JOURNAL OF ALGEBRA 36, 185–192 (1975)

Éléments Quasi-Entiers et Extensions de Fatou

PAUL-JEAN CAHEN

University of British Columbia, Vancouver, Canada

ET

JEAN-LUC CHABERT

Université Paris VII, France

Communicated by P. M. Cohn

Received October 5, 1973

INTRODUCTION

Nous avons montré que les anneaux de Fatou introduits par Benzaghou [1] n'étaient pas autre chose que les anneaux complètement intégralement clos [2]. Depuis, Fliess [3] a généralisé la définition de Benzaghou en introduisant les *extensions de fatou*:

On dit qu'un anneau B est une extension de fatou d'un sous-anneau A quand toute fraction rationnelle, qui admet une "représentation unitaire à coefficients dans B" et dont le développement en série est à coefficients dans A, admet une "représentation unitaire à coefficients dans A."

Nous caractérisons ici de telles extensions dans le cas intègre avec la notion d'élément *quasi-entier*:

L'anneau intègre B sera une extension de fatou du sous-anneau A si et seulement si tout élément du corps des fractions de A, qui est à la fois entier sur B et quasi-entier sur A, est aussi entier sur A.

Nous commencerons par préciser la notion d'élément quasi-entier (Section 1), puis celle de représentation d'une fraction rationnelle (Section 2). Nous ferons ensuite le lien entre développement en série et élément quasi-entier (Section 3). Enfin, nous appliquerons ce qui précède aux extensions de fatou (Section 4) et à une notion similaire, les extensions de Fatou–Benzaghou (Section 5).

Dans tout ce qui suit B *désigne un anneau commutatif, unitaire et intègre de corps des fractions* L *et* A *désigne un sous-anneau de* B *de corps des fractions* K.

1. Elements Quasi-Entiers

Rappelons les définitions classiques suivantes:

1.1. Un élément x de B est dit entier sur A si la A-algèbre $A[x]$ est un A-module de type fini.

1.2. Un élément x de K est dit *quasi-entier* sur A si la A-algèbre $A[x]$ est contenue dans un sous-A-module de K de type fini ou encore s'il existe un élément non nul d de A tel que $d.A[x]$ soit contenu dans A (Krull [5]).

Nous généralisons 1.2 avec la:

Definition 1.3. Un élément x de B est dit *quasi-entier* sur A si la A-algèbre $A[x]$ s'injecte dans un A-module de type fini.

Un élément entier sur A est évidemment quasi-entier sur A et, lorsque l'anneau A est noethérien, les deux notions coïncident. La proposition suivante montre que 1.3 généralise bien 1.2.

Proposition 1.4. *Si l'élément x est quasi-entier sur A, alors il est algébrique sur K et il existe un sous-A-module de $K[x]$ de type fini contenant $A[x]$.*

Démonstration. L'élément x étant quasi-entier sur A est à fortiori quasi-entier sur K, c'est à dire algébrique sur K, par suite $K[x]$ est l'enveloppe injective du A-module $A[x]$. Supposons qu'il existe un homomorphisme injectif de $A[x]$ dans un A-module M de type fini. Cet homomorphisme s'étend en un homomorphisme injectif i de $K[x]$ dans une enveloppe injective $E(M)$ de M et i admet un inverse à gauche p. Le A-module $p(M)$ est de type fini, il contient $A[x]$ et est contenu dans $K[x]$.

Nous noterons A_B' l'ensemble des éléments de B entiers sur A et A_B'' l'ensemble de ceux qui sont quasi-entiers.

Corollaire 1.5. *L'ensemble A_B'' est un sous-anneau de B.*

Definition 1.6. L'anneau A est dit *complètement intégralement fermé* dans B si A_B'' est égal à A. L'anneau A est dit *complètement intégralement clos* si A_K'' est égal à A (on retrouve la définition classique [5]).

Remarque 1.7. Il ne semble pas exister une bonne généralisation de la notion 1.2 lorsque les anneaux A et B ne sont plus supposés intègres. En effet, avec notre définition 1.3, l'ensemble A_B'' n'est peut-être plus un anneau, ni même un A-module. D'autre part, Gilmer et Heinzer [4] ont généralisé 1.2 avec la notion d'élément *almost integral* (un élément x de B est dit *almost integral* sur A si la A-algèbre $A[x]$ est contenue dans un sous-A-module de B

de type fini); malheureusement cette notion, distincte de la nôtre, dépend de l'anneau B considéré, même dans le cas intègre. Ces deux notions présentent beaucoup de similitudes et, moyennant quelques modifications, nous pouvons entre autres déduire de [4]:

1.8. L'anneau A_B'' est intégralement fermé dans B, mais n'est pas nécessairement complètement intégralement fermé dans B (exemple de Gilmer et Heinzer [4]).

