JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **105**, 256–300 (1992)

La convexité de l'application moment d'un groupe de Lie

D. ARNAL ET J. LUDWIG

Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex I, France

Communicated by A. Connes

Received November 1, 1990; revised November 8, 1990

Let π be a unitary representation of a Lie group G. The moment mapping Ψ_π of π assigns to every C^∞ vector ξ in the Hilbert space $\mathscr{H}$ of π the linear functional $\Psi_\pi(\xi)$ of the Lie algebra $\mathbf{g}$ of G by the rule

$$\Psi_\pi(\xi)(X) = \frac{1}{i}\langle d\pi(X)\xi, \xi\rangle_{\mathscr{H}}, \qquad X \in \mathbf{g}.$$

In this paper, we study the moment set I_π of π, i.e., the closure of the image of Ψ_π. It is shown that for solvable G, I_π is always convex and that if furthermore π is irreducible, then I_π is the closure (in $\mathbf{g}^*$) of the convex hull of the Kirillov–Pukanszky orbit of π. If G is compact and if π is irreducible, then we show that I_π is the convex hull of the orbit of the highest weight Λ of π, if and only if the number $\prod_{i=1}^n \langle 2\Lambda - \alpha_i, \alpha_i\rangle$ is different from 0. Here $\alpha_1, ..., \alpha_n$ denote the simple roots of $\mathbf{g}$.

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie réel et $(\pi, \mathscr{H})$ une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Dans [WilA], Wildberger a introduit l'application moment Ψ_π de π. Pour tout élément ξ non nul du sous espace $\mathscr{H}^\infty$ des vecteurs C^∞ de $\mathscr{H}$, l'élément $\Psi_\pi(\xi)$ de l'espace dual $\mathbf{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ de G est définie par:

$$\Psi_\pi(\xi)(X) = \frac{1}{i}\frac{\langle X\cdot\xi, \xi\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle}$$

pour tout X de $\mathbf{g}$. On note ici $X\cdot\xi$ le vecteur $d\pi(X)\cdot\xi$ et $\langle\ \rangle$ le produit scalaire dans $\mathscr{H}$.

0022-1236/92 $3.00

L'ensemble moment I_π de π est par définition l'adhérence dans $\mathbf{g}^*$ de l'image de l'application moment:

$$\Psi_\pi : \mathscr{H}^\infty - \{0\} \to \mathbf{g}^*.$$

Dans [WilB] Wildberger a caractérisé I_π dans le cas où π est une représentation irréductible et G un groupe nilpotent connexe et simplement connexe. Il a démontré (Théorème 4.2 de [WilB]) que I_π est alors la fermeture de l'enveloppe convexe de l'orbite coadjointe Ω_π associée à π par la théorie de Kirillov. On notera ceci:

$$I_\pi = \mathrm{conv}(\Omega_\pi)^-.$$

En particulier, $\mathrm{conv}(A)$ désignera toujours l'enveloppe convexe d'une partie A de $\mathbf{g}^*$. D'autre part, nous dirons qu'une représentation unitaire π de G est convexe si son ensemble moment I_π est convexe.

Dans cet article, nous démontrons que ce résultat se généralise à tous les groupes de Lie résolubles connexes. D'après Pukanszky [PukA], il existe sur l'espace dual $\mathbf{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ d'un tel groupe, une relation d'équivalence R, telle que toute classe d'équivalence Ω soit une partie G-invariante localement fermée de $\mathbf{g}^*$ et telle que toute orbite coadjointe O contenue dans Ω soit dense. Pukanszky a construit une application P de $\hat{G}$ sur $\mathbf{g}^*/R$ qui généralise l'application de Kirillov:

$$K: \hat{G} \to \mathbf{g}^*/Ad^*$$

du cas exponentiel (voir [Ber, VI]).

Nous montrons que pour tout π de $\hat{G}$, on a:

$$I_\pi = \mathrm{conv}(P(\pi))^-.$$

En outre, nous montrons que pour une représentation unitaire quelconque π d'un groupe résoluble,

$$I_\pi \text{ est toujours une partie convexe de } \mathbf{g}^*.$$

L'étape fondamentale de la démonstration de ces résultats est la proposition 6.3, où nous montrons que l'induction unitaire préserve la convexité, c'est à dire que si ρ est une représentation unitaire convexe d'un sous groupe fermé H de G, alors $\mathrm{ind}_H^G \rho$ est elle-même convexe.

En outre nous avons aussi besoin du fait que l'induite holomorphe $\mathrm{ind}(l, \mathbf{h}, G)$ construite à partir d'une polarisation positive $\mathbf{h}$ au point l de $\mathbf{g}^*$ est aussi convexe (Prop. 10).

La deuxième partie de l'article est consacrée à la détermination de I_π pour les représentations irréductibles des groupes de Lie compacts.

Si $\mathbf{t}$ désigne un tore maximal de $\mathbf{g}$ et $\mathscr{C}$ une chambre de Weyl de $\mathbf{t}^*$, π est déterminée de façon unique par un élément Λ de l'adhérence de $\mathscr{C}$. Soit alors Δ l'ensemble des racines de $\mathbf{g}$ et Δ_+ l'ensemble des racines positives par rapport à $\mathscr{C}$. La complexifiée $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ de $\mathbf{g}$ se décompose en somme directe:

$$\mathbf{g}^{\mathbb{C}} = \mathbf{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{g}^{\alpha}.$$

Prolongeons Λ en une forme linéaire $\Lambda^{\mathbb{C}}$ sur $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ en lui imposant de s'annuler sur chaque $\mathbf{g}^{\alpha}$ puis restreignons $\Lambda^{\mathbb{C}}$ à $\mathbf{g}$, nous obtenons un élément Λ de $\mathbf{g}^*$. Soit O son $Ad^*(G)$ orbite dans $\mathbf{g}^*$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_{\text{rang de } \mathbf{g}})$ les racines simples de Δ_+, nous démontrons le théorème suivant:

I_π est convexe si et seulement si Λ n'est pas une racine du polynôme

$$p(\xi) = \prod_i (2\xi - \alpha_i, \alpha_i).$$

Dans ce cas $I_\pi = \operatorname{conv}(Ad^*(G)\Lambda)$.

Ainsi, aux zéros d'un polynôme près, chaque représentation irréductible π d'un groupe de Lie compact est convexe et minimale en ce sens que I_π est un ensemble convexe G-invariant minimal de $\mathbf{g}^*$.

I. Propriétés de l'application moment

1. Soit G un groupe de Lie, $\mathbf{g}$ son algèbre de Lie. Soit $(\pi, \mathscr{H})$ une représentation unitaire dans un espace hilbertien $\mathscr{H}$. Nous désignons par $\mathscr{H}^\infty$ le sous espace de $\mathscr{H}$ constitué des vecteurs C^∞, c'est à dire des vecteurs ξ de $\mathscr{H}$, tels que l'application:

$$G \to \mathscr{H} \qquad g \to \pi(g)\xi$$

soit une application C^∞.

Soit $X_1, ..., X_n$ une base de $\mathbf{g}$. Nous munissons comme dans [Poul] $\mathscr{H}^\infty$ d'une topologie en définissant une famille de semi-normes ρ par:

$$\rho(\xi) = \sum_{1 \leqslant i_k \leqslant n} \|\pi(X_{i_1}) \cdots \pi(X_{i_d})\xi\|$$

pour $d = 0, 1, ...$ $\mathscr{H}^\infty$ est alors un espace de Fréchet. Enfin $\mathscr{H}^\infty$ coïncide avec l'espace de Gårding de π, c'est à dire avec le sous espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par les vecteurs de la forme $\pi(\Phi)\xi$, $\xi \in \mathscr{H}$, $\Phi \in C_c^\infty(G)$ (voir [Dix, Mal]).

Soit X un élément de $\mathbf{g}$ et ξ un élément de $\mathscr{H}^\infty$. Nous définissons:

$$X \cdot \xi = d\pi(X)\xi = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} [\pi(\exp tX)\xi - \xi]\right).$$

L'application:

$$\mathbf{g} \times \mathscr{H}^{\infty} \to \mathscr{H}^{\infty} \qquad X, \xi \to X \cdot \xi$$

est alsors continue et $X \to d\pi(X)$ est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ dans $\mathscr{H}^{\infty}$. En outre $d\pi(X)$ est antisymétrique c'est à dire, si ξ, η appartiennent à $\mathscr{H}^{\infty}$ et X à $\mathbf{g}$, on a:

$$\langle X \cdot \xi, \eta \rangle = -\langle \xi, X \cdot \eta \rangle \tag{1.1}$$

car π est une représentation unitaire.

En particulier:

$$\langle X \cdot \xi, \xi \rangle = -\overline{\langle X \cdot \xi, \xi \rangle} \tag{1.2}$$

est imaginaire pur. Ainsi la fonction définie, pour tout ξ non nul de $\mathscr{H}^{\infty}$, sur $\mathbf{g}$ par:

$$X \to \frac{1}{i} \frac{\langle X \cdot \xi, \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} := \Psi_{\pi}(\xi)(X) \tag{1.3}$$

est réelle et linéaire. Nous obtenons ainsi l'application moment de la représentation π:

$$\Psi_{\pi} : \mathscr{H}^{\infty} - \{0\} \to \mathbf{g}^{*}.$$

Ψ_{π} est une application continue pour la topologie de Fréchet de $\mathscr{H}^{\infty}$ et la topologie ordinaire de $\mathbf{g}^{*}$. Dans le cas où la dimension de $\mathscr{H}$ est finie, Ψ_{π} est l'application moment associée à une action symplectique de G sur l'espace projectif complexe $\mathbf{P}(\mathscr{H})$ muni d'une structure de variété symplectique canonique (voir [Raw, Wil]).

DÉFINITION. L'ensemble moment I_{π} de π est par définition l'adhérence dans $\mathbf{g}^{*}$ de l'image de l'application moment:

$$I_{\pi} = (\operatorname{im} \Psi_{\pi})^{-} \tag{1.4}$$

(Ici A^{-} désigne l'adhérence de $A \subset \mathbf{g}^{*}$).

2. *Remarque.* Comme $\mathscr{H}^{\infty}$ coïcide avec l'espace de Gårding de π, pour connaître I_{π}, il suffit de déterminer l'ensemble:

$$\mathscr{G}_{\pi} = \{ \Psi_{\pi}(\pi(f)\xi), f \in C_c^{\infty}(G), \xi \in \mathscr{H} \}$$

et de former $\mathscr{G}_{\pi}^{-}$. Ici, $C_c^{\infty}(G)$ désigne l'espace des fonctions C^{∞} à support compact sur G et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

3. Soit A un automorphisme du groupe G. Désignons par a sa différentielle c'est à dire l'automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ définie par:

$$\exp(ta(X)) = A(\exp tX), \qquad t \in \mathbb{R},\, X \in \mathbf{g}.$$

Si maintenant $(\pi, \mathscr{H})$ est une représentation de G, alors on notera $(\pi^A, \mathscr{H})$ la représentation de G définie par:

$$\pi^A(g) := \pi(A^{-1}(g)), \qquad \forall g \in G.$$

Posons:

$$a^* := (a^{-1})^t \colon \mathbf{g}^* \to \mathbf{g}^*.$$

Un simple calcul montre alors que:

$$\Psi_{\pi^A} = a^* \circ \Psi_\pi.$$

En particulier:

$$I_{\pi^A} = a^*(I_\pi). \tag{3.1}$$

Pour les automorphismes intérieurs A_g de G:

$$A_g(u) := g \cdot u \cdot g^{-1}, \qquad u \in G,\, g \in G,$$

l'automorphisme de $\mathbf{g}$ correspondant est $Ad(g)$ et nous obtenons pour chaque g de G:

$$\Psi_\pi \circ \pi(g) = \Psi_{\pi^{A_g}} = Ad^*(g) \circ \Psi_\pi. \tag{3.2}$$

Ainsi, pour tout g de G, nous avons:

$$Ad^*(g)\, I_\pi \subset I_\pi. \tag{3.3}$$

(3.4) Définition. Nous dirons qu'une représentation unitaire π de G est *convexe* si I_π est une partie convexe de $\mathbf{g}^*$.

Nous dirons que π est *minimale* si:

$$I_\pi = \operatorname{conv}(G \cdot l)^-,$$

pour un l de $\mathbf{g}^*$, c'est à dire si I_π est la fermeture dans $\mathbf{g}^*$ de l'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(G \cdot l)$ d'une $Ad^*(G)$-orbite $G \cdot l$.

(4.1) *Notation.* Fixons une base $X_1, ..., X_n$ de $\mathbf{g}$. Soient l et p des éléments de $\mathbf{g}^*$ et soit $\varepsilon > 0$. Nous dirons que $l - p$ est un $o(\varepsilon)$ si:

$$|(l-p)(X_j)| < \varepsilon, \qquad \text{pour} \quad j = 1, ..., n.$$

(4.2) PROPOSITION. *Soit* $\{\pi_i\}_{i\in I}$ *une famille de représentations unitaires convexes de G. Soit* ρ *la représentation* $\sum_{i\in I}^{\oplus}\pi_i$, *somme directe des* π_i. *Alors* ρ *est aussi convexe et*:

$$I_\rho = Conv(\{I_{\pi_i}\}_{i\in I})^-.$$

Preuve. La projection orthogonale P_i de $\mathscr{H}_\rho$ sur sa composante $\mathscr{H}_{\pi_i}$ entrelace ρ et π_i, donc:

$$P_i(\mathscr{H}_\rho^\infty) \subset \mathscr{H}_{\pi_i}^\infty.$$

Soit $\xi = (\xi_i)_{i\in I}$ un élément de $\mathscr{H}_\rho^\infty$, tel que $\|\xi\|$ vaille 1. Alors chaque ξ_i appartient à $\mathscr{H}_{\pi_i}^\infty$ et comme, pour tout X de $\mathbf{g}$, $X\xi$ est $(X\xi_i)_{i\in I}$, on a:

$$\|X\xi\|^2 = \sum_{i\in I} \|X\xi_i\|^2 < \infty.$$

Donc, pour chaque ε positif, il existe une partie finie J de I, telle que:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i\notin J} \|X_j\xi_i\|^2 < \left(\sum_{j=1}^{n} \|X_j\xi\|^2\right)^{-1} \varepsilon^2, \qquad \sum_{i\in J} \|\xi_i\|^2 \geqslant 1-\varepsilon.$$

