Construction d'Orthogonaux dans les Groupes Abéliens Finis Eet Confusions d'Effets dans les Plans Factoriels

A. El Mossadeq
Université de Pau
I.U.R.S.
Département de Mathématiques
Avenue Louis Sallenave
F-64000 Pau, France

A. Kobilinsky
I.N.R.A.-C.N.R.A.
Laboratoire de Biométrie
Route de Saint Cyr
F-78000 Versailles, France

et

D. Collombier
Université de Pau
I.U.R.S.
Département de Mathématiques
Avenue Louis Sallenave
F-64000 Pau, France

RÉSUMÉ

Cet article est consacré aux plans factoriels obtenus par la méthode DSIGN de Patterson (1976). Comme Bailey (1977) l'a montré l'étude des confusions d'effets dans ces plans d'expériences peut être menée en recherchant les orthogonaux de sous-groupes du groupe abélien fini des traitements. Le même procédé permet également de construire des plans vérifiant des confusions d'effets données. Nous présentons ici un algorithme de construction de tels orthogonaux qui passe par la décomposition primaire du groupe des traitements puis par la construction d'orthogonaux dans des p-groupes.

ABSTRACT

This paper is devoted to factorial designs generated by Patterson's (1976) DSIGN method. As stated by Bailey (1977), the identification of confounded effects may be done here by constructing annihilators of given subgroups of the treatment group.

52 Vanderbilt Ave., New York, NY 10017 0024-3795/85/$3.30

Factorial designs with specified patterns of confounding may be constructed by the dual process. Using the primary decomposition of finite abelian groups, we introduce in this paper an algorithm for constructing such annihilators.

---

1. INTRODUCTION

Les fractions de plans factoriels—introduites par Finney [12]—sont des dispositifs expérimentaux très utiles puisqu'ils permettent d'étudier les effets simples des facteurs traitements et toutes les interactions inconnues et non négligeables a priori tout en limitant le nombre des unités expérimentales. Les fractions dites régulières ont en outre des propriétés statistiques très intéressantes, entre autres des propriétés d'optimalité pour les modèles usuels d'analyse (cf. Cheng [9] et Mukerjee [19]). Divers procédés de construction de ces fractions sont proposés ou étudiés; citons entre autres les travaux de Kempthorne [14], Rao [25], N. T. J. Bailey [1] (cf. également les ouvrages de Raghavarao [22] et plus récemment celui de Raktoe, Hedayat et Federer [24]).

Patterson [20] a introduit un procédé de construction—appelé méthode DSIGN—qui sous certaines restrictions permet d'obtenir des fractions régulières. Les travaux ultérieurs de R. A. Bailey [2–4], Bailey et al. [6], Patterson et Bailey [21], Kobilinsky [15] ont montré sa relative facilité d'emploi. Cette méthode permet également de construire des plans factoriels en blocs très utiles d'un point de vue statistique puisqu'ils sont à structure factorielle orthogonale (cf. Mukerjee [17, 18], ici les blocs peuvent constituer une ou plusieurs partitions croisées de l'ensemble des unités expérimentales). De ce point de vue la méthode DSIGN apparait comme une extension du procédé décrit par Bose [7].

Dans cette méthode l'ensemble des traitements G et celui des unités expérimentales E sont munis de structures de groupes abéliens finis; toute fraction régulière—tout plan à structure factorielle orthogonale—est défini au moyen d'un homomorphisme K de E dans G. Dans les articles de Patterson [20], Bailey et al. [6], Patterson et Bailey [21] l'étude des confusions d'effets est menée en considérant l'homomorphisme K^* dual de K puis en résolvant des équations du type $y = K^*x$, avec y donné appartenant à E et l'inconnue x à G. Ainsi pour les fractions de plans les solutions de $0 = K^*x$ donnent des contrastes de définition pour la fraction considérée (cf. Raktoe et al. [24, p. 125]). Si ce procédé est simple, il est couteux en général puisqu'on procède par énumération pour résoudre ces équations. Seuls quelques cas particuliers peuvent être traités par inversion—généralisée si besoin est—de K^*, par exemple celui où les facteurs ont des nombres de niveaux tous égaux à un même nombre premier ou à un même produit de nombres premiers. Inversement si l'on se fixe par exemple des contrastes de définition, la construction d'une fraction respectant ces contrastes passe par l'énumération d'homomorphismes K^* et la résolution d'équations $K^*x = 0$ jusqu'à obtenir la fraction souhaitée.

Bailey [2, 3]—considérant E et G comme des Z_t-modules ($Z_t = Z/tZ$, où t est le plus petit commun multiple des exposants de E et G) et K comme une application Z_t-linéaire—a montré que l'étude des confusions d'effets pouvait être menée en utilisant des propriétés de dualité. Plus précisément cet auteur introduit une forme Z_t-bilinéaire sur $G \times G$ non singulière et prouve d'une part que les contrastes de définition d'une fraction sont donnés par les éléments de l'orthogonal de Im K—le sous-module des traitements utilisés —d'autre part que dans un plan en blocs les effets traitements confondus avec les effets interblocs sont déterminés par l'orthogonal du sous-module de G constituant le bloc initial. A priori les résultats de Bailey permettent donc de déterminer les confusions d'effets pour un coût moindre en général que celui entrainé par la résolution d'équations $y = K^*x$. Aucune énumération n'est requise pour construire une fraction de plan respectant des contrastes de définition donnés. Il suffit de construire des orthogonaux de sous-ensembles donnés de G. Malheureusement Bailey ne propose pas de procédé de construction utilisable dans le cas général.

La méthode cyclique généralisée—introduite par John [13]—permet également de construire des plans en blocs à structure factorielle orthogonale. Ici les blocs constituent une seule partition de l'ensemble des unités expérimentales et G est encore muni d'une structure de groupe abélien fini. Dean et Lewis [10] ont montré que le plan est sans répétition si et seulement si le bloc initial constitue un sous-groupe de G. Les résultats obtenus par Bailey s'appliquent donc à ce cas particulier. Quant aux plans binaires à plusieurs répétitions, bien qu'ils ne puissent être obtenus par la méthode DSIGN, Dean et Lewis [11] ont montré que l'étude des confusions d'effets peut être menée là encore en recherchant l'orthogonal du bloc initial.

