JOURNAL OF ALGEBRA 72, 210–222 (1981)

Anneaux de Krull non commutatifs

MARC CHAMARIE

Département de Mathématiques, Université Claude–Bernard, Lyon I, 69621 Villeurbanne, France

Communicated by P. M. Cohn

Received July 12, 1979

INTRODUCTION

Divers auteurs, en particulier, Marubayashi [1, 2] ont essayé de généraliser au cas non commutatif la notion de domaine de Krull. Dans ce papier, un anneau de Krull non commutatif est un ordre maximal (au sens d'Asano) R dans un anneau artinien simple S tel que l'enveloppe injective du R-module à droite S/R (resp. du R-module à gauche S/R) soit Σ-injective. On montre que cette notion est plus générale que celle de Marubayashi et coïncide avec elle, dans la cas "borné." Un résultat de Cozzens, concernant les anneaux simples noethériens justifie d'une certaine manière l'introduction de cette notion (voir la Section 4).

La résultat principal est que si P est un idéal premier réflexif d'un anneau de Krull R, la partie multiplicative $C(P)$ des éléments réguliers modulo P vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite et le localisé correspondant est principal à gauche et à droite et borné; de plus R s'écrit comme intersection d'un anneau de Krull borné et d'un anneau de Krull sans idéaux bilatères réflexifs. Ces résultats généralisent ceux obtenus par l'auteur dans le cas noethérien [3]. Enfin on établit les propriétés de transfert suivantes: une extension de Ore d'un anneau de Krull est de Krull et un ordre maximal équivalent à un anneau de Krull est encore de Krull.

I

Soit R un ordre (à gauche et à droite) dans un anneau artinien simple S. Un sous-R-module à droite (resp. à gauche) I de S est dit un R-idéal à droite (resp. à gauche) s'il existe c et d inversibles dans S tels que: $cR \subseteq I \subseteq dR$ (resp. $Rc \subseteq I \subseteq Rd$); I est dit entier si $I \subseteq R$. R est un ordre maximal à droite (resp. à gauche) de S si pour tout R-idéal à droite (resp. à gauche) I, $\mathcal{O}_d(I) = \{s \in S; Is \subseteq I\} = R$ (resp. $\mathcal{O}_g(I) = \{s \in S;\ sI \subseteq I\} = R$). Supposons que R est

0021-8693/81/090210–13$02.00/0

un ordre maximal (à droite et à gauche) de S. Si I est un R-idéal à droite (resp. à gauche), on note: $I^{-1}=\{s\in S; sI\subseteq R\}$ (resp. $I^{-1}=\{s\in S; Is\subseteq R\}$) et $\bar{I}=(I^{-1})^{-1}$; on dit que I est réflexif si: $I=\bar{I}$. Si $\mathfrak{a}$ est un R-idéal bilatère, $\mathfrak{a}$ est réflexif à droite si et seulement si $\mathfrak{a}$ est réflexif à gauche; on dit alors que $\mathfrak{a}$ est un c-idéal; l'ensemble des c-idéaux, muni du produit: $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ forme alors un groupe abélien, noté $G(R)$ (voir [4]). Considérons $E(S/R)$ une enveloppe injective du R-module à droite S/R et notons $\mathscr{H}$ la famille topologisante et idempotente des idéaux à droite H de R tels que: $\operatorname{Hom}_R(R/H, E(S/R))=0$ (c'est-à-dire tels que: $\forall\lambda\in R, (H.\cdot\lambda)^{-1}=R$). Si I est un idéal à droite, on notera: $\tilde{I}=\{x\in R, \exists H\in\mathscr{H}, xH\subseteq I\}$, et on dira que I est fermé si $I=\tilde{I}$. Remarquons qu'on a toujours: $\tilde{I}\subseteq\bar{I}$; de plus si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère non nul, on a: $\tilde{\mathfrak{a}}=\bar{\mathfrak{a}}$ car $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{a}}^1\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}\in\mathscr{H}$). *Dans tout ce qui suit, on suppose que R est un ordre maximal de S et que $E(S/R)$ est Σ-injectif (c'est-à-dire que R vérifie la condition de chaîne ascendante sur les idéaux à droite fermés).* D'après ce qui précède, R vérifie en particulier la c.c.a. sur les c-idéaux entiers; on sait alors que le groupe $G(R)$ des c-idéaux est le groupe abélien libre engendré par les c-idéaux premiers (voir [4]).

Lemma 1.1. *Si I est un idéal à droite fermé, R/I est de Goldie à droite.*

Preuve. R/I s'injecte dans un produit de copies de $E(S/R)$; par suite, l'enveloppe injective de R/I est Σ-injective.

Dans ce qui suit, si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère, on notera $C(\mathfrak{a})$ la partie multiplicative des éléments réguliers modulo $\mathfrak{a}$.

Lemme 1.2. *Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des c-idéaux entiers, alors:*

$$C(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=C(\mathfrak{a})\cap C(\mathfrak{b}).$$

Preuve. Soit $c\in C(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})$ et x dans R tel que: $cx\in\mathfrak{a}$; il vient: $cx\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$; d'où: $x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ et $x\in\mathfrak{a}$; de même si $xc\in\mathfrak{a}$, il vient $\mathfrak{b}xc\subseteq\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$; d'où: $\mathfrak{b}x\subseteq\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}$ et $x\in\mathfrak{a}$. On en déduit: $C(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\subseteq C(\mathfrak{a})\cap C(\mathfrak{b})$. Réciproquement, soit $c\in C(\mathfrak{a})\cap C(\mathfrak{b})$ et x dans R tel que: $cx\in\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$; il vient: $cx\mathfrak{b}^{-1}\subseteq\mathfrak{a}$ et $cx\in\mathfrak{b}$; d'où: $x\in\mathfrak{b}$ et $x\mathfrak{b}^{-1}\subseteq\mathfrak{a}$, c'est-à-dire: $x\in\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$.

Proposition 1.3. *Si $\mathfrak{a}$ est un c-idéal entier, $R/\mathfrak{a}$ est un ordre à droite dans un anneau artinien à droite.*

Preuve. On va utiliser le théorème de Small dans la version donnée par Harjanavis [5]. Dans le groupe $G(R)$, écrivons: $\mathfrak{a}=\overline{P_1^{n_2}}\cdot\overline{P_2^{n_2}}\cdots\overline{P_h^{n_h}}$, où les P_i sont des c-idéaux premiers et les n_i des entiers >0; si $N=\bigcap P_i$, on vérifie facilement que $N'=N/\mathfrak{a}$ est le radical premier de $R'=R/\mathfrak{a}$; le lemme 1.2 prouve que: $C(\mathfrak{a})=C(N)$. D'autre part, N est un c-idéal, ainsi que $\forall m\geqslant 0$:

$\{\lambda \in R; N^m\lambda \subseteq \mathfrak{a}\}$. Le lemme 1.1 montre donc que R', R'/N' et $R'/\mathrm{Ann}_d(N'm)$ sont de Goldie à droite et on a, dans R', $C(0) = C(N')$. Par conséquent R' vérifie les hypothèses de théorème de Small.

