphic postliminal C^*-algebras. The example $\mathscr{A}_N$ has been considered previously by J. Dixmier.

In [4] wurde mit Hilfe von Transformationsgruppen eine separable postliminale C^*-Algebra ohne maximale Ideale konstruiert. Dort wurde das Problem gestellt, eine C^*-Algebra mit dichtem Ideal-Verband zu finden. Die vorliegende Arbeit erwuchs aus den Bemühungen, eine solche Algebra mit anderen Mitteln als denen der Transformationsgruppen zu bestimmen. Ausgangspunkt ist dabei ein Beispiel von J. Dixmier [1, 4.7.17]. Dies wird wie folgt verallgemeinert: Mit $\mathscr{K}(\mathfrak{H})$ bezeichnen wir stets die C^*-Algebra aller kompakten Operatoren eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Sei J eine total geordnete Menge und $\mathfrak{K}$ ein unendlich dimensionaler Hilbertscher Raum. Jede disjunkte Zerlegung von J, $J = \{i; i < j\} \cup \{i; i \geqslant j\}$ definiert eine Faktorisierung des unvollständigen Tensorproduktes $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{K}$ über $J: \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_j \otimes \mathfrak{H}^j$. Sei $\mathscr{A}_J$ dann die von allen $\mathbf{1}_j \otimes \mathscr{K}(\mathfrak{H}^j)$ erzeugte C^*-Algebra von Operatoren auf $\mathfrak{H}$. Für $J = N$, die natürlichen Zahlen, erhält man das Beispiel von Dixmier.

Wir zeigen dann, daß alle Ideale von $\mathscr{A}_J$ primitiv sind und eine

Kette bilden. Die Ideale dieser Kette entsprechen gewissen Schnitten von J. Insbesondere hat $\mathscr{A}_J$ ein maximales (minimales) Ideal, wenn J ein größtes (kleinstes) Element hat. Als direkte Folgerung daraus erhält man, daß $\mathscr{A}_J$ genau dann antiliminal ist, wenn J kein kleinstes Element hat. Weiter ist $\mathscr{A}_J$ genau dann postliminal, wenn J wohlgeordnet ist. Es stellt sich jedoch heraus, daß das angegebene Verfahren ungeeignet ist, separable C^*-Algebren mit dichtem Ideal-Verband zu konstruieren, und man wird daher für solche Beispiele wohl auf Transformationsgruppen oder ein anderes Verfahren zurückgreifen müssen.

Wählt man zum Beispiel $J = Z$, die ganzen Zahlen, so erhält man eine antiliminale C^*-Algebra, deren sämtliche echte Quotienten isomorphe postliminale C^*-Algebren sind. Abschließend werden noch einige Verallgemeinerungen der angegebenen Konstruktion besprochen. Alle in dieser Arbeit betrachteten Hilbertschen Räume sind separabel und unendlich dimensional. Ist $\mathfrak{H}$ ein solcher Hilbertscher Raum, so bezeichnen $\mathscr{B}(\mathfrak{H})(\mathscr{K}(\mathfrak{H}))$ die Algebra aller beschränkten (kompakten) Operatoren. Normen von Operatoren a, Elementen ξ aus $\mathfrak{H}$ usw. bezeichnen wir grundsätzlich mit $| a |$, $| \xi |$ usw. Es ist wesentlich für unsere Überlegungen, daß $\mathscr{K}(\mathfrak{H})$ eine einfache Algebra ist. Wir beginnen mit einem einfachen Lemma, das im folgenden vielfach verwandt wird.