Ainsi la connaissance de l'orthogonal d'une partie du groupe des traitements permet celle de toutes les confusions d'effets pour une large classe de fractions régulières et de plans en blocs à structure factorielle orthogonale.

Cet article est essentiellement consacré à la présentation d'un procédé de construction de l'orthogonal d'un quelconque sous-groupe de G connu par l'intermédiaire d'un ensemble de générateurs. Il s'agit donc d'un prolongement des travaux de Bailey [2, 3]. (Bailey [5] publie une partie des résultats figurant dans le premier de ces deux textes; elle démontre par ailleurs une propriété—énonçée dans le théorème 5—qui recoupe les conclusions que nous tirons de notre proposition 1.) Ici tout orthogonal est obtenu comme somme directe de sous-groupes cycliques. Ainsi lorsqu'on fixe un ensemble de contrastes de définition notre procédé donne directement l'homomorphisme K qui permet de construire la fraction respectant ces contrastes de définition.

Dans le paragraphe 2 nous revenons sur quelques résultats antérieurs. Puis nous utilisons les propriétés de décomposition primaire des groupes abéliens finis pour fractionner la recherche des orthogonaux. Nous nous ramenons ainsi au problème de construction des orthogonaux dans un p-groupe. Dans le paragraphe 3 nous décrivons et justifions un procédé simple de construction de l'orthogonal d'une partie d'un p-groupe.

Dans un souci de brièveté nous nous limitons ici au cas des fractions régulières. Il est clair cependant que nôtre procédé de construction vaut également pour les plans en blocs à structure factorielle orthogonale.

2. FRACTIONS RÉGULIÈRES

Soient E un ensemble fini d'unités expérimentales et G un ensemble fini de traitements. Un plan d'expériences est un triplet (E, G, K) où K est une application de E dans G. Ce dispositif est dit factoriel si G est produit cartésien de m ensembles finis: les ensembles de niveaux des facteurs traitements (appelés ici facteurs traitements par commodité). Un plan est dit sans répétition si K est injectif. Un plan factoriel sans répétition pour lequel K n'est pas surjectif est appelé un dispositif fractionnel ou encore une fraction de plan.

2.1. *Espaces de Contrastes sur G*

L'étude des confusions d'effets pour les plans construits par la méthode DSIGN passe par une certaine décomposition en sous-espaces de contrastes de R^G, l'espace des fonctions numériques définies sur G. Il est donc indispensable de revenir sur cette décomposition. Nous rappelons au préalable la définition générale des espaces de contrastes.

Soient T_i, $i \in I = \{1, \dots, m\}$, les facteurs traitements et t_i, $i \in I$, le nombre des modalités de T_i. Pour tout $i \in I$ considérons la décomposition en somme directe orthogonale

$$\mathbb{R}^{T_i} = V_{i,0} \oplus V_{i,1}$$

où $V_{i,0}$ est l'espace des fonctions constantes sur T_i. Notons $\otimes$ le produit tensoriel d'espaces vectoriels. Par des propriétés usuelles d'algèbre linéaire (cf. par exemple Chambadal et Ovaert [8, p. 94]) on a

$$R^G \simeq \bigotimes R^{T_i} \simeq \bigoplus \{\Theta_J \mid J \in \mathscr{P}(I)\} \tag{1}$$

où les $\Theta_J = \otimes\{V_{i,0} \mid i \notin J\} \otimes \otimes\{V_{i,1} \mid i \in J\}$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^G$ et $\mathscr{P}(I)$ est l'ensemble des parties de I. On appelle Θ_J espace des J-contrastes sur G. $\Theta_\varnothing$ est l'espace des fonctions constantes sur G. Pour $i = 1, \dots, m$ $\Theta_{\{i\}}$ est encore appelé espace des effets principaux du facteur T_i; $\Theta_{\{i,j\}}$ avec $j \in I \setminus \{i\}$ est appelé espace des effets d'interaction des facteurs T_i et T_j, et de même pour toute famille de facteurs de cardinalité supérieure à 2.

Une décomposition de R^G, plus fine en général que (1), a été introduite par Bailey et al. [6]. On peut la présenter comme suit.

Pour $i = 1, \dots, m$ repèrons les modalités du facteur T_i par les entiers $0, 1, \dots, t_i - 1$. En considérant ces entiers comme les éléments du groupe additif $Z_{t_i} = Z/t_iZ$ l'ensemble des traitements est muni d'une structure de groupe abélien fini

$$G = Z_{t_1} \oplus \cdots \oplus Z_{t_m}.$$

Notons $e^i = (\delta_j^i \mid j = 1, \dots, m)$ où δ_j^i est le symbole de Kronecker. Les e^i, $i = 1, \dots, m$, forment un système générateur de ce groupe.

Soit t le plus petit commun multiple des t_i, $i = 1, \dots, m$, c'est à dire l'exposant de G. Considérons l'application bilinéaire de $G \times G$ dans Z_t

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum \{x_i y_i t/t_i \mid i = 1, \dots, m\} \bmod t,$$

où $x = \sum\{x_i e^i \mid i = 1, \dots, m\}$ et de même pour y. Soit S un quelconque sous-groupe de G (y compris G lui même). La restriction de f à $G \times S$ a pour noyau à gauche l'orthogonal S° de S (relativement à f), c'est à dire

$$S^\circ = \{y \mid y \in G : \langle x, y \rangle = 0\ \forall x \in S\}.$$

Montrons que son noyau à droite est nul. On a

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in G \quad \Rightarrow \quad \langle e^i, y \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m.$$

Or $\langle e^i, y \rangle = 0 \ \Rightarrow\ y_i t/t_i = 0 \bmod t \ \Rightarrow\ y_i = 0 \bmod t_i$. D'où

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in G \quad \Rightarrow \quad y_i = 0 \bmod t_i \quad \text{pout } i = 1, \dots, m.$$

D'après Lang [16, Théorème 10, p. 53] G/S° est alors isomorphe à S^*, le dual de S donc à S. Il s'ensuit que $|S| \times |S^\circ| = |G|$. D'où $(S^\circ)^\circ = S$, puis pour