Soit ξ_J le vecteur de $\mathscr{H}_\rho^\infty$ défini par:

$$\xi_J = ((\xi_J)), \qquad (\xi_J)_i = \xi_i, \text{ si } i\in J,\ (\xi_J)_i = 0, \text{ sinon}$$

alors, pour chaque j de $1, ..., n$, on a:

$$\begin{aligned}
&|\Psi_\rho(\xi)(X_j) - \Psi_\rho(\xi_J)(X_j)| \\
&\quad = \left|\sum_{i\in I} \langle X_j\xi_i, \xi_i\rangle - \left(\sum_{i\in J} \langle X_j\xi_i, \xi_i\rangle\right)\left(\sum_{i\in J} \|\xi_i\|^2\right)^{-1}\right| \\
&\quad \leqslant \varepsilon + \|X_j\xi\| \left[1 - \left(\sum_{i\in J} \|\xi_i\|^2\right)^{-1}\right] \\
&\quad \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon\, \|X_j\xi\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour un certain C:

$$\Psi_\rho(\xi) = \Psi_\rho(\xi_J) + o(C\varepsilon).$$

Maintenant, pour établir la convexité de I_ρ, il nous suffit de montrer que pour chaque couple d'éléments ξ et ξ' de norme un de $\mathscr{H}_\rho^\infty$ tels que ξ_i' et ξ_i s'annulent dès que i n'est pas dans J et pour chaque λ de $]0, 1[$, il existe un η de $\mathscr{H}_\rho^\infty$ tel que:

$$\lambda\Psi_\rho(\xi) + (1-\lambda)\, \Psi_\rho(\xi') = \Psi_\rho(\eta) + o(\varepsilon).$$

Or, pour chaque i de J, puisque π_i est convexe, nous pouvons trouver η_i de norme 1 dans $\mathscr{H}_{\pi_i}^{\infty}$, tel que:

$$\frac{\lambda \|\xi_i\|^2}{\lambda \|\xi_i\|^2 + (1-\lambda) \|\xi_i'\|^2} \Psi_{\pi_i}(\xi_i) + \frac{(1-\lambda) \|\xi_i'\|^2}{\lambda \|\xi_i\|^2 + (1-\lambda) \|\xi_i'\|^2} \Psi_{\pi_i}(\xi_i')$$
$$= \Psi_{\pi_i}(\eta_i) + o(\varepsilon).$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} &\lambda \Psi_\rho(\xi) + (1-\lambda) \Psi_\rho(\xi') \\ &\quad = \sum_{i \in J} \lambda \|\xi_i\|^2 \Psi_{\pi_i}(\xi_i) + (1-\lambda) \|\xi_i'\|^2 \Psi_{\pi_i}(\xi_i') \\ &\quad = \sum_{i \in J} (\lambda \|\xi_i\|^2 + (1-\lambda) \|\xi_i'\|^2) \Psi_{\pi_i}(\eta_i) + o(C\varepsilon) \\ &\quad = \Psi_\rho(\eta') + o(C\varepsilon), \end{aligned}$$

où η' est le vecteur de $\mathscr{H}_\rho^\infty$ de composantes:

$$(\lambda \|\xi_i\|^2 + (1-\lambda) \|\xi_i'\|^2)^{1/2} \eta_i, \qquad \text{si} \quad i \in J, 0 \text{ sinon.} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

5. Soit π une représentation unitaire de G. Notons $\ker_{C^*} \pi$ le noyau de π dans la C^*-algèbre $C^*(G)$ de G. Le support de π est la partie de $\hat{G}$: $\{\sigma \in \hat{G}, \ker_{C^*} \pi \subset \ker_{C^*} \sigma\}$, on le notera $\operatorname{supp} \pi$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante dans la partie II:

(5.1.) PROPOSITION. (a) *Soit π une représentation unitaire de G. Si tous les éléments σ de* $\operatorname{supp} \pi$ *sont convexes, alors π est convexe.*

(b) *Soient π et ρ deux représentations unitaires convexes de G.*

$$Si \ker_{C^*} \pi = \ker_{C^*} \rho, \qquad alors \quad I_\pi = I_\rho.$$

Preuve. Pour (b), utilisons [Dix, 3.4.2(i)]. Tout état ϕ de π est limite faible d'états de la forme $\sum_i \phi_i$ où les ϕ_i sont des formes positives associées à ρ.

Soient alors ξ de norme 1 dans $\mathscr{H}_\pi^\infty$, ε positif et f dans $C_c^\infty(G)$. Il existe des vecteurs $\eta_1, ..., \eta_N$ dans $\mathscr{H}_\rho$, tels que:

$$\sum_i \|\eta_i\|^2 = 1$$

et

$$\left| \langle \pi(f^* * X_j * f) \xi, \xi \rangle - \sum_{i=1}^N \langle \rho(f^* * X_j * f) \eta_i, \eta_i \rangle \right| < \varepsilon$$

pour tout $j=1, ..., n$ et:

$$\left| \langle \pi(f^* * f)\xi, \xi \rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle \rho(f^* * f)\eta_i, \eta_i \rangle \right| < \varepsilon.$$

Dans ces formules, nous avons noté $X * g$ (X dans $\mathbf{g}$ et g dans $C_c^\infty(G)$) la fonction définie par:

$$X * g(u) := \frac{d}{dt} g(\exp(-tX)\cdot u)|_{t=0}; \qquad u \in G.$$

Notons maintenant $f \cdot \xi$ le vecteur $\pi(f)\xi$. Nous avons alors:

$$\left| \Psi_\pi(f\cdot\xi)(X_j) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\|f\cdot\eta_i\|^2}{\|f\cdot\xi\|^2} \Psi_\rho(f\cdot\eta_i)(X_j) \right| < \|f\cdot\xi\|^{-2}\,\varepsilon, \quad \text{pour } j=1, ..., n.$$

Comme ρ est convexe, il existe η dans $\mathscr{H}_\rho^\infty$, tel que:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\|f\cdot\eta_i\|^2}{\sum_{j=1}^{N} \|f\cdot\eta_j\|^2} \right) \Psi_\rho(f\cdot\eta_i) = \Psi_\rho(\eta) + o(\varepsilon).$$

Donc:

$$\Psi_\pi(f\cdot\xi) = \delta_\varepsilon \Psi_\rho(\eta) + o((1+\delta)\varepsilon), \qquad \text{où} \quad \delta_\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{N} \|f\cdot\eta_i\|^2}{\|f\cdot\xi\|^2}.$$

Comme δ_ε tend vers 1 quand ε tend vers 0, nous avons montré que:

$$\Psi_\pi(f\cdot\xi) \in I_\rho \qquad \text{et donc que} \quad I_\pi \subset I_\rho.$$

Pour (a), nous remarquons d'abord que nous pouvons supposer que π est cyclique, c'est à dire qu'il existe un vecteur ξ dans $\mathscr{H}_\pi$, tel que $G\cdot\xi$ soit total dans $\mathscr{H}_\pi$.

En effet, π est somme directe de représentations cycliques π_i [Dix, 2.2.7] et comme évidemment, pour chaque i, le support de π_i est contenu dans celui de π, $\operatorname{supp} \pi_i$ ne contient que des représentations convexes. D'autre part, la somme directe de représentations convexes est, nous l'avons vu, convexe (5.1).

Soit donc ξ_0 un vecteur de norme 1, cyclique pour π. Soit ϕ_0 l'état de $C^*(G)$ associé à (π, ξ_0). Utilisons maintenant les notations de [Tak, théorème 6.28 et théorème 8.31]. Il existe sur l'ensemble des états S de $C^*(G)$ une mesure positive concentrée sur l'ensemble P des états purs qui représente ϕ_0 c'est à dire telle que:

$$\phi_0 = \int_P \omega \, d\mu(\omega).$$

La représentation $(\pi, \mathscr{H})$ est alors équivalente à:

$$\int_P^{\oplus} (\pi_\omega, \mathscr{H}_\omega)\, d\mu(\omega),$$

où $(\pi_\omega, \mathscr{H}_\omega)$ est la représentation G.N.S. de $C^*(G)$ associée à l'état ω. En particulier, π_ω est irréductible si ω appartient à P.

L'équivalence unitaire est donnée par la correspondance:

$$X \bmod K_{\phi_0} \to \int_P^{\oplus} X \bmod K_\omega\, d\mu(\omega),$$

où pour ω de S, K_ω désigne l'idéal à gauche de $C^*(G)$ suivant:

$$K_\omega = \{u \in C^*(G), \omega(u^*u) = 0\}.$$

Soit maintenant:

$$M = \operatorname{supp} \mu \cap P.$$

Alors par définition, M^- est égal à $\operatorname{supp} \mu$. Posons:

$$\rho = \sum_{\omega \in M}^{\oplus} \pi_\omega.$$

Alors, si u est un élément de $C^*(G)$,

$$\begin{aligned} u \in \ker_{C^*} \pi &\Leftrightarrow \phi_0(v^*u^*uv) = 0 \qquad \forall v \in C^*(G),\\ &\Leftrightarrow \int_{\operatorname{supp} \pi} \omega(v^*u^*uv)\, d\mu(\omega) = 0 \qquad \forall v,\\ &\Leftrightarrow \omega(v^*u^*uv) = 0 \qquad \forall v, \forall \omega \in \operatorname{supp} \mu\\ &\Leftrightarrow \omega(v^*u^*uv) = 0 \qquad \forall v, \forall \omega \in M\\ &\Leftrightarrow u \in \ker_{C^*} \rho. \end{aligned}$$

Donc $\ker_{C^*} \rho$ et $\ker_{C^*} \pi$ coïncident. D'autre part, chacune des π_ω est dans $\operatorname{supp} \pi$ et donc convexe. ρ est alors convexe d'après (4.2) et d'après la preuve de (b), I_π est inclus dans I_ρ.

Montrons maintenant que I_ρ est inclus dans I_π. Soient ε positif et J une partie finie de M. Si η est un vecteur normé de $\mathscr{H}_\rho$ dont les seules composantes non nulles sont η_ω, ω dans J, alors:

$$\Psi_\rho(\eta) = \sum_{\omega \in J} \|\eta_\omega\|^2\, \Psi_{\pi_\omega}(\eta_\omega).$$

Comme les ω de J sont dans P, π_ω est algébriquement irréductible et il existe u_ω dans $C^*(G)$, tel que:

$$\eta_\omega = u_\omega \qquad \text{mod } K_\omega \quad [\text{Dix, 2.8.4}].$$

Soit maintenant f une fonction de $C_c^\infty(G)$ telle que $\|f \cdot \eta\|$ vale 1. Comme S est un espace séparé, nous pouvons trouver des voisinages V_ω des ω de J tels que:

$$V_\omega \cap V_{\omega'} = \varnothing, \qquad \text{si} \quad \omega \neq \omega'.$$

Pour chaque ω de J, on choisit une fonction réelle non négative h_ω, continue sur S, dont le support est inclus dans V_ω. Alors, puisque J est inclus dans supp μ,

$$\int_S h_\omega^2(\omega')\, d\mu(\omega') > 0, \qquad \forall \omega \in J$$

et ainsi, quitte à multiplier h_ω par un facteur positif, nous supposons que:

$$\int_S h_\omega^2(\omega')\, d\mu(\omega') = 1, \qquad \forall \omega \in J.$$

Considérons alors les vecteurs de $\mathscr{H}_\pi$:

$$\xi_h = \sum_{\omega \in J} \int_S^\oplus (h_\omega(\omega') \cdot (u_\omega \quad \text{mod } K_{\omega'}))\, d\mu(\omega').$$

Comme les h_ω ont des supports disjoints, on a, pour chaque X de $\mathbf{g}$:

$$\langle Xf \cdot \xi_h, f \cdot \xi_h \rangle = \sum_{\omega \in J} \int_S h_\omega^2(\omega')\, \omega'(u_\omega^* f^* \cdot X * f \cdot u_\omega)\, d\mu(\omega').$$

Maintenant, faisons tendre les V_ω vers $\{\omega\}$. On obtient:

$$\lim_{h_\omega^2 \to \delta_\omega} (Xf \cdot \xi_h, f \cdot \xi_h)$$

$$= \sum_{\omega \in J} \omega(u_\omega^* \cdot f^* * X * f \cdot u_\omega) = \Psi_\rho(f \cdot \eta)(X)$$

et:

$$\lim_{h_\omega^2 \to \delta_\omega} (f \cdot \xi_h, f \cdot \xi_h) = \sum_{\omega \in J} \|f \cdot \eta_\omega\|^2 = \|f \cdot \eta\|^2 = 1.$$

Ces deux égalités montrent que $\Psi_\rho(f \cdot \eta)$ est dans I_π et d'après la remarque (2) que I_ρ est inclus dans I_π. C.Q.F.D.

(5.2) COROLLAIRE. *Toute représentation unitaire d'un groupe de Lie abélien connexe G est convexe.*

Preuve. En effet, si π est une représentation irréducible, π est de dimension 1, d'après le lemme de Schur. En particulier, $d\pi = -il$, pour un certain l de $\mathbf{g}^*$. Il suffit alors d'appliquer (5.1).

II. LES GROUPES RÉSOLUBLES

(6.1) Nous allons montrer dans ce chapitre que l'application moment Ψ_π pour une représentation π d'un groupe de Lie résoluble est toujours convexe et même convexe et minimale si π est irréductible. Nous démontrons d'abord qu'une représentation induite unitaire est presque toujours convexe (voir (6.2)). Puis nous prouvons que l'induite holomorphe d'un caractère d'une polarisation complexe est aussi convexe. Il suffit alors d'appliquer les résultats de Pukanszky sur les idéaux primitifs de $C^*(G)$ (voir [PukB]) qui décrivent ces idéaux comme des noyaux de certaines induites holomorphes pour terminer le cas résoluble en appliquant la proposition (5.1(b)).

(6.2) Nous rappelons ici brièvement la construction de la représentation induite unitaire π, notée $\operatorname{ind}_H^G \rho$, d'une représentation unitaire ρ d'un sous groupe fermé H du groupe de Lie G à G.

Sur l'espace quotient G/H des classes à gauche modulo H, il existe une mesure de Borel quasi-invariante μ. Plus précisèment, on peut trouver une fonction q, C^∞ et strictement positive sur G, telle que:

$$q(xh) = q(x)\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \qquad \text{pour} \quad x \in G, h \in H,$$

où Δ_H (resp. Δ_G) désigne la fonction module de H (resp. de G) et une mesure de Borel μ telles que pour toute fonction f de $C_c^\infty(G/H)$,

$$\text{(6.2.1)} \qquad \int_{G/H} \frac{q(x^{-1}y)}{q(y)} f(x^{-1}yH)\, d\mu(yH) = \int_{G/H} f(yH)\, d\mu(yH)$$

(voir [War, A.1.1]). Notons $L^2(G/H)$ l'espace $L^2(G/H, \mu)$. Cet espace porte la représentation quasi-régulière gauche L de G, définie par:

$$\text{(6.2.2)} \qquad L(g)\,\xi(x) = \lambda(g, x)\cdot \xi(g^{-1}x) \quad \text{pour} \quad g \in G, x \in G/H, \xi \in L^2(G/H),$$

où:

$$\lambda(g, y) = \left(\frac{q(g^{-1}y)}{q(y)}\right)^{1/2} \qquad \forall x, y \in G$$

est une fonction C^∞ sur $G \times G$, constante sur les classes à gauche modulo H, pour sa deuxième variable et on notera toujours λ la fonction sur $G \times G/H$ qui s'en déduit par passage au quotient.

