Die Theorie der geometrischen Ordnungen

HERMANN KÜNNETH
Universität Erlangen-Nürnberg, Deutschland

Einleitung

Das Gebiet der Mathematik, das hier unter dem Begriff der „geometrischen Ordnungen" zusammengefasst wird, wird anderwärts, so z.B. in Frankreich, auch als „géometrie finie" bezeichnet.* Die ersten Arbeiten, die dieses Gebiet berühren, stammen von Möbius, v. Staudt, A. Kneser, u. a.; auch die Theorie der konvexen Körper (H. Brunn) greift hier herein. Indess war C. Juel der erste, welcher den Begriff der (geometrischen) „Ordnung" zur Grundlage einer eigenen Theorie gemacht und diese in vielen Arbeiten ausgebaut hat. Erwähnt sei hier vor allem die Juelsche Klassifikation der ebenen Kurven 3.Ordnung, d.h. derjenigen Kurven in der projektiven Ebene, welche von jeder Geraden in höchstens drei Punkten getroffen werden (Juel [1]), sowie die Juelschen Sätze über Flächen 3.Ordnung (Juel [2]).

Diese ordnungsgeometrischen Probleme hängen auch eng zusammen mit solchen der „direkten Infinitesimalgeometrie." Die Bezeichnung „direkt" bezieht sich darauf, dass der Zugang zu den infinitesimalgeometrischen Untersuchungen hier nicht auf dem Umweg über Algebra und Analysis gewonnen wird, wobei die geometrischen Aussagen nur als Interpretationen analytischer Sachverhalte erscheinen, sondern dass hier auf algebraische und analytische Hilfsmittel und Methoden, vor allem die Differenzialrechnung verzichtet und ein direkter Zugang zu den geometrischen Problemen gesucht wird nur mittels geometrischer, insbesondere topologischer Begriffe wie Inzidenz, Anordnung, und Stetigkeit. So tritt hier auch die rein topologische Natur von manchen Sätzen über algebraische Kurven in Erscheinung; erwähnt sei der Vierscheitelsatz von Mukhopadhyaya–Kneser oder der Satz von Möbius, dass jede unpaare Kurve ohne Spitzen in der Ebene mindestens drei (reelle) Wendepunkte besitzt, sowie die Theorie der Bogen n-ter Ordnung im n-dimensionalen Raum von Hjelmslev. In neuerer Zeit wurde die Theorie der geometrischen Ordnungen vor allem vertieft und ausgebaut und durch viele neue Ergebnisse bereichert durch

* Im Deutschen pflegt man jetzt unter „endlicher Geometrie" die Geometrien mit nur endlich vielen Punkten zu verstehen.

Marchaud, Haupt, Scherk, und Fabricius-Bjerre um nur einige Namen zu nennen. Hier kann nur ein Überblick über diese Ergebnisse gegeben werden; auf Flächen und Kontinua von höherer als erster Ordnung wird nur am Schluss in drei Beispielen eingegangen. Wegen der Beweise der meisten Sätze muss auf die angegebene Literatur verwiesen werden. Die Beweise einiger angeführten Sätze werden in einem in Vorbereitung befindlichen Buch (Haupt und Künneth [2]) gebracht werden.

Zusammenfassende Berichte über die geometrischen Ordnungen aus früheren Jahren finden sich bei Montel [1] (1924), Linsman [2] (1938), Haupt [7] (1939), Nagy [1] (1943), und ein Bericht über die neuesten Ergebnisse bei Haupt [31] (1963).

Bezeichnungen

Unter E_n bzw. P_n werde der euklidische bzw. projektive n-dimensionale Raum verstanden. R_n kann beides bedeuten. Eine k-Ebene ist ein k-dimensionaler linearer Unterraum von R_n. Eine $(n-1)$-Ebene im R_n heisst, auch Hyperebene.

Ist M eine Punktmenge in R_n, so bedeutet $L(M)$ den kleinsten, M enthaltenden, linearen Unterraum von R_n. Der *Rang* $R(M)$ von M ist gleich der Dimension von $L(M)$. $\bar{M}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von M.

Eine Menge M in R_n heisse beschränkt, wenn es eine zu M fremde Hyperebene in R_n gibt.

Ist B ein orientierter Bogen, so wird mit $B(p, q)$ der Teilbogen von B bezeichnet, der p zum Anfangspunkt und q zum Endpunkt hat, und es sei $\underset{\smile}{B} = B - \{p\} - \{q\}$.

Eine Jordankurve C ist eine geschlossene Kurve in E_2; die Rand eines beschränkten Gebietes G ist. Es wird G dabei auch mit $J(C)$ bezeichnet.

1. Grundgebilde und Ordnungscharakteristiken

Untersucht werden hier als „Grundgebilde“ bezeichnete Kontinua, insbesondere Bogen, Kurven, und Flächen in kompakten metrischen Räumen und zwar werden diese Grundgebilde untersucht hinsichtlich der Mächtigkeit des Durchschnitts bzw. der Mächtigkeit des Systems der Komponenten des Durchschnitts dieser Gundgebilde mit den als

„Ordnungscharakteristiken" bezeichneten, gewissen Axiomen genügenden Teilmengen des zu Grunde gelegten, und als „Grundgebiet" bezeichneten Raumes R.

In diesem Bericht soll R immer als projektiver n-dimensionaler Raum ($n \geqslant 2$) vorausgesetzt werden oder als einfach zusammenhängender, abgeschlossener Teilraum von P_n oder E_n. Doch gelten die meisten Sätze auch für allgemeinere kompakte metrische Räume.

1.1. Axiome. Das System der Ordnungs-Charakteristiken, abgekürzt *O. Ch.*, sei κ. Die Axiome, die von den *O. Ch.* erfüllt sein sollen, lauten:

I. Jede *O. Ch.* ist eine kompakte Teilmenge von R.

II. Keine *O. Ch.* ist Teilmenge einer anderen *O. Ch.*

III. Ist K^0 eine beliebige *O. Ch.*, so sei $R^0 = R - K^0$. Für jede von K^0 verschiedene *O. Ch.* K zerfällt $R^0 - K$ und, wenn R einfach zusammenhängend ist, auch $R - K$ in zwei nicht leere, offene Teilmengen $R^0(K, +)$ und $R^0(K, -)$, die positive und negative Seite von K in R^0 bzw. R.

IV. *Stetigkeit der O. Ch.* Zu jeder *O. Ch.* K und zu jeder ϵ-Umgebung U von K in R gibt es eine von K verschiedene *O. Ch.* K' mit $K' \subset U$.

V. *Stetigkeit der Seiten.* Ist U eine ϵ-Umgebung der *O. Ch.* K in R, so gilt für jede *O. Ch.* $K' \subset U$ bei geigneter Wahl von $+$ und $-$ in $R^0(K', \pm)$:

$$(R - U) \cap R^0(K, +) = (R - U) \cap R^0(K', +)$$

VI. *Trennungsaxiom.* Ist $K \in \kappa$, $K \neq K^0$, x, $y \in R^0 \cap K$, $y' \in R^0 \cap (R - K)$, x' beliebig, so gibt es in beliebig kleiner Umgebung von K eine *O. Ch.* K', so dass x und x' und ebenso y und y' auf verschiedenen Seiten von K' liegen (Haupt-Künneth [1]).

Da κ Teilraum des Raums der Kompakta in R_n ist, kann es als topologischer Raum aufgefasst werden. Aus Axiom IV folgt, dass κ im Bezug auf diese Topologie in sich dicht ist.

Als *O. Ch.* treten insonderheit auf die Hyperebenen des P_n oder E_n ($n \geqslant 2$), ferner in E_2 die Kreise einschliesslich der Geraden, auch Kegelschnitte oder Parabeln mit der Gleichung

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad \left(a_i \text{ beliebig, } 0 \leqslant i \leqslant n, \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \neq 0\right)$$

in einem von zwei zur Y-Achse parallelen Geraden begrenzten Streifen von E_2.

1.2. Grundpunkte und k-Ordnungscharakteristiken. Gibt es Punkte, die in allen $K \in \kappa$ enthalten sind (z.B. wenn κ ein Geradenbüschel oder Kreisbüschel ist), so werden sie als „*Grundpunkte*" von κ bezeichnet. Von k-*O. Ch.* spricht man, wenn durch je k Punkte des Grundgebildes, die verschieden von den Grundpunkten sind, genau eine *O. Ch.* geht, oder auch durch k Punkte, die in genügend kleinen, paarweise fremden Umgebungen von k (von den Grundpunkten verschiedenen) Punkten des Grundgebildes oder einer *O. Ch.* liegen. So sind in obigen Beispielen die Kreise 3-*O. Ch.*, die Kegelschnitte 5-*O. Ch.*, und die Parabeln $(n+1) - O.\ Ch.$

2. Komponentenordnung und Punktordnung

2.1. Definitionen. Die „Komponentenordnung" eines Kontinuums C bezüglich einer *O. Ch.* K, abgekürzt $KO(C, K)$, ist gleich der Kardinalzahl des Systems der Komponenten von $C \cap K$. Es ist C von endlicher KO bezüglich κ, wenn $KO(C, K)$ endlich ist für alle $K \in \kappa$. C hat beschränkte KO m bezüglich κ, abgekürzt $KO(C, \kappa) = m$, wobei m eine natürliche Zahl ist, wenn $m = \max[KO(C, K), K \in \kappa]$.

Sind alle Komponenten von $C \cap K$ einpunktig, so spricht man von „Punktordnung," abgekürzt $PO(C, K)$ bzw. $PO(C, \kappa)$. Die Punktordnung von C in einem Punkt $p \in C$ ist gleich min $PO(U, \kappa)$ für alle Umgebungen U von p auf C.

Ein Kontinuum (Bogen) C heisst „ordnungshomogen" bezüglich κ, wenn C in allen Punkten die gleiche PO bezüglich κ hat.

SATZ. *Jedes Kontinuum von endlicher PO ist abgeschlossene Hülle einer Vereinigung abzählbar vieler homogener Teilkontinuen* (Haupt [6]).

Beispiel 1. Eine nicht zerfallende, reelle, algebraische Kurve 3. Ordnung im R_3 hat bezüglich der Ebenen als *O. Ch.* auch die *PO* 3.

Beispiel 2. M sei Vereinigung der Strecken S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ in E_2, wobei S_n in Polarkoordinaten gegeben sei durch:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Es ist $KO(M, \kappa)$ endlich, aber nicht beschränkt, wenn κ das System der Geraden ist.

Beispiel 3. Ist C eine ebene algebraische Kurve und $p \in C$ Wendepunkt oder Dornspitze bzw. Schnabelspitze, so hat C in p die PO 3 bzw. 4, wenn die Geraden die *O. Ch.* sind.

Beispiel 4. In E_2 hat ein Oval, wenn κ das System der Geraden ist, PO 2. Ein konvexes n-Eck S_n hat zwar KO 2, aber keine endliche PO; es ist $PO(S_n, K) = 2$ für alle $K \in \kappa$, abgesehen von den Geraden, auf denen Seiten von S_n liegen.

2.2. Schwache Punktordnung. Für solche Fälle wie hier in Beispiel 4 empfiehlt es sich die (beschränkte) „schwache Punktordnung", abgekürzt *schw. PO*, einzuführen. Es ist *schw.* $PO(C, \kappa) = m$, wenn m die kleinste Zahl ist, für welche die Menge der *O. Ch.* $K \in \kappa$ mit $PO(C, K) > m$ nirgends dicht in κ ist. Entsprechend wird die „schwache Komponentenordnung" (*schw. KO*) erklärt.

Beispiel. Es sei C in der kartesischen E_2 die Vereinigung der $2n+1$ Strecken, die $(0, 1)$ verbinden mit $(0, -1)$, mit $(2i, 0)$, und mit $(-2i+1, 0)$, und der $2n$ Strecken, die $(0, -1)$ verbinden mit $(2i-1, 0)$ und mit $(-2i, 0)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Hier sei κ wieder die Menge der Geraden. Es ist $PO(C, \kappa)$ nicht endlich, $KO(C, \kappa) = 4n+1$, *schw.* $PO(C, \kappa) =$ *schw.* $KO(C, \kappa) = 2n+2$.

2.3. Verschärftes Trennungsaxiom. Es ist für jede Punktmenge M nach Definition $KO(M, \kappa) \geqslant$ *schw.* $KO(M, \kappa)$.

Gibt es nun auch, wenn *schw.* $KO(M, \kappa) = m$, eine nur von m abhängige obere Schranke für $KO(M, \kappa)$? Dies ist der Fall, wenn M ein Kontinuum ist und das Trennungsaxiom für die *O. Ch.* folgendermassen verschärft wird.

VIa. Trennungsaxiom. Es bedeute K^0 und R^0 dasselbe wie in Axiom VI. Für alle $K \in \kappa - \{K^0\}$ und beliebige Punkte $x_i \in K \cap R^0$ und $y_i \in R^0(K, +)$ $(i = 1, 2, ..., n,\ 1 \leqslant n < \infty)$ gibt es zu beliebig kleinen Umgebungen V von $K \cap K^0$ mit $x_i, y_i \notin \bar{V}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ in beliebig kleiner Umgebung von K ein $K' \in \kappa - \{K^0\}$ derart, dass $K \cap K' \subset V$ und dass $x_i \in R^0(K', -)$ und $y_i \in R^0(K', +)$ für jedes $i = 1, 2, ..., n$.

SATZ. *Erfüllt κ ausser den übrigen Axiomen von dem Teil* 1.1. *auch Axiom VIa, so folgt für jedes Kontinuum C aus schw.* $KO(C, \kappa) = m \geqslant 1$ *bzw. schw.* $KO(C, \kappa) = 0$, *dass* $KO(C, \kappa) \leqslant 2m$ *bzw.* $KO(C, \kappa) \leqslant 1$.

Um auch in die bei den hier zu behandelnden Problemen angewandten Beweismethoden Einblick zu gewähren, soll nun der (indirekte) Beweis für den Fall eines Kontinuums C im P_n mit *schw.* $KO(C, \kappa) = m \geqslant 1$ skizziert werden, wobei k die Menge der Hyperebenen in P_n ist. Der Beweis für allgemeineres κ verläuft ganz entsprechend ([Haupt [12]).

Wir nehmen also an, es sei H eine Hyperebene, für die $H \cap C$ in $q > 2m$ Komponenten $C_1, C_2, ..., C_q$ zerfällt. Ist $G \subset H$ eine $(n-2)$-Ebene von P_n, so sei $\sigma(G)$ gleich der Anzahl der Komponenten C_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$, die zu G fremd sind, und $s = \max[\sigma(G)$ für alle $G \subset H]$. Es ist $s \leqslant q$. Für G^0 sei $\sigma(G^0) = s$ und bei geeigneter Numerierung der C_i sei $G^0 \cap C_i = \emptyset$ für $i = 1, 2, ..., s$, und $G^0 \cap C_i \neq 0$ für $i = s+1, ..., q$; auch für alle $(n-2)$-Ebenen G' in genügend kleiner Umgebung W von G^0 gilt dann: $G' \cap C_i = \emptyset$ für $i = 1, 2, ..., s$, und $G' \cap C_i \neq \emptyset$ für $i = s+1, ..., q$; letzteres folgt daraus, dass $s = \max[\sigma(G)]$.

Jedem C_i $(i = 1, 2, ..., s)$ ordnen wir eine „Normalumgebung" U_i in P_n zu; dabei sei $C_i \subset U_i$; $\bar{U}_i \cap \bar{U}_k = \emptyset$ für $i \neq k$. Ist U_i^g der Rand von $\bar{U}_i$, so ist $U_i^g \cap C_i = \emptyset$ und, da C zusammenhängend ist und $q > 2$, so ist $C \cap U_i^g \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, ..., s$.