S et D sous-groupes de G

$$D \subset S \quad \Leftrightarrow \quad S^\circ \subset D^\circ \text{ et } (S+D)^\circ = S^\circ \cap D^\circ. \tag{2}$$

Pour tout $x \in G$ soient (x) le sous-groupe cyclique engendré par x et Ξ_x l'espace des fonctions numériques constantes sur les classes de G modulo $(x)^\circ$. Soit Θ_x le supplémentaire orthogonal dans Ξ_x de la somme des Ξ_y pour tout y engendrant un sous-groupe strict de (x). Bailey [4] montre que

(a) on a

$$R^G = \oplus \{ \Theta_x \mid x \in C \} \tag{3}$$

où C est un ensemble de représentants des sous-groupes cycliques de G;

(b) $\Theta_x \subset \Theta_{J(x)}$ où $J(x)$ est l'ensemble des indices $1, \ldots, m$ pour lesquels $x_i \neq 0 \bmod t_i$;

(c) la dimension de Θ_x est égale à $\varphi[|(x)|]$ où φ est la fonction phi d'Euler.

La décomposition (3) ci-dessus est donc plus fine que la décomposition (1) en ce sens que tout Θ_x est un sous-espace de J-contrastes [avec $J = J(x)$]. Elle coincide avec la décomposition introduite par Bose [7] si les t_i sont tous égaux à un même nombre premier, avec les décompositions introduites par White et Hultquist [26] puis par Raktoe [23] si les t_i sont premiers.

2.2. *Orthogonalité et décomposition primaire de G*

Nous allons montrer que la recherche de l'orthogonal d'un sous-groupe peut être simplifiée en utilisant le fait que G est somme directe de ses p-sous-groupes de Sylow que nous appelerons ses composantes primaires (cf. Lang [16, chapitre I, §10]).

PROPOSITION 1. *Soient P l'ensemble des diviseurs premiers de t, $G = \oplus \{ S_p \mid p \in P \}$ la décomposition primaire de G et $D = \oplus \{ D_p \mid p \in P \}$, avec $D_p \subset S_p$ pour tout $p \in P$, un sous-groupe de G.*

Si pour tout $p \in P$ H_p est l'orthogonal de D_p dans S_p alors $D^\circ = \oplus \{ H_p \mid p \in P \}$.

Preuve. Pour $p \in P$ fixé posons $T_p = \oplus \{ S_q \mid q \in P : q \neq p \}$. Soit x un quelconque élément de $D_p \subset S_p$. Notons r l'ordre de x; r est premier avec l'exposant de T_p. Quel que soit $y \in T_p$ il existe $z \in T_p$ tel que $y = rz$. On a alors $\langle x, y \rangle = \langle x, rz \rangle = \langle rx, z \rangle = 0$. En conséquence $D_p^\circ = H_p \oplus T_p$, avec H_p

orthogonal de D_p dans S_p.

$$D = \oplus \{ D_p \mid p \in P \} \Leftrightarrow D^\circ = \bigcap \{ D_p^\circ \mid p \in P \} \qquad \text{d'après (2),}$$

$$= \bigcap \{ H_p \oplus T_p \mid p \in P \} \quad \text{d'après ce qui précède,}$$

$$= \oplus \{ H_p \cap S_p \mid p \in P \} = \oplus \{ H_p \mid p \in P \}. \quad \blacksquare$$

Ainsi la recherche de l'orthogonal d'un sous-groupe de G peut être fractionnée, le problème à résoudre étant alors celui de la construction de l'orthogonal d'un sous-groupe d'un p-groupe. (Ceci résulte également du théorème 5 de Bailey [5].) Nous décrivons un procédé de construction dans le paragraphe 3. Montrons plus précisément comment passer de la recherche d'un orthogonal dans une composante primaire de G à celle d'un orthogonal dans le p-groupe isomorphe.

Pour tout $p \in P$ on a $t = p^r \bar{p}$ et, pour $i = 1, \dots m$, $t_i = p^{r_i} \bar{p}_i$, où $\bar{p}$ et les $\bar{p}_i$ sont premiers avec p. Notons $\bar{p}_i^{-1}$ un entier tel que $\bar{p}_i \bar{p}_i^{-1} = 1 \mod p^{r_i}$. L'application

$$\psi_p : G_p = \oplus \{ Z_p r_i \mid i = 1, \dots, m \} \to G$$

$$(u_i \mid i = 1, \dots, m) \mapsto \sum_i \bar{p}_i \bar{p}_i^{-1} u_i e^i$$

est un homomorphisme injectif. De plus pour tout élément $x = (x_i \mid i = 1, \dots, m)$ de G on a

$$x_i = \sum \{ \bar{p}_i \bar{p}_i^{-1} u_i(p) | p \in P \},$$

où $u_i(p) = x_i \mod p^{r_i}$, d'après le théorème des restes chinois (cf. Lang [16, p. 63–65]).

Si x et $y = (y_i \mid i = 1, \dots, m)$ sont deux éléments de la composante primaire S_p isomorphe à G_p on a donc

$$0 = \langle x, y \rangle = \sum_i \frac{t}{t_i x_i y_i} \mod t$$

$$= \sum_i \frac{t}{t_i \bar{p}_i \bar{p}_i^{-1} u_i(p) v_i(p)} \mod t$$

$$= \sum_i p^{(r - r_i)} \bar{p}_i^{-1} u_i(p) v_i(p) \mod p^r,$$

avec $v_i(p) = y_i \bmod p^{r_i}$, puisque $\bar{p}_i\bar{p}_i^{-1}$ est idempotent dans Z_t. Ainsi y appartient à l'orthogonal dans S_p de (x) si et seulement si l'élément $(v_i(p) \mid i = 1,\ldots,m)$ est orthogonal dans G_p à $(\bar{p}_i^{-1}u_i(p) \mid i = 1,\ldots,m)$.

Soit alors $D_p \subset S_p$ un sous-groupe connu par des générateurs x^j, $j = 1,\ldots,n$. Son orthogonal dans S_p est image par ψ_p de l'orthogonal dans G_p du sous-groupe engendré par les éléments

$$\left(\bar{p}_i^{-1}u_i^j(p) \mid i = 1,\ldots,m\right) \qquad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,n,$$

où $u_i^j(p) = y^j \bmod p^{r_i}$.