L est une représentation unitaire de G; en particulier, nous obtenons pour une fonction *réelle* f de $(L^2(G/H))^\infty$, et pour tout X de $\mathbf{g}$, la relation suivante:

$$\langle dL(X) f, f \rangle = 0. \tag{6.2.3}$$

En effet $\langle dL(X) f, f \rangle$ est réel, puisque f et λ le sont et donc:

$$\langle dL(X) f, f \rangle = -\overline{\langle dL(X) f, f \rangle} = -\langle dL(X) f, f \rangle.$$

Nous pouvons maintenant décrire la représentation induite π. Soit $\mathscr{H}_\rho$, l'espace de ρ. Appelons $\mathscr{H}'_\rho$ l'espace des fonctions ξ continues de G dans $\mathscr{H}_\rho$ et telles que:

$$\xi(xh) = \rho(h)^* \, \xi(x), \quad \forall x \in G, \forall h \in H$$

et

$$\|\xi\|^2 := \int_{G/H} \|\xi(xH)\|^2 \, d\mu(xH) < \infty$$

(comme plus haut, $\|\xi(\cdot)\|$ est une fonction continue sur G qui passe au quotient sur G/H, sans changer de notation). Le groupe G agit sur $\mathscr{H}'$ par translation à gauche:

$$(\pi(g)\xi)(x) := \lambda(g, x) \, \xi(g^{-1}x), \qquad g \in G, x \in G, \xi \in \mathscr{H}'. \tag{6.2.4}$$

L'opérateur $\pi(g)$ de $\mathscr{H}'$ est manifestement isométrique d'après la définition de λ (voir (6.2.2)). Nous pouvons alors définir son extension $\pi(g)$ sur le complété $\mathscr{H}_\pi$ de $\mathscr{H}'$ et nous obtenons ainsi la représentation:

$$\pi = \operatorname{ind}_H^G \rho \qquad \text{de } G \text{ sur } \mathscr{H}_\pi = (\mathscr{H}')^{\| \, \|}.$$

Nous aurons besoin du résultat suivant de Poulsen (voir [Poul, Théorème 5.1]):

(6.2.5) un vecteur C^∞ de π est une application C^∞ de G dans $\mathscr{H}_\rho$.

(6.3) Soit maintenant $\mathbf{h} \subset \mathbf{g}$, l'algèbre de Lie de H et p une forme linéaire sur $\mathbf{h}$, nous désignons par $p + \mathbf{h}^\perp$ l'ensemble des extensions à $\mathbf{g}$ de p, c'est à dire:

$$p + \mathbf{h}^\perp := \{ l \in \mathbf{g}, \, l|_{\mathbf{h}} = p \}.$$

PROPOSITION. *Soit G un groupe de Lie, H un sous groupe fermé de G et* $\mathbf{g}$ *et* $\mathbf{h}$ *leurs algèbres de Lie. Soit ρ une représentation unitaire de H.*

(a) *Si ρ est convexe ou si $\mathbf{h} \neq \mathbf{g}$, alors $\pi = \mathrm{ind}_H^G \rho$ est convexe et*:

$$I_\pi = conv(Ad^*(G)(I_\rho + \mathbf{h}^\perp)).$$

(b) *Si ρ est convexe minimale, c'est à dire, si, pour un p de $\mathbf{h}^*$, on a*:

$$I_\rho = conv(Ad^*(H)\,p)^-,$$

et si en outre $p + \mathbf{h}^\perp$ est contenu dans une Ad^* orbite de G, alors π est aussi convexe minimale et:

$$I_\pi = conv(Ad^*(G)l)^-, \qquad pour\ tout \quad l \in p + \mathbf{h}^\perp.$$

Preuve. Pour (a), nous subdivisons la démonstration en plusieurs parties.

(6.4) Pour tout p de I_ρ, $p + \mathbf{h}^\perp$ est contenu dans I_π.

En effet, considérons un sous-expace $\mathbf{v}$ supplémentaire de $\mathbf{h}$ dans $\mathbf{g}$ (c'est à dire $\mathbf{v} \oplus \mathbf{h} = \mathbf{g}$), un voisinage ouvert $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{U}$) de 0 dans $\mathbf{v}$ (resp. dans $\mathbf{h}$), tels que l'application:

$$\mathscr{V} \times \mathscr{U} \to \exp \mathscr{V} \cdot \exp \mathscr{U} : (v, u) \to \exp v \cdot \exp u$$

soit un difféomorphisme de $\mathscr{V} \times \mathscr{U}$ sur l'ouvert $\exp \mathscr{V} \cdot \exp \mathscr{U}$ de G.

Soit maintenant ε positif et η un vecteur de norme 1 de $\mathscr{H}_\rho^\infty$, tel que:

$$\Psi_\rho(\eta) = p + o(\varepsilon).$$

Nous allons construire une suite (ξ_n) d'éléments de $\mathscr{H}_\pi^\infty$, telle que $\lim_{n\to\infty} \Psi_\pi(\xi_n)$ soit un élément de $p + \mathbf{h}^\perp + o(\varepsilon)$.

Soit V l'ouvert $\exp \mathscr{V} \bmod H$ de G/H. Nous considérons une suite (f_n) de fonctions réelles dans $C_c^\infty(G/H)$ telle que:

$$\operatorname{supp} f_n \subset V, \int_{G/H} |f_n(x)|\, d\mu(x) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \operatorname{supp} f_n = \{e\}.$$

Soit g un élément de G. Posons:

$$\begin{aligned} \xi_n(g) &= \rho(\exp u)^*\,(f_n(\exp v)\eta), \\ &\qquad \text{si} \quad g = \exp v \cdot \exp u \text{ avec } v \in \mathscr{V},\, u \in \mathscr{U} \\ \xi_n(g) &= 0 \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que nous obtenons ainsi un vecteur C^∞ de $\mathscr{H}_\pi$ et que:

$$\|\xi_n\|^2 = \int_{G/H} |f_n(x)|^2\, d\mu(x) = 1.$$

Montrons que:

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_\pi(\xi_n)(X) = p(X) + o(\varepsilon), \qquad \text{si} \quad X \in \mathbf{h}, 0 \text{ si } X \in \mathscr{V}.$$

Pour cela, nous écrivons, pour X dans $\mathbf{g}$, t dans $\mathbb{R}$ et v dans $\mathscr{V}$:

$$\exp(-tX)\cdot\exp v = \exp \mathbf{v}(t, v)\cdot\exp(-\mathbf{u}(t, v)),$$
$$\text{où} \quad \mathbf{v}(t, v) \in \mathscr{V}, \mathbf{u}(t, v) \in \mathscr{U},$$

si t est assez petit. D'après la formule de Baker–Campbell–Hausdorff, les fonctions $(t, v) \to \mathbf{v}(t, v)$ et $(t, v) \to \mathbf{u}(t, v)$ sont analytiques et, pour t et v petits, on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, v) = {} & -tX + o(v)(t + o(t^2)), \qquad \text{si } X \in \mathscr{V}, \\ & o(v)(t + o(t^2)), \qquad \text{si } X \in \mathscr{U}, \\ \mathbf{u}(t, v) = {} & o(v)(1 + o(t^2)), \qquad \text{si } X \in \mathscr{V} \\ & tX + o(v)(1 + o(t^2)), \qquad \text{si } X \in \mathscr{U}. \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} & (\pi(\exp tX)\, \xi_n)(\exp v) \\ & \quad = \lambda(\exp tX, \exp v)\, \xi_n(\exp(-tX)\cdot\exp v) \\ & \quad = \lambda(\exp tX, \exp v)\, \rho(\exp \mathbf{u}(t, v))(f_n(\exp \mathbf{v}(t, v))\cdot\eta). \end{aligned}$$

Définissons la mesure dv sur $\mathscr{V}$ par $dv = d(\mu\circ\exp)$. Alors, pour X dans $\mathbf{g}$ et n dans $\mathbb{N}$, $\Psi_\pi(\xi_n)(X)$ est la dérivée par rapport à t en 0 de:

$$\frac{1}{i}\int_{\mathscr{V}} \lambda(\exp tX, \exp v)\langle \rho(\exp \mathbf{u}(t, v))\eta, \eta\rangle\, f_n(\exp \mathbf{v}(t, v))\, \overline{f_n(\exp v)}\, dv(v).$$

Donc:

$$\begin{aligned} i\Psi_\pi(\xi_n)(X) = {} & \int_{\mathscr{V}} (dL(X)\, f_n(\exp v))\, \overline{f_n(\exp v)}\, dv(v) \\ & + \int_{\mathscr{V}} f_n(\exp v)^2 \left\langle \frac{d}{dt}\left[\rho(\exp \mathbf{u}(t, v)\eta]\right|_{t=0}, \eta \right\rangle dv(v). \end{aligned}$$

D'après (6.2.3), le premier terme de cette somme est 0. D'après (6.3.1), si nous notons ϕ la fonction C^∞:

(6.4.1) $$\phi\colon \mathbf{h} \to \mathbb{C}, \qquad u \to \langle \rho(\exp u)\eta, \eta\rangle,$$

nous obtenons:

$$(6.4.2) \qquad \lim_{n\to\infty} i\Psi_\pi(\xi_n)(X)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathscr{V}} f_n^2(\exp v)\,\frac{d}{dt}\,\phi(\mathbf{u}(t,v))\bigg|_{t=0} dv(v)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\,\phi(\mathbf{u}(t,0))\bigg|_{t=0}.$$

Ceci s'annule si X est dans $\mathscr{V}$ et si X est dans $\mathbf{h}$, ceci vaut:

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_\pi(\xi_n)(X) = \langle d\rho(X)\eta, \eta\rangle = \Psi_\rho(\eta)(X) = p(X) + o(\varepsilon)(X).$$

Donc l'élément l' de $\mathbf{g}^*$:

$$l'|_{\mathbf{h}} = p, \qquad l'|_{\mathbf{v}} = 0$$

appartient à I_π.

Pour montrer que $l' + \mathbf{h}^\perp$ est contenu dans I_π, prenons un élément quelconque q de $\mathbf{h}^\perp \subset \mathbf{g}^*$ et définissons $\xi_{n,q}$ dans $\mathscr{H}_\pi^\infty$ en lui imposant de vérifier:

$$\xi_{n,q}(\exp v) = e^{-iq(v)}\xi_n(\exp v),$$

$$\text{si } v \in \mathscr{V} \qquad \xi_{n,q}(g) = 0, \text{ si } g \notin \exp \mathscr{V}\cdot H.$$

Alors, d'après (6.4.2), pour X dans $\mathbf{g}$, on a:

$$\Psi_\pi(\xi_{n,q})(X) = \frac{1}{i}\left[\int_{\mathscr{V}} \frac{d}{dt}\,(e^{-iq(\mathbf{v}(t,v))})\bigg|_{t=0} f_n^2(\exp v)\,dv(v) + l'(X) + o(\varepsilon)(X)\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{d}{dt}\,(e^{-iq(\mathbf{v}(t,v))})\bigg|_{t=0} + l'(X) + o(\varepsilon)(X)\right]$$

$$= q(X) + l'(X) + o(\varepsilon)(X) \qquad \text{si} \quad X \in \mathscr{V} \text{ d'après (6.3.1)},$$

$$= l'(X) + o(\varepsilon)(X) \qquad \text{si} \quad X \in \mathbf{h}.$$

Donc $p + \mathbf{h}^\perp$ est inclus dans I_π. C.Q.F.D.

$$(6.5) \qquad conv(Ad^*(G)(I_\rho + \mathbf{h}^\perp))^- \subset I_\pi.$$

En effet soit l un élément de $conv(Ad^*(G)(I_\rho + \mathbf{h}^\perp))^-$ et ε positif. Il existe $u_1, ..., u_N$ dans G, $\lambda_1, ..., \lambda_N$ dans $]0, 1[$ et $l_1, ..., l_N$ dans $I_\rho + \mathbf{h}^\perp$, tels que:

$$l = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, Ad^*(u_i)\, l_i + o(\varepsilon), \qquad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Supposons maintenant que I_ρ est convexe. Si, pour deux indices distincts i et j, on a:

$$u_i H = u_j H, \qquad \text{c.a.d.} \qquad u_i = u_j h, \text{ pour un certain } h \text{ de } H,$$

alors:

$$Ad^*(u_i)\, l_i = Ad^*(u_j)(Ad^*(h)\, l_i).$$

Or $I_\rho + \mathbf{h}^\perp$ est convexe et $Ad^*(h)\, l_i$ appartient à cet ensemble. Nous pouvons donc écrire:

$$\lambda_i\, Ad^*(u_i)\, l_i + \lambda_j\, Ad^*(u_j)\, l_j = (\lambda_i + \lambda_j)\, Ad^*(u_j)\, l'_j,$$

pour un autre élément l'_j de $I_\rho + \mathbf{h}^\perp$. Nous pouvons supposer que pour tout i et j distincts:

$$u_i H \neq u_j H.$$

Si $\mathbf{h} \neq \mathbf{g}$, nous choisissons un X n'appartenant pas à $\mathbf{h}$ tel que l'application:

$$]-1, 1[\to G/H, \qquad t \to \exp tX \cdot H$$

soit injective. Il existe alors α positif tel que:

$$\begin{aligned} &Ad^*(u_j \cdot \exp tX) \cdot l_j - Ad^* u_j l_j \\ &\quad = o\left(\frac{\varepsilon}{N}\right), \qquad \forall j = 1, ..., N, \text{ si } |t| < \alpha. \end{aligned}$$

Nous définissons alors par induction $t_1, ..., t_N$ tels que:

$$t_1 = 0, \qquad |t_j| < \alpha$$

et

$$\exp t_j X \cdot H \notin \{u_j^{-1} \cdot u_1 \cdot H, ..., u_j^{-1} \cdot u_{j-1} \cdot \exp t_{j-1} X \cdot H\}$$

alors, quitte à remplacer ε par 2ε, nous pouvons remplacer chaque u_j par $u'_j = u_j \cdot \exp t_j X$ et supposer, dans ce cas aussi, que pour tout i et j distincts:

$$u_i H \neq u_j H.$$

D'après (6.4), pour ε' positif et pour chaque j, il existe ${}_j\xi$ dans $\mathscr{H}_\pi^\infty$, de norme 1 et tel que:

$$l_j = \Psi_\pi({}_j\xi) + o(\varepsilon')$$

et tel que le support de la fonction ${}_j\xi$ soit suffisament petit modulo H pour que celui de $\pi(u_j)\ {}_j\xi$ soit disjoint des supports de $\pi(u_i)\ {}_i\xi$ modulo H, pour tout $i<j$. Alors:

$$Ad^*(u_j)\, l_j = \Psi_\pi(\pi(u_j)\ {}_j\xi) + Ad^*(u_j)(o(\varepsilon')), \qquad \forall j=1, ..., N,$$

et, si nous posons:

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{1/2} \pi(u_j)\ {}_j\xi,$$

$\|\xi\|$ vaut 1 et:

$$l = \Psi_\pi(\xi) + \sum_{j=1}^{N} (Ad^*(u_j)\, o(\varepsilon')) + o(\varepsilon).$$

En faisant tendre ε' puis ε vers 0, nous montrons que l appartient à I_π.

C.Q.F.D.

