MATHEMATICS

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION $P_k^{m,n}(z)$ EN SÉRIE DE FONCTIONS DE LEGENDRE ASSOCIÉES

PAR

L. KUIPERS ET B. MEULENBELD

(Communicated by Prof. J. F. KOKSMA at the meeting of February 25, 1961)

Soit donnée l'équation differentielle

$$(1) \qquad (1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{ k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)} \right\} w = 0,$$

òu z est une variable complexe située dans le plan complexe hors de la ligne $(-\infty, 1)$. Pour toutes les valeurs de k, m et n excepté celles pour lesquelles α est un entier négatif et (ou) β est un entier l'équation (1) est satisfaite par la fonction

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} P_k^{m,n}(z) &= \frac{e^{-\pi i \beta}}{4\pi \sin \beta\pi} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{(z-1)^{m/2}(z+1)^{n/2}}{2^\gamma} \cdot \\ &\quad \cdot \oint^{(z+,1+,z-,1-)} (t-1)^\beta (t+1)^\gamma (t-z)^{-\alpha-1}\, dt, \end{aligned} \right.$$

òu pour abréger nous posons

$$\alpha = k + \frac{m+n}{2},\ \beta = k - \frac{m-n}{2},\ \gamma = k + \frac{m-n}{2},\ \delta = k - \frac{m+n}{2}.$$

Quant au contour d'intégration et aux arguments de $z-1, z+1, t-1, t+1$ et $t-z$ nous nous référons à [1], p. 439. Dans la note présente nous montrerons que $P_k^{m,n}(z)$ peut être développé en série de fonctions de Legendre associées de première espèce; cependant aux paramètres k, m, n et z quelques limitations subséquentes sont imposées.

Nous supposons que $R(z) > 0$, alors

$$(3) \qquad |z-1| < |z+1|.$$

Maintenant nous introduisons une nouvelle variable d'intégration u selon $t = z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{iu}$ ou

$$(4) \qquad u = -i \log [(t-z)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}].$$

On voit que $R(u) = \arg [(t-z)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]$.

Soit r un nombre avec

$$(5) \qquad 0 < r < |z-1|^{\frac{1}{2}} |z+1|^{-\frac{1}{2}} < 1,$$

alors $r|z^2-1|^{\frac{1}{2}} < |z-1|$.

Nous choisissons comme première partie du chemin d'intégration dans le t-plan un cercle, centré en z, de rayon $r|z^2-1|^{\frac{1}{2}}$. Le point $t=1$ se trouve à l'extérieur de ce cercle (fig. 1). Sous la convention que $u=0$ pour $t=z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ le point initial A est transformé en le point

$$u=-\pi+\tfrac{1}{2}\chi-i\log r(=u_0-2\pi).$$

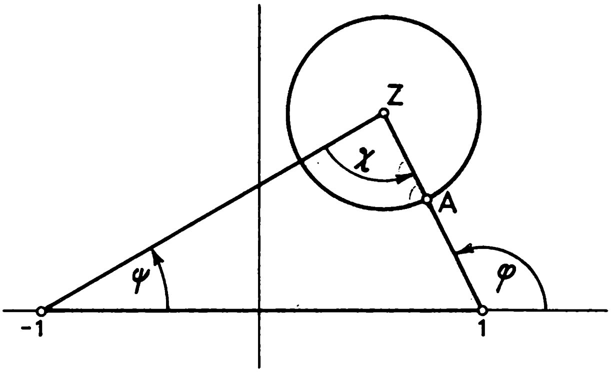

Fig. 1

La deuxième position du point A dans le u-plan devient $\pi+\frac{1}{2}\chi-i\log r(=u_0)$. La première partie du chemin d'intégration dans le u-plan est le segment $(u_0-2\pi, u_0)$. Dans la deuxième position d'A le point $t=1$ est transformé en $u=\pi+\frac{1}{2}\chi+i\log(|z+1|^{\frac{1}{2}}|z-1|^{\frac{1}{2}})=u_1$.

On voit que $Im\, u_0>Im\, u_1>0$ en vertu de (5). Nous pouvons supposer que les courbes qui entourent les points u_1 et $u_1-2\pi$ sont des cercles.

Soit le point $t=-1$ transformé en u^*, alors $Im(u^*)<0$.

On peut choisir la valeur de r tellement que chacun des cercles ne comprend aucun des points u^* et $u^*-2\pi$ à son intérieur. Le chemin d'intégration dans le u-plan est tracé dans la figure 2.