Es sei nun H^0 eine beliebige Hyperebene mit $H^0 \neq H$, $G^0 \subset H^0$, $H^0 \cap \bar{U}_i = \emptyset$ für $i = 1, 2, ..., s$, und es sei $R^0 = P_n - H^0$.

$U_i^g - U_i^g \cap H$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ zerfällt in $U_{i,1}^g = U_i^g \cap R^0(H, +)$ und $U_{i,2}^g = U_i^g \cap R^0(H, -)$. Es gibt eine abgeschlossene, zusammenhängende Teilmenge $d_{i,1}$ von $U_{i,1}^g$ bzw. $d_{i,2}$ von $U_{i,2}^g$, bezeichnet als „Deckel," derart dass $(C \cap U_i^g) \subset (d_{i,1} \cup d_{i,2})$. Da die beiden Deckel einen positiven Abstand von H haben, gibt es eine Umgebung V von H, so dass $H' \cap U_i \neq \emptyset$ und $H' \cap (d_{i,1} \cup d_{i,2}) = \emptyset$ für jede Hyperebene $H' \subset V$ und $i = 1, 2, ..., s$.

In $\bar{U}_i$ gibt es eine Komponente Q_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ von $C \cap \bar{U}_i$, die mit C_i und $d_{i,1} \cup d_{i,2}$ Punkte gemein hat wegen des Zusammenhangs von C und wegen $C \cap U_i^g \subset d_{i,1} \cup d_{i,2}$. O.B.d.A. können wir bei geeigneter Numerierung der C_i annehmen, dass für $i = 1, 2, ..., s'$ die Komponente Q_i mit $d_{i,1}$ Punkte gemein hat, wobei $s' \geqslant s/2$. Es gibt dann in beliebig kleiner Umgebung von H eine in κ offene Menge μ von Hyperebenen H' mit $H' \cap Q_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, ..., s'$ und $H' \cap H \subset W$; also $H' \cap C_i \neq \emptyset$ für $i = s+1, ..., q$, wobei auch erreicht werden kann, dass $H' \cap C_i$ und $H' \cap C_k$ nicht der gleichen Komponente von $H' \cap C$ angehören für $s+1 \leqslant i, k \leqslant q$, $i \neq k$.

Man erhält also mindestens $s' + q - s$ Komponenten von $H' \cap C$. Es ist daher $m = schw.\ KO(C, \kappa) \geqslant KO(C, \mu) \geqslant s' + q - s \geqslant q - s/2 \geqslant q/2$ und $q \leqslant 2m$ im Widerspruch zur Annahme $q > 2m$.

2.4. Schnittkomponenten und Stützkomponenten. Eine beschränkte Komponente C_i des Durchschnitts $C \cap K$ eines Kontinuums C mit einer $O.\ Ch.$ K heisst „Schnittkomponente," wenn es eine Normalumgebung U_i von C_i gibt und eine C_i enthaltende Komponente von $C \cap \bar{U}_i$, die mit beiden Deckeln $d_{i,1}$ und $d_{i,2}$ Punkte gemein hat. Auch jede nicht beschränkte Komponente von $C \cap K$ gilt als Schnittkomponente. Eine beschränkte Komponente von $C \cap K$, die nicht Schnittkomponente ist, heisst „Stützkomponente." Ist C_i Stützkomponente in $C \cap K$, so hat also für jede Normalumgebung U_i von C_i die C_i enthaltende Komponente von $C \cap \bar{U}_i$ nur mit einem Deckel von U_i Punkte gemein. Ist C_i einpunktig, so spricht man von einem „Schnittpunkt" bzw. „Stützpunkt" von K mit C. Diese Definition der Schnittkomponenten und Stützkomponenten bzw. Punkte gilt wie für P_n auch sinngemäss für allgemeineres κ in kompakten metrischen Räumen.

Ist C von beschränkter oder endlicher KO und C_i Schnittkomponente von $C \cap K$ mit der Normalumgebung U_i, dann enthält $C \cap U_i \cap K'$ für jedes $K' \in \kappa$ in genügend kleiner Umgebung von K (mindestens) eine Schnittkomponente. Ist C_i Stützkomponente in $C \cap K$, so gibt es in beliebiger Umgebung von K eine in κ offene Menge μ, so dass $K' \cap C \cap U_i$ für jedes $K' \in \mu$ eine Schnittkomponente enthält (Haupt [14]).

Wenn κ lokal kompakt ist und $KO(C, \kappa)$ beschränkt oder endlich, so liegen die $O.\ Ch.$ K in κ nirgends dicht, für welche $C \cap K$ Stützkomponenten enthält. Man kann sogar zeigen, dass es dann zu jedem $K \in \kappa$ mit $C \cap K \neq C$ in beliebiger Umgebung von K eine in κ offene Menge μ gibt, so dass $K' \cap C$ für jedes $K' \in \mu$ nur Schnittkomponenten enthält und zwar für jedes K' die gleiche Anzahl (Haupt und Künneth [2]).

2.5. Kontinuen von endlicher *schw. PO* und *KO*. „Die Kontinuen von endlicher schw. PO in P_n sind lokal zusammenhängend." Denn ist C ein Kontinuum und ist C in z nicht lokal zusammenhängend, so gibt es eine Umgebung U von z in P_n mit der Begrenzung U^g derart, dass $C \cap \bar{U}$ unendlich viele Komponenten Q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ enthält mit Punkten $z_i \in Q_i$ und $y_i \in Q_i \cap U^g$, wobei für eine Teilfolge der z_i und y_i $\lim z_i = z$ und $\lim y_i = y \in C \cap U^g$ ist, $z \neq y$. Es gibt ein $K \in \kappa$

mit $z \in K$ und nach dem Trennungsaxiom ein $K' \in \kappa$, sodass $z \in R^0(K', +)$, $y \in R^0(K', -)$. Es existieren daher auch Umgebungen $V(z)$ bzw. $V(y)$ von z bzw. y in P_n mit $V(z) \subset R^0(K', +)$ und $V(y) \subset R^0(K', -)$ und $z_i \in V(z)$, $y_i \in V(y)$ für schliesslich alle z_i bzw. y_i. Daher werden schliesslich alle $\underset{\sim}{Q}_i$ von K' und allen *O. Ch.* in einer genügend kleinen Umgebung von K' geschnitten. Dann ist aber *schw.* $PO(C, \kappa)$ nicht endlich.

Ist κ das System aller Hyperebenen in P_n, so folgt aus beschränkter *schw.* $PO(C, \kappa)$, dass C *reguläre Kurve* im Sinne Mengers (Kurventheorie, Leipzig u. Berlin, 1932, S. 96) und *Bogensumme* ist.

Aus *schw.* $KO(C, \kappa) = m < \infty$ folgt *schw.* $PO(C, \kappa) = m$, dann (und nur dann), wenn die Menge derjenigen $K \in \kappa$, für welche $C \cap K$ keine mehrpunktige Komponente enthält, in κ dicht liegt (Haupt [14]).

Für die *schw.* *KO* gilt folgender *Limessatz*: C_i $(i = 1, 2, \ldots)$ seien Kontinuen in R_n und es existiere $\lim C_i = C$, ferner sei $m = \liminf$ *schw.* $KO(C_i, \kappa)$ endlich. Dann ist *schw.* $KO(C, \kappa) = m' \leqslant m$, wobei für m' jeder Wert zwischen 0 und m möglich ist, wie man an einfachen Beispielen sich klar machen kann (Haupt [24]).

Für die *KO* gilt kein entsprechender Satz. Denn ist C z.B. das Kontinuum des Beispiels in dem Teil 2.2. und C_i das Kontinuum, das man aus C erhält, wenn man die von (0, 1) und Punkten der X-Achse begrenzten Strecken statt auf der X-Achse in Punkten der Geraden $y = 1/i$ enden lässt, so ist $C = \lim C_i$, $KO(C_i, \kappa) = 2n + 2$, $KO(C, \kappa) = 4n + 1$.

Für die *schw.* *PO* gilt ein entsprechender Satz nur, wenn C beschränkt ist, κ kompakt ist und einem Trennungsaxiom genügt, das noch mehr fordert als Axiom VIa in dem Teil 2.3, aber von den Hyperebenen des P_n und E_n erfüllt wird (Haupt [25]).

2.6. Den Grundraum *R* schlicht überdeckende O. *Ch*. Besonders übersichtliche Verhältnisse bekommt man, wenn κ ein den Grundraum R schlicht überdeckendes System von *O. Ch.* ist wie z.B. wenn κ ein Büschel paralleler Hyperebenen des E_n ist. Im Fall schlicht überdeckender *O. Ch.* gibt es zu jedem Punkt $x \in R$ genau eine *O. Ch.* $K \in \kappa$ mit $x \in K$. Das Trennungsaxiom ist dann nur noch für je zwei Punkte $x \in K$ und $x' \notin K$ gültig.

Hat das Kontinuum C bezüglich eines schlicht überdeckenden κ endliche *KO* bzw. *PO*, so ist C abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Teilkontinuen C_i bzw. einfachen Bogen B_i mit $KO(C_i, k) = 1$ bzw. $PO(B_i, k) = 1$ (Haupt [3], Haupt und Künneth [1]).

2.7. Reduktionssatz. Ein wichtiger, viel verwendeter Satz ist der sogenannte Reduktionssatz. Er sei hier unter vereinfachten, aber in vielen Fällen—wie bei einfachen Bogen und Kurven—zutreffenden Voraussetzungen gebracht.

Voraussetzung. (1) C sei ein eindimensionales Kontinuum im R_n ($n \geqslant 2$), das höchstens zwei Endpunkte im Sinn der Mengerschen Kurventheorie enthält. (2) Das System κ der *O. Ch.* erfülle die Axiome I bis VI in dem Teil 1.1. (3) Es sei $PO(C, \kappa)$ endlich und $PO(C, K) = m$ für ein $K \in \kappa$.

Behauptung. Es gibt in beliebig kleiner Umgebung von K eine in κ offene Menge μ, sodass $C \cap K'$ für jedes $K' \in \mu$ nur Schnittpunkte enthält und zwar mindestens m.

Enthält C mehr als zwei Endpunkte, so gilt dieser Satz nicht mehr, wie das Beispiel in dem Teil 2.2. zeigt, wenn K die X-Achse ist.

Damit der Reduktionssatz auch gültig bleibt, wenn C mehr als zwei Endpunkte enthält oder wenn die *PO* durch die *KO* ersetzt wird, müssen noch zusätzliche Voraussetzungen bezüglich der in $K \cap C$ liegenden Endpunkte bzw. Stützkomponenten gemacht werden, auf die hier nicht eingegangen werden soll (Haupt [22]).

3. Parameterkurven in R_n

Allgemein werde unter einer Parameterkurve (continuous curve) C ein eindeutiges stetiges Bild $p(t)$ der Einheitsstrecke J ($0 \leqslant t \leqslant 1$) in $R_n (n \geqslant 2)$ verstanden. Wenn wir weiterhin speziell von einer „Kurve" sprechen, setzen wir immer voraus, dass $p(0) = p(1)$; andernfalls sprechen wir von einem „Bogen." Wir wollen hier noch die *Zusatzforderung F* stellen, dass das Bild keines Intervalls von J einpunktig sein soll.

Dem Parameter $t = t(J)$ entspricht die „Stelle" $t = t(C)$ in C. Der Bildpunkt $p = p(t)$ heisst „Träger" der Stelle $t(C)$. Ist p Träger von m verschiedenen Stellen, also $p = p(t_1) = \cdots = p(t_m)$, so heisst p m-facher Punkt von C, doch bedeutet $t = 0$ und $t = 1$ in einer Kurve dieselbe Stelle, es ist dann also $p(0) = p(1)$ einfacher Punkt in C.

Die Orientierung von J überträgt sich auf C. Die Stelle t_i liegt vor bzw. hinter der Stelle t_k auf C, wenn $t_i < t_k$ bzw. $t_i > t_k$.

Grundgebilde sei nun eine Parameterkurve C (Kurve oder Bogen) in R_n, κ sei die Menge der Hyperebenen in R_n. Es werde vorläufig immer vorausgesetzt, dass $PO(C, \kappa)$ endlich. Es ist daher kein Teilbogen von C in einer Hyperebene enthalten, insonderheit ist der Rang $R(C) = n$. Entsprechend der Punktordnung PO erhält man die „Stellenordnung" StO. Es ist $StO(C, K) = m$, wenn es m Stellen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ in C gibt derart, dass $p(t_i) \in C \cap K\,(1 \leqslant i \leqslant m)$, und $StO(C, \kappa) = m$, wenn $m = \max[StO(C, K), K \in \kappa]$. C hat StO m in der Stelle t, wenn $m = \min StO(U, \kappa)$ für alle Umgebungen U der Stelle t auf C.

Der Einfachheit wegen schreiben wir weiterhin $PO(C)$ statt $PO(C, \kappa)$ und $StO(C)$ statt $StO(C, \kappa)$.

Ist $C \subset R_n$ und $StO(C) = m$, so ist $m \geqslant n$ wegen $R(C) = n$, ist $m = n$ bzw. $m = n + q(1 \leqslant q < n)$, so enthält C keine bzw. höchstens q mehrfache Punkte. Dies gilt nicht mehr für $q \geqslant n$; denn ist C ein doppelt durchlaufener Konvexbogen in E_2, so ist $StO(C) = 4$, also $q = n = 2$ und jeder Punkt ausser den beiden Endpunkten des Trägers von C zweifacher Punkt.

Wegen der Zusatzforderung F gibt es zu jeder Stelle t_0 auf C vordere und hintere Umgebungen U von t_0 auf C derart, dass die Träger aller Stellen von U (ausser t_0) von $p(t_0)$ verschieden sind. Dabei besteht eine vordere bzw. hintere Umgebung der Stelle t_0 auf C aus den Stellen t von C mit $t_1 < t < t_0$ bzw. $t_0 < t < t_2$ bei gegebenem $t_1 < t_0 < t_2$.

3.1. Tangentialebenen und Tangentialhalbebenen. Die vordere und hintere O-Tangentialebene $vT_0(t_0)$ und $hT_0(t_0)$ bzw. O-Tangentialhalbebene $vTh_0(t_0)$ und $hTh_0(t_0)$ an C in der Stelle t_0 ist $p(t_0)$. Wir definieren weiter durch Induktion. Ist $vT_i(t_0)$ schon erklärt für $0 \leqslant i < k$, so sei die vordere k-Tangentialebene $vT_k(t_0)$ in t_0 an C gleich $\lim_{t \to t_0} L[vT_{k-1}(t_0) \cup \{p(t)\}]$, falls dieser Limes existiert, wobei $t < t_0$. Entsprechend wird für $t > t_0$ die hintere k-Tangentialebene $hT_k(t_0)$ in t_0 an C erklärt als $\lim_{t \to t_0} L[hT_{k-1}(t_0) \cup \{p(t)\}]$.

In E_n oder in $P_n - H^0 = R^0$, wobei H^0 eine zu $p(t_0)$ fremde Hyperebene ist, sei $vH_k(t)$ bzw. $hH_k(t)$ die von $vT_{k-1}(t_0)$ bzw. $hT_{k-1}(t_0)$ begrenzte Halbebene, welche $p(t)$ enthält, wobei $t < t_0$ bzw. $t > t_0$.

Falls folgende Limiten existieren, sei für $t < t_0$: $\lim_{t \to t_0} vH_k(t) = vTh_k(t_0)$ die vordere k-Tangentialhalbebene in der Stelle t_0 an C, und für $t > t_0$, $k \equiv 0 \pmod 2$, sei $\lim_{t \to t_0} hH_k(t) = hTh_k(t_0)$ die hintere k-Tangentialhalbebene in t_0 an C; ist $k \equiv 1 \pmod 2$, so wird die zu $\lim_{t \to t_0} hH_k(t)$ komplementäre k-Halbebene mit $hTh_k(t_0)$ bezeichnet.