Exemple 1. Soient $G = Z_{24} \oplus Z_{36} \oplus Z_{12}$ et $x = (22,33,1)$. Supposons que nous voulions construire $(x)^\circ$. Ici $t = 72$, d'où $P = \{2,3\}$.

Pour $p = 2$ la composante primaire S_2 de G est isomorphe à $Z_8 \oplus Z_4 \oplus Z_4$ et on a

$$\begin{aligned} &\bar{p}_1 = 3, && \bar{p}_2 = 9, && \bar{p}_3 = 3,\\ &\bar{p}_1^{-1} = 3, && \bar{p}_2^{-1} = 1, && \bar{p}_3^{-1} = 3\\ &u_1(p) = 6, && u_2(p) = 1, && u_3(p) = 1. \end{aligned}$$

Dans ce p-groupe nous devons donc rechercher l'orthogonal du sous-groupe engendré par l'élément $(2,1,3)$. C'est en fait la somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$. L'orthogonal dans S_2 de (x) est donc somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par $(9,0,9)$ et $(0,9,9)$.

Pour $p = 3$ la composante primaire S_3 de G est isomorphe à $Z_3 \oplus Z_9 \oplus Z_3$ et on a

$$\begin{aligned} &\bar{p}_1 = 8 && \bar{p}_2 = 4, && \bar{p}_3 = 4,\\ &\bar{p}_1^{-1} = 2, && \bar{p}_2^{-1} = 7, && \bar{p}_3^{-1} = 1,\\ &u_1(p) = 1, && u_2(p) = 6, && u_3(p) = 1. \end{aligned}$$

Dans ce p-groupe nous devons rechercher l'orthogonal du sous-groupe engendré par l'élément $(2,6,1)$. C'est la somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$. L'orthogonal dans S_3 de (x) est donc somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par $(16,0,4)$ et $(0,28,4)$.

En conséquence, d'après la proposition 1, $(x)^\circ$ est somme directe des deux sous-groupes cycliques engendrés par

$$(9,0,9)+(16,0,4)=(1,0,1)$$

et

$$(0,9,9)+(0,28,4)=(0,1,1),$$

ou bien encore par les deux sous-groupes cycliques engendrés par

$$(9,0,9)+(0,28,4)=(9,28,1)$$

et

$$(0,9,9)+(16,0,4)=(16,9,1).$$

Note: Décomposition primaire et construction de sous-espaces de contrastes. La décomposition primaire de G permet également de simplifier la construction des termes Θ_x de la décomposition (3) de $\mathbb{R}^G$. Soient x un élément d'une composante primaire, S, de G et y un élément de S°. Comme les ordres de x et y sont premiers entre eux, pour tout $z \in (x+y)$, (z) est somme directe d'un sous-groupe de (x) et d'un sous-groupe de (y). En particulier $(x+y)=(x)+(y)$, ce qui implique $(x+y)^\circ=(x)^\circ \cap (y)^\circ$ d'après (2). A l'isomorphisme $\mathbb{R}^G \sim \mathbb{R}^S \otimes \mathbb{R}^{S^\circ}$ près on a donc $\Theta_x \oplus \Theta_y \subset \Xi_{x+y}$. En effet, comme Θ_x [resp. Θ_y] est un espace de fonctions constantes sur toute classe de G modulo $(x)^\circ$ [resp. $(y)^\circ$], tout élément du produit tensoriel est constant sur toute classe de G modulo $(x+y)^\circ$ d'après ce qui précède.

De plus $\Theta_x \otimes \Theta_y$ est orthogonal à Ξ_z pour tout z engendrant un sous-groupe strict de $(x+y)$. En effet, d'après ce qui précède, tout élément du produit tensoriel est de somme nulle sur toute classe de G modulo $(z)^\circ$.

Enfin la dimension de Θ_{x+y} est égale à $\varphi[|(x+y)|]=\varphi[|(x)|]\times\varphi[|(y)|]$ d'après les propriétés de la fonction phi d'Euler (cf. Lang [16, p. 65]). Mais $\varphi[|(x)|]\times\varphi[|(y)|]$ est la dimension de $\Theta_x \otimes \Theta_y$. D'où par itération la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soient x^k, $k=1,\ldots,r$ des éléments de G appartenant à r composantes primaires distinctes. Si $y=\sum\{x^k \mid k=1,\ldots,r\}$ alors Θ_y est canoniquement isomorphe à $\otimes\{\Theta_{x^k} \mid k=1,\ldots,r\}$.*

2.3. *Méthode* DSIGN

L'application K de E dans G induit une application linéaire

$$L:\mathbb{R}^G \to \mathbb{R}^E$$
$$z=(z_g \mid g\in G)\mapsto L(z)=(z_{K(e)}\mid e\in E)$$

Supposons E produit cartésien de n ensembles finis—les (pseudo-)facteurs parcelles—à s_j modalités, $j=1,\dots,n$. Repérons ces modalités par les entiers $0,1,\dots,s_j-1$. Pour la construction de fractions régulières par la méthode DSIGN on munit G et E de structures de groupes abéliens finis: $G=\oplus\{Z_{t_i}\mid i=1,\dots,m\}$ et $E=\oplus\{Z_{s_j}\mid j=1,\dots,n\}$, et on impose à K d'être un homomorphisme injectif.

Outre l'application f introduite précédemment supposons définie une application bilinéaire de même forme que f de $E\times E$ dans Z_t. Notons alors K^* l'unique homomorphisme de G dans E tel que pour tout $x\in G$ et pour tout $y\in E$: $\langle x, K(y)\rangle=\langle K^*(x), y\rangle$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne l'une ou l'autre des applications bilinéaires, c'est-à-dire le dual de K (cf. Lang [16, p. 50]).

