MATHEMATICS

Zur Fastperiodizität von Gruppen

von W. Fluch

Ungargasse 40, Graz, Austria

Communicated by Prof. H. Freudenthal at the meeting of September 30, 1978

EINLEITUNG

Im Folgenden werden nichtabelsche, unendliche Gruppen auf ihre Fastperiodizität untersucht. Die Fastperiodizität von abzählbaren Gruppen wurde zum Teil schon von J. v. Neumann in [7] behandelt, jedoch dabei nicht endlich- und unendlicherzeugbare Gruppen getrennt! In [3] wurde gezeigt, daß es Gruppen mit einer Relation gibt, für welche jede endliche, unitäre Darstellung nicht treu ist (hier wird u.a. bewiesen, daß es Gruppen mit einer Relation gibt, für welche der Satz bei beliebiger endlicher Darstellung gilt.) Es wird für die Higman-Gruppe H_4 gezeigt, daß jede endliche, unitäre Darstellung trivial ist (und daß die Gruppe nichtlinear ist). Ferner wird anhand von Klassen von Beispielen bewiesen, daß sowohl für endlich- wie unendlich-erzeugte, nichtabelsche, unendliche Gruppen (wie auch Lie'sche Gruppen) der Satz gilt: *die Gruppe kann max., min., oder weder max. noch min. f.p. sein.*[1]

Die abelschen und die endlichen Gruppen (die hier nicht behandelt werden) verhalten sich anders und es gilt der Satz: Alle lokal-kompakten (separablen) abelschen Gruppen sind max. f.p.

[1] Der Satz bleibt *nicht* mehr richtig, wenn man weiter in die vier Klassen endlich- oder unendlichvieler Erzeugender bzw. Relationen unterteilt. Die Klasse mit ∞-vielen Erzeugenden und endlich-vielen Relationen hat keine min. f.p. Gruppen.

Abgesehen von Korollar 3 und Theorem 4 wird die Min. f.p. (bzw. Max. f.p.) rein rechnerisch-algebraisch nachgewiesen.

§ 1. ENDLICH-ERZEUGTE, UNENDLICHE GRUPPEN

Sei nämlich G_1 die Gruppe $G_1 := \{a, b | zaz^{-1} = a^2 \text{ mit } z = bab^{-1}\}$, so gilt der Satz

THEOREM 1: Bei jeder unitären, endlichen Darstellung U von G_1 gilt $U(a) = \bar{a} = E$ d.h. kein U ist treu. Die Gruppe ist weder max. noch min. f.p.*

BEWEIS: $U(a) = \bar{a}$ hat stets endliche Ordnung **, denn die Eigenwerte von $\bar{a}$ sind lauter Einheitswurzeln und $\bar{a}$ läßt sich diagonalisieren ($\bar{z}$ hat dieselben wie $\bar{a}$). Aus

$$\bar{a}^{\alpha} = 1 \text{ folgt wegen } \bar{z}^{\alpha}\bar{a}\ \bar{z}^{-\alpha} = \bar{a}^{2^{\alpha}} \text{ daß } 2^{\alpha} \equiv 1 \pmod{\alpha}$$

für eine natürliche Zahl α gilt, also $\alpha = 1$ d.h. $\bar{a} = E$ w.z.b.w. Wäre nämlich $\alpha \neq 1$ Lösung der Kongruenz, dann gilt für den kleinsten Exponenten e: $2^e \equiv 1(\alpha)$ auch $2^e \equiv 1(p_1)$, wo p_1 der kleinste Primteiler von α ist und $e|\alpha$. Aber es ist $t|(e, p_1 - 1)$ mit $t \geqq 2$, wobei t der kleinste Exponent von 2 modulo p_1. Aus $t|e \Rightarrow t|\alpha$ und damit gibt es eine Primzahl $p_0|\alpha$ mit $p_0 < p_1$ Wid! [2]

Wir betrachten nun die Higman-Gruppe

$$H_4 = \{a, b, c, d | bab^{-1} = a^2,\ cbc^{-1} = b^2,\ dcd^{-1} = c^2,\ ada^{-1} = d^2\}.$$

Es gelten die folgenden Lemmata

LEMMA 1: Jede Faktorgruppe von H_4, bei welcher a, b, c, d endliche Ordnung bekommen, ist trivial $= E$.

BEWEIS: Siehe [6]! Beweis siehe Anhang. (Seite 251).

LEMMA 2: Bei jeder endlichen Darstellung von H_4 haben $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ nur Einheitswurzeln als Eigenwerte.