LEMMA. *Ist $\mathfrak{H}$ das Tensorprodukt zweier unendlich dimensionaler Hilbertscher Räume $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, so gilt für die Distanz die Formel*

$$\operatorname{dist}(1 \otimes a, \mathscr{K}(\mathfrak{H}_1) \otimes \mathscr{B}(\mathfrak{H}_2)) = | a |.$$

Beweis. Die Menge aller endlichen Summen $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ mit Elementen x_i von endlichem Rang und $y_i \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_2)$ ist dicht in $\mathscr{K}(\mathfrak{H}_1) \otimes \mathscr{B}(\mathfrak{H}_2)$. Also genügt es $| \mathbf{1} \otimes a - \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i | \geqslant | a |$ nur für solche Elemente zu zeigen. Da die x_i endlichen Rang haben, gibt es einen endlich dimensionalen Projektor $P \in \mathscr{K}(\mathfrak{H}_1)$ mit $Px_i = x_i$ für $i = 1,\ldots, n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{1} \otimes a - \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right| &\geqslant \left| ((1 - P) \otimes 1) \left(1 \otimes a - \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) \right| \\ &= |(1 - P) \otimes a | = | a |. \end{aligned}$$

Offensichtlich läßt sich dieses Lemma ohne weiteres auf Operatoren $b \otimes a$ mit $b = b^*$ verallgemeinern, falls das Spektrum von b keine Eigenwerte endlicher Vielfachheit besitzt. Selbst die Separabilität von $\mathfrak{H}$ ist nicht entscheidend.

Sei $\mathfrak{K}$ ein separabler unendlich dimensionaler Hilbertscher Raum und sei $\mathfrak{H}$ das n-fache Tensorprodukt von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}$, $i = 1,..., n$. Wir betrachten auf $\mathfrak{H}$ die C^*-Algebren

$$\mathscr{K}_i = 1 \otimes \mathscr{K}\left(\bigotimes_{j=i}^{n} \mathfrak{K}_j\right).$$

Offensichtlich gilt

$$\overline{\mathscr{K}_i\mathscr{K}_j} = \overline{\mathscr{K}_j\mathscr{K}_i} = \mathscr{K}_i \qquad \text{wenn} \quad i \leqslant j. \tag{1}$$

Sei $\mathscr{A}_n$ die von den $\mathscr{K}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ erzeugte C^*-Algebra und $\mathfrak{m}_i$ die von den $\mathscr{K}_j$, $1 \leqslant j \leqslant i$ erzeugte Unteralgebra von $\mathscr{A}_n$, $\mathfrak{m}_0 = (0)$. Aus (1) und dem Lemma folgt, daß $\mathfrak{m}_i$ ein abgeschlossenes Ideal in $\mathscr{A}_n$ ist. Ist $r < n$ und $\mathscr{B}_r$ die von $\mathscr{K}_r$ bis $\mathscr{K}_n$ erzeugte Unteralgebra von $\mathscr{A}_n$, so erhält man aus der Injektion

$$T \to 1 \otimes T \in 1 \otimes \mathscr{B}\left(\bigotimes_{j=r+1}^{n} \mathfrak{K}_j\right)$$

einen Isomorphismus von $\mathscr{A}_{n-r}$ auf $\mathscr{B}_r$. Ferner folgt aus dem Lemma