Toutes les confusions d'effets induites par le plan d'expériences (E,G,K) se déduisent ici de la connaissance du noyau, $\operatorname{Ker} K^*$, de K^* qui n'est autre que l'orthogonal dans G de l'image de K: $(\operatorname{Im} K)^\circ$ (cf. Bailey [3]). Soient en effet Θ_x^G les termes de la décomposition (3) de R^G et Θ_y^E les termes du même type de décomposition de R^E. On montre que, pour tout $x\in G$, $L[\Theta_x^G]=\Theta^E_{K^*(x)}$ (cf. Bailey et al. [6, p. 352] et Kobilinsky [15]).

Si donc $z\in\operatorname{Ker}K^*$ on a $L[\Theta_x^G]=L[\Theta_{x+z}^G]$. Inversement si des éléments x et z de G sont tels que $x-z\notin\operatorname{Ker}K^*$ alors

$$L[\Theta_x^G]\cap L[\Theta_z^G]=\Theta^E_{K^*(x)}\cap\Theta^E_{K^*(z)}=0.$$

Θ_x^G et Θ_z^G sont donc confondus si et seulement si $x-z\in\operatorname{Ker}K^*$. De plus la restriction de L à Θ_x^G est injective si et seulement si $(x)\cap\operatorname{Ker}K^*=(0)$.

Ceci étant examinons dans quelles conditions la fraction de plan considérée est régulière. Supposons que nous observions une variable aléatoire Y à valeurs dans $(R^E, \mathscr{B}_{R^E})$, où $\mathscr{B}_{R^E}$ est la tribu des boréliens de R^E. Considérons le modèle de Gauss-Markov où l'espérance mathématique de Y est supposée appartenir à $L[\Theta]$ avec $\Theta=\oplus\{\Theta_x^G\mid x\in H\}$ sous-espace donné de $\mathbb{R}^G$. Le plan est alors connexe—ou sans biais (cf. Raktoe et al. [24])—si et seulement si la restriction de L à Θ, $L|_\Theta$, est injective. D'après ce qui précède pour qu'il en soit ainsi il est nécéssaire et suffisant que

$$x\in H \quad\Rightarrow\quad (x)\cap\operatorname{Ker}K^*=(0),$$
$$(x,z)\in H\times H \quad \text{avec } x\neq z \quad\Rightarrow\quad x-z\notin\operatorname{Ker}K^*.$$

Supposons ces conditions vérifiées. Soit $\theta = \Sigma\{\theta_x \mid x \in H\} \in \Theta$, avec $\theta_x \in \Theta_x^G$. Puisque la fraction est connexe tout θ_x, $x \in H$, est estimable et pour tout $(x, z) \in H \times H$, avec $x \neq z$, les estimateurs de θ_x et θ_z sont non corrélés. En effet ils sont images inverses par $L|_\Theta$ des projections orthogonales de Y sur deux sous-espaces orthogonaux de R^E: $\Theta^E_{K^*(x)}$ et $\Theta^E_{K^*(z)}$. La fraction est bien régulière.

Note: Représentation matricielle de K et de K^*. L'ensemble des e^i, $i = 1,\dots, m$, où $e^i = (\delta^i_j \mid j = 1,\dots, m)$ avec δ^i_j symbole de Kronecker, forment un système de générateurs de G. Considérons le même type de système de générateurs de E. Ces systèmes étant donnés l'homomorphisme K peut être représenté par une matrice entière d'ordre $m \times n$ dont les éléments k_{ij} sont tels que les $k_{ij}s_j/t_i$ sont eux mêmes entiers (cf. Bailey et al. [6]). La transposée de la matrice des $k_{ij}s_j/t_i$ est représentative de K^*.

2.4. *Décomposition primaire et construction d'une fraction*

Un sous-groupe D de G étant donné montrons comment construire la fraction de plan admettant les éléments de D comme contrastes de définition en utilisant la décomposition primaire de G.

Soit x un élément d'une composante primaire de G. Notons p^r l'ordre de x. On a $0 = K^*(p^r x) = p^r K^*(x)$. En conséquence $K^*(x)$ appartient nécessairement à un p-sous-groupe éventuellement nul de E. Il s'ensuit que K^* est somme directe d'homomorphismes de p-groupes à raison d'un homomorphisme par composante primaire de G. En particulier si les t_i, $i = 1,\dots, m$, et les s_j, $j = 1,\dots, m$, sont premiers ou puissances de premiers la matrice de K^* est diagonale par blocs et chaque bloc est la matrice d'un homomorphisme de p-groupe (cf. Patterson et Bailey [21, p. 342]). Il en est de même pour K.

Supposons chacune des composantes primaires de G isomorphe au p-groupe $G_p = \oplus\{Z_{p^{r_i}} \mid i = 1,\dots, m\}$ où p est un diviseur premier de t. Le dual de l'injection canonique de G_p dans G

$$\psi_p\colon (u_i \mid i = 1,\dots, m) \mapsto \left(\bar{p}_i \bar{p}_i^{-1} u_i \mid i = 1,\dots, m\right)$$

(avec $\bar{p}_i = t_i/p^{r_i}$ et $\bar{p}_i^{-1}\bar{p}_i = 1 \bmod p^{r_i}$) est l'homomorphisme

$$\psi_p^*: x = (x_i \mid i = 1,\dots, m) \mapsto \left(\bar{p}_i^{-1} x_i \bmod p^{r_i} \mid i = 1,\dots, m\right).$$

Si donc $\operatorname{Ker} K^*$ est un sous-groupe D de G, K^* est canoniquement isomorphe à la somme directe d'homomorphismes K_p^* de p-groupes ayant pour noyaux respectifs les images $\psi_p^*(D)$ de D par chacun des ψ_p^*. Pour construire la fraction ayant les éléments de D pour contrastes de définition il suffit alors de déterminer les orthogonaux des $\psi_p^*(D)$ dans chacun des G_p, $p \in P$ (ensemble des diviseurs premiers de t). La somme directe des images de ces orthogonaux par les injections canoniques ψ_p est la fraction cherchée.

Exemple 1 (suite). Supposons que nous souhaitions construire une fraction de résolution III d'un plan à 3 facteurs ayant 24, 36 et 12 niveaux respectivement. Le groupe des traitements $G = Z_{24} \oplus Z_{36} \oplus Z_{12}$ est somme directe de deux composantes primaires isomorphes à $G_2 = Z_8 \oplus Z_4 \oplus Z_4$ et $G_3 = Z_3 \oplus Z_9 \oplus Z_3$.