BEWEIS: Aus den Relationen von H_4 folgt $\bar{b}^k\bar{a}\bar{b}^{-k} = \bar{a}^{2^k}$ (analog für $\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$) für beliebiges $k = 1, 2, 3, \ldots$ d.h. die Eigenwerte von $\bar{a}^{2^k}$ stimmen bis auf Permutation mit denen von $\bar{a}$ überein, also Spektrum $\sigma(\bar{a}) = \sigma(\bar{a}^{2^k})$.

* wegen der Fastperiodizität (kurz f.p.) siehe Maak, Fastperiodische Funktionen, Berlin 1950, V. Kap., §30. Die Max.- und Min.f.p.-Definition siehe in J. v. Neumann [8] oder [7].

** das gilt nach [3] auch für nichtunitäre, endliche Darstellungen (die Gruppe ist also keiner Matrixgruppe isomorph).

[2] aus dem Beweis folgt, daß diese *eine* Relation in endlichen Gruppen nur trivial (d.h. $\bar{a} = 1$) realisierbar ist!

Da nur endlich viele Permutationen zur Verfügung stehen (die Dimension ist ja endlich!), muß für zwei verschiedene Exponenten $k_1^{(i)} < k_2^{(i)}$ gelten: $\lambda^{2^{k_1^{(i)}}} = \lambda^{2^{k_2^{(i)}}}$ wobei λ_i beliebiger Eigenwert ist d.h. $\sigma(\bar{a})$ besteht aus lauter Einheitswurzeln.

Wir können nun zeigen, daß H_4 nichtlinear ist also den Satz

THEOREM 2: Bei jeder (unitären), endlichen Darstellung U der Higman-Gruppe H_4 ist $U(H_4) = E$ d.h. U ist trivial. Insbesonders ist die Gruppe H_4 min. f.p. und nichtlinear.

Bei einer unitären, endlichen Darstellung U ist $U(a) = \bar{a}$ (analog $\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$) diagonalisierbar. Aus Lemma 2 folgt, daß die Eigenwerte Einheitswurzeln sind. Somit hat $\bar{a}$ endliche Ordnung und nach Lemma 1 ist das Theorem in diesem Fall bewiesen.

Nach [4], Satz 2 ist jede endlich-erzeugte Matrixgruppe = max. f.p. Es gilt daher das

KOROLLAR 1: Eine endlich-erzeugte min. f.p. Gruppe hat keine endliche Darstellung.

Auf H_4 angewandt ergibt das, daß jede endliche Darstellung trivial ist w.z.b.w. H_4 ist somit nichtlinear.*

Die überabzählbarvielen R. Camm'schen einfachen, unendlichen Gruppen sind eine weitere Klasse von Beispielen nichtlinearer Gruppen (siehe [2]). Allgemeiner gilt das

KOROLLAR 1a: Jede endlich-erzeugte, unendliche, einfache Gruppe besitzt keine (nichttriviale) endliche Darstellung (ist also insbesonders min. f.p.).

BEWEIS: Hätte G eine endliche Darstellung, so wäre diese wegen der Einfachheit treu. Eine endlich-erzeugte, einfache Matrixgruppe ist aber endlich, Wid! Analog wie Theorem 1 kann man beweisen, daß die Gruppen

$$G_{x,W} = \{a, b \,|\, zaz^{-1} = a^2;\ W(a, b) = 1\} \text{ mit } z = xax^{-1}$$

(x = nichtvertauschbar mit a), $W(a, b)$ = nichtreduzibles Wort aus der freien Gruppe $F_2 = \{a, b\}$ mit der Exponentensumme in b: $\sum_\nu \beta_\nu = 1$, nichtlineare Gruppen sind, soferne $G_{x,W} \neq E$ ist. (Insbesonders ist also $G_{x,W}$ min. f.p.) **

Wir betrachten noch die folgende Birkhoff-Gruppe

$$B = \{a, b \,|\, c = [a, b];\ [c, a] = [c, b] = 1\}, \text{ mit } [a, b] = aba^{-1}b^{-1} = c.$$

Als endlich-erzeugte Matrixgruppe (siehe die Selbstdarstellung unten) ist

---

* davon kann man sich auch rechnerisch überzeugen, siehe [3].

** nach einer brieflichen Mitteilung von Prof. Higman läßt sich *für geeignete* x, W $G_{x,W} \neq E$ mit den Methoden von Tartakowski beweisen.

$B = $ max. f.p.; B besitzt aber keine treue, unitäre, endliche Darstellung (was bekanntlich bei kompakten, endlich-dim. Gruppen nicht eintreten kann).