COROLLAIRE 1.4. *Si $\mathfrak{a}$ est un c-idéal entier, tout idéal à droite de $\mathscr{H}$ coupe $C(\mathfrak{a})$.*

Preuve. Soit $H \in \mathscr{H}$. La proposition précédente montre qu'on peut supposer $\mathfrak{a}$ semi-premier et qu'il suffit de montrer que H est essentiel modulo $\mathfrak{a}$. Soit donc I tel que $H \cap I \subseteq \mathfrak{a}$; alors si $x \in I$, il vient: $x(H. \cdot x) \subseteq \mathfrak{a}$ et donc $x \in \mathfrak{a}$, car $\mathfrak{a}$ est fermé.

LEMME 1.5. *Soit I un idéal à droite et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère non nul; alors: $\tilde{I}\mathfrak{a} \subseteq \widetilde{I\mathfrak{a}}$.*

Preuve. Soit $x \in \tilde{I}$; il existe $H \in \mathscr{H}$ tel que: $xH \subseteq I$. Il suffit donc de montrer que: $\forall a \in \mathfrak{a}$, $H\mathfrak{a}. \cdot a \in \mathscr{H}$; puisque $(H\mathfrak{a}. \cdot a). \cdot \lambda = H\mathfrak{a}. \cdot a\lambda$, $\forall \lambda \in R$, il suffit de montrer que: $\forall a \in \mathfrak{a}$, $(H\mathfrak{a}. \cdot a)^{-1} = R$. Soit donc: $s \in (H\mathfrak{a}. \cdot a)^{-1}$; pour tout $t \in \mathfrak{a}^{-1}$, on a: $at \in R$ et: $st(H. \cdot at)\,\mathfrak{a} \subseteq s(H. \cdot a)\,\mathfrak{a} \subseteq s(H\mathfrak{a}. \cdot a) \subseteq R$; par suite: $\mathfrak{a}st(H. \cdot at) \subseteq R$ et puisque: $H \in \mathscr{H}$, il vient: $\mathfrak{a}st \subseteq R$; finalement: $\mathfrak{a}s\mathfrak{a}^{-1} \subseteq R$ et $s \in \mathscr{O}_g(\mathfrak{a}^{-1}) = R$.

PROPOSITION 1.6. *Soit I un idéal à droite et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère non nul. Il existe un entier $n > 0$ tel que :*

$$I \cap \overline{\mathfrak{a}^n} \subseteq \widetilde{I\mathfrak{a}}.$$

Preuve. Puisque R vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite fermés, il existe un entier $n - 1 \geqslant 0$ tel que:

$$\left(\sum_{h \geqslant 0} (I \cap \overline{\mathfrak{a}^h}\right)^{\sim} = \left(\sum_{h=0}^{h=n-1} (I \cap \overline{\mathfrak{a}^h})\,\mathfrak{a}^{-h}\right)^{\sim}.$$

d'où:

$$(I \cap \overline{\mathfrak{a}^n})\,\mathfrak{a}^{-n} \subseteq \left(\sum_{h=0}^{h=n-1} (I \cap \overline{\mathfrak{a}^h})\,\mathfrak{a}^{-h}\right)^{\sim}.$$

Le lemme 1.5 montre alors que:

$$(I \cap \overline{\mathfrak{a}^n})\,\mathfrak{a}^{-n}\mathfrak{a}^n \subseteq \left(\sum_{h=0}^{h=n-1} (I \cap \mathfrak{a}^h)\,\mathfrak{a}^{-h}\mathfrak{a}^n\right)^{\sim} \subseteq \widetilde{I\mathfrak{a}},$$

et puisque: $\mathfrak{a}^{-n}\mathfrak{a}^n \in \mathscr{H}$, il vient: $I \cap \overline{\mathfrak{a}^n} \subseteq \widetilde{I\mathfrak{a}}$.

PROPOSITION 1.7. *Si $\mathfrak{a}$ est un c-idéal entier, R vérifie la condition de Ore à droite par rapport à $C(\mathfrak{a})$.*

Preuve. On s'inspire d'une démonstration de Goldie, concernant les anneaux noethériens ([6, Théorème 5.2]). Le lemme 1.2 prouve que: $C(\mathfrak{a}) = C(\overline{\mathfrak{a}^h})\ \forall h \geqslant 1$. Soit $c \in C(\mathfrak{a})$ et $x \in R$; la proposition 1.3 montre que $\forall h \geqslant 1$, il existe $d_h \in C(\mathfrak{a})$ et $y_h \in R$ tels que: $z_h = cy_h - xd_h \in \overline{\mathfrak{a}^h}$. Soit $I = \sum_{h \geqslant 1} z_h R$. La proposition 1.6 montre qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que: $I \cap \overline{\mathfrak{a}^n} \subseteq \widetilde{I\mathfrak{a}}$; alors on a: $z_n \in \widetilde{I\mathfrak{a}} \subseteq (\sum_{h \geqslant 1} z_h \mathfrak{a})^{\sim}$; le corollaire 1.4 prouve donc qu'il existe: $d \in C(\mathfrak{a})$ tel que: $z_n d = \sum_{h=1}^{h=m} z_h a_h$ avec: $a_h \in \mathfrak{a}$; par suite, il vient: $c(y_n d - \sum_{h=1}^{h=m} y_h a_h) = x(d_n d - \sum_{h=1}^{h=m} d_h a_h)$; il est clair que $d_n d - \sum_{h=1}^{h=m} d_h a_h \in C(\mathfrak{a})$ et par suite la condition de Ore à droite est vérifiée.

PROPOSITION 1.8. (a) *Soit $\mathfrak{a}$ un c-idéal entier. Alors: $\bigcap_{n>0} \overline{\mathfrak{a}^n} = 0$ et $C(\mathfrak{a}) \subset C(0)$.*

(b) *Si $c \in C(0)$, alors pour presque tout c-idéal premier P, $c \in C(P)$.*

Preuve. (a) Puisque R vérifie la c.c.a. sur les c-idéaux entiers, si $\mathfrak{b} = \bigcap_{n>0} \overline{\mathfrak{a}^n} \neq 0$, la suite croissante $(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^{-n})_{n>0}$ serait stationnaire et on en déduirait: $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^{-n} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^{-(n+1)}$, pour un certain n, d'où: $\mathfrak{a}^{-1} = R$ (contradiction). Ceci étant, si $c \in C(\mathfrak{a})$ et si $cx = 0$, il vient: $cx \in \bigcap_{n>0} \overline{\mathfrak{a}^n}$; le lemme 1.2 entraîne que: $x \in \bigcap_{n>0} \overline{\mathfrak{a}^n}$ et donc: $x = 0$.