Considérons la fraction admettant pour contrastes de définition des éléments du sous-groupe cyclique D de G engendré par l'élément $(22, 33, 1)$. On peut vérifier que cette fraction est de résolution III en utilisant le procédé suivant.

$\psi_2^*(D)$ est le sous-groupe cyclique de G_2 engendré par $(2, 1, 3)$,
$\psi_3^*(D)$ le sous-groupe cyclique de G_3 engendré par $(2, 6, 1)$.

Soit alors par exemple $x = (1, 0, 0) \in G$. Dans chacun des G_p considérons les générateurs des sous-groupes cycliques ayant même image par K_p^* que le sous-groupe $(\psi_p^*(x))$. Ces générateurs sont donnés dans le tableau ci-dessous.

p	$\psi_p^*(x)$	Générateurs		
2	(3,0,0)	(1,3,1)	(1,1,3)	(1,2,2)
3	(2,0,0)	(0,6,1)	(2,3,2)	

On observe que chacun de ces générateurs, noté $v = (v_i \mid i = 1, \ldots, m)$, a au moins deux composantes v_i non nulles. Il s'ensuit—d'après le théorème des restes chinois—que tout $z = (z_i \mid i = 1, \ldots, m) \in G$ tel que $x - z \in \operatorname{Ker} K^*$ a au moins deux composantes z_i non nulles. Tout espace Θ_z^G confondu avec Θ_x^G est donc un sous-espace d'effets d'interaction. Le même raisonnement valant pour Θ_0^G et tous les espaces Θ_x^G d'effets principaux on en conclue que la fraction est de résolution III.

D'après ce que nous avons vu plus haut D° est somme directe des sous-groupes cycliques de G engendrés par $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$. C'est donc l'ensemble des traitements d'une fraction au $\frac{1}{12}$ de G de résolution III. Cette fraction est définie par l'homomorphisme K de $E = Z_{24} \oplus Z_{36}$ dans G de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. CONSTRUCTION DE L'ORTHOGONAL D'UN SOUS-GROUPE D'UN p-GROUPE

3.1. *Orthogonal d'un sous-groupe cyclique*

Considérons un p-groupe $G = Z_{t_1} \oplus \cdots \oplus Z_{t_m}$ avec $t_i = p^{r_i}$. Notons $e^i = (\delta_j^i \mid j = 1, \ldots, m)$ avec δ_j^i le symbole de Kronecker. Les e^i, $i = 1, \ldots, m$, forment un système générateur de G. Soit $x = (x_1, \ldots, x_m)$ un élément de G; nous nous proposons de construire l'orthogonal $(x)^\circ$ de (x).

Pour $i = 1, \ldots, m$ si h_i est un entier premier avec p, h_i est inversible dans Z_t où t est le plus petit commun multiple des t_i. Si x et y sont orthogonaux dans G alors $\sum_i h_i x_i e^i$ et $\sum_i h_i^{-1} y_i e^i$ le sont également. Soient $o_1, \ldots, o_k$ les ordres de $x_1, \ldots, x_k$; sans perte de généralité on peut donc supposer que

(1) $x_i = t_i / o_i$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $x_i = 0$ pour $i > k$,

(2) $o_1, \ldots, o_k$ sont ordonnés par valeurs décroissantes; o_1 est donc l'ordre de x.

Nous donnons dans ce qui suit un système simple de générateurs du sous-groupe $(x)^\circ$: $y^1, \ldots, y^m$, puis nous montrons comment on peut—en modifiant éventuellement y^1—obtenir que $(x)^\circ$ soit somme directe des (y^j), $j = 1, \ldots, m$.

Soient $y^1 = o_1 e^1$, pour $2 \leqslant i \leqslant k$ $y^i = e^i - o_j / o_i e^j$ avec $j < i$ et pour $i > k$ $y^i = e^i$. Il est clair que les y^i sont orthogonaux à x. Pour montrer qu'ils engendrent $(x)^\circ$, il suffit donc de prouver que l'ordre du sous-groupe qu'ils engendrent est au moins égal à celui de $(x)^\circ$, à savoir $|G|/o_1 = (t_1/o_1) \times t_2 \times \cdots \times t_m$. Ceci se démontre par récurrence. y^1 est manifestement d'ordre t_1/o_1. Supposons que le sous-groupe H_i engendré par $y^1, \ldots, y^i$ soit d'ordre supérieur ou égal à $(t_1/o_1) \times t_2 \times \cdots \times t_i$. H_i est formé d'éléments $z = (z_1, \ldots, z_m)$ de G tels que $z_{i+1} = 0$. On en déduit que les classes de G: $H_i, y^{i+1} + H_i, 2y^{i+1} + H_i, \ldots, (t_{i+1} - 1) y^{i+1} + H_i$ sont toutes disjointes et que l'ordre du sous-groupe H_{i+1} engendré par $y^1, \ldots, y^i, y^{i+1}$ est supérieur ou égal à $|H_i| \times t_{i+1}$, donc à $(t_1/o_1) \times t_2 \times \cdots \times t_{i+1}$.

Pour $i > k$ l'ordre de y^i est égal à t_i. Lorsque $2 \leqslant i \leqslant k$ l'ordre de y^i est également t_i si l'on a: $t_i o_j / o_i \geqslant t_j$, ou de façon équivalente: $t_i / o_i \geqslant t_j / o_j$.

Si donc, pour tout i compris entre 2 et k, l'indice j qui figure dans l'expression définissant y^i a pu être choisi de sorte que $t_i / o_i \geqslant t_j / o_j$, les y^i sont tous d'ordre t_i, à l'exception de y^1 qui est d'ordre t_1 / o_1. Le produit de ces ordres est alors égal à l'ordre du sous-groupe $(x)^\circ$. On en déduit que $(x)^\circ$ est somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par $y^1, \ldots, y^m$.