$$\mathscr{A}_n = \mathfrak{m}_r \oplus \mathscr{B}_r, \tag{2}$$

algebraisch und metrisch. Infolgedessen gilt

$$\mathscr{A}_n/\mathfrak{m}_r \simeq \mathscr{A}_{n-r}. \tag{3}$$

Sei nun π eine beliebige Darstellung von $\mathscr{A}_n$. Da die $\mathscr{K}_i$ einfache C^*-Algebren sind, gilt entweder $\pi(\mathscr{K}_i) = 0$ oder π ist treu und isometrisch auf $\mathscr{K}_i$. Es sei r der größte Index mit $\pi(\mathscr{K}_r) = (0)$. Wegen (1) ist dann $\pi(\mathscr{K}_i) = (0)$ für alle $i \leqslant r$ und wegen (2) können wir π als Darstellung von $\mathscr{A}_{n-r}$ auffassen. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r = 0$ annehmen. Nach Voraussetzung ist π treu und isometrisch auf $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}(\mathfrak{H})$. Da $\mathscr{K}_1$ das minimale von 0 verschiedene Ideal in $\mathscr{A}_n$ ist, muß dann π treu, also isometrisch auf $\mathscr{A}_n$ sein. Jedes Ideal in $\mathscr{A}_n$ ist also gleich einem der $\mathfrak{m}_i$. Auf Grund von (3) sind die $\mathfrak{m}_i$, $i = 0,..., n-1$ primitive Ideale in $\mathscr{A}_n$, und wir können $\hat{\mathscr{A}}_n$ mit $\{0,..., n-1\}$ identifizieren. Die abgeschlossenen Mengen in $\mathscr{A}_n$ sind dann die Abschnitte $\{i, i+1,..., n-1\}$, $i = 0,..., n$.

Dieses Beispiel läßt sich wie folgt verallgemeinern. Sei J eine total geordnete abzählbare Menge mit $<$ als nicht symmetrischer Ordnungsrelation. Für jedes $i \in J$ sei ξ_i ein normierter Vektor aus $\mathfrak{K}$. Mit $\xi = \{\xi_i\}_{i \in J}$ läßt sich dann das unvollständige unendliche Tensorprodukt $\mathfrak{H} = \bigotimes_{i \in J}^{\xi} \mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}$ bilden [3]. Sei λ ein Schnitt von J, d.h. eine disjunkte Zerlegung $J = J_\lambda' \cup J_\lambda''$ mit $J_\lambda' < J_\lambda''$. Ein solches λ definiert eine Faktorisierung von $\mathfrak{H} : \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\lambda \otimes \mathfrak{H}^\lambda$. Dies gilt insbesondere für die durch $J = \{j \in J; j < i\} \cup \{j \in J; j \geqslant i\}$, $i \in J$, definierten Schnitte. Diesen Schnitten entsprechen Zerlegungen

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i \otimes \mathfrak{H}^i, \qquad \mathfrak{H}_i = \bigotimes_{j<i}^{\xi} \mathfrak{K}_j\,, \qquad \mathfrak{H}^i = \bigotimes_{j \geqslant i}^{\xi} \mathfrak{K}_j\,,$$

und Algebren $\mathscr{K}_i = 1 \otimes \mathscr{K}(\mathfrak{H}^i) \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H})$, die wieder der Regel (1) genügen. Mit $\mathscr{A}_J$ bezeichnen wir die von allen $\mathscr{K}_i$, $i \in J$, erzeugte C^*-Unteralgebra von $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$. $\mathscr{A}_J$ is separabel, da J abzählbar ist, und da jedes $\mathscr{K}_i$ separabel ist.

Satz 1. *$\mathscr{A}_J$ wirkt irreduzibel auf $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch und es gäbe eine nicht triviale orthogonale Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in $\mathscr{A}_J$-invariante Teilräume: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus \mathfrak{H}''$. Sind $\xi' \in \mathfrak{H}'$ und $\xi'' \in \mathfrak{H}''$ normierte Vektoren, dann existieren für jedes $\epsilon > 0$ normierte Vektoren η' und η'', die endliche Summen einfacher Tensoren sind und die ξ', bzw. ξ'' bis auf ϵ approximieren:

$$\eta' = \sum_{l=1}^{n} \bigotimes_{J} \zeta'_{i,l}\,, \qquad \eta'' = \sum_{l=1}^{n} \bigotimes_{J} \zeta''_{i,l}\,,$$

$$|\,\eta'\,| = |\,\eta''\,| = 1, \qquad |\,\xi' - \eta'\,| < \epsilon, \qquad |\,\xi'' - \eta''\,| < \epsilon$$

$$\zeta'_{i,l} = \zeta''_{i,l} = \xi_i \qquad \text{für fast alle } i \in J.$$

In der endlichen Ausnahmemenge gibt es ein kleinstes Element j. Faktorisiert man nun $\mathfrak{H}$ wie oben, also $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_j \otimes \mathfrak{H}^j$, so lassen sich