(b) La condition de chaîne ascendante sur les idéaux à droite essentiels réflexifs, prouve qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que:

$$\overline{\sum_P (cP^{-1} \cap R)} = \overline{\sum_{i=1}^{i=n} (cP_i^{-1} \cap R)};$$

donc pour tout c-idéal premier P, il vient:

$$cP^{-1} \cap R \subseteq c\left(\bigcap_{i=1}^{i=n} P_i\right)^{-1}.$$

Soit alors x dans R tel que: $cx \in P$, alors: $cxP^{-1} \subseteq c(\bigcap_{i=1}^{i=n} P_i)^{-1}$; d'où: $xP^{-1} \subseteq (\bigcap_{i=1}^{i=n} P_i)^{-1}$ et $(\bigcap_{i=1}^{i=n} P_i)x \subseteq P$; si $P \neq P_i$, il vient donc: $x \in P$.

PROPOSITION 1.9. *Soit P un c-idéal premier. Le localisé $R_{C(P)}$ est un ordre maximal à droite, noethérien à droite, de radical de Jacobson: $J = PR_{C(P)}$, avec $R_{C(P)}/J$ simple artinien; les idéaux bilatères non nuls de $R_{C(P)}$ sont exactement les puissances de J, et ce sont des progénérateurs à droite.*

Preuve. Puisque R vérifie la condition de Ore à droite par rapport à $C(P)$, avec R/P de Goldie à droite et puisque tous les éléments de $C(P)$ sont réguliers, le théorème 3 de [7] prouve que $J = PR_{C(P)}$ et $R_{C(P)}/J$ simple artinien. Le corollaire 1.4 montre que R vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite $C(P)$-fermés, donc que $R_{C(P)}$ est noéthérien à droite. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère non nul de $R_{C(P)}$; alors: $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap R) R_{C(P)}$; si $\mathfrak{a}^{-1} = \{s \in S; s\mathfrak{a} \subseteq R_{C(P)}\}$, il vient: $R_{C(P)} = (\mathfrak{a} \cap R)^{-1} (\mathfrak{a} \cap R) R_{C(P)} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}$ et donc: $R_{C(P)} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}$, ce qui prouve que $\mathfrak{a}$ est générateur à droite; on en déduit immédiatement que $R_{C(P)}$ est maximal à droite. De même: $R_{C(P)} = R_{C(P)}(\mathfrak{a} \cap R)(\mathfrak{a} \cap R)^{-1} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ et donc $\mathfrak{a}$ est projectif à droite. Finalement si: $\overline{\mathfrak{a} \cap R} = \overline{P^n} \cdot \overline{P_1^{n_1}} \cdots \overline{P_h^{n_h}}$ avec tous les P_i c-idéaux premiers $\neq P$, il vient:

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap R) R_{C(P)} = (\overline{\mathfrak{a} \cap R}) R_{C(P)} = P^n P_1^{n_1} \cdots P_h^{n_h} R_{C(P)},$$

et puisque tous les P_i coupent $C(P)$, $\mathfrak{a} = P^n R_{C(P)} = J^n$.

Dans la suite, on dira qu'un idéal d'un côté est borné s'il contient un idéal bilatère non nul et que R est borné à droite si tout idéal à droite essentiel est borné.

PROPOSITION 1.10. *Soit $R_0 = \{x \in S; \exists \mathfrak{a} \neq 0$ bilatère; $x\mathfrak{a} \subseteq R\}$.*

(a) *R est borné à droite $\Leftrightarrow R_0 = S \Leftrightarrow R$ est borné à gauche.*

(b) *$R = R_0 \cap (\bigcap_P R_{C(P)})$ (où P parcourt l'ensemble de tous les c-idéaux premiers).*

Preuve. (a) Il suffit de remarquer que: $R_0 = {}_0R = \{x \in S, \exists \mathfrak{a} \neq 0$ bilatère; $\mathfrak{a}x \subseteq R\}$.

(b) L'inclusion: $R \subseteq R_0 \cap (\bigcap_P R_{C(P)})$ est claire. Réciproquement si $x \in R_0 \cap (\bigcap_P R_{C(P)})$, considérons $I = \{\lambda \in R; x\lambda \subseteq R\}$; I est borné car: $x \in R_0$ et $I \cap C(P) \neq \varnothing$, pour tout c-idéal premier P, car $x \in R_{C(P)}$. Soit $\mathfrak{a}$ le plus grand idéal bilatère contenue dans I; supposons qu'il existe P c-idéal premier tel que: $\mathfrak{a} \subseteq P$; pour un $c \in I \cap C(P)$, on aurait: $PP^{-1}\mathfrak{a}x \subseteq R \cap Px \subseteq R \cap Pc^{-1} \subseteq P$, et donc: $P^{-1}\mathfrak{a}x \subseteq R$; par suite $P^{-1}\mathfrak{a} \subseteq I$ et: $P^{-1}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$; finalement: $P^{-1} \subseteq R$, ce qui n'est pas. On voit donc que: $\mathfrak{a}^{-1} = R$ et donc: $x \in R$.

II

DEFINITION 2.1. *Un ordre R dans un anneau artinien simple S est un anneau de Krull si:*

(a) *R est un ordre maximal de S;*

(b) *R vérifie la condition de chaîne ascendante sur les idéaux à droite (resp. à gauche) fermés.*

LEMME 2.2. *Soient R un anneau de Krull et R' un sur-anneau de R tel qu'il existe une famille topologisante et idempotente d'idéaux à droite $\mathscr{F}$ de R et une famille topologisante et idempotente d'idéaux à gauche $\mathscr{G}$ de R telles que: $R' = R_{\mathscr{F}} = {}_{\mathscr{G}}R$. Alors:*

(a) *R' est un anneau de Krull.*

(b) *Pour tout R-idéal à droite I, on a: $(I_{\mathscr{F}})^{-1} = (IR_{\mathscr{F}})^{-1} = {}_{\mathscr{G}}(I^{-1})$.*