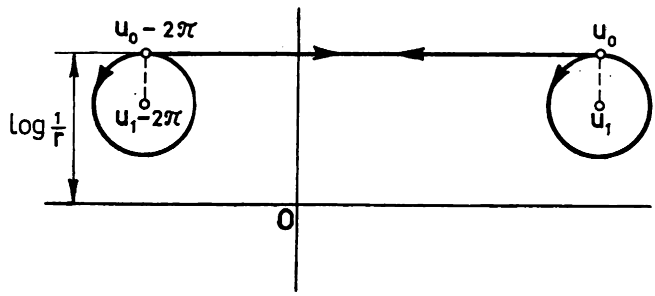

Fig. 2

Les deux cercles se déduisent l'un de l'autre par la translation $\pm\ 2\pi$.

En désignant par L ce chemin d'intégration (2) s'écrit avec encore $R(z)>0$:

$$P_k^{m,n}(z) = i\,\frac{e^{-\pi i\beta}}{4\pi \sin\beta\pi}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\,\frac{(z-1)^{-\frac{1}{2}\beta}\,(z+1)^{-\frac{1}{2}\gamma}}{2^\gamma}\cdot$$

$$\int_L e^{-i\alpha u}\{(z-1)+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e^{iu}\}^\beta\,\{(z+1)+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e^{iu}\}^\gamma\,du.$$

Supposons maintenant $R(\beta) > -1$; dans ce cas nous écrivons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} P_k^{m,n}(z) &= \frac{ie^{-\pi i\beta}}{4\pi\sin\beta\pi}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\,\frac{(z+1)^{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}}{2^{\gamma-\beta}}\cdot\\ &\int_L e^{-imu}\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^\beta\{z+1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e^{iu}\}^{\gamma-\beta}\,du.\end{aligned}\right.$$

Quand nous faisons tendre r vers la valeur $|z-1|^{\frac{1}{2}}\,|z+1|^{-\frac{1}{2}}$, les deux intégrales le long des petits cercles autour de u_1 et $u_1-2\pi$ sont nulles, à la limite. En même temps $u_0 \to u_1$. Le chemin d'intégration de l'intégrale dans (6) est devenu $u_1-2\pi \to u_1$, suivi par $u_1 \to u_1-2\pi$ et l'ensemble des deux intégrales rectlignes vaut

$$(1-e^{2\beta\pi i})\int_{u_1-2\pi}^{u_1} = -2ie^{\beta\pi i}\sin\beta\pi\int_{u_1-2\pi}^{u_1}$$

et il vient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} P_k^{m,n}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\,(z+1)^{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}}{2\,\pi\Gamma(\beta+1)\,2^{\gamma-\beta}}\\ &\int_{u_1-2\pi}^{u_1} e^{-imu}\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^\beta\,\{z+1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e^{iu}\}^{\gamma-\beta}\,du.\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant m réel, entier. Quant à l'intégrale dans (7), l'integrandum ne possède aucun pôle à l'intérieur du parallélogramme de sommets $0, 2\pi, u_1, u_1-2\pi$ (fig. 3), alors l'intégrale de (7) le long des

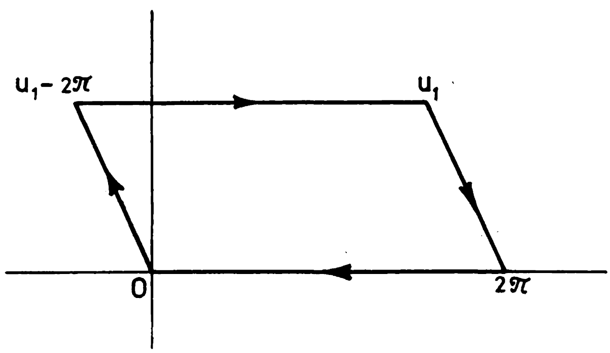

Fig. 3

côtés du parallélogramme est égale à zéro. Mais parce que m est un nombre entier les valeurs des intégrales $\int_0^{u_1-2\pi}$ et $\int_{u_1}^{2\pi}$ sont opposées. Alors (7) devient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} P_k^{m,n}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\,(z+1)^{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}}{2\pi\Gamma(\beta+1)\,2^{\gamma-\beta}}\cdot\\ &\cdot\int_0^{2\pi} e^{-imu}\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^\beta\,\{z+1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e^{iu}\}^{\gamma-\beta}\,du.\end{aligned}\right.$$

La restriction $Re\,\beta > -1$ n'est plus nécessaire parce que pour $R(z) \neq 0$ l'intervalle $(0, 2\pi)$ ne contient pas de points singuliers de l'integrandum et les deux membres de (8) sont des fonctions analytiques de β. (8) est donc valable pour $Re\, z > 0$ et m réel entier.