$$\eta' \text{ und } \eta'' \text{ als } \eta' = \Big(\bigotimes_{i<j} \xi_i\Big) \otimes \bar{\eta}' \qquad \text{und} \qquad \eta'' = \Big(\bigotimes_{i<j} \xi_i\Big) \otimes \bar{\eta}''$$

schreiben. Da $\mathscr{K}(\mathfrak{H}^j)$ irreduzibel auf $\mathfrak{H}^j$ wirkt, gibt es ein $A \in \mathscr{K}_j$ mit $|\,A\,| = 1$ und $A\eta' = \eta''$. Dann gilt aber wegen der $\mathscr{A}_J$-Invarianz von $\mathfrak{H}'$:

$$(|\,A\xi'\,|^2 + |\,\xi''\,|^2)^{1/2} = |\,A\xi' - \xi''\,| \leqslant |\,A\xi' - A\eta'\,| + |\,\eta'' - \xi''\,| < 2\epsilon$$

Dies ist aber für kleine ϵ unmöglich.

KOROLLAR. *Jedes nicht triviale Ideal von $\mathscr{A}_J$ wirkt irreduzibel auf $\mathfrak{H}$.*

Für unsere weiteren Betrachtungen benötigen wir eine Verallgemeinerung von (2) und (3). Darum definieren wir analog zum endlichen Fall für einen beliebigen Schnitt λ von J:

$$\mathfrak{m}_\lambda = \overline{\sum_{i\in J_\lambda'} \mathscr{K}_i}, \qquad \mathscr{B}_\lambda = \overline{\sum_{i\in J_\lambda''} \mathscr{K}_i}$$

und behaupten, daß auch jetzt algebraisch und topologisch

$$\mathscr{A}_J = \mathfrak{m}_\lambda \oplus \mathscr{B}_\lambda . \tag{4}$$

Sei nämlich $x \in \mathscr{A}_J$ von der Form $x = \sum_{k=1}^n x_{i_k}$, $x_{i_k} \in \mathscr{K}_{i_k}$. Dann läßt sich x trivialerweise als $x = x' + x''$ mit $x' \in \mathfrak{m}_\lambda$ und $x'' \in \mathscr{B}_\lambda$ darstellen, $x' = \sum_{i_k \in J_\lambda'} x_{i_k}$, $x'' = \sum_{i_k\in J_\lambda''} x_{i_k}$. Wegen des Lemmas gilt sogar $| x | \geqslant | x'' |$. Die Menge solcher x ist aber dicht in $\mathscr{A}_J$, und einfaches Rechnen mit Cauchy-Folgen zeigt, daß eine solche eindeutige Zerlegung dann für alle $x \in \mathscr{A}_J$ richtig ist. Jedes $x \in \mathscr{A}_J$ läßt sich also eindeutig als $x = x' + x''$ mit $x' \in \mathfrak{m}_\lambda$, $x'' \in \mathscr{B}_\lambda$ und $| x | \geqslant | x'' |$ schreiben. Wegen (1) ist nun wieder $\mathfrak{m}_\lambda$ ein Ideal und $\mathscr{B}_\lambda$ eine Unteralgebra von $\mathscr{A}_J$ und es gilt wie im endlichen Fall $\mathscr{B}_\lambda \simeq \mathscr{A}_{J_\lambda''}$ oder

$$\mathscr{A}_J/\mathfrak{m}_\lambda \simeq \mathscr{A}_{J_\lambda''} . \tag{5}$$

SATZ 2. *Jedes Ideal aus $\mathscr{A}_J$ ist gleich einem $\mathfrak{m}_\lambda$, alle $\mathfrak{m}_\lambda$ sind primitiv und es gilt* (5).