(c) *L'application: $I \mapsto I_{\mathscr{F}}$ est une bijection croissante entre le treillis des idéaux à droite essentiels réflexifs $\mathscr{F}$ fermés de R et celui des idéaux à droite essentiels réflexifs de R'.*

Preuve. (a) Montrons d'abord que R' est un ordre maximal de S; soit $\mathfrak{a}'$ un idéal bilatère non nul de R' et $s \in \mathcal{O}_g(\mathfrak{a}')$; on a: $s(\mathfrak{a}' \cap R) \subseteq \mathfrak{a}' \subseteq R'$; soit I un idéal à droite de type fini contenu dans $\mathfrak{a}' \cap R$ et tel que: $I^{-1} = (\mathfrak{a}' \cap R)^{-1}$: il existe donc $G \in \mathscr{G}$ tel que $GsI \subseteq R$; d'où: $Gs(\mathfrak{a}' \cap R) \subseteq \mathfrak{a}' \cap R$ et $Gs \subseteq \mathcal{O}_g(\mathfrak{a}' \cap R) = R$; par suite: $s \in {}_{\mathscr{G}}R = R'$. De la même manière, on montrerait que: $R' = \mathcal{O}_d(\mathfrak{a}')$.

Soit maintenant $F \in \mathscr{F}$; on vérifie facilement que: $\widetilde{FR'} = R'$. De même si $H \in \mathscr{H}$, montrons que: $\widetilde{HR'} = R'$; soit $\lambda \in R'$; il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que: $\lambda F \subseteq R$; considérons $s \in (HR'. \cdot \lambda)^{-1}$; pour tout $f \in F$, on a: $sf(H. \cdot \lambda f) \subseteq R'$; soit H_1 de type fini contenu dans $H. \cdot \lambda f$, appartenant à $\mathscr{H}$; il existe $G \in \mathscr{G}$ tel que: $GsfH_1 \subseteq R$; par suite: $Gsf \subseteq R$ et $sf \in R'$; finalement: $sF \subseteq R'$ et donc; $s \in R'$.

Ceci étant, soit I' un idéal à droite fermé de R'; alors: $I' = \widetilde{(I' \cap R)R'}$; en effet si $x \in I'$, il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que $xF \subseteq I' \cap R$; par suite: $xFR' \subseteq (I' \cap R)R'$ et ce qui précède montre que: $x \in \widetilde{(I' \cap R)R'}$. Or, $I' \cap R$ est fermé; en effet si; $x \in \widetilde{I' \cap R}$, il existe $H \in \mathscr{H}$ tel que: $xH \subseteq I' \cap R$; d'où: $xHR' \subseteq (I' \cap R)R' \subseteq I'$ et ce qui précède prouve que: $x \in I' \cap R$. Il est alors clair que R' vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite fermés. De la même manière, on démontre que R' vérifie la c.c.a. sur les idéaux à gauche fermés.

(b) On voit facilement que: ${}_{\mathscr{G}}(I^{-1}) \subseteq (I_{\mathscr{F}})^{-1} \subseteq (IR_{\mathscr{F}})^{-1}$. Réciproquement, soit x dans $(IR_{\mathscr{F}})^{-1}$; il vient: $xI \subseteq R_{\mathscr{F}}$; soit $J \subseteq I$, de type fini tel que $I^{-1} = J^{-1}$; il vient: $xJ \subseteq R' = {}_{\mathscr{G}}R$; il existe donc: $G \in \mathscr{G}$ tel que $GxJ \subseteq R$; d'où: $GxI \subseteq R$ et $x \in {}_{\mathscr{G}}(I^{-1})$.

(c) Par symétrie, le (b) montre que: $\overline{I_{\mathscr{F}}} = (\bar{I})_{\mathscr{F}} = \overline{IR_{\mathscr{F}}}$. Donc si I est réflexif, $I_{\mathscr{F}}$ aussi. Réciproquement soit I' un idéal à droite essentiel réflexif de R'; il est clair que: $I' \subseteq (I' \cap R)_{\mathscr{F}}$; d'autre part si $x \in (I' \cap R)_{\mathscr{F}}$, il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que: $xF \subseteq I' \cap R$; d'où: $(I')^{-1}xF \subseteq R'$ et $(I')^{-1}x \subseteq R'$; finalement: $x \in I'$. Ainsi: $I' = (I' \cap R)_{\mathscr{F}}$ et on en déduit immédiatement que: $I' \cap R$ est réflexif. Le résultat annoncé découle alors aisément de tout ceci.

Asano dans [4] et Maury dans [8], considérent les "localisés" bilatères de R, définis de la manière suivante: si $\mathscr{A}$ est une famille d'idéaux bilatères non nuls, multiplicativement stable, on note: $R(\mathscr{A}) = \{x \in S;\ \exists \mathfrak{a} \in \mathscr{A};\ x\mathfrak{a} \subseteq R\}$. Le lemme suivant montre qu'on peut appliquer le résultat précédent à ces anneaux.

LEMME 2.3. *Soient R un anneau de Krull et $\mathscr{A}$ une famille d'idéaux bilatères non nuls multiplicativement stable. Alors:*

(a) *$R(\mathscr{A})$ est un localisé à droite $R_{\mathscr{F}}$ et à gauche ${}_{\mathscr{G}}R$ et donc un anneau de Krull.*

(b) *Il y a un isomorphisme canonique de groupes:*

$$G(R(\mathscr{A})) \simeq G(R)/\{G(R) \cap \mathscr{F}\}$$

Preuve. (a) Soit E une enveloppe injective du R-module à droite: $S/R(\mathscr{A})$, et soit $\mathscr{F}$ la famille topologisante et idempotente des idéaux à droite F de R tels que: $\mathrm{Hom}_R(R/F, E) = 0$. Soit $\mathfrak{a}$ un c-idéal de R; montrons que : $\mathfrak{a}_{\mathscr{F}} = \bigcup\{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1};\ \mathfrak{b} \in \mathscr{A}\}$. Soit x dans $\mathfrak{a}_{\mathscr{F}}$; il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que: $\mathfrak{a}^{-1}xF \subseteq R$; par suite: $\mathfrak{a}^{-1}x \subseteq R(\mathscr{A})$; soit I un R-idéal à gauche de type fini, contenu dans $\mathfrak{a}^{-1}$ et tel que: $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}} = I^{-1}$; il existe donc $\mathfrak{b} \in \mathscr{A}$ tel que: $Ix\mathfrak{b} \subseteq R$; d'où: $\mathfrak{a}^{-1}x\mathfrak{b} \subseteq R$ et $x \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1}$. Réciproquement si il existe $\mathfrak{b} \in \mathscr{A}$ tel que $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, montrons que $\mathfrak{b} \in \mathscr{F}$; puisque $\mathfrak{b}$ est bilatère, il suffit de vérifier que: $\mathrm{Hom}(R/\mathfrak{b}, S/R(\mathscr{A})) = 0$; soit donc $s \in S$ tel que: $s\mathfrak{b} \subseteq R(\mathscr{A})$; si J est un R-idéal à droite de type fini, contenu dans $\mathfrak{b}$ et tel que: $\mathfrak{b}^{-1} = J^{-1}$, alors il existe $C \in \mathscr{A}$ tel que: $sJC \subseteq R$, d'où: $CsJ \subseteq R$ et $Cs\mathfrak{b} \subseteq R$; finalement: $s\mathfrak{b}C \subseteq R$ et $s \in R(\mathscr{A})$. De la même manière, on montre qu'il existe une famille topologisante et idempotente d'idéaux à droite de R tel que pour tout c-idéal $\mathfrak{a}$:

$${}_{\mathscr{G}}\mathfrak{a} = \bigcup\{\mathfrak{b}^{-1} \cdot \mathfrak{a};\ \mathfrak{b} \in \mathscr{A}\} = \bigcup\{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1};\ \mathfrak{b} \in \mathscr{A}\} = \mathfrak{a}_{\mathscr{F}}.$$

En particulier: $R(\mathscr{A}) = {}_{\mathscr{G}}R = R_{\mathscr{F}}$.

(b) Si $\mathfrak{a}$ est un c-idéal, ce qui précède montre que $\mathfrak{a}_{\mathscr{F}}$ est un $R_{\mathscr{F}}$ idéal bilatère et donc un c-idéal, d'après le lemme 2.2c). On vérifie alors facilement que l'application: $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}_{\mathscr{F}}$ est un morphisme de groupes surjectif, dont le noyau est formé des c-idéaux $\mathfrak{a}$ tels que: $\mathfrak{a}_{\mathscr{F}} = R_{\mathscr{F}}$, c'est-à-dire: $\mathfrak{a}^{-1} \cap R \in \mathscr{F}$ et $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{a}^{-1} \cap R) \in \mathscr{F}$.

COROLLAIRE 2.4. *Si R est un anneau de Krull, R_0 est un anneau de Krull sans c-idéaux non triviaux.*

PROPOSITION 2.5. *Soit R un anneau de Krull et P un c-idéal premier. Alors R vérifie la condition de Ore à droite et à gauche par rapport à $C(P)$ et le localisé $R_{C(P)}$ est un anneau de Krull quasi-local, principal à droite et à gauche et borné.*

Preuve. D'après 1.7 et son symétrique à gauche, la condition de Ore est vérifiée. On a donc: $R_{C(P)} = {}_{C(P)}R$. Donc, la proposition 1.9 montre que $J = PR_{C(P)} = R_{C(P)}P$ est inversible dans l'anneau noethérien à droite et à gauche, quasi-local $R_{C(P)}$. Le théorème 1.3 de [9] permet de conclure.

LEMME 2.6. *Soient R un anneau de Krull et $\mathscr{P}'$ un ensemble de c-idéaux premiers de R. Alors $\bigcap_{P\in\mathscr{P}'} R_{C(P)}$ est un anneau de Krull borné.*

Preuve. Posons $R' = \bigcap_{P\in\mathscr{P}'} R_{C(P)} = \bigcap_{P\in\mathscr{P}'} {}_{C(P)}R$. Le lemme 2.2 trouve que R' est un anneau de Krull. Soit I' un idéal à droite essentiel de R'; I' contient un élément régulier c de R; d'après 1.8(b), pour tout $P \in \mathscr{P}'$, sauf un nombre fini: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $R_{C(P)} = cR_{C(P)}$; puisque chaque $R_{C(P_i)}$ est borné, soit $\mathfrak{a}_i$ un idéal bilatère non nul contenu dans $cR_{C(P_i)}$; on en déduit: $\bigcap_{i=1}^{i=n} (\mathfrak{a}_i \cap R') \subseteq (\bigcap_{i=1}^{i=n} cR_{C(P_i)}) \cap (\bigcap_{P\neq P_i} cR_{C(P)}) = cR' \subseteq I$; ainsi I' est borné et par conséquent R' est borné.

LEMME 2.7. *Soit R un anneau de Krull et $\mathscr{P}$ l'ensemble de tous ses c-idéaux premiers. Alors si I est un R-idéal à droite, on a:*

$\bar{I} = (\bigcap_{P\in\mathscr{P}} I_{C(P)}) \cap (\bar{I})_0$; *si I est entier, on a:*

$\tilde{I} = (\bigcap_{P\in\mathscr{P}} I_{C(P)}) \cap (\tilde{I})_0$. *En particulier, un idéal à droite borné est réflexif si et seulement si il est fermé.*

Preuve. On sait déjà que: $R = (\bigcap R_{C(P)}) \cap R_0$ (Proposition 1.10). D'autre part, d'après 2.2, on a: $\bigcap(\bar{I})_{C(P)} = \bigcap_P \overline{I_{C(P)}} = \bigcap_P I_{C(P)}$ (car chaque $I_{C(P)}$ est principal) et par suite:

$\bar{I} \subseteq (\bigcap I_{C(P)}) \cap (\bar{I})_0$. Réciproquement:

$I^{-1}((\bigcap_P I_{C(P)}) \cap (\bar{I})_0) \subseteq (\bigcap_P R_{C(P)}) \cap R_0$. Évidemment: $\tilde{I} \subseteq (\bigcap I_{C(P)}) \cap (\tilde{I})_0$;

réciproquement si x est dans $(\bigcap I_{C(P)}) \cap (\tilde{I})_0$, il existe un idéal à droite borné H coupant $C(P)$, quelque soit P, et tel que: $xH \subseteq I$; ce qui précède montre que $H \in \mathscr{H}$ et donc que: $x \in \tilde{I}$. Le reste est immédiat, puisque si I est borné $I_0 = (\bar{I})_0 = (\tilde{I})_0 = R_0$.

PROPOSITION 2.8. *Soit R un anneau de Krull. Alors: $T = \bigcap R_{C(P)}$ est un anneau de Krull borné. L'application: $I \to \bigcap I_{C(P)}$ est une bijection croissante entre le treillis des idéaux à droite bornés et réflexifs de R et celui des idéaux à droite réflexifs de T. De plus, cette application induit un isomorphisme de groupes: $G(R) \simeq G(T)$.*

Preuve. Considérons $\mathscr{F} = \{J$ idéal à droite de R; $\forall P \in \mathscr{P}$, $J \cap C(P) \neq \varnothing\}$. Alors le lemme 2.7 montre que I est borné si I est $\mathscr{F}$-fermé. Le lemme 2.2 permet de conclure. On vérifie ensuite facilement que l'application $\mathfrak{a} \mapsto \bigcap \mathfrak{a}_{C(P)} = \bigcap_{C(P)}\mathfrak{a}$ est un isomorphisme de groupes de $G(R)$ sur $G(T)$.