En remplaçant k par $-k-1$ dans (8), nous obtenons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} P_k^{m,n}(z) &= \frac{\Gamma(-\delta)\,(z+1)^{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}}{2\pi\Gamma(-\gamma)2^{\gamma-\beta}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{imu}\,\{z+1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e^{iu}\}^{\gamma-\beta}}{\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^{\gamma+1}}\,du = \\ &= \frac{(-1)^m\,\Gamma(1+\gamma)\,(z+1)^{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}}{2\pi\,\Gamma(1+\delta)\,2^{\gamma-\beta}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-imu}\{z+1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e^{iu}\}^{\gamma-\beta}}{\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^{\gamma+1}}\,du. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier $m=n$ la relation (8) est une représentation pour la fonction de Legendre associée (voir [2], ch. IV, p 133). L'intégrale dans (8) est égale à

$$\begin{aligned} &(z+1)^{\gamma-\beta} \int_0^{2\pi} e^{-imu}\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^{\beta} \left\{1+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{iu}\right\}^{\gamma-\beta} du = \\ &= (z+1)^{\gamma-\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\gamma-\beta}{l} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}l} \int_0^{2\pi} e^{-iu(m-l)} \cdot \{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^{\beta}\,du = \\ &= (z+1)^{m-n} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\gamma-\beta}{l} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}l} \cdot \frac{2\pi\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-l+\beta+1)} P_\beta^{m-l}(z). \end{aligned}$$

Substituant en (8) nous trouvons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} P_k^{m,n}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{m-n}}(z+1)^{\frac{1}{2}(m-n)} \cdot \\ &\cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{m-n}{l} \frac{1}{\Gamma(\alpha-l+1)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}l} P_\beta^{m-l}(z), \end{aligned}\right.$$

formule valable pour $R(z) > 0$, m réel, entier, n et k quelconque.

Remarque 1

Parce que selon notre supposition β n'est pas entier le nombre $\Gamma(\alpha-l+1) = \Gamma(m-l+\beta+1)$ dans (8) est fini et $\neq 0$.

Remarque 2

Soit maintenant $R(z) < 0$. Remplaçons z par $-z$ dans (8), nous avons

$$\begin{aligned} P_k^{m,n}(-z) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\,(z-1)^{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}\,e^{\mp\pi ik}}{2\pi\,\Gamma(\beta+1)2^{\gamma-\beta}} \cdot \\ &\cdot \int_0^{2\pi} e^{-imu}\,\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos u\}^{\beta}\,\{z-1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{iu}\}^{\gamma-\beta}\,du, \end{aligned}$$

le signe supérieur étant adopté si $I(z) > 0$, et le signe inférieur si $I(z) < 0$.

Nous appliquons la formule donnée en [3] (21):

$$P_k^{n,m}(-z) = e^{\mp\pi i(m-n)/2}\, 2^{m-n} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+1)} \left\{ -\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi\, e^{\pi im}} Q_k^{m,n}(z) + e^{\mp\pi i\beta} P_k^{m,n}(z) \right\}$$

et nous trouvons, puisque m est entier,

$$P_k^{m,n}(z) - \frac{2e^{\pm \pi i \alpha} \sin \alpha\pi}{\pi} Q_k^{m,n}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi\, \Gamma(\beta+1)} (z-1)^{\frac{1}{2}(\gamma-\beta)} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{2\pi} e^{-inu} \{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos u\}^{\gamma} \{z - 1 + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{iu}\}^{\beta-\gamma} du.$$

De même (9) nous donne

$$P_k^{m,n}(z) - \frac{2e^{\pm \pi i \alpha} \sin \alpha\pi}{\pi} Q_k^{m,n}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+1)\, (z-1)^{\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}}{2\pi\, \Gamma(\delta+1)} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{e^{-inu} \{z - 1 + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{iu}\}^{\beta-\gamma}}{\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos u\}^{\beta+1}} du.$$

Remarque 3

La relation (10) nous permet de trouver des propriétés des fonctions de Legendre generalisées à l'aide de celles des fonctions de Legendre associées. Par exemple il est possible d'appliquer les transformations quadratiques des dernières fonctions et alors le résultat est un développement de $P_k^{m,n}(z)$ en série de fonctions hypergéométriques d'un argument quadratique. Un tel développement vaut mieux que celui que nous avons dérivé dans nos travaux précédents.

REFERENCES

1. Kuipers, L. and B. Meulenbeld, On a generalization of Legendre's associated differential equation, I, Proc. Kon. Ned. Ak. v. W. (Amsterdam), Series **A**, **60**, 4, 436–443 (1957).
2. Robin, Louis, Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales, Tome II, Paris (1958)
3. Kuipers, L. and B. Meulenbeld, Related generalized Legendre's associated functions, Archiv der Mathematik, **IX** Fasc. 5 (1958).