Beweis. (5) war bereits bewiesen. Sei π eine Darstellung von $\mathscr{A}_J$ und sei $J_\lambda' = \{i \in J; \pi(\mathscr{K}_i) = (0)\}$, $J_\lambda'' = J - J_\lambda'$. Wegen (1) definiert diese Zerlegung von J einen Schnitt λ von J und $\mathfrak{m}_\lambda$ wird von π annulliert. Wir behaupten nun, daß $\mathfrak{m}_\lambda$ genau der Kern von π ist. Dazu genügt es wegen (5) zu zeigen, daß π auf $\mathscr{B}_\lambda$ treu ist. Für endlich viele beliebige Indizes $i_1 < i_2 < \cdots < i_n \in J_\lambda''$ ist die von $\mathscr{K}_{i_1}, \ldots, \mathscr{K}_{i_n}$ erzeugte Unteralgebra $\mathscr{B}$ von $\mathscr{A}_J$ offensichtlich isomorph zu den oben betrachteten $\mathscr{A}_n$. Da π treu und isometrisch auf jedem $\mathscr{K}_{i_k}$ ist, zeigen unsere Betrachtungen von $\mathscr{A}_n$, daß π treu auf $\mathscr{B}$ ist. Die Vereinigung aller solcher $\mathscr{B}$ ist aber dicht in $\mathscr{B}_\lambda$, und daher ist π isometrisch und treu auf $\mathscr{B}_\lambda$. Da (0) in $\mathscr{A}_{J_\lambda''}$ ein primitives Ideal ist (Satz 1), ist $\mathfrak{m}_\lambda$ ein primitives Ideal in $\mathscr{A}_J$.

Dieser Satz zeigt insbesondere auch, daß die Ideale von $\mathscr{A}_J$ geordnet sind, $\mathfrak{m}_\lambda \subset \mathfrak{m}_\mu$ falls $J_\lambda' \subset J_\mu'$. Um ein besseres Verständnis für $\mathscr{A}_J$ zu bekommen, sollten wir aber auch $\hat{\mathscr{A}}_J$ mit Hilfe von J beschreiben. Für $i \in J$ hatten wir schon den Schnitt i als $J = \{j < i\} \cup \{j \geqslant i\}$

definiert. Dies ist aber nicht die einzige Methode, sondern wir können auch einen Schnitt $\bar{\imath}$ durch $J = \{j \leqslant i\} \cup \{j > i\}$ festlegen. Wir erhalten so die Ideale $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_{\bar{\imath}}$, und für $i < j$ gilt $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_{\bar{\imath}} \subset \mathfrak{m}_j$. $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_{\bar{\imath}}$ sind verschieden, da $\mathfrak{m}_{\bar{\imath}} \backslash \mathfrak{m}_i \simeq \mathscr{K}(\mathfrak{K})$. Daher können wir nicht nur J mit einer Teilmenge von $\hat{\mathscr{A}}_J$ identifizieren, sondern wir müssen zusätzlich auch gewisse Punkte von J (solche, die keinen unmittelbaren Vorgänger haben) in $\hat{\mathscr{A}}_J$ doppelt zählen. Betrachten wir als Beispiel $J = \{1, 2, \ldots, \omega\}$ so hat $\mathscr{A}_J$ die Ideale (0), $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\omega$, $\mathfrak{m}_{\bar{\omega}} = \mathscr{A}_J$. Diese Eigenschaft bedeutet aber auch, daß keins dieser $\mathscr{A}_J$ einen dichten Ideal-Verband hat. Denn hat i einen unmittelbaren Vorgänger j, so ist $\mathfrak{m}_{\bar{\jmath}} = \mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_j \simeq \mathscr{K}(\mathfrak{K})$. Hat dagegen i keinen unmittelbaren Vorgänger, so ist $\mathfrak{m}_{\bar{\imath}}/\mathfrak{m}_i \simeq \mathscr{K}(\mathfrak{K})$. In beiden Fällen gibt es also keine Ideale zwischen $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_{\bar{\imath}}$.