(6.6) $$I_\pi \subset conv\, Ad^*(G)(I_\rho + \mathbf{h}^\perp)^-.$$

En effet, soit ξ un vecteur de norme 1 de $\mathscr{H}_\pi^\infty$. D'après (6.2.5), chaque élément u de G définit une forme linéaire l_u sur $\mathbf{g}$, par:

$$l_u(X) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\langle (d\pi(X)\xi)(u), \xi(u)\rangle_{\mathscr{H}_\rho}\right), \qquad \forall X \in \mathbf{g}.$$

(Ici, $\mathrm{Re}\, z$ désigne la partie réelle du nombre complexe z). Or, si X est de la forme $Ad(u)\, Y$ avec Y dans $\mathbf{h}$, nous avons:

$$\begin{aligned}
l_u(X) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\left\langle \frac{d}{dt}(\lambda(\exp tX, u)\, \xi(\exp(-tX)\cdot u))\Big|_{t=0}, \xi(u)\right\rangle_{\mathscr{H}_\rho}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\left\langle \frac{d}{dt}(\lambda(\exp tX, u)\, \rho(\exp tY)\, \xi(u))\Big|_{t=0}, \xi(u)\right\rangle_{\mathscr{H}_\rho}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\lambda(\exp tX, u)\Big|_{t=0} \langle \xi(u), \xi(u)\rangle_{\mathscr{H}_\rho}\right)\\
&\quad + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\langle d\rho(Y)\, \xi(u), \xi(u)\rangle_{\mathscr{H}_\rho}\right)\\
&= \|\xi(u)\|^2\, \Psi_\rho(\xi(u))(Y)\\
&= \|\xi(u)\|^2\, (Ad^*(u)^{-1}\, \Psi_\rho(\xi(u))(X).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\xi(u)\|^{-2}\, l_u$ appartient à $Ad^*(G)(I_\rho + \mathbf{h}^\perp)$, dès que $\xi(u)$ est non nul.

D'autre part, nous pouvons écrire, pour chaque X de $\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned}\Psi_\pi(\xi)(X) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\langle d\pi(X)\xi, \xi\rangle\right) \\ &= \int_{G/H} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\langle (d\pi(X)\xi)(u), \xi(u)\rangle_{\mathscr{H}_\rho}\right) d\mu(uH) \\ &= \int_{\xi \neq 0} \|\xi(u)\|^2 \left(\|\xi(u)\|^{-2}\, l_u(X)\right) d\mu(uH).\end{aligned}$$

Approchons maintenant cette intégrale par des sommes de Riemann, c'est à dire, puisque:

$$\int_{\xi \neq 0} \|\xi(u)\|^2\, d\mu(uH) = 1,$$

pour chaque ε positif, il existe $u_1, ..., u_M$ dans G et $\lambda_1, ..., \lambda_M$ dans $]0, 1[$, tels que:

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_\pi(\xi) &= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \|\xi(u)\|^{-2}\, l_{u_i} \\ &\quad + o(\varepsilon) \in conv(Ad^*(G)(I_\rho + \mathbf{h}^\perp)) + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre ε vers 0, nous voyons que:

$$\Psi_\pi(\xi) \in conv(Ad^*(G)(I_\rho + \mathbf{h}^\perp))^-.$$

Ceci démontre (6.6) et achève la partie (a) de (6.3). C.Q.F.D.

(b) Si ρ est convexe minimale, c'est à dire s'il existe p dans $\mathbf{h}^*$ tel que:

$$I_\rho = conv(Ad^*(H)\,p)^-$$

et s'il existe l dans $\mathbf{g}^*$ tel que:

$$p + \mathbf{h}^\perp \subset Ad^*(G)l,$$

nous pouvons supposer, quitte à remplacer l par $Ad^*(g_0)l$, pour un g_0 bien choisi dans G, que p est la restriction de l à $\mathbf{h}$. Alors:

$$(Ad^*(H)\,p)^- + \mathbf{h}^\perp = (Ad^*(H)(l + \mathbf{h}))^- \subset Ad^*(G)l.$$

Donc, d'après la partie (a), nous avons:

$$I_\pi = conv(I_\rho + \mathbf{h}^\perp)^- = conv((Ad^*(H)\,p)^- + \mathbf{h}^\perp) \subset conv(Ad^*(G)l)^-.$$

Comme d'autre part, l appartient à $p + \mathbf{h}^\perp \subset I_\pi$ (voir (6.4)), nous obtenons finalement:

$$I_\pi = conv(Ad^*(G)l)^-. \qquad \text{C.G.F.D.}$$

7. COROLLAIRE. *Soit H un sous groupe fermé d'un groupe de Lie G. Soit χ: $H \to \mathbb{C}$ un caractère unitaire de H. Alors*:

$$\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi$$

est convexe.

En particulier, la représentation quasi régulière L de G sur $L^2(G/H)$ est convexe.

8. COROLLAIRE. *Soit G un groupe exponentiel, c'est à dire un groupe de Lie pour lequel l'application exponentielle est un difféomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ de G sur G. Alors toute représentation unitaire irréductible π de G est convexe minimale.*

Preuve. Soit π une représentation unitaire irréductible de G. D'après la théorie de Kirillov (voir [Ber, chapitre VI]), il existe un sous groupe fermé connexe H d'algèbre de Lie $\mathbf{h}$, une forme linéaire l dans $\mathbf{g}^*$, tels que la restriction $il|_\mathbf{h}$ de il à $\mathbf{h}$ soit un caractère de $\mathbf{h}$ et que:

$$\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_l,$$

où χ_l est (l'unique) caractère de H dont la différentielle est $-il|_\mathbf{h}$. Alors:

$$I_\pi = conv(Ad^*(G)l)^-. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

9. *Les représentations induites holomorphes*

Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe, $\mathbf{g}$ son algèbre de Lie, $\mathbf{n}$ un idéal nilpotent de $\mathbf{g}$, tel que:

$$[\mathbf{g}, \mathbf{g}] \subset \mathbf{n} \subset \mathbf{g}.$$

Soit l un point de $\mathbf{g}^*$. On note $G(l)$ le stabilisateur de l dans G et $\mathbf{g}(l)$ son algèbre de Lie.

D'après [Ber, IV.4.2.12], il existe une polarisation $\mathbf{h}$ positive au point l, stable par $G(l)$, telle que $\mathbf{h} \cap \mathbf{n}^\mathbb{C}$ soit un polarisation de la restriction l' de l à $\mathbf{n}$, stable par le stabilisateur $G(l')$ de l' dans G et vérifiant la condition de Pukanszky. En fait, on peut obtenir une telle polarisation par le procédé de M. Vergne [Ber, 4.2.9].

Nous supposerons ici, et nous n'aurons besoin que de ce cas particulier, que $G(l)$ est connexe c'est à dire que:

$$G(l) = \exp \mathbf{g}(l).$$

Nous supposerons aussi que:

$$(9.1) \qquad l' \neq 0.$$

En effet, si l' est nul, l est nul sur $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$, et $\mathbf{g}$ elle-même est une polarisation $\mathbf{h}$ en l, la construction suivante est triviale.

Soit maintenant, comme dans [Ber, IV, 2.1.1–2.1.7]:

$$\mathbf{e}^{\mathbb{C}} = \mathbf{h} + \bar{\mathbf{h}}, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{\mathbb{C}} \cap \mathbf{g},$$
$$\mathbf{d}^{\mathbb{C}} = \mathbf{h} \cap \bar{\mathbf{h}}, \qquad \mathbf{d} = \mathbf{d}^{\mathbb{C}} \cap \mathbf{g}.$$

Soit H_l la forme sesquilinéaire positive sur $\mathbf{e}^{\mathbb{C}}$ définie par:

$$H_l = 2i\langle l_{\mathbb{C}}, [X, \bar{Y}]\rangle,$$

où $\bar{Y}$ désigne le conjugué complexe du vecteur Y de $\mathbf{g}$ et où $l_{\mathbb{C}}$ est l'élément de $(\mathbf{g}^*)^{\mathbb{C}}$, extension canonique de l à $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$.

Comme:

$$\mathbf{d}^{\mathbb{C}} = \{X \in \mathbf{h}, H_l(X, X) = 0\},$$

nous pouvons regarder H_l comme une forme définie positive sur $\mathbf{e}^{\mathbb{C}}/\mathbf{d}^{\mathbb{C}}$.

Posons:

$$(9.2) \qquad D = \exp \mathbf{d}; \qquad E = \exp \mathbf{e}.$$

Puisque $\mathbf{g}(l)$ est contenu dans $\mathbf{h}$, $G(l)$ est contenu dans D et bien sûr D dans E.

D et E sont donc des sous-groupes fermés (simplement connexes) de G.

L'espace E/D possède une mesure E-invariante μ (voir [Ber, V, 4.3.3]). Soit $\mathscr{H}^{hol}$ $(l, \mathbf{h}, E)$, l'ensemble des fonctions $f\, C^\infty$ sur E qui vérifient:

(i) $f(x \cdot d) = \chi_l(d)^{-1} \cdot f(x)$; $\forall x \in E, d \in D$

(ii) $|f|^2 = \int_{E/D} |f(xD)|^2 \, d\mu(xD) < \infty$

(iii) $\rho(Y) f = -i\langle l, Y\rangle f$; $\forall Y \in \mathbf{h}$,

où χ_l est l'unique caractère unitaire de D vérifiant:

$$d_{\chi_l} = -il|_{\mathbf{d}}$$

et, où nous notons $\rho(X)f$ la fonction:

$$\rho(X)\,f(u)=\frac{d}{dt}f(u\cdot\exp tX)\bigg|_{t=0},$$

si X appartient à $\mathbf{e}$ et:

$$\rho(Y)f=\rho(X_1)f+i\rho(X_2)f,$$

si Y appartient à $\mathbf{h}$ et s'écrit X_1+iX_2 avec X_1 et X_2 dans $\mathbf{e}$.

$\mathscr{H}^{hol}$ $(=\mathscr{H}^{hol}(l,\mathbf{h},E))$ est alors un espace de Hilbert et la représentation induite holomorphe π de E sur cet espace est la régulière gauche:

$$\pi(g)\,f(x)=f(g^{-1}x),\qquad \forall x\in E$$

(voir [Ber, V.4.3]).

10. Proposition. *La représentation π de E sur $\mathscr{H}^{hol}$ est convexe minimale*:

$$I_\pi=conv(Ad^*(E)(l|_{\mathbf{e}}))^-.$$

Preuve. Soit $\mathbf{e}_0$ un idéal de $\mathbf{e}$, contenu dans le noyau de l. Alors:

$$\mathbf{e}_0\subset\mathbf{d}$$

et π est manifestement triviale sur $\exp\mathbf{e}_0$. Donc:

$$\Psi_\pi(f)(X)=0\qquad\text{pour tout}\quad X\in\mathbf{e}_0$$

et

$$l'(X)=0\qquad\text{pour tout}\quad l'\in\Omega=Ad^*(E)(l|_{\mathbf{e}}).$$

(10.1) Quitte à passer au quotient par $\exp\mathbf{e}_0$, nous pouvons donc supposer que le seul idéal de $\mathbf{e}$ annulé par l est l'idéal $\{0\}$.

Il nous faut maintenant étudier en détail la structure de $\mathbf{e}$.

Soit:

$$\mathbf{d}_1=\mathbf{d}\cap\mathbf{n},\qquad \mathbf{e}_1=\mathbf{e}\cap\mathbf{n}.$$

Alors, d'après la démonstration de [Ber, IV.5.1] les sous-espaces $\mathbf{d}_1$ et $\ker l'\cap\mathbf{d}_1$ sont des idéaux de $\mathbf{e}$; en outre $\ker l'\cap\mathbf{d}_1$ est annulé par l; il est donc nul et puisque l' n'est pas 0, alors:

(10.2) $\qquad$ $\mathbf{e}_1$ est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathbf{d}_1$.

Soit:

$$\mathbf{w}=\ker l\cap\mathbf{e}_1.$$

Alors:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{w} \oplus \mathbf{d}_1.$$

Comme $\mathbf{h}$ a été obtenu par le procédé de M. Vergne, nous avons (voir [Ber, IV.4.2.11]):

$$\mathbf{h} = \mathbf{h} \cap \mathbf{n}^{\mathbb{C}} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{g}_i^{\mathbb{C}}(l_i^{\mathbb{C}})$$

où $\mathbf{n}^{\mathbb{C}} = \mathbf{g}_N^{\mathbb{C}} \subset \cdots \subset \mathbf{g}_2^{\mathbb{C}} \subset \mathbf{g}_1^{\mathbb{C}} = \mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ est une suite d'idéaux de $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$, tels que:

$$\dim(\mathbf{g}_i^{\mathbb{C}}/\mathbf{g}_{i+1}^{\mathbb{C}}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{g}_i^{\mathbb{C}} = \bar{\mathbf{g}}_i^{\mathbb{C}}$$

pour $i = 1, ..., N-1$. Alors:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{g}_i^{\mathbb{C}}(l_i^{\mathbb{C}}) \subset \mathbf{d}^{\mathbb{C}}$$

(voir [Ber, IV.4.2.10]). Il existe donc un sous-espace $\mathbf{v}$ de $\mathbf{d}$, tel que:

$$\mathbf{v} \subset \mathbf{g}(l_1) = \{U \in \mathbf{g},\ \langle l, [U, \mathbf{n}] \rangle = 0\}$$

et:

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{e}_1 = \mathbf{e} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v} \oplus \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}.$$

D'autre part:

$$(10.3) \qquad [\mathbf{d}, \mathbf{d}] \subset \mathbf{d} \cap [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \cap [\mathbf{h}, \mathbf{h}] \subset \mathbf{d} \cap \mathbf{n} \cap \ker l = \{0\}.$$

Soit maintenant $\mathbf{a}$ la projection de $\mathbf{v}$ sur $\ker l$, parallèlement à $\mathbf{d}_1$.

(10.4) LEMME.

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{d} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{d}_1,$$
$$[\mathbf{a}, \mathbf{w}] \subset \mathbf{w}, \qquad [\mathbf{a}, \mathbf{d}_1] = \{0\}$$

et $ad\,\mathbf{a}|_{\mathbf{w}^{\mathbb{C}}}$ est une algèbre commutative d'endomorphismes anti-symétriques de $\mathbf{w}^{\mathbb{C}}$ muni de la forme hermitienne H_l.

Preuve. Nous savons déjà que:

$$\dim(\mathbf{a}) = \dim(\mathbf{v}) - \dim(\mathbf{d}_1 \cap \mathbf{v}) = \dim(\mathbf{v})$$

et que:

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{e}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{d} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{d}_1$$

car $\mathbf{d}_1$ étant inclus dans $\mathbf{e}_1$ et $\ker l \cap \mathbf{d}_1$ est nul. Donc:

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{d} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{d}_1.$$

Nous savons aussi que:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{d}_1] = [\mathbf{d}, \mathbf{d}] = \{0\}.$$

Comme $\mathbf{a}$ est inclus dans $\mathbf{d}$, nous avons:

$$\langle l, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1] \rangle \subset \langle l, [\mathbf{d}, \mathbf{e}] \rangle = \{0\}.$$

Donc:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{w}] \subset [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1] \subset \ker l \cap \mathbf{e}_1 = \mathbf{w}.$$

Maintenant $\mathbf{w}^{\mathbb{C}}$ muni de la forme H_l est un espace hermitien et si X est dans $\mathbf{a}$ et U et V dans $\mathbf{w}^{\mathbb{C}}$, nous avons d'après la relation de Jacobi:

$$\begin{aligned} H_l(ad(X)\,U, V) &= 2i\langle l_{\mathbb{C}}, [[X, U], \bar{V}] \rangle = -2i\langle l_{\mathbb{C}}, [U, [X, \bar{V}]] \rangle \\ &= -2i\langle l_{\mathbb{C}}, [U, \overline{[X, V]}] \rangle = -H_l(U, ad(X)\,V), \end{aligned}$$

(car $\langle l_{\mathbb{C}}, [\mathbf{d}^{\mathbb{C}}, \mathbf{e}^{\mathbb{C}}] \rangle$ est nul). C.Q.F.D.