PROPOSITION 2.9. *Soit R un ordre dans un anneau artinien simple S. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *R est un ordre de Krull au sens de Marubayashi (voir [2] pour la définition).*

(b) *R est un anneau de Krull, R_0 est noethérien et pour tout idéal bilatère non nul $\mathfrak{a}$ de R, on a: $\mathfrak{a}R_0 = R_0\mathfrak{a} = R_0$.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). D'après la proposition 2.1 de [2], R est un ordre maximal de S, R_0 est simple noethérien par définition et pour tout idéal bilatère $\mathfrak{a}$ non nul, $\mathfrak{a}R_0 = R_0\mathfrak{a} = R_0$. D'autre part R s'écrit comme intersection localement finie: $R = (\bigcap R_{C(P)}) \cap R_0$ (où P parcourt l'ensemble de tous les c-idéaux premiers de R). Si I est un idéal à droite essentiel, on en déduit facilement, en raisonnant comme dans le lemme 2.7, que: $\tilde{I} = (\bigcap I_{C(P)}) \cap (\tilde{I})_0$; il est alors clair que R vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite essentiels fermés; comme S est noethérien, on en déduit que R vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite fermés. On raisonne de même à gauche, ce qui prouve que R est de Krull.

(b) $\Rightarrow$ (a). $R = (\bigcap_P R_{C(P)}) \cap R_0$ et cette intersection est localement finie d'après 1.8(b). Enfin, il résulte de l'hypothèse fait sur les idéaux bilatères non nuls que R_0 est simple et sur-anneau "essentiel" de R (Lemme 2.2 de [2]). Il est alors clair que R vérifie la définition de Marubayashi [2].

Dans le cas borné, (où ces deux notions coïncident, puisque $S = R_0$), on peut donner la caractérisation suivante.

PROPOSITION 2.10. *Un ordre maximal borné R dans un anneau artinien simple S est un anneau de Krull si et seulement si:*

(a) *R vérifie la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux (bilatères) entiers.*

(b) *Pour tout c-idéal premier P, R/P est de Goldie à droite.*

Preuve. Si R est un anneau de Krull, (a) est évident et (b) résulte du lemme 1.1. Réciproquement, supposons que les conditions (a) et (b) sont satisfaites. Soit P un c-idéal premier de R; on montre comme dans la proposition 1.8 que: $\bigcap_{n \leqslant 0} \overline{P^n} = 0$ et que: $C(P) \subseteq C(0)$; soit maintenant $c \in C(P)$; l'idéal à droite essentiel cR étant borné, soit $\mathfrak{a}$ le plus grand idéal bilatère contenu dans cR; supposons $\mathfrak{a} \subseteq P$; alors, on aurait: $c^{-1}\mathfrak{a}P^{-1}P \subseteq R \cap c^{-1}P \subseteq P$; d'où: $\mathfrak{a}P^{-1} \subseteq cR$ et finalement $\mathfrak{a}P^{-1} \subseteq \mathfrak{a}$, c'est-à-dire: $P^{-1} = R$; contradiction; puisque R/P est supposé de Goldie à droite, $\mathfrak{a}$ coupe $C(P)$ et il est clair que la condition de Ore à droite est vérifiée; de la même manière, on montrerait la condition de Ore à gauche par rapport à $C(P)$. D'après le théorème 3 de [7], le localisé: $R_{C(P)} = {}_{C(P)}R$ est un anneau quasi-local et $J(R_{C(P)}) = PR_{C(P)} = R_{C(P)}P$; puisque $PP^{-1} \nsubseteq P$ et $P^{-1}P \nsubseteq P$, la condition (b) entraîne que J est inversible. D'autre part, on vérifie, comme à la fin de la démonstation de la proposition 1.9 que tout idéal bilatère non nul de $R_{C(P)}$ est une puissance de J. Comme R est borné, on en déduit facilement que $R_{C(P)}$ est aussi borné; comme tous les $R_{C(P)}/J^n$ sont noethériens, il est clair qu'on a la c.c.a. sur les idéaux (à droite ou à gauche) essentiels; finalement ceci entraîne que $R_{C(P)}$ est noethérien des deux côtés. Le théorème 1.3 de [9] montre alors que $R_{C(P)}$ est principal des deux côtés.

Ceci étant, on montre, comme dans la démonstration de la proposition 1.10(b) que $R = \bigcap R_{C(P)}$ (ici: $R_0 = S$ car R est borné). Il reste à voir que cette intersection est localement finie; or, si c est un élément régulier de R, R étant borné, il est clair que cR contient un c-idéal et par suite un produit $P_1^{n_1}P_2^{n_2} \cdots P_h^{n_h}$, où les P_i sont des c-idéaux premiers; il est alors clair que si $P \neq P_i$, $c \in C(P)$.

Remarque. La condition (b) dans la proposition précédente est indispensable car dans [10, exemple 5.4] il est construit un ordre maximal borné vérifiant la condition (a) et qui cependant ne vérifie pas la c.c.a. sur les idéaux à droite essentiels réflexifs.

III

Soit R un ordre dans un anneau artinien simple S. Soit σ un automorphisme de R; considérons $A = R[X, \sigma]$ l'anneau des polynômes de Ore (c'est l'ensemble des polynômes: $\sum r_h X^h$, muni de l'addition habituelle et de la multiplication prolongeant celle de R et vérifiant: $Xr = \sigma(r)X$). On peut prolonger canoniquement σ en un automorphisme de S, noté encore σ; et on peut considérer $B = S[X, \sigma]$. Il est bien connu que B est premier principal à gauche et à droite; B est donc un ordre dans un anneau artinien simple Q; il est clair que A est un ordre de Q.