Fallen vordere und hintere k-Tangentialebene zusammen, so bezeichnen wir auch $vT_k(t_0) = hT_k(t_0)$ als *k-Tangentialebene* $T_k(t_0)$ in t_0 an C.

Eine 1-Tangentialebene wird auch als Tangente, eine $(n-1)$-Tangentialebene als Tangentialhyperebene bezeichnet.

Existiert die k-Tangentialebene in der Stelle t von C für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, so heisst C in t oder auch die Stelle t selbst „differenzierbar." Ist auch $vTh_k(t) = hTh_k(t)$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, so heisst C in t oder auch t selbst „gewöhnlich differenzierbar." Eine Kurve oder ein Bogen C heisst (gewöhnlich) differenzierbar, wenn dies für jede Stelle von C zutrifft.

Beispiel. Eine ebene algebraische Kurve 3. Ordnung ist in einer Spitze differenzierbar, indes nicht gewöhnlich differenzierbar, wohl aber in einem Wendepunkt.

3.2. k-Schmiegebenen. Unter einer k-dimensionalen Paratingente oder k-Schmiegebene $S_k(t_0)$ an C in der Stelle t_0 $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ wird verstanden jeder Limes einer Folge von k-Ebene $L_k{}^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, die Träger sind von (mindestens) $k+1$ Stellen $t_\rho{}^i$ von C mit $t_\rho{}^i \to t_0$ $(\rho = 1, 2, \ldots, k+1)$. Unter einer vorderen k-Schmieghalbebene $vSh_k(t_0)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ an C in der Stelle t_0 wird jeder Limes von offenen k-Halbebenen $Lh_k{}^i$ verstanden, die begrenzt werden von einer $(k-1)$-Ebene, die Träger ist von k Stellen $t_1{}^i, t_2{}^i, \ldots, t_k{}^i$ von C, und die einen weiteren Punkt $p(t_{k+1}^i) \in C$ enthalten, wobei $t_{k+1}^i < t_\rho{}^i$ $(1 \leqslant \rho \leqslant k)$ und $t_\rho{}^i \to t_0$ $(\rho = 1, 2, \ldots, k+1)$. Entsprechend wird eine hintere k-Schmieghalbebene in t_0 an C erklärt, wobei nur $t_{k+1}^i > t_\rho{}^i$ $(1 \leqslant \rho \leqslant k)$ und im Fall $k \equiv 1 \pmod 2$ die Komplementär-k-Halbebene zu der Limes-k-Halbebene zu nehmen ist.

Es gilt folgender.

SATZ. *Ist U bzw. U' eine vordere bzw. hintere Umgebung der Stelle t eines Bogens B in P_n mit $StO(U) = StO(U') = n$, ist der Trager von $U \cup U' \cup \{t(B)\}$ ein einfacher Bogen, ist ferner B in t differenzierbar; $vTh_k(t) = hTh_k(t)$ für $0 \leqslant k < r \leqslant n$, dagegen $vTh_r(t)$ komplementär zu $hTh_r(t)$, so ist $vTh_k(t)$ für jedes k mit $0 \leqslant k < r$ die einzige vordere und hintere k-Schmieghalbebene in t an B und daher auch $T_k(t)$ die einzige k-Schmiegebene in t an B, während es für jedes k mit $r \leqslant k \leqslant n-1$ unendlich viele k-Schmieg(halb)ebenen in t an B gibt. Es gibt also genau dann eine einzige k-Schmiegebene in t an B für jedes $k = 0, 1, \ldots, n-1$, wenn B in t gewöhnlich differenzierbar ist* (Sauter [1]).

3.3. Zentralprojektion der Parameterkurven. Die Zentralprojektion ist ein wichtiges, viel verwendetes Hilfsmittel für Induktionsbeweise.

Es sei B ein Bogen in $P_n(n \geqslant 2)$ und t_0 eine Stelle von B, in der $vTh_1(t_0) = hTh_1(t_0)$ und $p(t_0) = p_0$ ein einfacher Punkt ist.

Hier $p \to f(p) = p'$ sei die Abbildung der Punkte p von $P_n - \{p_0\}$ in eine zu p_0 fremde Hyperebene H durch Zentralprojektion aus p_0. H sei so angenommen, dass $H \neq H^0$ (in dem Teil 3.1.) und $vTh_1(t_0) \cap H \neq \emptyset$.

Ist L_k eine k-Ebene in P_n und $p_0 \notin L_k$ bzw. $p_0 \in L_k$, so ist $f(L_k)$ eine k-Ebene bzw. $(k-1)$-Ebene in $H\,(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Setzt man noch $f(p_0) = vTh_1(t_0) \cap H = p_0'$, so erhält man als Projektion $f(B)$ von B in H eine (stetige) Parameterkurve B' in H. Jeder Stelle $t = t(B)$ von B entspricht eindeutig die Stelle $t = t(B')$ in B'. Ist $StO(B) = m$, so ist $StO(B', \kappa') \leqslant m - 1$, wobei κ' die Menge der $(n-2)$-Ebenen in H ist. Die k-Tangentialebenen, vorderen und hinteren Tangentialebenen und Tangentialhalbebenen an B' in der Stelle $t(B')$ werden bezeichnet mit $T_k'(t)$, $vT_k'(t)$ usw. $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Existiert $vT_k(t)$ und ist $p_0 \notin vT_k(t)$, so ist $vT_k'(t) = f[vT_k(t)]$ $(0 \leqslant k \leqslant n-2)$. Entsprechendes gilt für $hT_k(t)$, für $vTh_k(t)$ und $hTh_k(t)$. Ist $p_0 \in vT_k(t)$ — also insbesondere für $vT_k(t_0)$ — so ist $vT'_{k-1}(t) = vT_k(t) \cap H(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Entsprechendes gilt für $hT_k(t)$ und $vTh_k(t)$, es gilt auch, wenn $t = t_0$, für $hTh_k(t)$, da B in t_0 keine Spitze hat. Dagegen ist, wenn $t \neq t_0$, $hTh'_{k-1}(t)$ die zu $hTh_k(t) \cap H$ komplementäre $(k-1)$-Halbebene in $H(2 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Umgekehrt folgt aus der Existenz der k-Tangentialebenen und k-Tangentialhalbebenen an B' in p_0' die Existenz der $(k+1)$-Tangentialebenen und Tangentialhalbebenen in p_0 an $B\,(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Aus der (gewöhnlichen) Differenzierbarkeit von B in der Stelle $t_0(B)$ folgt die (gewöhnliche) Differenzierbarkeit von B' in der Stelle $t_0(B')$ und umgekehrt (Sauter [1]).

3.4. Bogen und Kurven mit StO n und $n+1$ in R_n. Bogen und Kurven von StO n in R_n sind einfach, Bei einfachen Bogen und Kurven ist die StO gleich der PO. Eine Unterscheidung zwischen der Stelle und dem Punkt, dem Träger der Stelle, ist in diesem Fall ohne Bedeutung.

3.4.1. Durch Zentralprojektion kann man mittels Induktion folgende Sätze für den R_n $(n \geqslant 2)$ beweisen (Sauter [1]).

SATZ 1. *Ist die Stelle t des Bogens B von endlicher StO, so existiert in t an B die vordere und hintere k-Tangentialhalbebene* für $k = 0, 1, \ldots, n$.

SATZ 2. *Die k-Schmieghalbebenen und k-Schmiegebenen* $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ *der Bogen B von* $StO(B) = n$ *in* P_n *sind einseitig stetig, d.h.: Ist* $t \in B$, *U bzw. U' eine vordere bzw. hintere Umgebung von t auf B, ist ferner* $t' \in U - \{t\}$ *und* $Sh_k(t')$ *eine vordere oder hintere k-Schmieghalbebene in t' an* $U(1 \leqslant k \leqslant n)$, *so existiert lim* $Sh_k(t')$ *für* $t' \to t$ *und ist gleich* $vTh_k(t)$. *Entsprechendes gilt für U' und* $hTh_k(t)$.

SATZ 3. *Ein einfacher Bogen B in* R_n *hat in einem differenzierbaren Punkt* $p \in B$ *genau dann die PO n, wenn er gewöhnlich differenzierbar ist, wenn* $vTh_n(p) = hTh_n(p)$ *und wenn eine vordere und hintere Umgebung von p auf B die PO n besitzt.*

SATZ 4. *Ist B ein einfacher Bogen mit* $PO(B) = n$, *ist B in p gewöhnlich differenzierbar und enthält die Tangentialhyperebene in p an B einen Punkt* $p' \in B$, $p' \neq p$, *so sind p und p' die Endpunkte von B.*

SATZ 5. *Ist* $PO(B) = n$, *so ist B beschränkt, wenn B entweder ein Bogen ist oder wenn B Kurve und* $n \equiv 0 \pmod 2$ *ist.*

SATZ 6. *Hat der Bogen B in der gewöhnlich differenzierbaren Stelle t die StO n, so wird B in* $p(t)$ *von* $T_{n-1}(t)$ *gestützt oder geschnitten, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, und zwar ist* $T_{n-1}(t)$ *die einzige* $T_{n-2}(t)$ *enthaltende Hyperebene die B in* $p(t)$ *stützt bzw. schneidet.*

SATZ 7. *Jeder Bogen B mit* $StO(B) = n$ *ist mit Ausnahme von abzählbar vielen Stellen in jeder Stelle gewöhnlich differenzierbar.*

3.4.2. Weitere für die Kurven mit *PO n* charakteristische Sätze sind:

SATZ 1. *Eine einfache gewöhnlich differenzierbare Kurve C in* R_n *hat die PO n, wenn sie in jedem Punkt die PO n hat und wenn jede* $(n-2)$-*Ebene H höchstens* $n-1$ *Punkte mit C gemein hat, wobei der Punkt* $p \in H \cap C$ $(k+1)$-*fach zählt, wenn H k-Schmiegebene in p an C ist* (Hjelmslev [1], Haupt [19]).

SATZ 2. *Ist* $PO(C) = n$, *so liegt C auf dem Rand seiner konvexen Hülle, d.h. auf dem Rand des Durchschnitts aller C enthaltenden abgeschlossenen Halbräume. Im Fall* $n \equiv 0 \pmod 2$ *ist Satz 2) ein Spezialfall des allgemeineren Satzes: Ist B beschränkter Bogen in* E_n *mit* $StO(B)$

$= 2k \geqslant n \geqslant 2$, so liegen die Träger aller Stellen t auf B, in denen B die StO 2k hat, auf dem Rand der konvexen Hülle H(B) von B. Liegt der Teilbogen B' von B im Innern von H(B), so ist $StO(B') < 2k$ (Haupt [2]).

SATZ 3. *Jeder Punkt der konvexen Hülle eines Bogens oder einer Kurve C von PO n in E_n gehört einem i-dimensionalen Simplex an, dessen $i + 1$ Eckpunkte auf C liegen, wenn $n = 2i$ bzw. $n = 2i + 1$ ist. Differenzierbarkeit von C wird hier nicht vorausgesetzt* (Derry [2]).

SATZ 4. *C sei eine differenzierbare Kurve in R_n mit $PO(C) = n$. Jeder Punkt einer Geraden L in R_n liegt genau dann auf n verschiedenen Tangentialhyperebenen an C bei geeigneter Vielfachheitszählung für Punkte und Hyperebenen, wenn jede L enthaltende Hyperebene weniger als n Punkte mit C gemein hat. Die Menge aller Hyperebenen, die mindestens eine solche Gerade L enthalten, ist gleich der Menge aller Hyperebenen, die höchstens $n - 1$ Punkte von C enthalten* (Derry [1]).

SATZ 5. *Ist B ein Polygon in P_n mit schw. $PO(B) = n$ und ist Q eine beliebige $(n - 2)$-Ebene in P_n, so wird Q von höchstens $2n - 2$ eindimensionalen Paratingenten von B getroffen* (Derry [3]).

Jede Kurve (Bogen) in P_n von *StO* $n + 1$ ist Vereinigung von höchstens $q(n)$ paarweise bis auf Endpunkte fremden einfachen Bogen von *StO n*. Dabei ist $q(n)$ eine nur von n abhängige endliche Zahl (Haupt [5]).

3.5. Konvexe und streng konvexe Bogen und Kurven. Ein beschränkter einfacher Bogen (Kurve) B in R_n heisse „konvex," wenn *schw.* $PO(B) = n$. Eine geordnete Punktmenge $\{p_i\}$ in E_n heisse „monoton," wenn alle Simplizes $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_{n+1}}$ für linear unabhängige Punkte $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n+1}}$ mit $p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_{n+1}}$ gleich orientiert sind.

Über den Zusammenhang zwischen „konvex" und „monoton" geben folgende Sätze Auskunft (Hjelmslev [1], Künneth [3]).

SATZ 1. *Ist B ein orientierter konvexer Bogen in E_n, so bilden die im Sinn der Orientierung von B geordneten Punkte von B eine monotone Punktmenge.*

SATZ 2. *Für $p_i \in B$ [B wie in Satz 1] sei $T'(p_i)$ die zu $vTh_1(p_i)$ parallele, von einem beliebigen festen Punkt q ausgehende Halbgerade, p_i'*

der Schnittpunkt von $T'(p_i)$ mit einer zu q fremden Hyperebene H. Es sei $p_j' < p_i'$, wenn $p_j < p_i$. Dann gibt es zu jedem p_i' ein $p_k' < p_i'$ derart, dass die Punktmenge $\{p_m'\}$ mit $p_k' \leqslant p_m' \leqslant p_i'$ monoton ist.

Der Bogen B in R_n heisst (nach Haupt [26]) „*im* strengen Sinn frei von n-Sekanten" oder (nach Barner [1]) „streng konvex", wenn es zu beliebigen $n-1$ Punkten von B eine Hyperebene gibt, die nur diese Punkte mit B gemein hat.

Hat eine Hyperebene H die Punkte $p_1, p_2, \dots, p_m$ $(n \leqslant m < \infty)$ mit dem streng konvexen Bogen B gemein und ist $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ gemäss einer Orientierung von B, so ist das Polygon $\Pi = p_1 p_2 \cdots p_m$ konvex, d. h. *schw.* $PO(\Pi) = n - 1$ (Fabricius-Bjerre [2]).

3.6. Vereinigung und Erweiterung von Bogen (Sauter [1]). Es sei B ein einfacher Bogen in P_n von endlicher PO und es seien U und U' eine vordere und hintere Umgebung des gewöhnlich differenzierbaren Punktes $p = p(t) \in B$ mit $PO(U) = PO(U') = n$ und $(U \cup U' - \{p\}) \cap T_{n-1}(t) = \emptyset$. Bei gegebenem U kann dann U' so gewählt werden, dass die PO von $U \cup U'$ und damit auch von p entweder n oder $n+1$ ist, und zwar gleich n, wenn $vTh_n(t) = hTh_n(t)$, andernfalls gleich $n+1$.

Es seien nun B' und B'' Bogen in P_n mit $PO(B') = PO(B'') = n$. B' und B'' sollen ausser einem oder den beiden Endpunkten keine gemeinsamen Punkte haben. Es ist also entweder $B' \cap B'' = \{p\}$, dann ist $B = B' \cup B''$ ein einfacher Bogen, oder $B' \cap B'' = \{p\} \cup \{q\}$, dann ist B eine einfache Kurve. Ferner soll B in p bzw. in p und q gewöhnlich differenzierbar sein. Es ist $PO(B) = n$ genau dann, wenn (1) die Projektion $f(B)$ von B aus p in eine zu p fremde Hyperebene ein Bogen bzw. eine Kurve von PO $n-1$ und $f(B)$ ein eineindeutiges Bild von B ist, und (2) wenn $vTh_n(p) = hTh_n(p)$ bzw. auch $vTh_n(q) = hTh_n(q)$.