Reprenons la démonstration de la proposition. Soit:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h} \cap \mathbf{n}^{\mathbb{C}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{u} = \ker(l_{\mathbb{C}}|_{\mathbf{h}_1}).$$

Alors:

$$\mathbf{e}_1^{\mathbb{C}} = \mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{u}} \oplus \mathbf{d}_1^{\mathbb{C}} \tag{10.5}$$

et $\mathbf{u}$ est $\mathbf{d}$-invariant. Il existe donc une base de $\mathbf{u}$, formée de vecteurs propres pour tous les opérateurs $ad(X)|_{\mathbf{u}}$, $X \in \mathbf{a}$. Appelons alors Φ l'ensemble des ϕ de $(\mathbf{a}^{\mathbb{C}})^*$ tels qu'il existe un U non nul dans $\mathbf{u}$, tel que:

$$[X, U] = \phi(X)\,U \qquad \forall X \in \mathbf{a}.$$

L'antisymétrie des $ad(X)|_{\mathbf{w}^{\mathbb{C}}}$, $X \in \mathbf{a}$ implique que les formes linéaires complexes ϕ sont imaginaires pures: chaque ϕ s'écrit:

$$\phi = i\varphi \qquad \text{où } \varphi \text{ est réelle.}$$

Nous obtenons une décomposition orthogonale finie:

$$\mathbf{u} = \sum_{\varphi \in \Phi} \oplus\, \mathbf{u}_\varphi, \qquad \text{où} \quad \mathbf{u}_\varphi = \{U \in \mathbf{u}, [X, U] = i\varphi(X)\,U \ \ \forall X \in \mathbf{a}\}.$$

L'ensemble Φ de ces formes φ engendre $\mathbf{a}^*$ puisque l'intersection des noyaux des φ pour φ dans Φ, est incluse dans l'intersection du centre de $\mathbf{e}$ et de $\ker l$ (d'après (10.4) et (10.5)), qui est un idéal de $\mathbf{e}$ annulé par l et est donc $\{0\}$ (d'après (10.1)). Extrayons donc de Φ une base $\{\varphi_1, ..., \varphi_d\}$ de $\mathbf{a}^*$ et notons $\{T_1, ..., T_d\}$ la base duale de $\mathbf{a}$.

Soit maintenant, pour φ dans Φ, $\{X_j^\varphi, j = 1, ..., n_\varphi\}$ une base orthonormale de $\mathbf{u}_\varphi$. Ecrivons enfin:

$$X_j^\varphi = \tfrac{1}{2}(P_j^\varphi + iQ_j^\varphi), \qquad \text{où} \quad P_j^\varphi, Q_j^\varphi \in \mathbf{w}.$$

Un petit calcul montre alors que:

$$H_l(X_j^\varphi, X_{j'}^{\varphi'}) = \delta_{\varphi\varphi'}\delta_{jj'}$$

implique:

$$[P_j^\varphi, P_{j'}^{\varphi'}] = [Q_j^\varphi, Q_{j'}^{\varphi'}] = 0,$$

$$[P_j^\varphi, Q_{j'}^{\varphi'}] = \delta_{\varphi\varphi'}\delta_{jj'}E,$$

où E est l'unique élément de $\mathbf{d}_1$ vérifiant:

$$\langle l, E\rangle = 1.$$

Revenons à la représentation π. Les décompositions:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{d}_1, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{e}_1 = \mathbf{a} \oplus \mathbf{w} \oplus \mathbf{d}_1 \quad (\text{voir } (10.4)$$

nous donnent des décompositions analogues au niveau des groupes:

$$D = A \cdot D_1, \qquad E = A \cdot E_1, \qquad E_1 = W \cdot D_1$$

où:

$$A = \exp \mathbf{a}, \qquad E_1 = \exp \mathbf{e}_1, \qquad W = \exp \mathbf{w}, \qquad D_1 = \exp \mathbf{d}_1.$$

Donc E/D est difféomorphe à $\mathbf{w}$. Comme dans [Ber, VII, p. 158], nous identifions l'élément:

$$U = \sum_{j,\varphi} (x_j^\varphi P_j^\varphi + y_j^\varphi Q_j^\varphi)$$

de $\mathbf{w}$ avec l'élément de $\mathbf{u}$:

$$Z = \sum_{j,\varphi} \overline{z_j^\varphi} \frac{(P_j^\varphi + iQ_j^\varphi)}{2}, \qquad \text{où} \quad z_j^\varphi = x_j^\varphi + iy_j^\varphi \in \mathbb{C}.$$

Avec ces identifications, toute fonction f de $\mathscr{H}^{hol}$ s'écrit:

$$f(Z) = g(Z)\,\theta(Z), \qquad Z \in \mathbf{u},$$

où g est une fonction homomorphe sur l'espace complexe $\mathbf{u}$, vérifiant:

$$\int_{\mathbf{u}} |g(Z)|^2 \theta^2(Z)\, dZ\, d\bar{Z} < \infty$$

et où:

$$\theta(Z) = \exp(-\tfrac{1}{2} B(\bar{Z}, Z)) = \exp\left(-\tfrac{1}{4}\left(\sum_{j,\varphi} z_j^\varphi \bar{z}_j^\varphi\right)\right)$$

(voir [Ber, p. 160]). Alors, pour T dans $\mathbf{a}$, nous obtenons:

$$(10.6) \qquad \pi(\exp T) f(Z) = g(T \cdot Z)\, \theta(Z), \qquad \forall Z \in \mathbf{u}$$

où nous avons posé:

$$T \cdot \left(\sum_{j,\varphi} \overline{z_j^\varphi}\, \frac{(P_j^\varphi + iQ_j^\varphi)}{2}\right) = \sum_{j,\varphi} \overline{e^{\varphi(T)} z_j^\varphi}\, \frac{(P_j^\varphi + iQ_j^\varphi)}{2}.$$

L'espace $\mathscr{H}^{hol}$ possède une base orthonormale $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}^r}$, où r est la dimension sur $\mathbb{C}$ de $\mathbf{u}$ pour laquelle on a les relations:

$$d\pi(P_j^\varphi - iQ_j^\varphi) f_m = -\sqrt{2}\,\sqrt{m_j^\varphi}\, f_{\tilde{m}}$$

où:

$$m = (m_{j'}^{\varphi'}), \qquad \varphi' \in \psi,\ j' = 1, ..., n_{\varphi'}$$

et où:

$$\tilde{m} = (\tilde{m}_{j'}^{\varphi'}),$$

avec:

$$\tilde{m}_{j'}^{\varphi'} = m_{j'}^{\varphi'}, \qquad \text{si} \quad \varphi' \neq \varphi \text{ ou } j' \neq j$$

et:

$$\tilde{m}_j^\varphi = m_j^\varphi - 1$$

(voir [Ber, VII, p. 162 et 164]).

D'autre part, (10.6) nous donne, pour T dans $\mathbf{a}$:

$$(10.7) \qquad d\pi(T) f_m = i\left[\sum_{\varphi \in \Phi} \left(\sum_j m_j^\varphi\right) \varphi(T)\right] f_m.$$

Nous pouvons maintenant achever la preuve de notre proposition. En effet, si ξ est un vecteur normé de $(\mathscr{H}^{hol})^\infty$ nous avons d'abord:

$$\xi = \sum_m a_m f_m, \qquad \text{avec} \quad \sum_m |a_m|^2 = 1,$$

et d'après (10.6):

$$\Psi_\pi(\xi)(T)=\sum_{\varphi'\in\Phi}\varphi'(T)\left(\sum_m|a_m|^2\left(\sum_{j=1}^{n_{\varphi'}}m_j^{\varphi'}\right)\right), \tag{10.8}$$

pour T dans $\mathbf{a}$ et avec un abus d'écriture naturel, d'après les formules de [Ber, p. 160 à 162]:

$$\Psi_\pi(\xi)((P_j^\varphi-iQ_j^\varphi))=-\sqrt{2}\sum_m a_m a_{\tilde{m}}\cdot\sqrt{m_j^\varphi}. \tag{10.9}$$

En particulier, si:

$$\xi=a_0f_0+a_mf_m,\qquad |a_0|^2+|a_m|^2=1,$$

alors:

$$\begin{cases}\Psi_\pi(\xi)(T)=\sum_{\varphi'\in\Phi}\varphi'(T)(|a_m|^2(\sum_{j=1}^{n_{\varphi'}}m_j^{\varphi'})),\\ \Psi_\pi(\xi)((P_j^\varphi-iQ_j^\varphi))=0,\qquad \text{si}\quad m_j^\varphi>1,\forall j',\varphi'.\end{cases} \tag{10.10}$$

Rappelons que l'ensemble $\mathscr{B}$ des vecteurs:

$$\mathscr{B}=\{t_k,P_j^\varphi,Q_j^\varphi,E,k=1,...,d,\varphi\in\Phi,j=1,...,n_\varphi\}$$

de $\mathbf{e}$ forme une base de $\mathbf{e}$. Ecrivons les éléments p de $\mathbf{e}^*$ sous la forme:

$$p=(T_k,p_j^\varphi,q_j^\varphi,e),\qquad k=1,...,d,\varphi\in\Phi,j=1,...,n_\varphi$$

à l'aide des coordonnées de p dans la base duale $\mathscr{B}^*$ de $\mathscr{B}$ dans $\mathbf{e}^*$.

D'après (10.10), tous les éléments p de $\mathbf{e}^*$ tels que:

$$p=\left(\sum_{\varphi'\in\Phi}\varphi'(T_k)\,R_{\varphi'},0,0,1\right), \tag{10.11}$$

avec $R_{\varphi'}$ positif ou nul pour tout φ' sont contenus dans I_π. D'autre part, l'orbite de la restriction l' de l à $\mathbf{e}$ ($l'=(0,0,0,1)$) dans $\mathbf{e}^*$ est l'ensemble:

$$\Omega=\left\{\left(\sum_{\varphi'\in\Phi}\tfrac{1}{2}\varphi'(T_k)\left(\sum_{j=1}^{n_\varphi}(s_j^\varphi)^2+(t_j^\varphi)^2\right),s_j^\varphi,t_j^\varphi,1\right),s_j^\varphi\in\mathbb{R},t_j^\varphi\in\mathbb{R}\right\}.$$

L'enveloppe convexe de Ω est facile à trouver. C'est:

$$conv(\Omega)^-=\left\{\left(\sum_{\varphi'\in\Phi}\tfrac{1}{2}\varphi'(T_k)\,S_{\varphi'},s_j^\varphi,t_j^\varphi,1\right),S_{\varphi'}\right.$$
$$\left.\geqslant\sum_{j=1}^{n_\varphi}(s_j^\varphi)^2+(t_j^\varphi)^2,\forall\varphi'\in\Phi\right\}.$$

Mais alors, l'Ad^*-orbite d'un élément quelconque p de $conv(\Omega)^-$ contient un point p' de la forme:

$$p' = \left(\sum_{\varphi' \in \Phi} \varphi'(T_k) \, R_{\varphi'}, 0, 0, 1 \right),$$

avec $R_{\varphi'}$ positif ou nul pour tout φ'. D'après (10.11), p' appartient à I_π, donc:

$$conv(\Omega)^- \subset I_\pi.$$

D'autre part, pour:

$$\xi = \sum_m a_m f_m \in (\mathscr{H}^{hol})^\infty,$$

nous avons, d'après (10.9):

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n_\varphi} (|\Psi_\pi(\xi)(P_j^\varphi)|^2 + |\Psi_\pi(\xi)(Q_j^\varphi)|^2) \\
&\qquad = 2 \sum_{j=1}^{n_\varphi} \sum_m |a_m \overline{a_{\tilde{m}}} \sqrt{m_j^\varphi}|^2 \\
&\qquad \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n_\varphi} \left(\sum_m |a_m|^2 m_j^\varphi \right) \left(\sum_m |a_{\tilde{m}}|^2 \right) \\
&\qquad \leqslant \sum_m |a_m|^2 \left(\sum_{j=1}^{n_\varphi} m_j^\varphi \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi_\pi(\xi)$ vérifie:

$$\Psi_\pi(\xi) = \left(\sum_{\varphi'} \varphi'(T_k) \, R_{\varphi'}, s_j^\varphi, t_j^\varphi, 1 \right)$$

où:

$$\begin{aligned}
R_{\varphi'} &= \sum_m |a_m|^2 \left(\sum_{j=1}^{n_\varphi} m_j^{\varphi'} \right) \\
&\geqslant \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_\varphi} [(s_j^{\varphi'})^2 + (t_j^{\varphi'})^2], \qquad \varphi' \in \Phi
\end{aligned}$$

(voir (10.8)).

Mais alors $\Psi_\pi(\xi)$ appartient à $vonc(\Omega)^-$ (voir (10.12)). C.Q.F.D.

11. Nous rencontrerons dans la démonstration du théorème 13 la situation suivante:

Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{g}$. Soit $\mathbf{n}$ un idéal nilpotent de $\mathbf{g}$ contenant $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ et soit N le sous-groupe $\exp \mathbf{n}$. Nous prenons une représentation unitaire irréductible ε de N et nous notons Ω son orbite de Kirillov dans $\mathbf{n}^*$. Soit l un élément de $\mathbf{g}^*$, tel que:

$$l' = l|_{\mathbf{n}} \in \Omega.$$

Soit $G(l)$ le stabilisateur de l dans G et $\mathbf{g}(l)$ son algèbre de Lie. Supposons maintenant que:

$$\mathbf{g}(l) + \mathbf{n} = \mathbf{g},$$

alors $G(l) \cdot N$ est égal à G et $G(l)$ est simplement connexe et égal à $\exp \mathbf{g}(l)$.

Soit $\mathbf{h}$ une polarisation complexe de l avec les properiétés utilisées dans (10). Soit:

$$\tau = \mathrm{ind}_E^G \pi$$

où π et E ont la même signification que dans (10). Alors:

(11.1) LEMME. *La restriction de τ à N est équivalente à ε, toute extension unitaire τ' de ε à G est de la forme $\tau \otimes \chi$ où χ est un caractère unitaire de G et est convexe minimale: si $d\chi$ est égal à $-iq$ pour un q de $\mathbf{g}^*$, alors:*

$$I_{\tau'} = conv(Ad^*(G)(l+q))^-.$$

Preuve. En effet, τ est convexe minimale car c'est l'induite unitaire de π qui est convexe minimale et d'autre part, comme $\mathbf{h}$ vérifie la condition de Pukanszky, nous avons:

$$Ad^*(D)l = l + \mathbf{e}^\perp$$

(voir [Ber, IV.3.1.7]). Il suffit alors d'appliquer (6.3). La représentation τ est d'autre part unitairement équivalente à la représentation $\rho(l, \eta_l, \mathbf{h}, G)$ d'après la proposition V.4.3.5 de [Ber] et avec ses notations. Cette dernière représentation coïncide avec la représentation $\mathrm{ind}(\mathbf{h}, q : G)$ de [PukB, 3.c]. On applique alors [PukB, 3.c] et [PukB, 4.a] pour terminer la démonstration de (11.1).