Sei $U(c) = C$ unitär, so ist es diagonalisierbar und es ist $C^{\infty} = E$. Wäre Dim $U < \infty$, dann könnten nicht alle Eigenwerte Einheitswurzeln sein, also existierte mindestens ein Eigenwert $\lambda \in \sigma(C)$ mit $\lambda, \lambda^2, \lambda^3 \dots$ alle verschieden voneinander d.h. $U = $ unendlich-dim. Bei mehrfachen Eigenwerte kann aber Dim $< \infty$ sein, wie die Selbstdarstellung zeigt:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser erhält man (genügend viele) endliche Faktorgruppen und damit unitäre Darstellungen z.B. mod p, $p = $ Primzahl: $B \equiv B_p \bmod p$.

Aus dem Lemma von Birkhoff [1] folgt dann das

KOROLLAR 2: Da in der Gruppe B_p (für die Primzahl p) $\bar{c}^p = 1$ ist, folgt, daß B_p bei treuer Darstellung mindestens vom Darstellungsgrade p ist.

Diese Schranke ist "genau", wie man sich an Darstellungsbeispielen überzeugen kann. Die Elemente der Gruppe B lassen sich mit Hilfe der definierenden Relationen in folgender Weise anordnen:

$$X = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma), \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma = \text{ganzrat. Zahlen.}$$

Durch Multiplikation erhält man (es wird $a^{\alpha} b^{\beta} = b^{\beta} a^{\alpha} c^{\alpha\beta}$)

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' - \alpha'\beta).$$

Ein analoges Rechengesetz folgt aus der Selbstdarstellung

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ & 1 & \beta \\ & & 1 \end{pmatrix} = \bar{b}^{\beta} \bar{a}^{\alpha} \bar{c}^{\gamma}.$$

Das Lemma von Birkhoff gilt allgemeiner für beliebige Gruppen mit zwei Elementen, deren Kommutator im Zentrum liegt. Nach [4], S. 161 (Satz 2) sind die endlich-erzeugten Matrixgruppen (z.B. freie Gruppen F_n mit $n < \infty$) max. f.p., womit der Satz über die Fastperiodizität von endlicherzeugten, unendlichen Gruppen bewiesen ist.

§ 2. UNENDLICH-ERZEUGTE GRUPPEN

Wir betrachten zuerst die Birkhoffgruppe über dem Körper der rat. Zahlen d.h.

$$B_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ & 1 & \beta \\ & & 1 \end{pmatrix} ; \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma = \text{rat. Zahlen.} \right\}.$$

Mit N bezeichnen wir den zentralen Normalteiler

$$N=\left\{\begin{pmatrix}1&0&n\\ &1&0\\ &&1\end{pmatrix};\ n=\text{ganzrat. Zahl}\right\};$$

dann ist wegen $\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]$,

$$\bar{a}=\begin{pmatrix}1&1&0\\ &1&0\\ &&1\end{pmatrix},\quad \bar{b}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ &1&1/p\\ &&1\end{pmatrix},\quad \bar{c}=\begin{pmatrix}1&0&1/p\\ &1&0\\ &&1\end{pmatrix}$$

d.h. in $B^*=B_r/N$ gilt $\bar{c}^p=1$ für jede Primzahl p. Nach dem vorhin zitierten Lemma aus [1] ist (vgl. Korollar 2) somit der Darstellungsgrad (von B^*) $\geqq p$ für jede Primzahl p also gilt das zum Satz von Birkhoff analoge

THEOREM 3: Die Gruppe $B^*=B_r/N$ ist (abzählbar erzeugt und) mit keiner Matrixgruppe isomorph.

Eine Klasse von min. f.p. Gruppen erhalten wir aus dem

KOROLLAR 3: Jede lokal-kompakte (und nichtkompakte), zusammenhängende, einfache Gruppe ist min. f.p.

BEWEIS: Wäre die Gruppe nicht min. f.p., dann gäbe es eine treue, unitäre, endliche Darstellung (wegen der Einfachheit). Nach dem Satz von Freudenthal [5] wäre G entweder kompakt oder nicht einfach, Wid!

Aus der Einfachheit der eigentlichen Lorentzgruppe * (siehe [9], S. 246) folgt also die Min. f.p., somit der Satz von E. Wigner [10]

THEOREM 4: Die eigentliche, (gewöhnliche) Lorentzgruppe $L_{4,1}$ ist (einfach und) min. f.p.