Wenn B eine Kurve ist, kann man die Bedingungen (1) und (2) und die Bedingung, dass $B' \cap B''$ nur die Punkte p und q enthalten soll, durch die sog. „Fremdheitsbedingung" ersetzen. Es folgt aus ihr sowohl, dass B einfache Kurve ist, wie $PO(B) = n$, folglich $vTh_n(p) = hTh_n(p)$, $vTh_n(q) = hTh_n(q)$.

Die Fremdheitsbedingung sagt aus: $T_k(p) \cap T_{n-k-1}(q) = \emptyset$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Jeder Bogen B in P_n mit $PO(B) = n$ lässt sich zu einer Kurve von PO n erweitern, wenn die Endpunkte von B der Fremdheitsbedingung genügen; das bedeutet z.B., dass ein Bogen B in P_2 mit $PO(B) = 2$ sich genau dann zu einer Kurve C mit $PO(C) = 2$ erweitern lässt, wenn kein

Endpunkt von B auf der Tangente an B im andern Endpunkt liegt (Sauter [1]).

3.7. Singuläre Punkte. Ein Punkt, in dem ein einfacher Bogen B in E_n die PO n hat, heisst „regulär," ist die PO in $p \in B$ grösser als n, so heisst p „singulär" (bezüglich κ). Es heisst p „elementarer" Punkt, wenn eine vordere und hintere Umgebung von p auf B die PO n besitzt. Es hat dann B in p höchstens die PO $2n$. Jeder Punkt der $PO(n+1)$ ist elementar (Haupt [8]).

Wir führen nun in dem orientierten Bogen B ein „vorderes Schmiegkoordinatensystem" (abgekürzt SKS) in p an B ein. Koordinatenursprung sei p und $vTh_1(p)$ sei die positive X_1-Achse. Die positive X_k-Achse $(1 \leqslant k \leqslant n)$ werde mit X_k^+, die negative mit X_k^- bezeichnet. Es sei $X_k \not\subset vT_{k-1}(p)$ und $X_k^+ \subset vTh_k(p)$. Es ist also

$$vT_k(p) = L(vT_{k-1}(p) \cup X_k) = L(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k).$$

Innerhalb dieser Festsetzungen bleibt die Wahl der Koordinatenachsen willkürlich. Entsprechend erhält man ein hinteres SKS in p an B: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, wenn man vT_k durch hT_k und vTh_k durch hTh_k ersetzt. Dabei sei im Gegensatz zu früheren Festsetzungen (in dem Teil 3.1.) auch im Fall $k = 1 \pmod 2$ unter $hTh_k(p)$ verstanden: $\lim L(hT_{k-1}(p) \cup \{p'\})$, wobei p' einer hinteren Umgebung von p auf B angehört. Es ist also $Y_k^+ \subset hTh_k(p)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Man kann das vordere und hintere SKS so wählen, dass die Achsen des vorderen SKS mit den Achsen des hinteren SKS zusammenfallen, $X_k = Y_{i_k}$ $(1 \leqslant i_k \leqslant n)$, wobei im allgemeinen $k \neq i_k$. Ein solches SKS heisse ein „vermittelndes SKS." Je nach der Zuordnung der Achsen des vorderen zu denen des hinteren SKS erhält man $n!$ verschiedene Typen der elementaren Punkte. Unterscheidet man noch, ob die Halbachse X_k^+ mit der Halbachse $Y_{i_k}^+$ oder $Y_{i_k}^-$ zusammenfällt, so erhält man $2^n \cdot n!$ Typen. Diese können gekennzeichnet werden durch Permutationen Π_μ der mit Vorzeichen versehenen Zahlen von 1 bis n.

Für die differenzierbaren Punkte ist $X_k = Y_k$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ und für gewöhnlich differenzierbare Punkte $X_k^+ = Y_k^+$ bzw. $X_k^+ = Y_k^-$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, wenn $k \equiv 0$ bzw. $k \equiv 1 \pmod 2$. Man erhält demnach 2^n verschiedene Typen differenzierbarer und zwei Typen gewöhnlich differenzierbarer Punkte, nämlich mit $X_n^+ = Y_n^+$ oder $X_n^+ = Y_n^-$. Der Typ eines differenzierbaren Punktes kann gekennzeichnet werden durch $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$, wobei $\delta_0 = 1$ und $\delta_\nu = +1$ bzw. $\delta_\nu = -1$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$, wenn $X_\nu^+ = Y_\nu^+$ bzw. $X_\nu^+ = Y_\nu^-$.

Falls $p \in B$ elementar und differenzierbar ist, so hat B in p mindestens die *PO* $n + m$, wenn in $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ $n - m$ Vorzeichenwechsel vorkommen. Auch im allgemeinen Fall eines elementaren Punktes p lässt sich aus der signierten Permutation Π_μ des vermittelnden *SKS* eine untere Schranke für die *PO* von p bestimmen (Denk und Haupt [1]).

Jede gewöhnlich differenzierbare elementare Stelle eines Bogens in R_n hat die *StO* n oder $n + 1$ (Sauter [1]).

In R_2 bzw. R_3 können singuläre Punkte jeder *PO* m auftreten für $m > 2$ bzw. $m > 3$ (Haupt [9, 10]).

Folgende Sätze geben Aufschluss über die Existenz singulärer Punkte und über untere Schranken ihrer Anzahl bei streng konvexen Bogen und Kurven in R_n mit Rang n (Haupt [26]).

SATZ 1. *Ist B ein einfacher Bogen mit Anfangspunkt a und einre $(n - 1)$-Schmiegebene $S_{n-1}(a)$ in a an B mit $(B - \{a\}) \cap S_{n-1}(a) \neq \emptyset$, so enthält B (mindestens) einen singulären Punkt.*

SATZ 2. *Ist $PO(C) \geqslant ni + 1 (i \geqslant 1)$, so hat C mindestens i* bzw. *$i + 1$ singuläre Punkte, wenn C Bogen bzw. Kurve ist.*

SATZ 3. *Sind $p_1, p_2, \ldots, p_m$ gewöhnlich differenzierbare Punkte in C und existiert $q \in T_{n-1}(p_\mu)$, $q \neq p_\mu$, für $\mu = 1, 2, \ldots, m$, so besitzt C mindestens m bzw. $m + 1$ von q verschiedene singuläre Punkte, wenn C Bogen bzw. Kurve ist. Diese liegen in einem kleinsten offenen Teilbogen von C, dessen abgeschlossene Hülle $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und q enthält.*

SATZ 4. *Ist C gewöhnlich differenzierbar, so enthält C entweder unendlich viele singuläre Punkte oder C ist stükweise von der PO n, also $PO(C) = m$ beschränkt; jeder singuläre Punkt, soweit vorhanden, hat die $PO(n + 1)$, und es sind mindestens $m - n$* bzw. *m singuläre Punkte in C, wenn C Bogen bzw. Kurve ist. Wenn C Kurve ist, dann ist $m \equiv n + 1$* (mod 2), *also $m \geqslant n + 1$.*

Alle in diesen Sätzen angegebenen Schranken sind (wenigstens) für $n = 2$ genau.

SATZ 5. *Ist C eine gewöhnlich differenzierbare Kurve, so sind folgende Aussagen gleichwertig: (a) C besitzt genau $n + 1$ singuläre Punkte. (b) C hat die PO $n + 1$.*

3.8. Kurven von *PO* 4 in P_3. Über die gestaltlichen Verhältnisse der einfachen gewöhnlich differenzierbaren Kurven C_4 von *PO* 4 in P_3 lassen sich ziemlich genaue Angaben machen (Scherk [2]).

Ein Punkt $p \in C_4$ soll dabei als gemeinsamer Punkt von C_4 mit einer Ebene H vierfach bzw. dreifach bzw. zweifach gezählt werden, wenn H Schmiegebene in p an C_4 ist und C_4 in p die PO 4 bzw. 3 hat, bzw. H die Tangente in p an C_4 enthält ohne Schmiegebene zu sein. Es scheidet damit die Möglichkeit aus, dass eine Ebene zugleich Schmiegebene in zwei verschiedenen Punkten von C_4 ist oder Schmiegebene in einem Punkt mit der PO 4 und zugleich tangierende Ebene in einem anderen Punkt.

Bei den Teilbogen einer orientierten C_4 kann man von einem positiven und negativen Schraubsinn sprechen, der sich in den Punkten mit PO 4 ändert. Die beschränkte Zahl der singulären Punkte (mit PO 4) ist daher gerade.

Ist C_4 nicht beschränkt, so enthält C_4 keinen singulären Punkt, ist C_4 beschränkt und liegt C_4 ganz auf dem Rand seiner konvexen Hülle $H(C_4)$, dann gibt es keine Trisekanten von C_4 und vier singuläre Punkte; durch jeden Punkt $p \in C_4$ gehen drei Schmiegebenen an C_4 (ausser der Schmiegebene in p).

Verläuft genau ein, bzw. verlaufen zwei Teilbogen B_i von C_4 im Innern von $H(C_4)$, dann gibt es eine bzw. zwei getrennte stetige Scharen von Trisekanten durch die Punkte von B_i und zwei bzw. keine singulären Punkte. Die singulären Punkte liegen immer auf dem Rand von $H(C_4)$ (in dem Teil 3.4.2, Satz 2). Ist p Randpunkt von $H(C_4)$ und liegt eine einseitige Umgebung von p auf C_4 im Innern von $H(C_4)$, geht also C_4 in p vom Rand ins Innere von $H(C_4)$ über, so wird C_4 von der Tangente in p in noch einem weiteren Punkt getroffen.

Zum Beweis benutzt man stetige Punktkorrespondenzen auf C_4. Da ist einmal die Schmiegebenen-Abbildung $\sigma(p)$, die jedem $p \in C_4$ den eindeutig bestimmten Punkt $\sigma(p)$ zuordnet, in dem C_4 von der Schmiegebene in p (ausser in p) geschnitten wird. Fixpunkte dieser Abbildung sind die singulären Punkte. Bei der Abbildung $\tau(p)$ entspricht bei gegebenem festen $q \in C_4$ dem Punkt $p \in C_4$ der Punkt $\tau(p)$, in dem C_4 von der Ebene durch q und die Tangente in p geschnitten wird. Fixpunkte sind die Punkte p, für die die Schmiegebene in p durch q geht.

3.9. Dualisierbare Parameterkurven (Künneth [2]). Bei einer dualisierbaren Parameterkurve in R_n existieren in jeder Stelle t die k-Tangentialebenen $T_k(t)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ und bilden stetige Scharen. Sätze über dualisierbare Kurven bleiben richtig bei „Dualisierung," d.h. bei Vertauschung von Vereinigung und Durchschnitt und von $T_k(t)$ mit $T_{n-k-1}(t)$. Dabei beziehen sich „Vereinigung" und „Durchschnitt" auf den Verband der linearen Unterräume R_i $(-1 \leqslant i \leqslant n)$ von R_n, wobei unter dem Durchschnitt $R_i \wedge R_k$ bzw. der Vereinigung $R_i \vee R_k$ $(-1 \leqslant i, k \leqslant n)$ verstanden wird $R_i \cap R_k$ bzw. $L(R_i \cup R_k)$.

$T_k{}^i$ sei die Menge aller mit T_k inzidenten R_i und $(T_k{}^i)^\rho$ sei die Menge derjenigen R_ρ, die mit einem R_i aus $T_k{}^i$ inzident sind. Ferner sei mit $T_k{}^0 \vee T_m{}^0$ bzw. $T_k^{n-1} \wedge T_m^{n-1}$ die Menge aller $R_0' \vee R_0''$ bzw. $R_{n-1}' \wedge R_{n-1}''$ bezeichnet, für die R_0' bzw. R_{n-1}' mit T_k und R_0'' bzw. R_{n-1}'' mit T_m inzident ist.

Durch die Schar der k-Tangentialebenen für beliebig vorgegebenes $k\,(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ sind die Scharen der Tangentialebenen für jedes $k = 0, 1, \ldots, n-1$ eindeutig bestimmt vermöge folgender *Grundrelationen*:

$$R_{-1}^1 \cap [\lim_{t_i \to t} T_k{}^0(t) \vee T_m{}^0(t_i)] = \text{System aller } T^1_{k+m+1-\nu}(t) \cap [T_\nu{}^0(t)]^1$$

$$\text{für} \quad \max(0, k+m+1-n) \leqslant \nu \leqslant \min(k, m)$$

und dual dazu

$$R_n^{n-2} \cap [\lim_{t_i \to t} T_k^{n-1}(t) \wedge T_m^{n-1}(t_i)] = \text{System aller } T^{n-2}_{k+m-1-\nu}(t) \cap [T_\nu^{n-1}(t)]^{n-2}$$

$$\text{für} \quad \max(k, m) \leqslant \nu \leqslant \min(n-1, k+m).$$

(R_{-1}^1 bzw. R_n^{n-2} ist die Menge aller Geraden bzw. $(n-2)$-Ebenen in R_n.)

Der Durchschnitt einer $(n-m)$-Ebene R_{n-m} $(0 \leqslant m \leqslant n-1)$ mit den k-Tangentialebenen $T_k(t)$ $(m \leqslant k \leqslant n-1)$ einer dualisierbaren Kurve (Bogen) C in R_n bildet, wenn R_{n-m} fremd ist zu $T_{m-1}(t)$ für alle Stellen t von C, wieder eine dualisierbare Kurve (Bogen) C', die „Spur" von C in R_{n-m}, wobei $R_{n-m} \cap T_k(t)$ die $(k-m)$-Tangentialebene an C' in $R_{n-m} \cap T_m(t) = p'(t)$ ist.

Die Stelle t von C heisst „m-dimensionale Rückkehrstelle" von C wenn C' in $p'(t)$ eine Spitze hat. Eine Spitze in C ist 0-dimensionale Rückkehrstelle von C. Die nicht elementaren Singularitäten in C sind Häufungsstellen von Rückkehrstellen. Für die elementaren Singularitäten gilt: Ist t m-dimensionale Rückkehrstelle in C, so ist $\delta_m = \delta_{m+1}$ bei der Signatur $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ (in dem Teil 3.7.). Die Stelle t in C hat genau dann die *StO* $n + r$, wenn C in t für r Werte von $k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ k-dimensionale Rückkehrstelle ist.

Die Projektion einer dualisierbaren Kurve (Bogen) aus einer s-Ebene R_s in eine m-Ebene R_m ist wieder eine dualisierbare Kurve (Bogen), wenn für alle t:

$$R_s \wedge T_{n-s-1}(t) = \phi; \qquad [R_s \vee T_{n-s-m-2}(t)] \wedge R_m = \phi \qquad \text{und} \qquad s + m < n.$$

Eine dualisierbare Kurve ist abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen konvexen Bogen.

Ein beschränkter differenzierbarer Bogen C in E_n von der *PO* n ist dualisierbar und von n-ter Klasse, d.h. die Maximalanzahl der durch einen Punkt von E_n gehenden Tangentialhyperebenen an C ist n (Scherk [1]).

4. Kontinuen in R_n

4.1. Kontinuen von relativ endlicher Ordnung. Für ein Kontinuum C in E_n von endlicher *PO* bezüglich der Hyperebenen eines Hyperebenenbüschels β, dessen Büschelachse zu C fremd ist — man spricht dann auch von *relativer PO* — gilt wie für alle R schlicht überdeckende Systeme von *O. Ch.* (Teil 2.6.) der Satz, dass C abgeschlossene Hülle einer Summe von höchstens abzählbar vielen abgeschlossenen Bogen B_i mit $PO(B_i, \beta) = 1$ ist, die paarweise höchstens Endpunkte gemein haben. Die Endpunkte und die Punkte, in denen C mindestens die *PO* 2 bezüglich β hat, liegen auf C nirgends dicht. C ist Summe von endlich vielen Bogen B_i mit $PO(B_i, \beta) = 1$ genau dann, wenn $PO(C, \beta)$ endlich ist und C nur endlich viele Verzweigungspunkte und Stützpunkte enthält (Haupt [3]).