12. Nous donnons ici un rappel rapide des résultats de Pukanszky sur l'espace des idéaux primitifs de la C^* algèbre $C^*(G)$ d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Nous utilisons les notations de [PukA, PukB].

(12.1) Soit l un élément de l'espace dual $\mathbf{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ de G. Soit $G(l)$ le stabilisateur de l dans G, $\mathbf{g}(l)$ son algèbre de Lie. Comme la composante connexe $G(l)_0$ ($=\exp(\mathbf{g}(l))$) est simplement connexe, il existe un caractère unitaire unique χ_l de $G(l)_0$, tel que:

$$d\chi_l = -il|_{\mathbf{g}(l)}.$$

Soit $\overline{G(l)}$ le sous-groupe de $G(l)$ constitué de tous les points qui commutent modulo le noyau de χ_l dans $G(l)_0$ avec tous les éléments de $G(l)$. On peut toujours prolonger χ_l à $\overline{G(l)}$. Nous noterons $\widehat{\overline{G(l)}}$ l'ensemble de ces extensions.

Soit maintenant:

$$\mathscr{R} = \bigcup_{l \in \mathbf{g}^*} \widehat{\overline{G(l)}}.$$

Pukanszky définit une relation d'équivalence $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{R}$ (voir [PukB, 5.6]). Cette relation est G-invariante et si (l, χ) et (l', χ') sont dans une même classe d'équivalence, alors l est contenu dans l'adhérence de l'Ad^*-orbite de l' et réciproquement. En particulier, si G est exponentiel,

$$\widehat{\overline{G(l)}} = \{\chi_l\} \qquad \text{pour tout} \quad l \in \mathbf{g}^*, \mathscr{R} = \mathbf{g}^*$$

et $\mathscr{S}$ est la relation d'équivalence dont les classes sont les Ad^*-orbites de G dans $\mathbf{g}^*$.

Le résultat principal de [PukB] dit qu'il existe une application bijective, notée ici $K-P$ de $\mathscr{R}/\mathscr{S}$ sur l'espace $Prim(C^*(G))$ des idéaux primitifs de $C^*(G)$:

Si (l, χ) est un élément de $\mathscr{R}$, alors:

$$K = \overline{G(l)} \cdot N, \qquad \text{où} \quad N = [G, G],$$

est un sous-groupe fermé distingué de G. Soit l' la restriction $l|_{\mathbf{n}}$ de l à l'algèbre de Lie $\mathbf{n}$ ($=[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$) de N.

A l' est associé un élément ε de $\hat{N}$. Pukanszky définit alors une représentation de K:

$$\lambda = \operatorname{ind}(l, \chi, \mathbf{h}, K)$$

λ est unitaire, irréductible et ne dépend que de (l, χ), nous la noterons $\lambda(l, \chi)$.

La représentation $\operatorname{ind}_K^G \lambda(l, \chi)$ sera notée $\tau(l, \chi)$. C'est une représentation factorielle de G, son noyau:

$$\mathscr{I}(l, \chi) = \ker_{C^*(G)} \tau(l, \chi)$$

est donc un idéal primitif de $C^*(G)$.

Pukanszky démontre que:

$$\mathscr{I}(l, \chi) = \mathscr{I}(l', \chi') \qquad \text{si et seulement si}$$
$$(l, \chi) \text{ et } (l', \chi') \text{ sont } \mathscr{S}\text{-équivalents.}$$

En outre, tout idéal primitif $\mathscr{I}$ de $C^*(G)$ est de la forme $\mathscr{I}(l, \chi)$ pour un certain (l, χ) de $\mathscr{R}$.

Ceci définit l'application $K-P$.

Notons maintenant P l'application de $\hat{G}$ dans $\mathscr{R}/\mathscr{S}$ définie par:

$$P(\pi) = \text{classe de } (l, \chi) \qquad \text{dans } \mathscr{R} \text{ si} \quad \ker_{C^*(G)} \pi = \mathscr{I}(l, \chi).$$

Notons enfin σ l'application de $\mathscr{R}$ dans $\mathbf{g}$ définie par:

$$\sigma(l, \chi) = l.$$

Alors σ envoie les classes d'équivalences de $\mathscr{S}$ sur celles de la relation R mentionnée dans l'introduction. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre:

13. THÉORÈME. *Soit G un groupe de Lie résoluble connexe. Soit*:

$$P: \hat{G} \to \mathscr{R}/\mathscr{S}$$

l'application de Pukanszky, alors pour tout τ de $\hat{G}$,

$$I_\tau = conv(Ad^*(G)l)^-$$

où l est un élément quelconque de $\sigma \circ P$, (c'est à dire un élément quelconque de $\mathbf{g}^*$ tel qu'il existe χ dans $\widehat{\overline{G(l)}}$ tel que (l, χ) appartienne à $P(\tau)$). En particulier, τ est convexe minimale.

Toute représentation unitaire de G est convexe.

Preuve. Nous l'établissons par récurrence sur la dimension de G.

Si G est abélien, en particulier si sa dimension est 1, on peut appliquer (5.2).

Supposons donc le théorème démontré pour tout groupe de Lie résoluble connexe de dimension $n' < n$ et soit G un groupe de Lie résoluble connexe de dimension n et τ une représentation unitaire irréductible de G. Nous notons encore N le groupe $[G, G]$ et $\mathbf{n}$ son algèbre de Lie. D'après ce qui précède, il existe (l, χ) dans $\mathscr{R}$ tel que:

$$\ker_{C^*(G)} \tau = \ker_{C^*(G)} \tau(l, \chi) = \mathscr{I}(l, \chi).$$

Considérons maintenant le sous-groupe K ($K=\overline{G(l)}\cdot N$). Si K a même dimension que G, ces deux groupes sont confondus,

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}(l)+\mathbf{n}$$

et $\tau(l,\chi)$ est la représentation du lemme (11.1), elle est irréductible, égale à $\lambda(l,\chi)$ et est une extension de la représentation ε de N caractérisée par l'. Mais toute représentation unitaire irréducible d'un groupe de Lie nilpotent étant C.C.R. (voir par ex. [Ber, IX.3.1.1]), $\lambda(l,\chi)$ est aussi C.C.R., ce qui veut dire que $\tau(l,\chi)(C^*(G))$ est l'algèbre $\mathscr{K}$ des opérateurs compacts sur $\mathscr{H}_{\lambda(l,\chi)}$.

Par passage au quotient, τ définit alors une représentation irréductible de $C^*(G)/\mathscr{I}(l,\chi)$, qui est isomorphe à $\mathscr{K}$. D'après [Dix, 4.1.5], τ et $\tau(l,\chi)$ sont équivalentes. Alors:

$$I_\tau=I_{\tau(l,\chi)}=conv(Ad^*(G)l)^-$$

d'après le lemme (11.1).

Supposons maintenant que la dimension de K soit plus petite que celle de G. Soit K_0 la composante connexe de l'élément neutre de K. D'après [Puk, III.7],

$$\ker_{C^*(K_0)}(\tau|_{K_0})=\ker_{C^*(K_0)}(\tau(l,\chi)|_{K_0}).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et (5.1b), nous obtenons:

$$I_{(\tau|_{K_0})}=I_{(\tau(l,\chi)|_{K_0})} \tag{13.1}$$

et ce sont des parties convexes de $\mathbf{k}^*$.

Or, d'après la preuve du (a) du lemme 7 et III.7 de [PukB], nous avons:

$$\tau(l,\chi)|_{K_0} \text{ est faiblement équivalente à } \left.\sum_{g\in G}^{\oplus}(\lambda(l,\chi)^{A_g})\right|_{K_0}$$

(voir (3.2) pour la définition de A_g). Appliquons de nouveau l'hypothèse de récurrence et (5.1); nous obtenons

$$I_{(\tau(l,\chi)|_{K_0})}=I_\Sigma, \qquad \text{où} \quad \Sigma=\left.\sum_{g\in G}^{\oplus}(\lambda(l,\chi)^{A_g})\right|_{K_0}.$$

Donc l'ensemble moment I_Σ est justement l'enveloppe convexe des $I_{(\lambda(l,\chi)^{A_g}|_{K_0})}$ lorsque g parcourt G. De plus, $\lambda(l,\chi)|_{K_0}$ est la représentation τ du lemme 11.1, appliqué au groupe K_0 (voir [PukA, I.7.1] et [PukB, III.3.c]), donc:

$$I_{(\lambda(l,\chi)|_{K_0})}=conv(Ad^*(K_0)l')^-$$

si l' désigne la restriction de l à l'algèbre de Lie $\mathbf{k}$ de K_0 ($\mathbf{k} = \mathbf{g}(l) + \mathbf{n}$). On en conclut que:

$$I_{(\tau|K_0)} = conv(\{Ad^*(g)(Ad^*(K_0)l'),\ g \in G\})^- = conv[Ad^*(G)l']^-.$$

(Ici "$'$" signifie la restriction à $\mathbf{k}$. D'autre part, d'après [PukB, lemme 25],

$$l + \mathbf{k}^\perp \subset Ad^*(G)l.$$

Evidemment, ceci implique:

$$I_\tau = conv(Ad^*(G)l)^-. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

III. Les groupes compacts

14. Description du dual unitaire d'un groupe compact.

Soit G un groupe de Lie compact, semi-simple et connexe. En fait, nous pouvons supposer G simplement connexe, car chacune de ses représentations se remonte en une représentation de son revêtement universel qui est lui aussi compact [Wal, thm. 3.6.6, p. 61].

Soit maintenant π une représentation unitaire de dimension finie de G. Nous complexifions $\mathbf{g}$ en $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ et prolongeons $d\pi$ à $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$. On sait que si $\mathbf{t}$ est un tore maximal de $\mathbf{g}$, le $\mathbf{g}$-module $\mathscr{H}_\pi$ se décompose en sous espaces de poids:

$$\mathscr{H}_\pi = \sum_{\lambda \in \Delta_\pi}^{\oplus} \mathscr{H}^\lambda \tag{14.1}$$

où:

$$\mathscr{H}^\lambda = \{v \in \mathscr{H},\ d\pi(H)v = i\lambda(H)v,\ \forall H \in \mathbf{t}\}, \qquad \Delta_\pi = \{\lambda \in \mathbf{t}^*,\ \mathscr{H}^\lambda \neq \{O\}\}.$$

En outre, comme π est unitaire, $\mathscr{H}^\lambda$ est orthogonal à $\mathscr{H}^\mu$ si λ est différent de μ. En particulier la représentation adjointe de G dans $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ donne la décomposition:

$$\mathbf{g}^{\mathbb{C}} = \mathbf{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{g}^\alpha. \tag{14.2}$$

Δ, inclus dans $\mathbf{t}^* \backslash \{0\}$ est l'ensemble des racines de $\mathbf{g}$. Etendons la forme de Killing B à $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ puis à $(\mathbf{g}^{\mathbb{C}})^*$. Nous obtenons ainsi un produit scalaire réel sur $\mathbf{t}^*$:

$$(\lambda, \mu) = -B(\lambda, \mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{t}^*.$$

Le groupe des poids est alors défini par:

$$\mathscr{W}=\left\{\lambda\in\mathbf{t}^*, 2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}\quad\forall\alpha\in\Delta\right\}.$$

Les poids de tout $\mathbf{g}$-module de dimension finie sont dans $\mathscr{W}$. On définit aussi le groupe de Weyl W de $\mathbf{g}$ comme le groupe engendré par les symétries s_α, α dans Δ:

$$s_\alpha(\lambda)=\lambda-2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Alors:

(14.3) W est un groupe fini [War, p. 9].

Pour chaque w de W, il existe $\tilde{w}$ dans G qui normalise $\mathbf{t}$ et qui est tel que:

$$Ad^*(\tilde{w})|_{\mathbf{t}^*}(\alpha)=w(\alpha)\qquad\forall\alpha\in\Delta$$

[Wal, théorème 3.10.9, 0. 76].

D'autre part, les chambres de Weyl sont les composantes connexes $\mathscr{C}$ de l'ensemble:

$$\mathbf{t}^*-\{\lambda, (\lambda,\alpha)=0 \text{ pour un } \alpha \text{ de } \Delta\}.$$

Une chambre de Weyl définit un ordre sur $\mathbf{t}^*$:

$$\alpha>0\qquad\text{si en seulement si}\quad(\lambda,\alpha)>0\ \forall\lambda\in\mathscr{C}.$$

Nous notons Δ^+ l'ensemble des racines positives. Dans Δ^+, il existe une et une seule base $\{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ de $\mathbf{t}^*$, dont les éléments seront appelés racines simples, telle que:

$$\forall\alpha\in\Delta,\qquad\alpha=\sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$$

où les n_i sont des entiers tous positifs si α est >0, tous négatifs sinon [War, p. 10 et 13].

L'adhérence $\mathscr{C}^-$ de $\mathscr{C}$ est un domaine fondamental pour l'action de W sur $\mathbf{t}^*$ [War, p. 13]. En particulier:

$$\mathbf{t}^*=W\cdot\mathscr{C}^-.$$

Supposons maintenant $(\pi,\mathscr{H})$ irréductible. Alors:

(14.4) π possède un vecteur $\mathbf{b}$-primitif e_Λ unique à une constante près.

C'est-à-dire, si:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbf{g}^{\alpha},$$

nous avons:

$$H \cdot e_{\Lambda} = i\Lambda(H)\, e_{\Lambda}, \quad \forall H \in \mathbf{t}$$

et

$$X_{\alpha} \cdot e_{\Lambda} = 0 \quad \forall X_{\alpha} \in \mathbf{g}^{\alpha}\, \forall \alpha \in \Delta^+.$$

Alors Λ est un poids de $\mathscr{H}$ contenu dans $\mathscr{C}^-$ et Λ est unique et caractérise π à équivalence près. On appelle Λ le plus haut poids de $\mathscr{H}$. De plus la dimension de $\mathscr{H}^{\Lambda}$ est 1 [War, p. 172, théorème 2.4.1.5]. D'autre part, si λ est un poids de $\mathscr{H}$, alors:

$$\lambda = \Lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i \qquad \text{où} \quad n_i \in \mathbb{N} \tag{14.5}$$

[War, p. 171, théorème 2.4.1.3].

Si λ est un poids, alors $w(\lambda)$ en est aussi un quel que soit w dans W, de plus les dimensions de $\mathscr{H}^{\lambda}$ et de $\mathscr{H}^{w(\lambda)}$ sont égales.