2. Representations d'une Fraction Rationnelle

Notation 2.1. Notons $A(X)$ le localisé de l'anneau des polynômes $A[X]$ par la partie multiplicative formée des polynômes dont le coefficient non nul de plus bas degré est égal à 1.

C'est l'anneau des fractions rationnelles à coefficients dans A et ceci est conforme à la notation $K(X)$ du corps des fractions rationnelles à coefficients dans K.

Definition 2.2. Nous appelons *représentation* d'une fraction rationnelle à coefficients dans K son écriture comme un quotient P/Q de deux polynômes P et Q à coefficients dans K. La représentation est dite:

— *irréductible* si les polynômes P et Q sont étrangers entre eux,

— *unitaire* si le coefficient non nul de plus bas degré de Q est égal à 1,

— *à coefficients dans A* si les coefficients de P et de Q appartiennent à A.

2.3. Tout élément de $K(X)$ admet une représentation irréductible et unitaire unique P_1/Q_1 et toute autre représentation unitaire P/Q s'en déduit par les formules $P = P_1 \cdot R$ et $Q = Q_1 \cdot R$ où R est un polynôme de $K[X]$ dont le coefficient non nul de plus bas degré est égal à 1.

2.4. L'anneau $A(X)$ est l'ensemble des éléments de $K(X)$ admettant une représentation unitaire (pas nécessairement irréductible) à coefficients dans A.

Proposition 2.5. *Etant donné un élément de $K(X)$ il est equivalént de dire:*

(i) *qu'il admet une représentation unitaire P/Q telle que les coefficients de Q soient dans A.*

(ii) *qu'il admet une représentation unitaire P/Q telle que les coefficients de Q soient entiers sur A.*

(iii) *que sa représentation irréductible et unitaire P_1/Q_1 est telle que les coefficients de Q_1 soient entiers sur A.*

Démonstration. Il est clair que (i) implique (ii). Montrons que (ii) implique (iii): d'après 2.3, $Q = Q_1 \cdot R$ où R est un polynôme de $K[X]$ dont le coefficient non nul de plus bas degré est égal à 1. Les polynômes réciproques, qui eux sont unitaires, vérifient: $Q^* = Q_1^* \cdot R^*$. Si les coefficients de Q^* sont entiers sur A, alors ses racines sont entières sur A, à fortiori les racines de Q_1^* sont entières sur A et les coefficients de Q_1^* c'est à dire de Q_1 sont entiers sur A. Enfin, en passant à nouveau aux polynômes réciproques, le lemme suivant montre que (iii) implique (i).

LEMMA 2.6. *Si Q est un polynôme unitaire de $K[X]$ a coefficients entiers sur A, alors il existe un polynôme unitaire R de $K[X]$ tel que $Q \cdot R$ soit à coefficients dans A.*

En effet, dans un corps de décomposition, $Q(X)$ s'écrit $\pi(X - x_i)$ et les x_i, entiers sur A, sont racines de polynômes unitaires S_i à coefficients dans A. Alors le polynôme $R = (\pi S_i)/\pi(X - x_i)$ est à coefficients dans K et répond à la question.

3. DEVELOPPEMENT EN SERIE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

NOTATION 3.1. Notons $A((X))$ le localisé de l'anneau des séries formelles $A[[X]]$ par la partie multiplicative formée des puissances de X.

C'est l'anneau des séries formelles à coefficients dans A et à exposants peut-être négatifs. Tout élément de $A((X))$ admet une écriture unique sous la forme: $\sum_{n \geqslant n_0} a_n X^n$ où $a_n \in A$ et $n_0 \in \mathbf{Z}$. Il y a bien sûr une inclusion naturelle de $A(X)$ dans $A((X))$.