4.2. Paratingentenordnung. Die k-dimensionalen Paratingenten an ein Kontinuum C in einem Punkt $p \in C$ werden ganz entsprechend erklärt wie die in einer Stelle einer Parameterkurve (in dem Teil 3.2.) als Limes von k-Ebenen L_k^i $(i = 1, 2, \ldots)$, die $m \geqslant k + 1$ Punkte p_μ^i $(1 \leqslant \mu \leqslant m)$ von C enthalten mit $p_\mu^i \to p$. Ein lokal zusammenhängendes Kontinuum C kann als Parameterkurve C' aufgefasst werden. Jede k-dimensionale Paratingente in einer Stelle $t \in C'$ an C' ist auch k-dimensionale Paratingente im Punkt $p(t)$ an C, aber nicht umgekehrt. Ist z.B. C' eine gewöhnlich differenzierbare Parameterkurve in P_n $(n \geqslant 2)$, die in $p = p(t_1) = p(t_2)$ einen Doppelpunkt hat, dann ist $T_1(t_1)$ bzw. $T_1(t_2)$ die einzige eindimensionale Paratingente in der Stelle t_1 bzw. t_2 an C', dagegen ist jede Gerade durch p in der von $T_1(t_1)$ und $T_1(t_2)$ ausgespannten Ebene eine eindimensionale Paratingente an das Kontinuum C, das Träger von C' ist.

Das Kontinuum C in $E_n (n \geqslant 2)$ hat die „Paratingentenordnung" m bezüglich eines Büschels β paralleler Hyperebenen, abgekürzt $\mathrm{ParO}(C,\beta) = m$, wenn es genau m verschiedene eindimensionale Paratingenten an C gibt, die in Hyperebenen von β enthalten sind. Dabei gelten die eindimensionale Paratingenten S_1' und S_1'' in den Punkten p' bzw. p'' als verschieden, wenn $S_1' \neq S_1''$ oder $p' \neq p''$. Enthält $C \cap S_1'$ eine Strecke s, so gilt s als ein (verlängerter) Punkt. C hat absolut die Paratingentenordnung m [abgekürzt $\mathrm{ParO}(C) = m$], wenn $m = \max \mathrm{ParO}(C, \beta)$ für alle β in E_n.

Ist $\mathrm{ParO}(C)$ endlich, so sind die Komponenten des Durchschnitts von C mit jeder Hyperebene nur Punkte oder Strecken. Daher ist C eine Strecke, wenn C in einer Hyperebene enthalten ist.

Ist $\mathrm{ParO}(C, \beta) = 0$ für irgend ein β, so ist C ein einfacher Bogen. Ist $\mathrm{ParO}(C) = m \leqslant n - 1$ und $n \geqslant 3$, so ist C entweder eine Strecke und $m = 1$ oder ein konvexer Bogen mit $KO(C) = R(C) = n$ und $m = n - 1$, der in jedem Punkt eine Tangente hat und dessen Teilbogen B mit $R(B) < n$ Strecken sind. Im Fall $n = 2$ kann C auch ein k-Bein sein $(3 \leqslant k < \infty)$, d.h. Vereinigung von k Strecken mit einem gemeinsamen Endpunkt (Haupt [21]).

4.3. Schwach ordnungsminimale Kontinuen. Ein Kontinuum C in R_n mit Rang $R(C) = n$ und $PO(C) = n$ bzw. *schw.* $PO(C) = n$ heisst ordnungsminimal bzw. schwach ordnungsminimal (abgekürzt *s.o.m.*). Ein ordnungsminimales Kontinuum ist einfacher Bogen oder einfache Kurve. Für *s.o.m.* Kontinuen ist folgender Hilfssatz wichtig.

4.3.1. Hilfssatz. Voraussetzung 1. $C_1, C_2, \ldots, C_m$ $(m \geqslant 1)$ seien Kontinuen oder Punkte in R_n. Es sei $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m = D$ und $R(D) = n$. Ausserdem seien in D n linear unabhängige Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und in R_n endlich viele Punkte $q_1, q_2, \ldots, q_r$ gegeben.

Es sei $S = \{p_\mu\}_1^n$, $Q = \{q_\rho\}_1^r$; dabei sei $S \cap Q \neq \emptyset$.

Voraussetzung 2. Für jede ν-Ebene R_ν $(0 \leqslant \nu \leqslant n - 1)$, die einen Punkt q_ρ $(1 \leqslant \rho \leqslant r)$ und $\nu + 1$ Punkte aus S enthält, gilt: es gibt ein C_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ mit $C_i \cap R_\nu \neq \emptyset$ und $C_i \not\subset R_\nu$.

Behauptung. Es gibt eine Teilmenge S' von S, die auch die leere Menge sein kann, mit $L(S') \cap Q = \emptyset$, und im Hyperebenenbüschel β mit der Achse $L(S')$* in beliebig kleiner Umgebung der Hyperebene $L(S)$ eine in β offene Menge $\gamma \subset \beta$ von Hyperebenen H mit $H \cap Q = \emptyset$, die n linear unabhängige Punkte mit D gemein haben. Ausserdem liegen in γ, wenn *schw.* $PO(D)$ beschränkt ist, diejenigen Hyperebenen H'

* Das Hyperebenenbüschel β mit der Achse $L(S')$ ist erklärt als die Menge aller mit $L(S')$ inzidenten Hyperebenen. Ist $S' = \emptyset$, z.B. wenn $S = Q$, so ist β die Menge aller Hyperebenen in R_n.

dicht, für die unter diesen n Punkten (mindestens) $n - s'$ Schnittpunkte mit $D - D \cap L(S')$ enthalten sind, wobei $s' = R(S')$ (Künneth [4]).

Voraussetzung (2) ist immer erfüllt für Punkte $q_\rho (1 \leqslant \rho \leqslant r)$ mit $q_\rho \in C_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ und $C_i \not\subset L(S)$, insbesondere also immer, wenn $m = 1$, d.h. wenn D selbst ein Kontinuum ist.

Beispiel 1. C_1 und C_2 seien nicht in einer Ebene liegende Gerade in P_3; $p_1 \in C_1$, p_2, $p_3 \in C_2$; q_1, $q_2 \in C_1$; $p_1 = q_1$. Es gibt im Ebenenbüschel mit der Achse C_2 eine offene Menge von zu q_1 und q_2 fremden Ebenen, die drei linear unabhängige Punkte von $C_1 \cup C_2$ enthalten, aber nicht in der Menge $R_3^{(2)}$ aller Ebenen von P_3. Wäre noch ein Punkt $q_3 \in C_2$ gegeben, so wäre Voraussetzung (2) nicht erfüllt.

Beispiel 2. Sind C_1, C_2, C_3 paarweise nicht in einer Ebene liegende Gerade in P_3; $p_i = q_i \in C_i$ $(i = 1, 2, 3)$; $q_4, \ldots, q_r$ beliebig, so gibt es eine in $R_3^{(2)}$ offene Menge von zu Q fremden Ebenen in beliebig kleiner Umgebung von $L(S)$, die drei linear unabhängige Punkte von $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ enthalten.

4.3.3. Folgerungen aus dem Hilfssatz. (a) Ist C ein Kontinuum in R_n mit $R(C) = n$, so ist *schw.* $PO(C) \geqslant n$. (b) Jede Teilmenge eines *s.o.m.* Kontinuums ist selbst *s.o.m.* (c) Jeder Verzweigungspunkt eines *s.o.m.* Kontinuums C ist Zerlegungspunkt von C (Haupt [16]).

4.3.4. Es sei v Zerlegungspunkt eines Kontinuums C in R_n und $C_1, C_2, \ldots, C_m$ seien die Komponenten von $C - \{v\}$. Eine Komponente C_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ heisse von erster bzw. von zweiter Art, wenn v Endpunkt bzw. innerer Punkt von $\bar{C}_i$ ist. Wenn C *s.o.m.* ist, so ist v in $\bar{C}_i$ kein Verzweigungspunkt und es gibt eine Darstellung

$$C = \bigcup_{\rho=1}^{r} E_\rho$$

von C, bezeichnet als „elementare Zerlegung von C bezüglich v“ in die „Elemente“ E_ρ, wobei $E_\rho \cap E_{\rho'} = \{v\}$ $(1 \leqslant \rho, \rho' \leqslant r; \rho \neq \rho')$ und E_ρ $(1 \leqslant \rho \leqslant r)$ abgeschlossene Hülle einer oder mehrerer Komponenten C_i von $C - \{v\}$ ist. Es ist

$$R(C) = \sum_{\rho=1}^{r} R(E_\rho)$$

Ist E_ρ Vereinigung mehrerer Komponenten $\bar{C}_i$, $E_\rho = C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \cdots C_{i_k}$ $(2 \leqslant k \leqslant m)$, so sind alle C_{i_ν} $(\nu = 1, 2, ..., k)$ Komponenten erster Art und es ist, falls $k \geqslant 3$,

$$R(E_\rho) = \sum_{\nu=1}^{k} R(C_{i_\nu}) - 1$$

Jedes *s.o.m.* Kontinuum C lässt sich daher darstellen als Vereinigung von „Primelementen" P_j mit $R(C) = \Sigma_j R(P_j)$. Ein Primelement ist entweder ein einfacher Bogen oder eine einfache Kurve oder es sind, falls P_j einen Verzweigungspunkt v_σ enthält, die Komponenten von $P_j - \{v_\sigma\}$ alle von 1. Art und die Summe ihrer Ränge gleich dem um 1 verminderten Rang von P_j, d.h. bei einer elementaren Zerlegung von P_j bezüglich v_σ ist P_j selbst das einzige Element.

Ein *s.o.m.* Kontinuum in R_n hat höchstens $n - 1$ Verzweigungspunkte und lässt sich darstellen als Vereinigung von höchstens $2n - 3$ einfachen Bogen B_i, die paarweise höchstens Endpunkte gemein haben, mit

$$\sum_i R(B_i) \leqslant \frac{n^2 + 6 + \delta}{4}$$

wobei $\delta = +1$ bzw. $\delta = 0$ für ungerades bzw. gerades n. Alle diese Schranken sind genau (Künneth [4]).

5. *k*-Ordnungscharakteristiken in R_2

Wir betrachten nun Grundgebilde in der projektiven oder euklidischen Ebene oder in einem einfach zusammenhängenden abgeschlossenen Teilgebiet von E_2, wobei κ eine Menge von *k-O.Ch.* (in dem Teil 1.2.) sei (Haupt [4], Mukhopadhyaya [1]).

Das „Stetigkeitsaxiom" werde folgendermassen präzisiert: Ist $K \in \kappa$ und sind $x_1, x_2, ..., x_k$ irgend welche von den Grundpunkten verschiedene Punkte in K, dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass jedes $K' \in \kappa$, das mit der δ-Umgebung von x_i $(i = 1, 2, ..., k)$ einen nicht leeren Durchschnitt hat, in der ϵ-Umgebung von K liegt und K in der ϵ-Umgebung von K' und dass es zu jedem Teilbogen T von K mit den Endpunkten p und q einen Teilbogen T' von K' gibt, der in der ϵ-Umgebung von T liegt und dessen Endpunkte in der δ-Umgebung von p bzw. q liegen.

Sind $x_1, x_2, ..., x_k$ von den eventuellen Grundpunkten verschiedene Punkte aus $K \in \kappa$, so bilden alle $K' \in \kappa$ mit $x_i \in K'$ $(i = 1, 2, ..., r;$ $1 \leqslant r < k)$ ein System κ' von $(k - r) - O.Ch.$, das ausser den Grundpunkten von κ noch die Punkte $x_1, x_2, ..., x_r$ zu Grundpunkten hat. Haben die $k - O.\ Ch.$ K und K' $k - 1$ Punkte (ausser den Grundpunkten) gemein, so können dies nur Schnittpunkte sein.

5.1. Einige grundlegende Sätze (Haupt [4]). Ausser dem Reduktionssatz (2.7.) sind hier vor allem folgende Sätze wichtig.

5.1.1. Monotoniesatz. *Voraussetzung.* Es sei $K \in \kappa$ eine $k - O.\ Ch.$, B sei ein orientierter einfacher Bogen, $K \cap B$ enthalte keine Grundpunkte und nur Schnittpunkte, diese seien $x_1, x_2, ..., x_m$, $m \geqslant k + 1$. Die Numerierung entspreche sowohl der Orientierung von B wie einer Orientierung von K.

Behauptung. Werden irgend $k - 1$ Punkte x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ festgehalten und wird einer der $m - k + 1$ übrigen Punkte x_i monoton auf B bewegt, so bewegen sich alle übrigen, nicht festgehaltenen Punkte x_i monoton, und zwar bewegen sich irgend zwei dieser beweglichen x_i im gleichen oder entgegengesetzten Sinn auf B, je nachdem ob zwischen ihnen auf B eine ungerade oder gerade Anzahl beweglicher Punkte x_i liegt.

Beispiel. Es sei $k = 4$ und $K \cap B = \{x_i\}_{i=1}^7$. Es werde x_1, x_4, x_5 festgehalten und x_3 bewege sich monoton gegen x_4 nach x_3'. Ist dann $K' \cap B = \{x_i'\}_{i=1}^7$ mit $x_1' = x_1, x_4' = x_4, x_5' = x_5$ und $x_3 < x_3' < x_4$, so ist $x_1 < x_2' < x_2, x_5 < x_6' < x_6, x_7 < x_7'$. Die Bogen $B(x_2, x_3)$ und $B(x_6, x_7)$ wachsen, $B(x_5, x_6)$ nimmt ab. In abnehmenden Bogen können Stützpunkte und dann neue Schnittpunkte auftreten, in wachsenden Bogen nicht, abnehmende Bogen können sich auf einen Punkt zusammenziehen und dann verschwinden.

Sind in κ Grundpunkte vorhanden, so gilt der Monotoniesatz nur dann, wenn der die Punkte $x_1, x_2, ..., x_m$ enthaltende Teilbogen von K höchstens solche Grundpunkte enthält, die Schnittpunkte von B mit K sind.

5.1.2. Man sagt, der einfache Grundbogen B liege „normal" zu K bzw. κ, wenn sich die Punkte des Durchschnitts $K \cap B$ bzw. für jedes $K \in \kappa$ so numerieren lassen, wie es sowohl der Orientierung von B wie der von K entspricht. Die Numerierung solcher Punkte soll weiterhin immer der Orientierung von B entsprechen, also $x_i < x_{i+1}$.

5.1.3. Kontraktionssatz. Wenn $K \in \kappa$ eine $k - O.\ Ch.$ ist und der einfache Bogen B normal zu κ liegt, kann man aus jedem $(k+1)$-tupel $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in B \cap K$ durch stetige Bewegung der x_i $(1 \leqslant i \leqslant k+1)$ auf B (und eventueller neuer, bei diesem Prozess auftretender Schnittpunkte von B mit den betreffenden $O.\ Ch.$) eine $O.\ Ch.$ K' erhalten mit $x_1', x_2', \ldots, x_{k+1}' \in B \cap K'$ und $B(x_1', x_{k+1}') \subset B(x_1, x_{k+1})$ bei beliebig kleinem Durchmesser von $B(x_1', x_{k+1}')$.