Soit maintenant q la projection canonique de $\mathbf{g}^*$ sur $\mathbf{t}^*$, c'est à dire:

$$q(l) = l|_{\mathbf{t}}, \qquad l \in \mathbf{g}^*.$$

(14.6) Soit $D \subset \mathbf{t}^*$ l'enveloppe convexe des poids de $\mathscr{H}$. D'après (14.1), nous avons évidemment:

$$q(I_{\pi}) = D = I_{\pi|T} \qquad (T = \exp \mathbf{t}).$$

Appelons $\operatorname{Ext}(D)$ l'ensemble des points extrémaux de D, c'est à dire:

$$\operatorname{Ext}(D) = \{\lambda \in D,\ \lambda = t\lambda_1 + (1-t)\,\lambda_2$$
$$\text{et } \lambda_i \in D,\ t \in [0, 1] \text{ implique } t = 0 \text{ ou } t = 1\}.$$

15. Lemme. *$\operatorname{Ext}(D)$ est l'ensemble $\{w(\Lambda), w \in W\}$ et D est l'enveloppe convexe de* $\operatorname{Ext}(D)$.

Preuve. (a) Montrons d'abord que si λ est dans $\operatorname{Ext}(D)$, alors λ est un poids. En effet, λ étant un élément de $q(I_{\pi})$, λ s'écrit:

$$\lambda = \sum_{\mu \in \Delta_{\pi}} t_{\mu}\mu, \qquad \text{avec} \quad \sum_{\Delta_{\pi}} t_{\mu} = 1 \text{ et } 1 \geqslant t_{\mu} \geqslant 0 \ \ \forall \mu.$$

Comme λ est extrémal, cette somme n'a qu'un terme non nul et λ est un poids.

(b) W laisse $\operatorname{Ext}(D)$ stable car W laisse l'ensemble des poids stable, donc aussi D donc aussi les points extrémaux de D.

(c) Montrons que Λ est le seul point de $\mathscr{C}^- \cap \operatorname{Ext}(D)$. Nous avons vu que Λ est dans $\mathscr{C}^-$ et s'il n'est pas extrémal, alors:

$$\Lambda = t\lambda_1 + (1-t)\,\lambda_2 \qquad \text{pour un} \quad t \in]0, 1[\text{ et pour } \lambda_1, \lambda_2 \in \Delta_\pi - \{\Lambda\}.$$

Alors, d'après (14.5),

$$\lambda_1 = \Lambda - \sum_i n_i^1 \alpha_i, \qquad \lambda_2 = \Lambda - \sum_i n_i^2 \alpha_i, \quad \text{pour certains } n_i^1, n_i^2 \in \mathbb{N}.$$

Ainsi:

$$\sum_i (tn_i^1 + (1-t)\,n_i^2)\,\alpha_i = 0$$

ce qui implique que tous les n_i^j sont nuls, c'est à dire que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \Lambda.$$

Soit maintenant λ un point quelconque de $\mathscr{C}^- \cap \operatorname{Ext}(D)$, alors pour chaque α de Δ^+, nous avons:

$$s_\alpha(\lambda + \alpha) = \lambda - (r+1)\alpha \qquad \text{pour un} \quad r \in \mathbb{N}.$$

Si maintenant $\lambda + \alpha$ est un poids pour un certain α de Δ^+,

$$\lambda = \frac{r+1}{2+r}\,(\lambda + \alpha) + \left(1 - \frac{r+1}{2+r}\right) s_\alpha(\lambda + \alpha)$$

est une combinaison convexe non triviale de $\lambda + \alpha$ et $s_\alpha(\lambda + \alpha)$, donc λ n'est pas extrémal. Ainsi, pour tout e_λ de $\mathscr{H}^\lambda$ et pour tout X_α de $\mathbf{g}^\alpha$, $\alpha \in \Delta^+$, nous avons:

$$X_\alpha \cdot e_\lambda \in \mathscr{H}^{\lambda+\alpha} = \{0\}.$$

Donc e_λ est $\mathbf{b}$-primitif et d'après l'unicité de ces vecteurs $\mathbf{b}$-primitifs, λ est égal à Λ.

(d) Tout point de $\operatorname{Ext}(D)$ est conjugué à Λ par W. En effet, si λ est dans $\operatorname{Ext}(D)$, il existe w dans W, tel que $w(\lambda)$ soit dans $\mathscr{C}^-$. Mais alors, $w(\lambda)$ est dans $\mathscr{C}^- \cap \operatorname{Ext}(D)$ qui est $\{\Lambda\}$.

Nous avons donc démontré que:

$$\operatorname{Ext}(D) = W \cdot \Lambda.$$

(e) D est l'enveloppe convexe de $\mathrm{Ext}(D)$. En effet, par définition, D est inclus dans cette enveloppe convexe et, par construction tout point de D est dans l'enveloppe convexe des poids $w(\Lambda)$, w dans W, puisque D et $L_{\pi|_T}$ coïncident et que les espaces $\mathscr{H}^{w(\lambda)}$ sont orthogonaux.

16. *Convention.* Nous considérons maintenant $\mathbf{t}^*$ comme une partie de $\mathbf{g}^*$, en imposant à un élément λ de $\mathbf{t}^*$ d'être 0 sur $\mathbf{g}^\alpha$, pour tout α de Δ.

Rappelons que si:

$$\tilde{W} = \{\tilde{w} \in G, Ad(\tilde{w})\mathbf{t} = \mathbf{t}\}$$

on a:

$$W = \{w = Ad^*\tilde{w}|_{\mathbf{t}^*}\}$$

(voir (14.3)). Avec cette convention, nous avons:

PROPOSITION. (a) *$Ad^*(\tilde{W})\Lambda = \mathrm{Ext}(D)$ et $D = conv(\mathrm{Ext}(D))$.*

(b) *$Ad^*(G)D = conv(Ad^*(G)\Lambda)$, où Λ est le plus haut poids de π.*

Preuve. (a) Comme W est $Ad^*(\tilde{W})|_{\mathbf{t}^*}$, cette partie du lemme est une conséquence immédiate du lemme 15.

(b) En utilisant (a), nous avons:

$$Ad^*(G)D \subset conv(Ad^*(G)(\mathrm{Ext}(D))) = conv(Ad^*(G)\Lambda).$$

Réciproquement, soit p un point de $conv(Ad^*(G)\Lambda)$, considérant p comme un point de $\mathbf{g}$, nous prenons un tore maximal $\mathbf{t}'$ contenant p, puis g dans G tel que $Ad(g)(p)$ soit dans $\mathbf{t}$ ou, si on revient à $\mathbf{g}^*$, tel que $Ad^*(g)(p)$ soit dans $\mathbf{t}^*$. Mais alors $Ad^*(g)(p)$ appartient à $\mathbf{t}^* \cap conv(Ad^*(G)\Lambda)$. Comme Λ est égal à $\Psi_\pi(e_\Lambda)$, nous avons obtenu:

$$q(conv(Ad^*(G)\Lambda)) = conv(q(Ad^*(G)\Lambda)) \subset conv(q(I_\pi)) = q(D).$$

Alors $Ad^*(g)\,p$ appartient à D et p à $Ad^*(G)(D)$. C.Q.F.D.

Nous noterons:

$$\Omega = \Omega_\pi = Ad^*(G)\Lambda. \tag{16.1}$$

17. PROPOSITION. *Il y a équivalence entre:*

(1) *I_π est convexe*

(2) *$I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ est convexe*

(3) *D est inclus dans I_π*

(4) *I_π est l'enveloppe convexe de Ω_π.*

Preuve. (1) ⇒ (2). L'intersection de deux parties convexes de $\mathbf{g}^*$ est convexe.

(2) ⇒ (3). Pour tout X_α de $\mathbf{g}^\alpha$, nous avons:

$$X_\alpha \in \mathscr{H}^{\Lambda+\alpha} \perp \mathscr{H}^{\Lambda}.$$

Donc $\Psi_\pi(e_\Lambda)$ s'annule sur X_α, c'est à dire:

$$\Psi_\pi(e_\Lambda) = \Lambda$$

et Λ appartient à $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$. Mais alors $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ contient aussi les $Ad^*(g)\Lambda$, pour chaque g de G normalisant $\mathbf{t}$, c'est à dire pour chaque g de $\tilde{W}$. Donc, d'après (14.3):

$$\mathrm{Ext}(D) = \tilde{W} \cdot \Lambda \subset I_\pi \cap \mathbf{t}^* \subset I_\pi.$$

Comme $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ est convexe, nous en déduisons que:

$$D = conv(\mathrm{Ext}(D)) \subset I_\pi \cap \mathbf{t}^* \subset I_\pi.$$

(3) ⇒ (4). Comme $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ est par construction un sous ensemble de D (voir (14.6)), nous obtenons:

$$D = I_\pi \cap \mathbf{t}^*.$$

Alors, d'après le point (b) de la proposition 16,

$$conv(Ad^*(G)\Lambda) = Ad^*(G)D \subset Ad^*(G)\, I_\pi = I_\pi.$$

D'autre part, si p est un point de I_π, il existe g dans G tel que $Ad^*(g)p$ soit dans $\mathbf{t}^*$ donc dans $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$. Mais alsors, p appartient à $Ad^*(G)D$ qui est l'enveloppe convexe de Ω_π d'après la proposition 16(b).

(4) ⇒ (1). Est évident. C.Q.F.D.

Nous allons bientôt voir que $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ n'est pas toujours convexe. Cependant, F. Kirwan a démontré que:

$$I_\pi \cap \mathscr{C} \text{ est toujours convexe}$$

(voir [Kir], par exemple).

18. Proposition. (a) *S'il existe une racine simple α_i telle que $(2\Lambda - \alpha_i, \alpha_i)$ s'annule, alors $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ n'est pas convexe.*

(b) *Si $(2\Lambda - \alpha, \alpha)$ n'est pas nul quelle que soit la racine α de Δ^+, alors $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ est convexe.*

On va montrer une série de lemmes pour établir cette proposition.

18.1. LEMME. *Soit α une racine, alors $(2\Lambda-\alpha, \alpha)$ s'annule si et seulement s'il existe w dans W tel que*:

$$w(\Lambda)=\Lambda-\alpha.$$

Preuve. Si $2(\Lambda-\alpha, \alpha)$ s'annule, c'est à dire si $2(\Lambda, \alpha)$ est égal à (α, α) alors:

$$s_\alpha(\Lambda)=\Lambda-2\frac{(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha=\Lambda-\alpha.$$

Réciproquement, s'il existe w dans W tel que $w(\Lambda)$ soit $\Lambda-\alpha$, alors $\Lambda-\alpha$ et Λ sont des points extrémes de D, donc les seuls points de la droite passant par Λ et $\Lambda-\alpha$ qui sont dans D sont dans le segment $[\Lambda, \Lambda-\alpha]$ en particulier, $\Lambda+\alpha$ et $\Lambda-2\alpha$ ne sont pas des poids. Prenons alors H_α dans $\mathbf{t}$, X_α, $X_{-\alpha}$ dans $\mathbf{g}^\alpha$ et dans $\mathbf{g}^{-\alpha}$ tels que:

$$\alpha(H)=(H, H_\alpha), \qquad \text{pour tout} \quad H\in\mathbf{t}\text{ et }[X_\alpha, X_{-\alpha}]=H_\alpha.$$

Alors la sous algèbre de $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ engendrée par X_α, $X_{-\alpha}$ et H_α est isomorphe à $\mathbf{sl}_2(\mathbb{C})$. Le $\mathbf{sl}_2(\mathbb{C})$ module $\mathscr{H}_\alpha$ engendré par e_Λ est alors de dimension 2, puisque:

$$\mathscr{H}_\alpha^{\Lambda+\alpha}=\mathscr{H}_\alpha^{\Lambda-2\alpha}=\{0\}.$$

Il admet pour base $\{e_\Lambda, e_{\Lambda-\alpha}\}$ et:

$$\operatorname{tr}(d\pi(H_\alpha)|_{\mathscr{H}_\alpha})=2\Lambda(H_\alpha)-\alpha(H_\alpha)=0.$$

C'est à dire:

$$\frac{(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}=\frac{\Lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}=\frac{1}{2}$$

ou:

$$(2\Lambda-\alpha, \alpha)=0. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

18.2. LEMME. *Si $(2\Lambda-\alpha, \alpha)$ est non nul pour toutes les racines α de Δ^+ alors $I_\pi\cap\mathbf{t}^*$ est convexe.*

·*Preuve.* D'après 17, il suffit de montrer que D est inclus dans I_π. Soit p un point de D, p s'écrit:

$$p=\sum_{\tilde{w}\in\tilde{W}} t_{\tilde{w}}\, Ad^*(\tilde{w})(\Lambda) \qquad \text{avec} \quad t_{\tilde{w}}\geqslant 0\ \forall\tilde{w}\text{ et }\sum_{\tilde{w}\in\tilde{W}} t_{\tilde{w}}=1.$$

Posons:

$$\xi = \sum_{\tilde{w} \in \tilde{W}} \sqrt{t_{\tilde{w}}}\, \pi(\tilde{w})\, e_\Lambda.$$

Si $w\Lambda$ est différent de $w'\Lambda$, alors pour chaque X_α de $\mathbf{g}^\alpha$, nous avons:

$$(18.2.1) \qquad \langle X_\alpha \cdot \pi(\tilde{w})\, e_\Lambda, \pi(\tilde{w}')\, e_\Lambda \rangle = 0.$$

En effet d'une part:

$$X_\alpha \cdot \pi(\tilde{w})\, e_\Lambda \in \mathscr{H}^{w\Lambda + \alpha}, \qquad \pi(\tilde{w}')\, e_\Lambda \in \mathscr{H}^{w'\Lambda}$$

et d'autre part $w\Lambda + \alpha$ est différent de $w'\Lambda$ puisque sinon il existerait w'' dans W et α' dans Δ tels que:

$$w''\Lambda + \alpha' = \Lambda$$

mais alors, d'après (14.5), α' est positive et d'après (18.1), $(2\Lambda - \alpha', \alpha')$ s'annule. Équation (18.2.1) implique alors que:

$$\Psi_\pi(\xi)(X_\alpha) = 0, \qquad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Delta.$$

Enfin, on a évidemment, pour chaque H de $\mathfrak{t}$,

$$\Psi_\pi(\xi)(H) = \sum_{\tilde{w}} r_{\tilde{w}} \frac{1}{i} \langle H \cdot \pi(\tilde{w})\, e_\Lambda, e_\Lambda \rangle = p(H),$$

ainsi,

$$\Psi_\pi(\xi) = p. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(18.3) LEMME. *Si α_i est une racine simple telle que $(2\Lambda - \alpha_i, \alpha_i)$ s'annule, les seuls poids qui sont sur la droite $\{\Lambda + t\alpha_i, t \in \mathbb{R}\}$ sont Λ et $\Lambda - \alpha_i$.*

Preuve. Par construction, Λ et $\Lambda - \alpha_i$ sont sur la droite. D'autre part, si le poids λ est sur cette droite, alors:

$$\lambda = \Lambda + t\alpha_i \qquad \text{et} \qquad 1 + 2t = \frac{2(\Lambda + t\alpha_i, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \frac{2(\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathbb{Z}$$

et t appartient à $[-1, 1]$ puisque Λ et $\Lambda - \alpha_i$ sont des points extrêmes de D. Donc t est nécessairement $0, \pm 1$ ou $\pm 1/2$, mais λ est un poids donc (14.5) implique que t est entier négatif. Donc nécessairement 0 ou -1.

C.Q.F.D.