La proposition 2.5 a pour corollaire la:

PROPOSITION 3.2. *L'anneau $A(X)$ est l'ensemble des éléments de $K(X) \cap A((X))$ dont la représentation irréductible et unitaire est à coefficients entiers sur A.*

Le résultat fondamental est le suivant:

THEOREME 3.3. *La représentation irréductible et unitaire de tout élément de $K(X) \cap A((X))$ est à coefficients quasi-entiers sur A.*

Autrement dit, soient P et Q deux polynômes de $K[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux et que $Q(o) = 1$. Si les coefficients du développement en série en X de la fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ appartiennent à A, alors les coefficients de P et de Q sont quasi-entiers sur A.

Démonstration. Soit P/Q la représentation irréductible et unitaire d'un élément de $K(X) \cap A((X))$.

Soit $1/x$ une racine non nulle de Q. L'élément x étant algébrique sur K, il existe un élément non nul a de A tel que ax soit entier sur A. Posons: $B = A[ax], L = K[x]$ et $Q(X) = (1 - xX)\, R(X)$.

Comme R appartient à $L[X]$, il existe un élément non nul d de B tel que $d \cdot R$ appartienne à $B[X]$ et, comme P/Q appartient à $A((X))$, donc à $B((X))$, $dP/(1 - xX) = dR \cdot P/Q$ appartient à $B((X))$.

Notons $\sum b_n X^n$ le développement en série de $dP/(1 - xX)$. Pour n supérieur au degré p de P, $b_{n+1} = x \cdot b_n$, d'où: 3.3.1. $b_{n+p} = x^n \cdot b_p$ pour $n \geqslant 0$.

En outre, b_p n'est pas nul, sinon $\sum b_n X^n$ serait un polynôme et $1/x$ serait racine de P, contrairement à l'hypothèse.

Les relations 3.3.1 et le fait que les b_n appartiennent à B montrent que x est un élément de L quasi-entier sur B au sens classique 1.2 (L étant le corps des fractions de B) et donc au sens de la définition 1.3. Comme B est un A-module de type fini, x est aussi quasi-entier sur A (c'est immédiat sur la définition 1.3).

Soient maintenant L_1 un corps de décomposition de Q et $1/x_i$ les racines non nulles de Q dans L_1 . D'après ce qui précède, les x_i appartiennent à A''_{L_1} . Le polynôme Q s'écrivant sous la forme $X^k \pi(1 - x_i X)$, les coefficients de Q appartiennent à A''_{L_1} (A''_{L_1} est un anneau d'après 1.5) et, comme ils appartiennent aussi à K, ils sont finalement dans A''_K (la notion d'élément quasi-entier est indépendante du sur-anneau). Enfin, P/Q appartenant à $A((X))$, P appartient à $A''_K[X]$.

Corollaire 3.4. *L'anneau $K(X) \cap A((X))$ est inclus dans l'anneau $A''_K(X)$.*

Ce corollaire est nettement plus faible que le théorème.

4. Extensions de Fatou

Partant de l'idée de Benzaghou [1], Fliess [3] a introduit la notion suivante:

Definition 4.1. On dit que l'anneau B est une *extension de fatou* de l'anneau A si l'on a l'égalité: $B(X) \cap A((X)) = A(X)$.

On dit que A est un *anneau de fatou* si son corps des fractions K est une extension de fatou de A.

Bien sûr $B(X) \cap A((X))$ contient toujours $A(X)$, c'est l'inclusion inverse qui est en question.

La proposition 3.2 montre que la clôture intégrale A_K' de A est une extension de fatou de A.

PROPOSITION 4.2. *Toute extension de corps est une extension de fatou* (*Benzaghou* [1]).

Pour le voir il suffit d'utiliser les formules de Cramer.

THEOREME 4.3. *Pour que B soit une extension de fatou de A il faut et il suffit que tout élément de K entier sur B et quasi-entier sur A soit entier sur A.*

Démonstration. Soit P/Q la représentation irréductible et unitaire d'un élément de $B(X) \cap A((X))$. C'est à fortiori un élément de $L(X) \cap K((X))$, donc de $K(X)$ d'après la proposition précédente et les coefficients de P et de Q sont dans K. Comme il s'agit de la représentation irréductible et unitaire d'un élément de $K(X) \cap A((X))$, ces coefficients sont aussi quasi-entiers sur A (Théorème 3.3) et, comme il s'agit de la représentation d'un élément de $B(X)$, ces coefficients sont aussi entiers sur B (Proposition 3.2). Si tout élément de K quasi-entier sur A et entier sur B est entier sur A, alors les coefficients de P et de Q sont entiers sur A et la fraction P/Q appartient à $A(X)$ (Proposition 3.2).