Ist $d < x_1 < x_{k+1} < d'$ auf B und hat $B(d, d')$ ausser den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ keine weiteren Punkte mit K gemein, so kann man erreichen, dass $B(x_1', x_{k+1}')$ von beliebig kleinem Durchmesser in $B(d, d')$ enthalten ist, $B(d, x_1')$ keinen Punkt von $B \cap K'$ enthält und dass eine vordere Umgebung von x_1' auf K' auf der gleichen Seite von B liegt, wie eine vordere Umgebung von x_1 auf K.

Der Kontraktionssatz wird verwendet zum Nachweis des Auftretens von singulären Punkten in B, in denen B bezüglich κ eine grössere PO als k hat.

5.1.4. Expansionssatz. *Voraussetzung.* Der einfache Bogen B liege normal zu κ. $PO(B, \kappa) = k + 1$. Es sei $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in B \cap K$, $x_1', x_2', \ldots, x_{k+1}' \in B \cap K'$ $x_{k+1} < x_1'$, mit $K, K' \in \kappa$, und $z \in B$ mit $z < x_1$.

Behauptung. Es existiert $K'' \in \kappa$ mit $z, y_1, y_2, \ldots, y_k \in B \cap K''$, $B(y_1, y_k) \subset B(x_1, x_{k+1}')$, wobei $B(y_1, y_k)$ beliebig kleinen Durchmesser hat. Es liegt eine vordere Umgebung von x_2 auf K auf derselben Seite von B wie eine vordere Umbegung von y_1 auf K''.

5.1.5. Eine einfach Beziehung zwischen KO und PO in gewissen Fällen ist folgende. Ist κ ein System von $k - O.\ Ch.$, C eine Kurve oder ein Bogen mit $KO(C; \kappa) = k$, ist ferner $K \in \kappa$ und $KO(C, K) = k$, so ist auch $PO(C, K) = k$.

5.2. Singuläre Punkte. Vier- und Zwei-Scheitelsatz. Es bedeutet κ hier immer ein System von $k - O.\ Ch.$ in R_2. Unter singulären Punkten eines Bogens oder einer Kurve C bezüglich κ, auch als „k-Scheitel" bezeichnet, werden wieder alle Punkte verstanden, in denen die PO von C grösser als k ist.

5.2.1.

SATZ 1. *Ist C ein einfacher Bogen oder eine einfache Kurve, die normal zu κ liegt, mit $PO(C, \kappa) = m \geqslant ki + 1$ $(i \geqslant 1)$, so enthält C mindestens i bzw. $i + 1$ singuläre Punkte, wenn C Bogen bzw. Kurve ist* (Haupt [13]).

Diese untere Schranke ist, wenigstens für $k = 3$, genau. Denn wenn z.B. κ die Menge der Kreise und Geraden in E_2 ist, also $k = 3$, so gibt es Kurven C, die in jedem Punkt eine Tangente besitzen, mit PO $(C, \kappa) \geqslant 4$, $i \geqslant 1$, die nur zwei singuläre Punkte (Scheitel) enthalten. Man erhält ein solches C auf folgende Weise.

T sei Teilbogen eines Ellipsenquadranten, q der Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten von T; T' sei ein inverses Bild von T bezüglich q als Inversionszentrum. Dann gibt es einen Teilbogen B von T' mit den Endpunkten a und e derart, dass die Tangenten an T' in a und e parallel sind. Es ist $PO(T', \kappa) = PO(T, \kappa) = 3$. Ergänzt man B durch den zu B bezüglich des Mittelpunkts der von a und e begrenzten Strecke zentralsymmetrischen Bogen B', so ist $C = B \cup B'$ eine Kurve mit nur zwei Scheiteln, nämlich in a und e.

Satz 1 entspricht genau dem Satz 1 in dem Teil 3.7., wobei hier nur an Stelle der strengen Konvexität von C die normale Lage von C zu κ gefordert wird. Im Fall der Ebene folgt das eine aus dem andern, wenn κ die Menge der Geraden in R_2.

5.2.2. (k — t)-Paratingenten. C sei einfacher Bogen oder einfache Kurve und $y_1, y_2, ..., y_t$ sowie $x_1, x_2, ..., x_{k-t}$ $(0 \leqslant t \leqslant k - 1)$ seien beliebige von den Grundpunkten für κ verschiedene Punkte von C. $K_0 \in \kappa$ sei die durch diese k Punkte bestimmte $k - O.\ Ch.$ Die Menge aller $K \in \kappa$ mit $y_\tau \in K$ $(\tau = 1, 2, ..., t)$ ist ein System κ' von $(k - t) - O.\ Ch.$, das normal zu C liegt, wenn dies für κ der Fall ist. Es ist y_τ Grundpunkt von κ' $(\tau = 1, 2, ..., t)$. Konvergieren nun die x_i $(i = 1, 2, ..., k - t)$ bei festgehaltenem y_τ $(\tau = 1, 2, ..., t)$ auf C gegen $x \in C$ und konvergiert dann K_0 topologisch gegen P_t, so heisse P_t eine $(k - t)$-Paratingente in x an C.

5.2.3. C erfüllt die „Eindeutigkeitsbedingung für $(k - t)$-Paratingenten" (abgekürzt EP), wenn für beliebiges t mit $0 \leqslant t \leqslant k - 1$ und beliebig gewählten Punkten $y_1, y_2, ..., y_t \in C$ in jedem von den Grundpunkten und den y_τ $(\tau = 1, 2, ..., t)$ verschiedenen Punkt $x \in C$ genau eine $(k - t)$-Paratingente P_t existiert mit nirgends dichtem Durchschnitt $P_t \cap C$.

SATZ 2. *Ist EP für eine Kurve C erfüllt, liegt C normal zu* κ *und ist* $PO(C, \kappa) = m \geqslant k + 1$, *so enthält C mindestens* $m - k$ *bzw.* m *singuläre Punkte, wenn C Bogen bzw. Kurve ist. Ist* $m = k + 1$, *so existieren höchstens* $k + 1$ *singuläre Punkte. Eine Kurve C, welche EP erfüllt, hat also genau dann die* $PO(k + 1)$, *wenn sie* $k + 1$ *singuläre Punkte enthält* (Haupt [13]).

Im Beispiel der Kurve in dem Teil 5.2.1. mit nur zwei Scheiteln ist die 3-Paratingente in a und e nicht eindeutig.

5.2.4. Als wichtigste Anwendung von Satz 2 ergibt sich der „Vierscheitelsatz" für Ellipsen und allgemeiner für beliebige Jordankurven mit stetiger, endlicher, von Null verschiedener Krümmung, wobei κ die Menge der Kreise und Geraden in E_2 ist, also $k = 3$.

Ist C eine Jordankurve, die EP nicht erfüllt oder nicht normal zu κ liegt, so gilt bei $k = 3$ und $PO(C, \kappa) > 3$ nur der „Zweischeitelsatz", der in C die Existenz von mindestens zwei Scheiteln nachweist. Es gibt nämlich in C immer ein Viertupel von Schnittpunkten $p_1, p_2, p_3, p_4 \in C \cap K$, wenn $K \in \kappa$ und $PO(C, K) > 3$, sodass $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ sowohl in C wie in K und $C(p_1, p_4)$ ausser p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ keine weiteren Punkte aus $C \cap K$ enthält. Durch Kontraktion der Punkten p_i erhält man dann (mindestens) zwei Scheitel (Haupt [23]).

5.2.5. Eine obere Schranke für die Anzahl s der singulären Punkte von C, wenn $PO(C, \kappa) = k + 1$ und C normal zu κ liegt, wird durch folgende Sätze gegeben.

Ist $k = 1$ und $PO(C, \kappa) = 2$, so ist $1 \leqslant s \leqslant 2$ (z.B. Konvexbogen C und Geradenbüschel κ). Ist $k \geqslant 2$ und sind z_1 und z_2 singuläre Punkte in C, ist ferner U eine Umgebung von $C(z_1, z_2)$ auf C und $c \in C - \bar{U}$, so sei κ' die Menge aller $K \in \kappa$ mit $c \in K$, die also ein System von $(k - 1)$-*O. Ch.* bilden. Dann existiert ein bezüglich κ' singulärer Punkt $z' \in U$, d.h. es gibt zu jeder Umgebung V von z' auf C eine *O. Ch.* $K \in \kappa'$, so dass $K \cap V$ mindestens k Punkte enthält. Durch Induktion erhält man hieraus für $k \geqslant 2$: Es gibt eine nur von k abhängige obere Schranke für s, die kleiner ist als $3 \cdot 2^{k-1}$. Die bezüglich κ singulären Punkte, in denen C die $PO(k + 1)$ hat, sind isoliert, also elementar (Haupt [4]).

5.2.6. Eine $(k + 1)$-Paratingente in einem singulären Punkt $z \in C$ an C ist Limes einer Folge von k – *O. Ch.*, die mit einer Umgebung von s auf C (mindestens) $k + 1$ Punkte gemein haben, wobei diese Punkte gegen s konvergieren.

Ist C von endlicher PO bezüglich κ und normal zu κ, gibt es ferner in jedem singulären Punkt $s \in C$ nur eine $(k + 1)$-Paratingente P an C und ist P eine natürlich orientierbare $O.\ Ch.$, so ist C abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Bogen B_i mit $PO(B_i, \kappa) = k$.

Die natürliche Orientierbarkeit einer $(k + 1)$-Paratingente P ist dabei so erklärt. Ist P Limes der Folge $K_1, K_2, ..., K_i \in \kappa$, so lässt sich P so orientieren, dass, wenn $x, x' \in P$, $x < x'$, U bzw. U' eine ϵ-Umgebung von x bzw. x' in E_2 ist mit $U \cap U' = \emptyset$ und $x_i \in U \cap K_i$, $x_i' \in U' \cap K_i$ für genügend grosses i, dann auch $x_i < x_i'$ ist (Haupt [27]).

Jeder ordnungshomogene Teilbogen von C hat daher die $PO\ k$ bezüglich κ.

5.2.7. Aus diesem Satz für ebene Bogen lässt sich folgender entsprechende Satz für Parameterkurven in P_n ableiten. Ist B ein ordnungshomogener Parameterbogen in P_n von endlicher StO bezüglich des Systems κ der Hyperebenen von P_n und ist in jeder Stelle t von B, in der eine „Limessekante“ $L(t_1, ..., t_s; t)$ $(0 \leqslant s \leqslant n - 1)$ existiert, diese eindeutig durch $t_1, ..., t_s, t$ bestimmt, so ist $StO(B, \kappa) = n$; dabei entsprechen die Limessekanten $L(t_1, ..., t_s;\ t)$ den $(k - t)$-Paratingenten in dem Teil 5.2.2., wenn man y_i durch t_i und x durch t ersetzt (Haupt [28]).

5.3. Ordnungsminimale Kurven und Bogen. E_2 oder ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von E_2 sei Grundgebiet. B sei orientierte Grundkurve oder Grundbogen mit Anfangspunkt a und Endpunkt e. κ sei ein System von $k - O.\ Ch.(k \geqslant 2)$ und es sei $PO(B, \kappa) = k$, also B ordnungsminimal. $K(r_1, r_2, ..., r_k)$ sei die durch die Punkte r_i $(i = 1, 2, ..., k)$ bestimmte $O.\ Ch.$, Ordnungscharakteristiken, die B in k Punkten schneiden, heissen „Maximalsekanten.“

In jedem Punkt von B soll die $(k - t)$-Paratingente (in dem Teil 5.2.2.) existieren $(t = 0, 1, ..., k - 1)$ und einfacher Bogen oder einfache Kurve sein. k-Paratingenten werden auch kurz nur „Paratingenten“ genannt. $P(r)$ heisse vordere bzw. hintere Paratingente in r an B, wenn $P(r)$ Limes von $O.\ Ch.$ ist, die durch k Punkte $r_1, r_2, ..., r_k$ einer vorderen bzw. hinteren Umgebung von r auf B gehen mit $r_i \to r$ $(i = 1, 2, ..., k)$

Die $O.\ Ch.$ können nur dann Kurven sein, wenn $k \equiv 1 \pmod 2$, B nur dann wenn $k = 2$.

Ist die *O. Ch.* K eine Kurve, so liegt K zu B normal; ist K ein Bogen mit Anfangspunkt c und Endpunkt d und wird B von K in $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$ geschnitten, so kann K so orientiert werden, dass in K: $c < r_\mu < r_{\mu+1} < \cdots < r_k < r_1 < r_2 < \cdots < r_{\mu-1} < d$ $(1 \leqslant \mu \leqslant k)$.

Ist $k \equiv 0 \pmod 2$, so liegt B zujeder Maximalsekante normal. Ist $k \equiv 1 \pmod 2$, so gibt es ein $R > 0$, sodass jede Maximalsekante $K(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ normal zu B liegt, falls der Durchmesser von $B(r_1, r_k)$ kleiner als R ist. Eine solche Maximalsekante heisse „regulär."

Eine Paratingente an B in $r \in B$ wird von B in r gestützt bzw. geschnitten, wenn $k \equiv 0$ bzw. $k \equiv 1 \pmod 2$.

Sind $K(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ und $K'(r_1', r_2', \ldots, r_k')$ reguläre *O. Ch.*, ist $r_k < r_1'$ auf B und ist c bzw. c' Anfangspunkt, d bzw. d' Endpunkt von K bzw. K' (falls K und K' Bogen sind), so ist für $k \equiv 1 \pmod 2$:

$$[K(c, r_1) \cup K(r_k, d)] \cap [K'(c', r_1') \cup K'(r_k', d')] = \emptyset$$

bzw.

$$K(r_k, r_1) \cap K'(r_k', r_1') = \emptyset,$$

falls K und K' Bogen bzw. Kurven sind. $K(c, r_1)$ heisse Anfangsbogen, $K(r_k, d)$ Endbogen von K. Der Anfangsbogen bzw. Endbogen einer Paratingente P ist Limes der Anfangsbogen bzw. Endbogen von gegen P konvergierenden Maximalsekanten.

Ist P bzw. P' Paratingente in p bzw. p' an B, $p < p'$, so schneiden sich die Anfangs- (End-)Bogen H und H' von P und P' nur dann in einem Punkt s, wenn die Endpunkte von B in $J(C)$ liegen, wobei $C = B(p, p') \cup H(s, p) \cup H'(s, p')$ [bzw. $C = B(p, p') \cup H(p, s) \cup H'(p', s)$].

Ist $k \equiv 1 \pmod 2$, so schneiden sich Paratingenten überhaupt nicht. Die Paratingente P an B in p hat mit B in jedem Fall ausser p keinen Punkt gemein.

Die vordere (hintere) Paratingente ist für $k \geqslant 2$ in jedem Punkt von B eindeutig bestimmt, im Anfangspunkt von B die hintere, im Endpunkt die vordere. Jeder Anfangs-(End-) Bogen einer Paratingente in p an B liegt zwischen dem Anfangs-(End-)Bogen der vorderen und hinteren Paratingente in p an B, wenn davon verschieden. Fallen vordere und hintere Paratingente in p an B zusammen, so gibt es nur eine Paratingente in p an B. Die Anzahl der Punkte, in denen die vordere Paratingente nicht mit der hinteren zusammenfällt, ist abzählbar. Die Paratingenten ändern sich stetig mit ihrem Berührungspunkt (Haller [1]).

5.3.1. Beispiele von bezüglich eines Systems κ von $k - O.\ Ch.$ ordnungsminimalen Bogen B sind für $k = 3$ die Ellipsenquadranten, wenn κ das System der Kreise ist; für $k = 4$ Halbellipsen, wenn κ das System der zu B normal liegenden Parabeln ist. Im ersten Beispiel liegen alle Schmiegkreise (3-Paratingenten) ineinander geschachtelt (Haupt [15]).