Mais il peut advenir que certains indices i compris entre 2 et k soient tels que $t_i / o_i < t_j / o_j$ pour tout $j < i$. Soit I la suite formée de 1 et de ces indices rangés par ordre croissant. Dans la définition de y^i pour $2 \leqslant i \leqslant k$ (à savoir

$y^i = e^i - o_j/o_i e^j$ avec $j < i$) choisissons l'indice j comme:

(1) l'indice précédent i dans I si $i \in I$,
(2) un indice tel que $t_i/o_i \geqslant t_j/o_j$ si $i \notin I$.

Pour $i \in I$ l'ordre de y^i, égal à $t_j o_i/o_j$, est strictement supérieur à t_i. Par suite $(x)°$ n'est pas somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par $y^1, \ldots, y^m$.

Remplaçons alors y^1 par $z^1 = y^1 + \Sigma\{o_i y^i \mid i \in I: i \neq 1\}$. Il est clair que $z^1, y^2, \ldots, y^m$ constituent encore un système de générateurs de $(x)°$. De plus il est facile de vérifier que $z^1 = o_n e^n$ où n est le plus grand indice figurant dans I. z^1 est donc d'ordre t_n/o_n et le produit des ordres de z^1 et des y^i, $i \in I: i \neq 1$, est $(t_1/o_1)\Pi\{t_i \mid i \in I: i \neq 1\}$. On en déduit que le produit des ordres de $z^1, z^2, \ldots, y^m$ est égal à l'ordre de $(x)°$, qui est donc somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par ces éléments de G.

On peut donc énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *Soit G un p-groupe: $G = Z_{t_1} \oplus \cdots \oplus Z_{t_m}$ où les t_i sont des puissances du nombre premier p. Considérons un élément $x = (x_1, \ldots, x_m)$ où $x_i = t_i/o_i$ si $i \leqslant k$ et $x_i = 0$ sinon. Supposons la suite des ordres $o_1, \ldots, o_k$ des $x_1, \ldots, x_k$ ordonnée par valeurs décroissantes. Soit $e^i = (\delta_i^j \mid j = 1, \ldots, m)$ avec δ_i^j symbole de Kronecker.*

Notons I l'ensemble formé par l'indice 1 et les indices $i \in \{2, \ldots, k\}$ tels que $t_i/o_i < t_j/o_j$ pour tout $j < i$.

Alors l'orthogonal $(x)°$ du sous-groupe cyclique engendré par x est somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par $y^1, \ldots, y^m$, où

$$y^1 = o_n e^n$$

avec n plus grand des indices figurant dans I,

pour $2 \leqslant i \leqslant k$:

$$y^i = e^i - \frac{o_j}{o_i e^j}$$

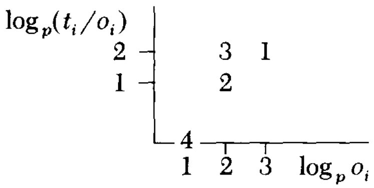
où $j < i$ est tel que $t_i/o_i \geqslant t_j/o_j$ si $i \notin I$ et est égal à l'indice de I immédiatement inférieur à i si $i \in I$,

pour $i > k$:

$$y^i = e^i.$$

NOTE. Si x_i est de la forme $h_i t_i / o_i$, où h_i est premier avec p, on pose $y^i = h_j e^i - h_i o_j / o_i e^j$ pour $2 \leqslant i \leqslant k$ dans la définition ci-dessus. D'après ce que nous avons vu en début de paragraphe y^i est bien alors orthogonal à x.

EXEMPLE 2. Soient $G = Z_{32} \oplus Z_8 \oplus Z_{16} \oplus Z_2 \oplus Z_4$ $(p = 2)$ et $x = (4,2,4,1,0)$. On a $o_i = 8,4,4,2$ pour $i = 1,2,3,4$. Comme on le voit dans la figure ci-dessous $I = \{1,2,4\}$.



On a donc:

$$\begin{aligned}
y^1 &= (0,0,0,2,0) = 0 && \text{car } 2 = 0 \bmod 2,\\
y^2 &= (-2,1,0,0,0) && (\text{ordre } 16),\\
y^3 &= (0,-1,1,0,0) && (\text{ordre } 16),\\
y^4 &= (0,-2,0,1,0) && (\text{ordre } 4),\\
y^5 &= (0,0,0,0,1) && (\text{ordre } 4).
\end{aligned}$$

3.2. *Orthogonal d'un sous-groupe connu par ses générateurs*

Notons tout d'abord qu'un sous-groupe H est somme directe des sous groupes cycliques engendrés par les éléments $y^1, \ldots, y^n$ de $G = Z_{t_1} \oplus \cdots \oplus Z_{t_m}$ si et seulement si la matrice d'ordre $m \times n$ à éléments y_i^j, $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, représente un homomorphisme injectif—d'image H—de $Z_{s_1} \oplus \cdots \oplus Z_{s_n}$ dans G où s_j est l'ordre de y^j.

Soit alors un sous-groupe S engendré par les éléments $x^1, \ldots, x^q$ de G. En utilisant la remarque ci-dessus on peut déterminer $S°$ comme somme directe de sous-groupes cycliques en construisant par récurrence une suite de matrices C_k, $k = 1, \ldots, q$, où C_k représente un morphisme injectif d'image l'orthogonal H_k du sous-groupe engendré par $x^1, \ldots, x^k$. On a donc $S° = H_q$.

C_1 est obtenu par la méthode décrite dans le paragraphe précédent. Pour déduire C_{k+1} de C_k on remarque qu'un élément $C_k z$ de H_k est orthogonal à x^{k+1} s'il vérifie:

$$(x^{k+1})' D_G C_k z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (C_k^* x^{k+1})' D_{H_k} z = 0$$

où $D_G = \operatorname{Diag}(t/t_i \mid i = 1,\dots,m)$ avec t plus petit commun multiple des t_i, $D_{H_k} = \operatorname{Diag}(t/s_j \mid j = 1,\dots,n)$ avec s_j ordre de la j^{eme} colonne de H_k, $C_k^* = D_{H_k}^{-1} C_k' D_G$. Autrement dit $C_k z$ est orthogonal à x^{k+1} si et seulement si z est orthogonal à $C_k^* x^{k+1}$. Si B_{k+1} est alors la matrice d'un homomorphisme injectif d'image $(C_k^* x^{k+1})^\circ$—matrice que nous savons construire—il est claire que nous pouvons prendre pour C_{k+1} le produit matriciel $C_k B_{k+1}$.