Ist λ ein beliebiger Schnitt in J so ist offensichtlich

$$\mathfrak{m}_\lambda = \overline{\bigcup_{i \in J_\lambda'} \mathfrak{m}_{\bar{\imath}}}.$$

Hat also J_λ' ein größtes Element j so ist $\mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{m}_{\bar{\jmath}}$. Andernfalls ist

$$\mathfrak{m}_\lambda = \overline{\bigcup_{i \in J_\lambda'} \mathfrak{m}_i} = \overline{\bigcup_{i \in J_\lambda'} \mathfrak{m}_{\bar{\imath}}}.$$

Die trivialen Schnitte $J_\lambda' = \varnothing$ oder $J_\lambda' = J$ entsprechen offensichtlich den trivialen Idealen von $\mathscr{A}_J$.

SATZ 3. *$\mathscr{A}_J$ hat genau dann ein maximales (minimales) nicht triviales Ideal, wenn J ein größtes (kleinstes) Element hat.*

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales nicht triviales Ideal und λ der zugehörige Schnitt. Dann besteht J_λ'' genau aus einem Element. Dies ist sicher maximal in J. Umgekehrt sei j größtes Element in J; dann ist $\mathfrak{m}_j$ ein maximales nichttriviales Ideal in $\mathscr{A}_J$.

(b) Der Beweis für minimale Ideale wird analog mit J_λ' geführt.

KOROLLAR 1. *$\mathscr{A}_J$ ist genau dann postliminal, wenn J wohlgeordnet ist.*

Beweis. Wenn $\mathscr{A}_J$ postliminal ist, so ist jeder Quotient $\mathscr{A}_{J_\lambda''}$ von $\mathscr{A}_J$ postliminal. Da $\mathscr{A}_J$ auf $\mathfrak{H}$ irreduzibel wirkt (Satz 1) enthält $\mathscr{A}_{J_\lambda''}$ die Algebra $\mathscr{K}(\mathfrak{H}^\lambda)$. J_λ'' hat also ein erstes Element. Jeder Schnitt λ von J wird daher durch ein erstes Element in J_λ'' bestimmt, und daher ist J wohlgeordnet. Die Umkehrung des Beweises liefert die andere Aussage der Behauptung.

Ist $\mathscr{A}_J$ separabel und postliminal, so ist natürlich $\hat{\mathscr{A}}_J$ abzählbar.

KOROLLAR 2. *$\mathscr{A}_J$ ist antiliminal genau dann wenn J kein erstes Element hat.*

Beweis. Ist $\mathscr{A}_J$ nicht antiliminal, so ist ein gewisses $\mathfrak{m}_\lambda$ ein liminales Ideal von $\mathscr{A}_J$. Dann besteht aber J_λ' aus genau einem Element (Satz 1), und dies ist das erste Element von J. Hat umgekehrt J ein erstes Element j, so ist $\mathfrak{m}_j = \mathscr{K}(\mathfrak{H})$ und $\mathscr{A}_J$ ist nicht antiliminal.

Bezüglich dieser Ergebnisse sei auch auf [1; 4.3.2] verwiesen. In der Tat können wir allgemeiner sogar sagen, daß das größte postliminale Ideal $\mathfrak{m}$ von $\mathscr{A}_J$ durch den größten wohlgeordneten Anfangsabschnitt von J bestimmt wird.

Wenden wir diese Ergebnisse auf $J = N$ und $J = Z$ an, so sehen wir, daß $\mathscr{A}_N$ postliminal ist und keine maximalen Ideale hat. Dagegen ist $\mathscr{A}_Z$ antiliminal und jeder echte Quotient von $\mathscr{A}_Z$ ist isomorph zu A_N. Die antiliminale Algebra A_{-N} wurde bereits von J. Dixmier [2] untersucht.