Auch für $k > 4$ lassen sich Beispiele konstruieren, wobei das Grundgebiet G ein Streifen von E_2 ist, der von zwei zur Y-Achse parallelen Geraden begrenzt wird, das Grundgebilde B eine Parabel $(k - 1)$-ter Ordnung ist und κ aus den Parabeln $(k - 1)$-ter Ordnung besteht, die durch einen ausserhalb G liegenden, zu B fremden Punkt gehen.

5.4. Verallgemeinerte Kegelschnittsysteme. Das Grundgebiet sei E_2 oder ein von einer Jordankurve J begrenztes Gebiet G von E_2. Jeder *O. Ch.* K eines Systems κ von k – *O. Ch.* $(k \geqslant 3)$ wird eine Zahl $f(K)$ zugeordnet, die „verallgemeinerte Exzentrizität" (v. *E.*) von K, die sich mit K stetig ändert. Es sei $f(K) < 1$ bzw. $= 1$ bzw. > 1, wenn K eine Kurve in G bzw. eine J einpunktig berührende Kurve bzw. ein Bogen mit Endpunkten auf J ist. Bogen mit gemeinsamen Endpunkten haben die gleiche *v.E.* und sollen für sich ein System von $(k-2)$-*O. Ch.* bilden, ebenso die J im gleichen Punkt berürenden *O. Ch.* (Haupt [11]).

Das Grundgebilde B muss dabei gewisse Bedingungen erfüllen, so z.B. im Fall, dass κ das System der nicht ausgearteten Kegelschnitte ist, also $k = 5$, muss B eine Kurve oder ein Bogen von *PO* 2 bezüglich der Geraden in E_2 sein. Setzt man hier *v.E.* gleich der numerischen Exzentrizität, so erhält man als Spezialfälle allgemeinerer ordnungsgeometrischer Sätze die Ovalsätze von Böhmer bzw. Mukhopadhyaya: „Ist der Schmiegkegelschnitt in jedem Punkt eines Ovals B bzw. jede 6-Paratingente in einem Scheitel (sextaktischem Punkt) eine Ellipse, so liegen 5 beliebige Punkte von B immer auf einer Ellipse," und den entsprechenden Satz von Mohrmann für Konvexbogen und Hyperbeln, sowie den Satz von Carleman: „Hat jede Schmiegparabel in einem Punkt $p \in B$ mit B ausser p keinen Punkt gemein, so ist $PO(B, \kappa) = 4$, wenn κ das System der Parabeln ist."

6. Lineare Ordnung

Wenn κ das System der Geraden in R_2 ist, bezeichnet man die *PO* eines Kontinuums bezüglich κ auch als „lineare Ordnung" und die *StO* als „lineare *StO*." Es gilt hier der

Darstellungssatz. Jeder Bogen ist abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Bogen, von denen jeder die lineare Ordnung 2 oder ∞ hat.

Es gibt aber ebene, keine Strecken enthaltende Bogen mit stetiger Tangente von beliebig vorgegebener linearer Ordnung $m \geqslant 4$, auf denen die Menge aller Punkte mit der *PO* m perfekt und nirgends dicht ist und ein Mass besitzt, das beliebig wenig vom Mass des ganzen Bogens abweicht (Haupt [8, 9]).

6.1. Bogen und Kurven der linearen Ordnung 3. Bei Bogen und Kurven B_3 der linearen Ordnung 3 erhält man auch ohne Annahme der Differenzierbarkeit im wesentlichen die gleichen Möglichkeiten wie bei algebraischen Kurven 3.Ordnung (Juel [1], Haupt [17], Marchaud [1]). Ein singulärer Punkt von B_3 kann nur Wendepunkt, Dorn (Dornspitze) oder Schnabel (nicht Schnabelspitze) sein. Diese drei Typen von Singularitäten lassen sich ordnungsgeometrisch auf zweierlei Art kennzeichnen, von denen eine aus der andern folgt (Haupt [29]).

Kennzeichnung 1. Es sei $c \in B_3$ beliebig. Ein Punkt $x \in B_3 - \{c\}$ heisst „c-singulär," wenn durch c eine Gerade geht, die B_3 in x stützt.

Ist nun $p \in B_3$ ein singulärer Punkt und ist V bzw. H eine beliebig kleine vordere bzw. hintere Umgebung von p auf B_3, so gibt es nach Reduktionssatz (in dem Teil 2.7.) eine in der Menge der Geraden von R_2 offene Menge von Geraden, die $V \cup H$ in drei (von p verschiedenen) Punkten schneiden.

p heisse (1, 2)- bzw. (2, 1)-Punkt, wenn es für beliebiges V und H eine Gerade gibt, die V bzw. H in zwei Punkten und H bzw. V in einem Punkt schneidet.

Die drei Typen der singulären Punkte sind nun:

(w): p ist sowohl (1,2)- wie (2,1)-Punkt, aber nicht c-singulär für einen beliebigen, von p verschiedenen Punkt $c \in B_3$ (Wendepunkt).

(d): p ist sowohl (1,2)- wie (2,1)-Punkt und c-singulär (Dorn).

(s): p ist nur (1,2)- oder nur (2,1)-Punkt (Schnabel).

Diese Typisierung ist von der Wahl des Punktes c unabhängig, wie die zweite Art der Kennzeichnung zeigt.

Kennzeichnung 2. Es sei vTh bzw. hTh die vordere bzw. hintere Halbtangente in p an B_3, vT bzw. hT die Trägergerade von vTh bzw. hTh, und zwar sei hier hTh wie in dem Teil 3.7. erklärt als lim $G(p,y)$ mit $y \to p$, wobei $G(p, y)$ die von p ausgehende, y enthaltende Halbgerade ist und $y \in H$.

(w): Es ist hTh komplementär zu vTh, d.h. $vT = hT$, aber $vTh \neq hTh$; V und H liegen auf verschiedenen Seiten von vT.

(d): Es ist $vTh = hTh$; V und H liegen auf verschiedenen Seiten von vT (Dornspitze)—oder $vT \neq hT$, V und H liegen in zwei von vT und hT gebildeten Scheitelwinkelräumen.

(s): Es ist $vT \neq hT$; V und H liegen in zwei von vT und hT gebildeten Nebenwinkelräumen.

Wenn $vT \neq hT$ und V und H in demselben von vTh und hTh begrenzten Winkelraum liegen, ist p regulärer Punkt, ebenso wenn hTh komplementär zu vTh ist und V und H auf derselben Seite von vT liegen. Wäre $vTh = hTh$ und lägen V und H auf derselben Seite von vT, so hätte B_3 in p die lineare Ordnung 4 (Schnabelspitze).

6.1.1. Wir nehmen nun an, B_3 liege normal zu κ und sei beschränkt, dann gibt es in B_3 mindestens einen und höchstens drei singuläre Punkte, wobei ein Dorn doppelt zählt. B_3 kann daher immer als Vereinigung von höchstens vier konvexen Bogen dargestellt werden. Ist a Anfangspunkt von B_3, so gibt es in $B_3 - \{a\}$ höchstens zwei a-singuläre Punkte.

6.1.2. Liegt B_3 nicht normal zu κ, so besitzt B_3 höchstens einen Schnabel oder einen Wendepunkt, aber keinen Dorn und ist darstellbar als Vereinigung von höchstens drei konvexen Bogen.

6.1.3. Ist C_3 eine einfache Kurve der linearen Ordnung 3 in P_2, so ist C_3 nicht beschränkt und enthält genau drei singuläre Punkte, wobei ein Dorn wieder doppelt zählt. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes sagt aus (Satz von Möbius), dass in P_2 jede einfache Kurve von ungerader linearer PO mindestens drei Singularitäten besitzt, wobei ein Dorn doppelt zu zählen ist (Haupt [30]).

C_3 lässt sich zerlegen in einen zu κ normal liegenden Bogen B_3 und einen beliebig kleinen konvexen Bogen.

Nicht jeder Bogen B_3 der linearen Ordnung 3 ist zu einer Kurve C_3 der linearen Ordnung 3 erweiterbar, z.B. wenn B_3 ein Bogen mit drei Wendepunkten ist, dessen Halbtangenten in den Endpunkten denselben Träger aber entgegengesetzte Richtung haben. Bei *schw.* $PO(B_3) = 3$ ist dies dagegen möglich.

6.1.4. Enthält die Kurve (oder der Bogen) C_3 von der linearen Ordnung 3 Verzweigungspunkte, so kann nur einer—er sei z—auftreten. C_3 ist dann Vereinigung von zwei einfachen Kurven C' und C'' der linearen Ordnung 2 bzw. 3. C'' besitzt einen Dorn in z und ausserdem einen Schnabel oder einen Wendepunkt.

Jedes Kontinuum der linearen Ordnung 3 ist ein Bogen oder eine Kurve (Marchaud [1]).

6.1.5. Diese Sätze, die hier für den Fall, dass κ das System der Geraden in E_2 oder P_2 ist, und für die *PO* 3 ausgesprochen wurden, gelten auch für allgemeinere topologische Ebenen (z.B. nichtdesargues'sche Ebenen), wobei die Geraden ersetzt werden durch Teilkontinuen dieser Ebenen als k – *O. Ch.*, welche die Axiome in dem Teil 1.1 erfüllen und für die $k = 2$ ist (Haupt [29]).

6.2. Lokal konvexe Kurven. Eine geschlossene Parameterkurve C in E_2 heisst „lokal konvex," wenn sie in jeder Stelle die lineare *StO* 2 hat, C ist von der „Klasse" m, wenn m die Höchstzahl der Stützgeraden ist, die aus einem Punkt $s \in E_2$ an C gehen.

C hat die „Rotationszahl" ν bezüglich eines Punktes $s \notin C$, wenn die von s ausgehende Halbgerade, die einen Punkt $p \in C$ enthält, sich um den Winkel $2\pi\nu$ dreht, falls p die Kurve C durchläuft. ν wird manchmal auch als „Charakteristik" des Punktes s bezüglich C bezeichnet.

6.2.1. Ist C eine lokal konvexe, beschränkte Parameterkurve der Klasse m, ist s ein nicht auf C liegender Punkt, aus dem μ Stütz-geraden an C gehen, und ist ν die Rotationszahl von C bezüglich s, so ist $\mu + 2\nu = m$. Ist $m < \infty$ und $\mu + 2\nu \neq m$, so ist C nicht lokal konvex (Künneth [1]).

6.2.2. Es sei nun C eine differenzierbare, beschränkte, lokal konvexe geschlossene Parameterkurve in P_2 von der linearen *StO* n und der Klasse m. An mehrfachen Punkten sollen nur Doppelpunkte, an mehrfachen Tangenten nur Doppeltangenten auftreten; ist $p(t_1) = p(t_2)$, so sei $T_1(t_1) \neq T_1(t_2)$. Es kann dann nur endlich viele Doppelpunkte und Doppeltangenten geben. Es soll ferner ein Punkt $s \notin C$ existieren, aus dem keine Tangente an C geht. Die Rotationszahl von C bezüglich s sei ν. Es ist dann $n = m = 2\nu$.

Durchläuft ein Punkt $p(t)$ die Kurve C, so dreht sich die Tangente $T_1(t)$ in $p(t)$ bei einem vollen Umlauf um den Winkel $2\pi\nu$.

Es sei $p_0 = p(t_0) \in C$ auf dem Rand der konvexen Hülle von C, sonst beliebig. Bewegt sich $p(t)$ von p_0 ausgehend auf C und überschreitet $p(t)$ die Kurve in einem Doppelpunkt beim erstmaligen Durchlaufen des Doppelpunktes von der konvexen zur konkaven Seite, so heisse der Doppelpunkt „positiv,“ andernfalls „negativ.“ Die Zahl der positiven Doppelpunkte sei k_1, die der negativen k_2 ; diese Zahlen sind unabhängig von der Wahl des Punktes $p(t_0)$.

Trifft $T_1(t)$, wenn $p(t)$ die Kurve durchläuft, zum ersten Mal mit einer Doppeltangente zusammen und werden dabei auf $T_1(t)$ zwei Schnittpunkte mit C gewonnen, so heisse diese Doppeltangente „positiv,“ andernfalls „negativ.“ Gibt es k_1' positive und k_2' negative Doppeltangenten an C, so ist $k_1' = k_1$, $k_2' = k_2$, und $k_1 - k_2 = k_1' - k_2' = \nu - 1$ (Fabricius-Bjerre [1]).

6.2.3. Erwähnt sei noch folgender Satz: Geschlossene, beschränkte, differenzierbare ebene Parameterkurven mit stetiger Tangente, deren Klassenindex 0 ist—d.h. es gibt einen Punkt s, aus dem keine Tangente an die Kurve geht—und welche die gleiche Rotationszahl bezüglich eines solchen Punktes s haben, lassen sich stetig in einander überführen mit sich stetig ändernder Tangente. Lokale Konvexität wird hier nicht vorausgesetzt (Whitney [1]).

6.3. Relative Ordnung. Der ebene einfache Bogen B ist von (beschränkter) „Relativ-Ordnung“ r bezüglich eines Halbgeraden- oder Parallelenbüschels β, wenn B mit jedem $K \in \beta$ höchstens r Punkte oder Strecken (verlängerte Punkte) gemein hat und mit mindestens einem K genau r.

Ein Bogen, der sich nicht in endlich viele Teilbogen zerlegen lässt, die bezüglich je eines geeignet gewählten Büschels höchstens die Relativordnung $2k$ ($k \geqslant 1$) haben, hat mindestens die lineare Ordnung $2(2k + 1)$.

Ein Bogen der linearen Ordnung m ($m \geqslant 6$) lässt sich daher immer zerlegen in Teilbogen, die bezüglich je eines geeignet gewählten Büschels höchstens die Relativordnung $1 + [(m - 2)/2]$ haben, wobei $[i]$ die grösste gerade Zahl bedeutet, die kleiner oder gleich i ist. Diese Schranken sind genau (Haupt [1]).

7. Zyklische Ordnung

Ist κ die Menge der Kreise und Geraden in R_2, also $k = 3$, so spricht man von „zyklischer Ordnung.“ Wie schon in dem Teil 5.2.4. festgestellt, hat eine Kurve von der zyklischen Ordnung $m > 3$ mindestens zwei und, wenn *EP* erfüllt ist, mindestens vier Scheitel. Es gelten noch folgende Sätze.

SATZ. *Ist C ein Oval, das in jedem Punkt einen Schmiegkreis und nur endlich viele Scheitel besitzt, so ist $PO(C, \kappa) = 4$ genau dann, wenn C von keinem Kreis in mehr als zwei Punkten berührt wird* (Haupt [18]).

Ist B ein kreisbogenfreier Bogen von endlicher zyklischer Ordnung, der normal zu κ liegt, und ist kein Schmiegkreis von B ein Nullkreis, so ist $PO(B, \kappa) = 3$ genau dann, wenn alle Kreise K, die mindestens drei Schnittpunkte mit B haben, und alle Schmiegkreise an B gleichartig liegen, d.h. wenn bei einer Orientierung von B die vordere Umgebung des ersten Schnittpunktes von $K \cap B$ auf K für alle K immer auf der gleichen Seite von B liegt. Liegen alle Schmiegkreise von B gleichartig und existiert mindestens ein Scheitel, so ist $PO(B, \kappa) = 4$ und es existiert nur ein Scheitel (Haupt [20]).

Ist C ein Bogen oder eine Kurve der endlichen zyklischen Ordnung m und hat der Kreis K mit C m Punkte gemein, (a) so sind diese alle Schnittpunkte, abgesehen eventuell von den Endpunkten von C, und (b) es ist K keine 2-Paratingente an C in dem Teil 5.2.2. (Jackson [1]).