LEMME 3.1 (G. Maury). *Soit R un ordre maximal de S, vérifiant la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux entiers et σ un automorphisme de R. Alors pour tout idéal bilatère non nul $\mathfrak{a}$ stable par σ, on a: $\overline{\sigma(\mathfrak{a})} = \sigma(\bar{\mathfrak{a}}) = \bar{\mathfrak{a}}$.*

Preuve. Il est clair que, pour tout R-idéal $\mathfrak{a}$, on a: $[\sigma(\mathfrak{a})]^{-1} = \sigma(\mathfrak{a}^{-1})$; par suite: $\overline{\sigma(\mathfrak{a})} = \sigma(\bar{\mathfrak{a}})$; on en déduit que si $\mathfrak{a}$ est stable par σ, $\bar{\mathfrak{a}}$ aussi; considérons alors la suite croissante de c-idéaux entiers: $(\sigma^{-n}(\bar{\mathfrak{a}}))_{n \geqslant 0}$; par hypothèse, il existe $n \geqslant 0$ tel que: $\sigma^{-n}(\bar{\mathfrak{a}}) = \sigma^{-(n+1)}(\bar{\mathfrak{a}})$; d'où: $\bar{\mathfrak{a}} = \sigma(\bar{\mathfrak{a}})$.

LEMME 3.2. *Soient R un ordre de S et σ un automorphisme de R; $A = R[X, \sigma]$ et Q l'anneau des fractions classique de A. Alors si $E_R(S/R)$ est Σ-injectif, $E_A(Q/A)$ aussi.*

Preuve. Remarquons d'abord que si H est un idéal à droite essentiel tel que $\tilde{H} = R$, alors: $\widetilde{HA} = A$. En efet il est tout d'abord facile de vérifier que si $H \in \mathscr{H}$, $\sigma^{-1}(H)$ aussi; soit maintenant $a = \sum_{i=0}^{i=p} X^i \lambda_i$ dans A; il est clair qu'alors:

$$\left(\bigcap_{i=0}^{i=p} (\sigma^{-i}(H). \cdot \lambda_i)\right) A \subseteq HA. \cdot a;$$

il suffit donc de montrer que si $\tilde{H} = R$ et H est essentiel: $(HA)^{-1} = A$; or si $q \in Q$ est tel que: $qHA \subseteq A$; il vient: $qHS \subseteq B$; H étant essentiel, on en déduit: $q \in B$; donc: $q = \sum_{i=0}^{i=m} X^i s_i$ avec $s_i \in S$ et puisque $qH \subseteq A$, il vient: $s_i H \subseteq R$; d'où $s_i \in R$ et $q \in A$. Ceci étant, montrons que A vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite fermés. Si I est un idéal à droite de A, notons, pour tout $m \geqslant 0$, $C_m(I) = \{$coefficients de X^m des polynômes de degré m qui appartiennent à $I\} \cup \{0\}$ (c'est un idéal à droite car σ est un automorphisme); il est clair que la suite: $(C_m(I))_{m \geqslant 0}$ est croissante.

Considérons alors une suite croissante $(I_n)_{n \geqslant 0}$ d'idéaux à droite fermés de A. Soit $\widetilde{C_p(I_q)}$ un élément maximal de l'ensemble des idéaux à droite fermés $(\widetilde{C_m(I_n)})_{m,n}$; $\forall n \geqslant q$ et $\forall m \geqslant p$, on a donc: $\widetilde{C_m(I_n)} = \widetilde{C_p(I_q)}$; d'autre part, $\forall j \leqslant p$, $\exists r(j) \geqslant 0$ tel que $\forall r \geqslant r(j)$: $\widetilde{C_j(I_r)} = \widetilde{C_j(I_{r(j)})}$; en posant $s = \sup(r(1), r(2), \ldots, r(p-1)\, q)$, on a, $\forall m \geqslant 0$ et $\forall t \geqslant s$: $\widetilde{C_m(I_t)} = \widetilde{C_m(I_s)}$; d'autre part, $B = S[X, \sigma]$ étant noethérien, il existe $u \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant u$: $I_u S = I_t S$; si $v = \sup(s, u)$, nous allons montrer que: $I_v = I_t$ $\forall t \geqslant v$.

Il suffit donc de montrer que si $I \subseteq J$ sont deux idéaux à droite fermés de A tels que: $IS = JS$ et $\widetilde{C_m(I)} = \widetilde{C_m(J)}$ $\forall m \geqslant 0$, alors: $I = J$. Supposons qu'il existe $f \in J$ et $f \notin I$ et choisissons f de degré minimal pour cette propriété; $f = \sum_{h=0}^{h=n} r_h X^h$; puisque $r_n \in \widetilde{C_n(I)}$, il existe $H \in \mathscr{H}$ tel que $r_n H \subseteq C_n(I)$; soit $x \in H$; il existe $h = (r_n x) X^n + g$ $(\deg g < n)$ appartenant à I; puisque $f\sigma^{-n}(x) = (r_n x) X^n + g'$ $(\deg g' < n)$ appartient à J, il vient $h - f\sigma^{-n}(x) \in J$ et $\deg(h - f\sigma^{-n}(x)) < n$; par suite: $h - f\sigma^{-n}(x) \in I$ et $f\sigma^{-n}(x) \in I$; d'autre part puisque $IS = JS$, il existe c régulier dans R tel que $fc \in I$; l'idéal à droite essentiel: $H' + cR$ appartient à $\mathscr{H}$ et $fH' \subseteq I$; ce qui a été démontré au début prouve que: $\widetilde{H'A} = A$ et donc, I étant fermé, que $f \in I$.

PROPOSITION 3.3. *Si R est un anneau de Krull et σ un automorphisme de R, $R[X, \sigma]$ est un anneau de Krull.*

Preuve. D'après le lemme 3.2, il reste à montrer que $A = R[X, \sigma]$ est un ordre maximal dans Q. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère non nul de A et soit $f \in \mathscr{O}_g(\mathfrak{a})$; $B = S[X, \sigma]$ étant principal à gauche, soit g un générateur (nécessairement régulier) de $B\mathfrak{a}B$; il est clair qu'on peut choisir g dans $\mathfrak{a}B$; par suite, il vient: $fg \in B\mathfrak{a}B = Bg$ et donc: $f \in B$. Ainsi: $f = \sum_{i=0}^{i=p} s_i X^i$, avec: $s_i \in S$. Notons $D(\mathfrak{a}) = \{$coefficients dominants des polynômes de $\mathfrak{a}\} \cup \{0\}$; il est clair que $D(\mathfrak{a})$ est un idéal bilatère non nul stable par σ. Soit $r \neq 0$ dans $D(\mathfrak{a})$; il existe h dans $\mathfrak{a}$ tel que: $h = rX^n + r_{n-1}X^{n-1} + \cdots + r_0$; on a: $fh \in \mathfrak{a}$ et puisque $fh = s_p\sigma^p(r)\, X^{p+n}$ + un polynôme de degré $<p+n$, on voit que: $s_p\sigma^p(r) \in D(\mathfrak{a})$. Ainsi: $s_p\sigma^p(D(\mathfrak{a})) \subseteq D(\mathfrak{a})$ et le lemme 3.1 entraîne: $s_p\overline{D(\mathfrak{a})} = s_p\overline{\sigma^p(D(\mathfrak{a}))} \subseteq \overline{D(\mathfrak{a})}$; par suite, la maximalité de R entraîne: $s_p \in R$. Par conséquent, de proche en proche, on montre ainsi que tous les s_i sont dans R et donc que f est dans A. De la même manière, on montrerait que: $\mathcal{O}_d(\mathfrak{a}) = A$; ce qui prouve que A est maximal.