In unserer Konstruktion sind wir von einem separablen Hilbertschen Raum $\mathfrak{K}$ und einer abzählbaren total geordneten Menge J ausgegangen. Es ist offensichtlich, daß alle Sätze auch dann gelten, wenn diese Voraussetzungen nicht gemacht werden. Lediglich $\mathscr{A}_J$ ist dann nicht mehr separabel.

Die obige Konstruktion von $\mathscr{A}_J$ ist insofern nicht kanonisch, als die Auswahl der Schnitte von J bei der Definition von $\mathscr{K}_i$ willkürlich war. Wir hätten zum Beispiel auch von den Schnitten $\bar{\imath}$ und $\mathscr{K}_{\bar{\imath}}$ ausgehen können. Abgesehen von geringen Schwierigkeiten, die entstehen, wenn J ein erstes Element hat, erhält man vollkommen analoge Ergebnisse wie oben. Noch allgemeiner kann man beide Verfahren mit einander kombinieren und $\mathscr{A}$ durch zu $\mathscr{K}(\mathfrak{H})$ isomorphe Algebren erzeugen, die gewissen Schnitten aus J entsprechen. Aus diesem Grunde wäre es wünschenswert eine solche Konstruktion rein C^*-algebraisch zu beschreiben. Eine solche Beschreibung hat überdies den Vorteil, daß sie auf alle treuen Darstellungen von antiliminalen Algebren $\mathscr{A}_J$ anwendbar ist, obwohl diese sich wohl kaum in der obigen Form realisieren lassen.

Sei also J eine abzählbare total geordnete Indexmenge und $\mathscr{A}$ eine separable C^*-Algebra, so daß gilt:

(1) Für jedes $i \in J$ existiert eine Unteralgebra $\mathscr{K}_i \simeq \mathscr{K}(\mathfrak{K})$ $\dim \mathfrak{K} = \aleph_0$,

(2) $\overline{\mathscr{K}_i \mathscr{K}_j} = \mathscr{K}_i$, für alle $i \leqslant j$,

(3) Die $\mathscr{K}_i$ erzeugen $\mathscr{A}$,

(4) Aus $\mathscr{K}_i x = 0$, $x \in \mathscr{K}_j$, $j \geqslant i$, folgt $x = 0$,

(5) Für $x \in \sum_{k=1}^{n} \mathscr{K}_{i_k}$ gilt $\operatorname{dist}\{\mathscr{K}_j, x\} = | x |$, für $j < i_k$.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich alle oben gewonnenen Behauptungen analog beweisen.

Die obige Konstruktion läßt sich aber noch auf andere Weise verallgemeinern. Dazu sei M eine abzählbare unendliche Menge und $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen von M. Führt man wieder $\mathfrak{H} = \bigotimes_{i \in M}^{\xi} \mathfrak{K}_i$ ein, so kann man für jedes m aus $\mathfrak{M}$ die Faktorisierung $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_m \otimes \mathfrak{H}^m$ und dazu die Algebren $\mathscr{K}_m = \mathbf{1}_m \otimes \mathscr{K}(\mathfrak{H}^m)$ betrachten. $\mathscr{A}_{\mathfrak{M}}$ ist dann die von allen $\mathscr{K}_m$ erzeugte C^*-Algebra. Dies führt natürlich zu einer Abschwächung des obigen Systems 1,..., 5. Solche Beispiele sollen in einer weiteren Arbeit diskutiert werden.

LITERATUR

1. J. DIXMIER, "Les C^*-Algèbres et leurs Représentations," Gauthier-Villars, Paris, 1964.
2. J. DIXMIER, Sur les C^*-algèbres, *Bull. Soc. Math. France* **88** (1960), 95–112.
3. A. GUICHARDET, Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'Anticommutation, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **83** (1966), 1–51.
4. H. LEPTIN, A Separable Postliminal C^*-Algebra without Maximal Closed Ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **159** (1971), 489–496.