Exemple 3. Soient $G = \mathrm{Z}_{32} \oplus \mathrm{Z}_8 \oplus \mathrm{Z}_{16} \oplus \mathrm{Z}_2 \oplus \mathrm{Z}_4$, $x^1 = (4,2,4,1,0)$ et $x^2 = (24,2,0,0,1)$. On a $t = 32$; l'ordre de x^1 est égal à 8, celui de x^2 à 4. Le procédé décrit dans le paragraphe précédent nous donne:

$$\begin{array}{rcc} & & \begin{array}{cc} t_i & t/t_i \end{array} \\ C_1 = & \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{cc} 32 & 1 \\ 8 & 4 \\ 16 & 2 \\ 2 & 16 \\ 4 & 8 \end{array} \\ s_j = & \begin{array}{cccc} 16 & 16 & 4 & 4 \end{array} & \\ t/s_j = & \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 8 & 8 \end{array} & \end{array}$$

$D_G = \operatorname{Diag}(1,4,2,16,8)$; $D_{H_1} = \operatorname{Diag}(2,2,8,8)$. D'où

$$C_1^* = D_{H_1}^{-1} C_1' D_G = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{rcc} & & s_j \\ C_1^* x^2 = & \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 16 \\ 16 \\ 4 \\ 4 \end{array} \end{array} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcc} & & t_i \\ C_2 = C_1 B_2 = & \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 32 \\ 8 \\ 16 \\ 2 \\ 4 \end{array} \\ s_j = & \begin{array}{ccc} 16 & 16 & 4 \end{array} & \end{array}$$

Vérification. Il est clair que les colonnes de C_2 sont orthogonales à x^1 et à x^2. Or C_2 représente bien un homomorphisme injectif. Soit en effet $z=(z_1,z_2,z_3)\in Z_{16}\oplus Z_{16}\oplus Z_4$. $C_2 z=0$ implique $z_1=0 \bmod 16$, $2(z_2-z_1)=0 \bmod 32$ et $2(z_1-z_3)-z_2=0 \bmod 8$. D'où $z_2=0 \bmod 16$ puis $z_3=0 \bmod 4$. Ainsi $C_2 z=0$ entraine que z est l'élément nul de $Z_{16}\oplus Z_{16}\oplus Z_4$.

Par un raisonnement analogue on montre que la matrice d'ordre 5×2 à éléments les x_i^j, $i=1,\dots,5$, $j=1,2$, représente également un homomorphisme injectif d'image S.

Ces deux homomorphismes ont donc pour ordres respectifs $16\times 16\times 4$ et 8×4. En conséquence $|H_2|\times|S|=|G|$ et H_2 est bien l'orthogonal de S.

Les auteurs remercient les rapporteurs pour leur lecture attentive du manuscript et pour leurs suggestions.

REFERENCES

1 N. T. J. Bailey, The use of linear algebra in deriving prime power factorial designs with confounding and fractional replication. *Sankhya Ser.* A 21:345–354 (1959).
2 R. A. Bailey, *Algebraic Duality in Factorial Design*, Texte miméographié, 1977, 26 p.
3 R. A. Bailey, Patterns of confounding in factorial designs, *Biometrika* 64:597–603 (1977).
4 R. A. Bailey, Dual abelian groups in the design of experiments, in *Algebraic Structures and Applications* (P. Schultz et al., Eds.), Lectures notes in Pure and Applied Mathematics, 74, Dekker, New York, 1981, p. 45–54.
5 R. A. Bailey, (1985). Factorial design and Abelian groups, *Linear Algebra Appl.* 70:349–368 (1985).
6 R. A. Bailey, F. H. L. Gilchrist et H. D. Patterson, Identification of effects and confounding patterns in factorial designs, *Biometrika* 64:347–354 (1977).
7 R. C. Bose, Mathematical theory of the symmetrical factorial design, *Sanhkyā* 8:107–166 (1947).
8 J. L. Chambadal et J. L. Ovaert, *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle*, Dunod, Paris, 1968.
9 C. S. Cheng, Orthogonal arrays with variable numbers of symbols, *Ann. Statist.* 8:447–453 (1980).
10 A. M. Dean et S. M. Lewis, A unified theory for generalized cyclic designs, *J. Statist. Plann. Inference* 4:13–23 (1980).
11 A. M. Dean et S. M. Lewis, Disconnected generalized cyclic designs, soumis pour publication.
12 D. J. Finney, The fractional replication of factorial arrangements, *Ann. Eugen.* 12:291–301 (1945).
13 J. A. John, Generalized cyclic designs in factorial experiments. *Biometrika* 60:55–63 (1973).

14 O. Kempthorne, A simple approach to confounding and fractional replication in factorial experiments, *Biometrika* 34:255–272 (1947).
15 A. Kobilinsky, Confounding in relation to duality of finite Abelian groups, *Lin. Algebra Appl.* 70:321–347 (1985).
16 S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
17 R. Mukerjee, Inter-effect orthogonality in factorial experiments, *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* 28:83–108 (1979).
18 R. Mukerjee, Orthogonal fractional factorial plans, *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* 29:143–160 (1980).
19 R. Mukerjee, Universal optimality of fractional factorial plans derivable through orthogonal arays, *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* 31:64–68 (1982).
20 H. D. Patterson, Generation of factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 38:175–179 (1976).
21 H. D. Patterson et R. A. Bailey, Design keys for factorial experiments, *Appl. Statist.* 27:335–343 (1978).
22 D. Raghavarao, *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, Wiley, New York, 1971.
23 B. L. Raktoe, Combining elements from distinct finite fields in mixed factorials, *Ann. Math. Statist.* 40:498–504 (1969).
24 B. L. Raktoe, A. Hedayat et W. T. Federer, *Factorial Designs*, Wiley, New York, 1981.
25 C. R. Rao, The theory of fractional replication in factorial experiments, *Sankhyā* 10:81–86 (1950).
26 D. White et R. A. Hultquist, Construction of confounding plans for mixed factorial designs, *Ann. Math. Statist.* 36:1256–1271 (1965).

Received 18 July 1984; revised 6 June 1985