Man kann auch rein rechnerisch vorgehen, was wir jetzt tun wollen. Dazu betrachten wir die Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$: d.h. die Matrizen $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ mit $ad-bc=1$ und $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ (=Körper der komplexen Zahlen). Es gilt

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1}&0\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}^{a^2},\quad a=\text{natürl. Zahl.*}$$

Bei einer unitären, endlichen Darstellung U von $SL(2,\mathbb{C})$ ist daher (vgl. [7] § 4, Lemma 1 und 2): $U\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=E$. Analog ist $U\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}=E$. Nun ist aber $(a\neq 0)$

---

* und ihren topolog. Eigenschaften: siehe Börner, Darstellung von Gruppen, Berlin 1955, Kp, IX, S. 264 (§ 3).

1 Übergang zu $SL(2,\mathrm{C})/\{\pm E\}$ d.h. linear-gebrochenen Transformationen liefert die Behauptung für die eigentliche, gewöhnliche Lorentzgruppe!

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-1}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = E, \text{ d.h.}$$

für $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow U\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = E \text{ und}$$

für $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b-bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow U\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = E.$$

Daher ist $U(SL(2,\mathbb{C})) = E$ und die Min. f.p. bewiesen. Für andere Gruppen z.B. $SL(2, K)$, wobei K = unendlicher Körper der Charakteristik 0 (etwa rationale oder reelle Zahlen) ist, liefert obige Rechnung ebenfalls die Min. f.p.

Es sei abschließend bemerkt, daß es auch weder max. noch min. f.p. unendlich-erzeugte Gruppen gibt, nämlich z.B. die Matrizengruppe: $u(\neq 0)$, v = rat. Zahlen, $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ nach obigem Lemma aus [7]! Weitere weder max. noch min. f.p. Gruppen erhält man aus dem folgenden Lemma, das sich leicht zu einem Kriterium verschärfen läßt (dessen Beweis klar ist).

LEMMA 3: Das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ einer min. f.p. Gruppe G_1 mit einer max. f.p. Gruppe G_2 ist weder max. noch min. f.p.

Da die freie Gruppe $F_2 = \{a, b\}$ max. f.p. ist (sie besitzt eine treue, unitäre 2×2-Darstellung), so ist auch ihre Untergruppe

$$F_\infty = \{a, b^{-f}ab^f \mid f = 1, 2, 3, \ldots\},$$

also *die abzählbar-erzeugte freie Gruppe* max. f.p. Allgemeiner ist die Klasse der freien Produkte $\prod^* Z_n$ von zyklischen Gruppen Z_n $(n \leqq \infty)$ max. f.p. (und abzählbar-erzeugt) **.

Wir erinnern noch daran, daß bei den Liegruppen die kompakten max. f.p. sind, womit nebenbei der Satz über die Fastperiodizität (siehe die Einleitung) auch für Liegruppen bewiesen ist.

ANHANG: Der Satz von J. v. Neumann lautet etwas grob formuliert so: Die Theorie der Darstellungen abzählbarer Gruppen (und wie hier

---

** vgl. dazu Th. J. Dekker: Canad. J. of Math. Bd. 11 (1959), S. 67–69 bewiesen wird sogar *endlich-erzeugter*) ist ebenso "kompliziert" wie die Darstellungstheorie lokal-kompakter Gruppen, zu denen sie ja gehören (in der diskreten Topologie).

LITERATUR

1. Birkhoff, G. – Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 883–888 (1936).
2. Camm, R. – Jour. London Math. Soc. **28**, 66–76 (1953).
3. Fluch, W. – Acta Arithm. Bd. **10**, 329–332 (1964).
4. Fluch, W. – Math. Scand. **16**, 148–158, 159–164 (1965).
5. Freudenthal, H. – Ann. of Math. (2) **37**, 57–77 (1936).
6. Kurosch, A. – Gruppentheorie, Deutsche Übersetzung Berlin 1953.
7. Neumann, J. v. & E. Wigner – Ann. of Math. (2) **41**, 746–750 (1940).
8. Neumann, J. v. – Trans. Am. Math. Soc. **36**, 445–492 (1934).
9. Smirnow, W. I. – Lehrgang d. höheren Mathematik, Teil III, 1.
10. Wigner, E. – Ann. of Math. (2) **40**, 149–204 (1939).

BEWEIS: Ist nämlich $a^\alpha = b^\beta = c^\gamma = d^\delta = 1$, so that man $2^\beta \equiv 1(\alpha)$, $2^\gamma \equiv 1(\beta)$, $2^\delta \equiv 1(\gamma)$ und $2^\alpha \equiv 1(\delta)$. Für die kleinsten Primteiler $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_\delta$ von beziehungsweise α, β, γ, δ folgert man dann den Widerspruch: $p_\alpha > p_\beta > p_\gamma > p_\delta > p_\alpha$, weil aus $2^\beta \equiv 1(\alpha)$ sich $p_\beta < p_\alpha$ u.s.w. ergibt!