Inversement, supposons que B est une extension de fatou de A. Soit x un élément de K quasi-entier sur A et entier sur B. Soit d un élément non nul de A tel que $dA[x]$ soit inclus dans A. Alors la fraction $d/(1 - xX)$ se développe en $\sum dx^nX^n$; la série appartient à $A((X))$, la fraction appartient à $B(X)$ (Proposition 3.2), donc $d/(1 - xX)$ appartient à $B(X) \cap A((X)) = A(X)$ et x est entier sur A (toujours d'après la même Proposition 3.2).

COROLLAIRE 4.4. *Pour que B soit une extension de fatou de A il faut et il suffit que $B \cap K$ soit une extension de fatou de A.*

COROLLAIRE 4.5. *Pour que l'anneau A soit de fatou il faut et il suffit que tout élément de K quasi-entier sur A soit entier sur A.*

Lorsqu'un anneau est de fatou tout anneau intègre qui le contient en est une extension de fatou.

Exemples d'anneau de fatou

(i) tout anneau intègre noethérien (car alors les notions d'élément entier et quasi-entier sont confondues).

(ii) tout anneau intègre dont la clôture intégrale est un anneau complètement intégralement clos (d'après la remarque 1.8 cette condition n'est pas nécessaire).

5. Extensions de Fatou–Benzaghou

Dans la définition des anneaux de Fatou, Benzaghou considère la représentation irréducible et unitaire des fractions rationnelles. Aussi, plus proche de cette idée, nous posons la:

Definition 5.1. On dit que l'anneau B est une *extension de Fatou–Benzaghou* de l'anneau A si, la représentation irréductible et unitaire d'un élément de $B(X) \cap A((X))$ étant à coefficients dans B, cette même représentation est en fait à coefficients dans A.

On dit que A est un *anneau de Fatou* (ou de Fatou–Benzaghou) si son corps des fractions K est une extension de Fatou–Benzaghou de A.

Si A est un anneau de fatou, tout élément de $K(X) \cap A((X))$ admet une représentation unitaire à coefficients dans A, alors que si A est un anneau de Fatou (avec une majuscule) c'est la représentation irréductible et unitaire qui doit être à coefficients dans A, puisque cette même représentation est de toute façon à coefficients dans K. Ainsi, tout anneau de Fatou est un anneau de fatou. Par contre, on ne sait pas, en général, si une extension de Fatou–Benzaghou est une extension de fatou. Toutefois comme pour 4.2:

Proposition 5.2. *Toute extension de corps est une extension de Fatou–Benzaghou.*

Theoreme 5.3. *Pour que B soit une extension de Fatou–Benzaghou de A il faut et il suffit que A soit complètement intégralement fermé dans $B \cap K$.*

Démonstration. Soit P/Q la représentation irréductible et unitaire d'un élément de $B(X) \cap A((X))$. Les coefficients de P et de Q appartiennent à K (Proposition 5.2), donc à A''_K (Théorème 3.3), si on les suppose en outre dans B et si A est complètement intégralement fermé dans B, alors ils appartiennent à A et l'extension est bien de Fatou–Benzaghou.

Inversement, soit x un élément de $B \cap K$ quasi-entier sur A et soit d un élément non nul de A tel que $d \cdot A[x]$ soit inclus dans A. Alors $d/(1 - xX)$ est la représentation irréductible et unitaire d'un élément de $B(X) \cap A((X))$ dont les coefficients sont dans B; si l'on suppose que l'extension est de Fatou–Benzaghou, ces coefficients sont dans A, x appartient à A et A est complètement intégralement fermé dans $B \cap K$.

Corollaire 5.4. *Pour que B soit une extension de Fatou–Benzaghou de A il faut et il suffit que $B \cap K$ soit une extension de Fatou–Benzaghou de A.*

Corollaire 5.5. *Pour que A soit un anneau de Fatou il faut et il suffit que A soit complètement intégralement clos.*

References

1. B. Benzaghou, Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970), 209–252.
2. J.-L. Chabert, Anneaux de Fatou, *L'enseignement mathématique* **18** (1972), 411–144.
3. M. Fliess, "Séries formelles rationnelles et reconnaissables," Séminaire Delange–Pisot–Poitou, Paris, 1972.
4. R. Gilmer et W. Heinzer, On the complete integral closure of an integral domain, *J. Austral. Math. Soc.* **6** (1966), 351–361.
5. W. Krull, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche II, *Math. Z.* **41** (1936), 665–679.