Die Behauptung (a) lässt sich folgendermassen verallgemeinern. Es sei C ein Kontinuum in R_2, κ ein System von *k-O. Ch.*, $K \in \kappa$; es werde eine Stützkomponente von $C \cap K$ als „innere Stützkomponente" bezeichnet, wenn $C - T$ in (mindestens) zwei Komponenten zerfällt. Ist dann $KO(C, \kappa) = m$, $KO(C, K) = m$ und enthält $C \cap K$ höchstens $k - 1$ nicht-innere Stützkomponenten, so sind alle übrigen Komponenten von $C \cap K$ Schnittkomponenten (Haupt und Künneth [2]).

8. Grundgebilde von höherer als 1.Dimension

An ordnungsgeometrischen Sätzen über Flächen seien nur zwei aus den Arbeiten von Marchaud hervorgehoben. Sie sollen zugleich zeigen, wie enge Beziehungen zwischen der Gestalt der Flächen m-ter Ordnung im ordnungsgeometrischen Sinn mit der der algebraischen Flächen m-ten Grades bestehen.

8.1. Flächen 3.Ordnung. Eine abgeschlossene Teilmenge S des P_3 heisse eine Fläche 3.Ordnung, wenn jeder ebene Schnitt von S eine Kurve von der schwachen linearen Ordnung $m \leqslant 3$ ist und mindestens eine Schnittkurve die lineare Ordnung 3 hat. Infinitesimalgeometrische Voraussetzungen werden nicht gemacht.

Ein Punkt $p \in S$ heisse „regulär," wenn durch ihn mindestens eine Trisekante von S geht, d.h. eine Gerade, die genau drei Punkte von S enthält; andernfalls heisse der Punkt „irregulär." Enthält eine Gerade drei irreguläre Punkte von S, so sind alle Punkte dieser Geraden irregulär. Ein Punkt $q \in S$ heisse „singulär," wenn er isoliert ist oder eine Umgebung von q auf S in der Paratingenten-Menge (faisceau des tangents) in q an S enthalten ist. Eine nicht algebraische Fläche 3.Ordnung kann Punkte enthalten, die sowohl singulär als auch regulär sind.

Enthält S höchstens vier irreguläre Punkte, so ist S nicht ausgeartet, d.h. S ist kein Kegel und S enthält keinen Kegel als Teilmenge. Es ist S genau dann ausgeartet, wenn es in S sieben durch einen Punkt gehende Gerade gibt.

Enthält S keinen irregulären Punkt und mindestens 8 Gerade, so enthält S entweder 15 oder 27 Gerade; diese sind die reellen Geraden einer eindeutig bestimmten algebraischen Fläche 3.Grades (Marchaud [4]).

8.2. Linear zusammenhängende Mengen. Eine Punktmenge A in P_n heisse „linear zusammenhängend" (abgekürzt *l.z.*), wenn der Durchschnitt von A mit jeder Geraden von P_n zusammenhängend ist oder damit gleichbedeutend, wenn mit je zwei Punkten p, $q \in A$ auch (mindestens) eine der beiden von p und q begrenzten Strecken in A enthalten ist. Eine Punktmenge A heisst „konvex," wenn sie *l.z.* ist und es eine zu $\bar{A}$ fremde Hyperebene gibt. Mit A ist auch $P_n - A$ und $L_k \cap A$ *l.z.*, wenn L_k eine k-Ebene in P_n ist $(1 \leqslant k \leqslant n - 1)$.

Die gemeinsame Begrenzung von A und $P_n - A = B$ sei $F = \bar{A} \cap \bar{B}$. Jede Gerade, die mehr als zwei Punkte mit F gemein hat, liegt ganz in $\bar{A}$ oder $\bar{B}$. Eine Gerade, die Punkte aus $\bar{A} - \bar{A} \cap F$ und $\bar{B} - \bar{B} \cap F$ enthält, heisse „Sekante." Ein Punkt $p \in F$ heisst „singulär," wenn durch p keine Sekante geht.

Ist $p \in F$ singulär und $q \in F$, so liegt die Gerade $L(p, q)$ ganz in F. Ist auch q singulär, so ist jeder Punkt von $L(p, q)$ singulär. Die Menge der singulären Punkte von F erfüllt daher eine k-Ebene $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Unter dem „Index der linearen inneren Ausdehnung" oder kurz dem „Index" einer *l.z.* Menge soll verstanden werden die grösste Zahl α der Eigenschaft, dass es eine α-Ebene L_α gibt mit $L_\alpha \subset A - F \cap A$. Ist β der Index von B, so ist immer $\alpha + \beta + 1 \leqslant n$. F enthält genau dann keinen singulären Punkt, wenn $\alpha + \beta + 1 = n$; ist in diesem Fall

$\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$, so ist A bzw. B konvex; ist $\alpha\beta \neq 0$, so ist F eine nicht zerfallende algebraische Regelfläche. Bei geeigneter Koordinatenwahl erhält man für F die Gleichung:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_\alpha^2 - x_{\alpha+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0$$

Ist $\alpha + \beta + 1 = n - q - 1$ $(0 \leqslant q \leqslant n - 2)$, so erfüllt die Menge der singulären Punkte eine q-Ebene Λ_q und F ist ein Kegel mit Λ_q als Scheitel und, wenn $\alpha\beta \neq 0$, mit einer nicht zerfallenden $(n - q - 2)$-dimensionalen algebraischen Regelfläche 2. Grades als Leitfläche mit der Gleichung (bei geeigneter Koordinatenwahl):

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_\alpha^2 - x_{\alpha+1}^2 - \cdots - x_{\alpha+\beta+1}^2 = 0$$

$$\Lambda_q\colon \qquad x_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, \alpha + \beta + 1).$$

Ist $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, so ist der Schnitt von A mit einer zu Λ_q fremden $(n - q - 1)$-Ebene L eine in L konvexe Menge.

Ist $\alpha = \beta = 0$, so besteht F aus zwei sich in Λ_{n-2} schneidenden Hyperebenen (Marchaud [3]).

8.3. Darstellungssatz von Nöbeling. Eine Verallgemeinerung des Satzes in 2.6. auf Parallelscharen von k-Ebenen $(1 \leqslant k \leqslant n - 2)$, welche den E_n schlicht überdecken, gibt folgender

Darstellungssatz. *Voraussetzung* 1. A sei eine kompakte Teilmenge des E_n. Das System κ der *O. Ch.* sei eine Schar paralleler k-Ebenen, die E_n schlicht überdecken $(1 \leqslant k \leqslant n - 2)$

Voraussetzung 2. Es sei $PO(A, \kappa)$ endlich.

Behauptung. A ist höchstens $(n - k)$-dimensional und darstellbar als Summe einer in A offenen, höchstens $(n - k - 1)$-dimensionalen Menge A' und der in A abgeschlossenen Hülle A'' einer Vereinigung von höchstens abzählbar vielen in A'' offenen paarweise fremden $(n - k)$ — Zellen* Z_i mit $PO(Z_i, \kappa) = 1$.

A'' ist dann und nur dann nicht leer, wenn die Menge aller zu A nicht fremden k-Ebenen aus κ eine in κ offene Teilmenge enthält (Nöbeling [1]).

* Unter einer k-Zelle werde das topologische Bild eines offenen k-dimensionalen Simplex verstanden.

LITERATUR*

M. Barner

1. Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebenen bei geschlossenen, streng konvexen Raumkurven, *Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1956), 196-215.

F. Denk und O. Haupt

1. Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n, *J. Reine Angew. Math.* **183** (1941), 69-91.

D. Derry

1. On closed differentiable curves of order n in n-space, *Pacific J. Math.* **5** (1955), 675-686.
2. Convex hulls of simple space curves, *Canad. J. Math.* **8** (1958), 383-388.
3. A rank number for a class of polygons, *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4*, **54**, 285-294.

Fr. Fabricius-Bjerre

1. On a class of locally convex closed curves, *Ann. Mat. Pura Appl.* Ser. 4, **55** (1961), 47-54.
2. On polygons of order n in projective n-space, with an application to strictly convex curves, *Math. Scand.* **10** (1962), 221-229.

H. Haller

1. Über ordnungsminimale Bogen bzw. Kurven in der Ebene und ihre k-Paratingenten, *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1963), 15-25.

O. Haupt

1. Über zerlegbare Kurven, *Math. Z.* **22** (1925), 8-15.
2. Über Kontinua von beschränkter Ordnung, *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1931), 49-61.
3. Über Kontinua von endlicher Relativordnung, *J. Reine Angew. Math.* **167** (1931), 20-39.
4. Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, *Monatsh. Math.* **40** (1933), 1-54.
5. Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, *Math. Ann.* **108** (1933), 126-142.
6. Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde, *Monatsh. Math.* **46** (1937), 84-92.
7. Geometrische Ordnungen, *Jahrber. Deutsch. Math.-Verein.* **49** (1939), 190-207.
8. Linear ordnungssinguläre Punkte ebener und räumlicher Bogen, *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1939), 253-263.

* Wegen weiterer Literatur sei auf die Literaturverzeichnisse in Haupt [7, 31] und Nagy [1] verwiesen.

9. Über ebene Bogen mit vorgeschriebenen Ordnungssingularitäten, *Jahrber. Deutsch. Math.-Verein.* **50** (1940), 256-269.
10. Raumbogen mit Punkten von beliebig vorgegebenen linearem Ordnungswert, *J. Reine Angew. Math.* **184** (1942), 77-90.
11. Über den Ovalsatz von Böhmer-Mukhopadhyaya, *Math. Ann.* **118** (1943), 629-636.
12. Limessätze bei geometrischen Ordnungen, *Ann. Mat. Pura Appl.* Ser. 4, **23** (1944), 123-148.
13. Zur Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes und seiner Umkehrung, *Ann. Math. Pura Appl.* Ser. 4, **27** (1948), 293-320.
14. Schwache Ordnung im projektiven n-dimensionalen Raum R_n, *Math. Ann.* **120** (1948), 473-491.
15. Zur geometrischen Kennzeichnung der Scheitel ebener Kurven, *Arch. der Math.* **1** (1948), 102-105.
16. Kontinua von n-ter Ordnung im projektiven n-dimensionalen Raum, *Math. Ann.* **121** (1949), 41-51.
17. Über die ebenen Bogen der linearen Ordnung drei, *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (1950), 153-162.
18. Über eine Beziehung zwischen Ordnung und Singularitäten, *Math. Nachr.* **4** (1950), 81-96.
19. Zur Kennzeichnung der Kurven n-ter Ordnung im n-dimensionalen projektiven Raum, *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1953), 289-299.
20. Über Bogen mit lauter gleichartigen Schmieggebilden, *Portugaliae Math.* **13** (1954), 1-23.
21. Bestimmung der Kontinua im E_n ohne n richtungsabhängige Paratingenten ($n \geqslant 2$), *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1956), 295-327.
22. Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes, *J. Reine Angew. Math.* **200** (1958), 170-181.
23. Zur Verallgemeinerung des Zweischeitelsatzes bei ebenen Kurven, *Arch. der Math.* **11** (1960), 294-297.
24. Ordnungsgeometrische Limessätze in kompakten Räumen. 1. Mitt. Komponentenordnungswerte, *Math. Z.* **77** (1961), 81-93.
25. Über einige Probleme bei schwachen Komponenten- und Punktordnungswerten, *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1961), 1-12.
26. Untersuchungen zur M. Barnerschen Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Raumkurven, *Math. Ann.* **144** (1961), 1-16.
27. Über die Existenz ordnungshomogener Bogen in der Ebene bezüglich vorgegebener Ordnungscharakteristiken, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **30** (1961), 195-209.
28. Über ordnungshomogene Bogen im projektiven n-dimensionalen Raum bezüglich der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **31** (1962), 321-333.
29. Zur Theorie der Kurven insbesondere von 2. und 3. Ordnung in topologisch. ebenen projektiven Ebenen, *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1962), 63-77.

30. Über einen Satz von Möbius, *Bull. Soc. Math. Grèce*, [N.S.] **1** (1960), 19-42.
31. Aus der Theorie der geometrischen Ordnungen, *Jahrber. Deutsch. Math.-Verein.* **65** (1963), 148-186.

O. Haupt und H. Künneth

1. Über einige allgemeine Sätze bei Juelschen Ordnungsproblemen, *Sitzber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* (1960), 17-25.
2. „Geometrische Ordnungen." Springer, Berlin (in Vorbereitung).

J. Hjelmslev

1. Introduction à la Théorie des suites monotones. *Overs. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Forhandl.* **1** (1914).
2. Die graphische Geometrie. *Forhandl. Åttonde skand. Mat.-Kongr. Stockholm* (1934).
3. Ein Satz über monoton gekrümmte Raumkurven im R_n mit einer Anwendung auf elliptisch und hyperbolisch gekrümmte Ovale, *Acta Math.* **87** (1952), 59-82.

S. B. Jackson

1. A note on arcs of finite cyclic order, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961), 364-368.

C. Juel

1. Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, *Kgl. Danske Videnskab Selskab Skrifter* **11** (1914), 113-167.
2. Einleitung in die Theorie dei Elementarflächen dritter Ordnung, *Math. Ann.* **76** (1915), 548-574.

A. Kneser

1. Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven, *Math. Ann.* **41** (1843), 349-376.

H. Künneth

1. Eine Kennzeichnung lokal konvexer Kurven, *J. Reine Angew. Math.* **191** (1953), 158-164.
2. Dualisierbare Kurven im R_n, *Math. Ann.* **140** (1960), 198-226.
3. Zu einem Satz von Hjelmslev über monotone Bogen, *Math. Z.* **76** (1961), 199-208.
4. Zur Struktur der schwach ordnungsminimalen Kontinuen, *Bull. Soc. Math. Grèce*, [NS] **2** (1961), 82-103.

M. Linsmann

1. Introduction à une théorie abstraite de la notion de l'ordre des figures réelles, *Mem. Acad. Roy. Belgique* (*Classe d. Sciences*) **17** (1938).
2. Sur la théorie de l'ordre des figures réelles et les travaux de M. Haupt, *L'enseignement Math.* **37** (1938), 23-48.

A. Marchaud

1. Sur les continus d'ordre borné, *Acta Math.* **55** (1930), 67-115.
2. La géométrie finie et ses richesses, *Univ. Paris. Les conférences du Palais de la découverte.* Sér. A, No. 236 (1958).
3. Sur les ensembles linéairement connexes, *Ann. Mat. Pura Appl.* Ser. 4, **56** (1961), 131-158.
4. Sur certaines relations algébriques entre les droites d'une même surface du troisième ordre de la Géométrie finie, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **255** (1962), 3349-3350.

A. F. Möbius

1. Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung, *Abhandl. Sächs. Ges. Wiss. Math. Phys. Kl.* **1** (1852), 1-82.

P. Montel

1. Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel, *Bull. Sci. Math.* **48** (1924), 109-128.

S. Mukhopadhyaya

1. ,,Collected Geometrical Papers,'' Part I. Calcutta, 1929.

J. v. Sz. Nagy

1. Geometrie endlicher Ordnung, *Jahrber. Deutsch. Math.-Verein.* **53** (1943), 103-136.

G. Nöbeling

1. Über die topologische Struktur der Mengen endlicher Ordnung, *J. Reine Angew. Math.* **180** (1934), 129-140.

A. Rosenthal

1. Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, *Math. Ann.* **73** (1915), 480-521.

J. Sauter

1. Zur Theorie der Bogen n-ter Realitätsordnung im R_n, *Math. Z.* **41** (1936), 507-536; **42** (1937), 580-592.

P. Scherk

1. Über differenzierbare Kurven und Bogen, *J. Tschecoslovacque Math. et Phys.* **66** (1936), 165-191.
2. Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung, *Math. Ann.* **112** (1936), 743-766.

Ch. v. Staudt

1. ,,Geometrie der Lage,'' Nürnberg (1847).

H. Whitney

1. On regular closed curves in the plane, *Comp. Math.* **4** (1937), 276-284.