IV

Rappelons que deux ordres R et R' d'un anneau artinien simple S sont dits équivalents s'il existe c, d, c', d' inversibles dans S, tels que: $cRd \subseteq R'$ et $c'R'd' \subseteq R$. Dans [4], il est démontré que deux ordres maximaux R et R' sont équivalents si et seulement si il existe un R-idéal à droite I réflexif tel que $R' = \mathcal{O}_g(I)$ $(=\mathcal{O}_d(I^{-1}))$. Nous allons d'abord généraliser le lemme 1.5.

LEMME 4.1. *Soit R un ordre maximal de S et soit I un R-idéal à gauche normal, c'est-à-dire que : $\mathcal{O}_d(I) = \mathcal{O}_g(I^{-1})$. Alors, pour tout R-idéal à droite J, on a:*

$$\tilde{J}I \subseteq \widetilde{JI}.$$

Preuve. Ici on note: $\tilde{J} = \{x \in S, \exists H \in \mathscr{H}; xH \subseteq J\}$ et si $R' = \mathcal{O}_d(I)$, $\widetilde{JI} = \{x \in S, \exists H' \in \mathscr{H}'; xH' \subset JI\}$. Soit donc $x \in \tilde{J}$; il existe $H \in \mathscr{H}$ tel que: $xH \subseteq J$; $\forall a \in I$, puisque: $xa(HI. \cdot a) \subseteq JI$, il suffit de montrer que: $HI. \cdot a \in \mathscr{H}'$. Puisque $\forall \lambda \in R'$: $(HI. \cdot a). \cdot \lambda = HI. \cdot a\lambda$, il suffit de montrer que $\forall a \in I$, $(HI. \cdot a)^{-1} = R'$. Soit s dans S tel que: $s(HI. \cdot a) \subseteq R'$; alors si $t \in I^{-1}$, il vient: $at \in R$ et $st(H. \cdot at)\, I \subseteq s(HI. \cdot a) \subseteq R'$; par suite: $Ist(H. \cdot at) \subseteq \mathcal{O}_g(I) = R$; donc $Ist \subseteq R$. Finalement, on a: $IsI^{-1} \subseteq R$ et donc: $s \in \mathcal{O}_g(I^{-1}) = R'$.

PROPOSITION 4.2. *Soit R un anneau de Krull de S. Si R' est un ordre maximal équivalent à R, R' est un anneau de Krull.*

Preuve. Soit donc I un R-idéal à droite réflexif tel que $R' = \mathcal{O}_g(I) = \mathcal{O}_d(I^{-1})$. Si J' est un idéal à droite essentiel fermé de R', considérons: $\widetilde{J'I} \subseteq \tilde{I} = I$; réciproquement si J est un sous-R-idéal à droite fermé de I, considérons $\widetilde{JI^{-1}} \subseteq R'$. Le lemme 4.1 appliqué à I^{-1} montre que:

$\widetilde{\tilde{J}'II^{-1}} \subseteq \widetilde{J'II^{-1}} \subseteq \tilde{J}' = J'$; réciproquement, puisque: $J'II^{-1} \subseteq \tilde{J}'\widetilde{II^{-1}}$ et que l'idéal bilatère: II^{-1} de R' vérifie évidemment: $\widetilde{II^{-1}} = R'$, il vient: $J' \subseteq \widetilde{\tilde{J}'II^{-1}}$; finalement on a: $J' = \widetilde{\tilde{J}'II^{-1}}$. Le même raisonnement montre que: $J = \widetilde{JI^{-1}I}$. Ceci définit donc une bijection bi-croissante entre le treillis des idéaux essentiels fermés de R' et celui des sous-R-idéaux à doite fermés de I. On en déduit qu R' vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite essentiels fermés; finalement, comme S est noethérien, il est clair que R' vérifie la c.c.a. sur les idéaux à droite fermés. On démontre évidemment de la même manière que R vérifie la c.c.a. sur les idéaux à gauche fermés. Ainsi R' est un anneau de Krull.

Remarque. Il est bien connu (voir [4]) que deux ordres maximaux équivalents ont même groupe de c-idéaux. Or, un théorème de Cozzens (théorème 3.4 de [11]) caractérise, parmi les anneaux simples R noethériens intègres, ceux qui sont de dimension homologique globale $\leqslant 2$, par la propriété suivante: "$\forall n \geqslant 1$, tout ordre maximal équivalent à $M_n(R)$ est simple." Comme il existe effectivement des anneaux simples intègres noethériens de dimension >2 (par exemple l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{C})$ pour $n > 2$), on voir donc qu'il existe des anneaux de Krull sans c-idéaux (bilatères) non triviaux, qui ne sont pas simples; il est alors clair que ces anneaux ne peuvent pas être des ordres de Krull au sens de Marubayashi.

Bibliographie

1. H. Marubayashi, Non commutative Krull rings, *Osaka J. Math.* **12** (1975), 703–714.
2. H. Marubayashi, Polynomial rings over Krull orders in simple artinian rings, a paraître.
3. M. Chamarie, Localisations dans les ordres maximaux, *Comm. Algebra* 2(4) (1974), 279–293.
4. K. Asano, Zur Arithmetik in Schiefringer, *Osaka J. Math.* **1** (1949), 98–134.
5. C. R. Hajarnavis, On Small's theorem, *J. London Math. Soc.* **5** (1972), 596–600.
6. A. W. Goldie, Localisation in non-commutative noetherian rings, *J. Algebra* **5** (1967), 89–105.
7. J. A. Beachy et W. D. Blair, Localization at semi-prime ideals, *J. Algebra* **38** (1976), 309–314.
8. G. Maury, Localisations bilatères dans les ordres maximaux, *C. R. Acad. Sci. Pars* **270** (1970), 1144–1146.
9. C. R. Hajarnavis et T. H. Lenagan, Localisation in Asano orders, *J. Algebra* **21** (1972), 441–449.
10. Rehm, Multiplicative ideal theory of non commutative Krull pairs (II), *J. Algebra* **48** (1977), 166–181.
11. J. H. Cozzens, Maximal orders and reflexive modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **219** (1976), 323–336.