Fin de la preuve du théorème 18. (a) Supposons que α_i soit une racine simple telle que $(2\Lambda - \alpha_i, \alpha_i)$ soit nul. Soit p le point $\Lambda - (1/2)\,\alpha_i$. Montrons que p appartient à D mais pas à I_π. Alors, d'après (17), $I_\pi \cap \mathbf{t}^*$ n'est pas convexe. Or:

$$p = \tfrac{1}{2} \Lambda + \tfrac{1}{2} (\Lambda - \alpha_i) \qquad \text{et} \qquad \Lambda - \alpha_i = s_{\alpha_i}(\Lambda).$$

p est donc une combinaison convexe de poids et, par définition, appartient à D.

Si d'autre part, p s'écrit $\Psi_\pi(\xi)$, pour un vecteur normé ξ de $\mathscr{H}$, alors:

$$\xi = \sum_{\lambda \in \Delta_\pi} \rho_\lambda e_\lambda \qquad \text{où} \quad e_\lambda \in \mathscr{H}^\lambda, \ \|e_\lambda\| = 1, \rho_\lambda > 0, \sum_\lambda \rho_\lambda^2 = 1.$$

Mais alors, on a dans $\mathbf{t}^*$:

$$q(\Psi_\pi(\xi)) = \sum_{\lambda \in \Delta_\pi} \rho_\lambda^2 \lambda = \Lambda - \tfrac{1}{2} \alpha_i. \tag{18.3.1}$$

Montrons que ρ_λ est nul si λ n'est pas un élément de la droite $\Lambda + \mathbb{R}\alpha_i$. Soit:

$$\beta_j = \alpha_j - \frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i, \qquad \text{pour} \quad j \neq i$$

alors l'ensemble $\{\beta_j, j \neq i\}$ forme une base de l'orthogonal de α_i dans $\mathbf{t}^*$ et (18.3.1) implique:

$$\left(\sum_{\lambda \in \Delta_\pi} \rho_\lambda^2 \lambda \right) (\beta_j) = \Lambda(\beta_j) \qquad \text{pour tout} \quad j \neq i. \tag{18.3.2}$$

Or nous savons (voir (14.5)) que chaque poids λ s'écrit:

$$\lambda = \Lambda - \sum n_j^\lambda \alpha_j.$$

Donc (18.3.2) nous donne:

$$\left(\sum_{j \neq i} \left(\sum_{\lambda \in \Delta_\pi} \rho_\lambda^2 n_{j'}^\lambda \right) \alpha_{j'}, \beta_j \right) = 0 \qquad \text{pour tout } j.$$

Ou:

$$\sum_{\lambda \in \Delta_\pi} \rho_\lambda^2 n_{j'}^\lambda = 0 \qquad \text{pour tout} \quad j' \neq i,$$

ce qui veut dire que ρ_λ s'annule si $n_{j'}^\lambda$ n'est pas nul et si j' est différent de i. Soit:

$$\rho_\lambda = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda \notin \Lambda - \mathbb{N}\alpha_i.$$

Ou:

$$\xi = \sum_{\lambda \in \Delta_\pi \cap (\Lambda + \mathbb{R}\alpha_i)} \rho_\lambda e_\lambda.$$

Or, d'après (18.2), $\Delta_\pi \cap (\Lambda + \mathbb{R}\alpha_i)$ est $\{\Lambda, \Lambda - \alpha_i\}$, donc:

$$\xi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e_\Lambda + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e_{\Lambda - \alpha_i}.$$

Pour tout X_{α_i} de $\mathbf{g}^{\alpha_i}$ et $X_{-\alpha_i}$ de $\mathbf{g}^{-\alpha_i}$, tels que:

$$[X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}] = H_{\alpha_i} \neq 0,$$

nous avons alors:

$$X_{\alpha_i} \cdot e_\Lambda = \rho e_{\Lambda - \alpha_i} \qquad \text{avec} \quad \rho \neq 0,$$

puisque, pour la sous algèbre $\mathbf{sl}_{\mathbb{C}}(2)$ engendrée par $\{X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}, H_{\alpha_i}\}$, le sous-module engendré par e_Λ est de dimension 2 (car $(\Lambda, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) = 1/2$) et donc la dimension de son sous-espace de poids $\Lambda - \alpha_i$ est 1 (voir (14.5)). Mais alors nous aboutissons à la contradiction:

$$\begin{aligned} 0 &= p(X_{-\alpha_i}) = \Psi_\pi(\xi)(X_{-\alpha_i}) \\ &= \frac{1}{i} \left\langle X_{-\alpha_i} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\,(e_\Lambda + e_{\Lambda - \alpha_i}), \sqrt{\frac{1}{2}}\,(e_\Lambda + e_{\Lambda - \alpha_i}) \right\rangle = \frac{1}{2i} \rho \neq 0. \end{aligned}$$

Et p n'appartient pas à I_π.

(b) Résulte de (18.2).

19. PROPOSITION. *S'il existe une racine α de Δ telle que $(2\Lambda - \alpha, \alpha)$ s'annule, alors il existe une racine simple α_i telle que $(2\Lambda - \alpha_i, \alpha_i)$ s'annule.*

Preuve. Soient Λ_i les poids fondamentaux de $\mathbf{g}$. Ecrivons $\Lambda = \sum n_i \Lambda_i$ avec $n_i \in \mathbb{N}$. Soit H_α la coracine correspondant à α. On a $\Lambda(H_\alpha) = 1$ par hypothèse et $\Lambda_i(H_\alpha)$ est entier pour tout i. Donc il existe un i_0 tel que:

$$n_{i_0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_{i_0}(H_\alpha) = 1$$

et:

$$n_i \Lambda_i(H_\alpha) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq i_0.$$

Alors:

$$(2\Lambda - \alpha_{i_0}, \alpha_{i_0}) = 0.$$

Nous remercions notre rapporteur pour avoir considérablement simplifié notre première démonstration.

On a finalement démontré:

20. THÉORÈME. *Soit G un groupe de Lie compact, semi-simple et connexe. Soit* $\mathbf{t}$ *un tore maximal de l'algèbre de Lie* $\mathbf{g}$ *de* G, $\mathscr{C}$ *une chambre de Weyl,* Δ^+ *l'ensemble des racines positives relatives à* $\mathscr{C}$, $(\alpha_1, ..., \alpha_l)$ *le système de racines simples de* Δ^+. *Soit* π *une représentation unitaire irréductible de* G, Λ_π *son poids dominant* ($\Lambda_\pi \in \mathscr{C}^-$).

Il y a équivalence entre:

(1) I_π *est convexe.*

(2) I_π *est l'enveloppe convexe de l'*Ad^**-orbite* Ω *de* Λ_π.

(3) Λ_π *n'est pas un zéro du polynôme de degré* l:

$$P(\xi) = \prod_i (2\xi - \alpha_i, \alpha_i).$$

IV. DERNIÈRES REMARQUES

21. Supposons que le groupe de Lie G soit le produit direct de deux groupes fermés G_1 et G_2:

$$G = G_1 \times G_2.$$

Si G_1 est de type I, par exemple si G_1 est compact ou abélien, alors, d'après [Dix, 13.11.7],

$$\hat{G} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2,$$

c'est-à-dire: chaque représentation irréductible π de G est de la forme:

$$\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 \qquad \text{sur} \quad \mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2,$$

où $(\pi_1, \mathscr{H}_1)$ appartient à $\hat{G}_1$ et $(\pi_2, \mathscr{H}_2)$ appartient à $\hat{G}_2$ et réciproquement.

PROPOSITION. *Supposons que*:

$$I_{\pi_1} = conv(Ad^*(G_1)\, p_1)^- \qquad et \qquad I_{\pi_2} = conv(Ad^*(G_2)\, p_2)^-,$$

pour certains p_i *de* $\mathbf{g}_i^*$ $(i = 1, 2)$. *Alors*:

$$I_\pi = conv(Ad^*(G)(p_1, p_2))^- \subset (\mathbf{g}_1^* \times \mathbf{g}_2^*) = \mathbf{g}^*.$$

Preuve. Soient $(e_1^1, e_2^1, ...)$ et $(e_1^2, e_2^2, ...)$ des bases orthonormées respectivement de $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$, constituées de vecteurs C^∞. Alors si ξ est un vecteur de $\mathscr{H}^\infty$, nous avons:

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^1 \otimes \eta_i^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^1 \otimes e_j^2$$

avec:

$$\sum_i \|\eta_i^2\| = \sum_j \|\eta_j\|^2 = \|\xi\|^2.$$

En outre, pour g_1 de G_1 (respectivement g_2 de G_2), nous avons:

$$\pi(g_1, e)\xi = \sum_j (\pi_1(g_1)\,\eta_j^1) \otimes e_j^2,$$

$$\pi(e, g_2)\xi = \sum_j e_j^1 \otimes (\pi_2(g_2)\,\eta_j^2).$$

Donc chaque η_j^1 est un vecteur de $\mathscr{H}_1^\infty$ et chaque η_j^2 est un vecteur de $\mathscr{H}_2^\infty$. De plus:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Y \cdot \eta_j^2\|^2 < \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \|Y \cdot \eta_j^2\|^2 < \infty \quad \forall X \in \mathbf{g}_1, \forall Y \in \mathbf{g}_2.$$

Alors:

$$\begin{aligned}\Psi_\pi(\xi)(X, 0) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{\infty} (\pi_1(\exp tX)\,\eta_j^1) \otimes e_j^2, \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^1 \otimes e_k^2\right)\Bigg|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (X \cdot \eta_j^1, \eta_j^1).\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\Psi_\pi(\xi)|_{\mathbf{g}_1 \times \{0\}} \subset conv(I_{\pi_1}) = I_{\pi_1}.$$

De même:

$$\Psi_\pi(\xi)|_{\{0\} \times \mathbf{g}_2} \subset I_{\pi_2}$$

et donc:

$$I_\pi \subset I_{\pi_1} \times I_{\pi_2}.$$

D'autre part, soient l_i des points de I_{π_i}. Ils s'écrivent $\Psi_{\pi_i}(\xi_i) + o(\varepsilon)$ pour des ξ_i normés de $\mathscr{H}_i^\infty$ $(i = 1, 2)$, alors pour chaque (X, Y) de $\mathbf{g}$, nous avons:

$$\begin{aligned}(l_1, l_2)(X, Y) = l_1(X) + l_2(Y) &= \Psi_{\pi_1}(\xi_1)(X) + \Psi_{\pi_2}(\xi_2)(Y) + o(\varepsilon) \\ &= \Psi_\pi(\xi_1 \otimes \xi_2)(X, Y) + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Et (l_1, l_2) est un élément de I_π. Nous avons finalement montré que:

$$I_\pi = I_{\pi_1} \times I_{\pi_2}.$$

D'autre part, si Ω désigne l'$Ad^*(G)$-orbite de (p_1, p_2), si p appartient à $conv(\Omega)^-$ et si ε est positif, alors il existe $g_1^1, ..., g_N^1$ dans G_1 et $g_1^2, ..., g_M^2$ dans G_2 et des nombres positifs t_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant M)$ tels que:

$$\sum_{i,j} t_{ij} = 1 \qquad \text{et} \quad p = \sum_{i,j} t_{ij}\, Ad^*(g_i^1, g_j^2)(p_1, p_2) + o(\varepsilon).$$

Mais, si nous notons Ω_k l'$Ad^*(G_k)$-orbite de p_k, $k = 1, 2$, alors:

$$p|_{\mathbf{g}_1 \times \{0\}} = \sum_i \left(\sum_{j=1}^{M} t_{ij} \right) Ad^*(g_i^1)\, p_1 + o(\varepsilon)$$

appartient à $conv(\Omega_1)^-$ et:

$$p|_{\{0\} \times \mathbf{g}_2} = \sum_j \left(\sum_{i=1}^{N} t_{ij} \right) Ad^*(g_j^2)\, p_2 + o(\varepsilon)$$

appartient à $conv(\Omega_2)^-$. Finalement, p appartient à $conv(\Omega_1)^- \times conv(\Omega_2)^-$ donc à $I_{\pi_1} \times I_{\pi_2}$ et:

$$conv(\Omega)^- \subset I_\pi.$$

D'autre part, si (q_1, q_2) est un point de I_π, alors:

$$q_1 = \sum_{i=1}^{N} r_i\, Ad^*(g_i^1)\, p_1 + o(\varepsilon) \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{N} r_i = 1,\ r_i \geqslant 0\ \ \forall i,$$

$$q_2 = \sum_{j=1}^{M} s_j\, Ad^*(g_j^2)\, p_2 + o(\varepsilon) \qquad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{M} s_j = 1,\ s_j \geqslant 0\ \ \forall j.$$

Donc:

$$(q_1, q_2) = \sum_{i,j} r_i s_j\, Ad^*(g_i^1, g_j^2)(p_1, p_2) + o(\varepsilon)$$

est un point de $conv(\Omega)^-$ ou:

$$I_\pi = conv(\Omega_1)^- \times conv(\Omega_2)^- \subset conv(\Omega)^-. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

22. Si G_1 est abélien, il est facile de voir que la réciproque est vraie. Plus précisément:

PROPOSITION. *Soit G_1 un groupe de Lie abélien et soit G_2 un groupe de Lie quelconque. Alors une représentation unitaire irréductible π du produit direct $G_1 \times G_2$, de la forme $\pi_1 \otimes \pi_2$, est convexe si et seulement si π_2 est convexe. En outre*:

$$I_{\pi_1 \otimes \pi_2} = \{-l\} \times I_{\pi_2}, \qquad \text{où} \quad d\pi_1 = -il \in i\mathbf{g}_1^*.$$

23. La proposition 22 nous permet de déterminer l'ensemble moment des représentations irréductibles π d'un groupe de Lie compact G. En effet un tel groupe possède un revêtement universel $\tilde{G}$ de la forme:

$$\tilde{G} = K \times \mathbb{R}^n$$

où K est un groupe de Lie compact semi-simple et simplement connexe (voir [Wal, 4.6.8]). Nous remontons donc π en une représentation unitaire irréductible $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ et I_π coïncide avec $I_{\tilde{\pi}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ber] BERNAT ET AL., "Représentations des groupes de Lie résolubles," Monographie de la Soc. Math. de France, 4, Dunod, Paris, 1972.

[Dix] J. DIXMIER, "Les C^*-algèbres et leurs représentations," Cahiers scientifiques, fascicule XXIX, Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[Dix, Mal] J. DIXMIER ET P. MALLIAVIN, Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, *Bull. Sc. Math. 2^e série* **102** (1978), 305–330.

[Jac] N. JACOBSON, "Lie Algebras," Wiley, New York/London, 1962.

[Kir] F. KIRWAN, Convexity property of the moment mapping, III, *Invent. Math.* **77** (1984), 547–552.

[Poul] N. POULSEN, On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.* **9** (1972), 87–120.

[PukA] L. PUKANSZKY, Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **4** (1973), 457–608.

[PukB] L. PUKANSZKY, The primitive ideal space of solvable Lie groups, *Invent. Math.* **22** (1973), 75–118.

[Raw] J. RAWNSLEY, Coherent states and Kaehler manifolds, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **28** (1977), 403–427.

[Tak] M. TAKESAKI, "Theory of Operator Algebras, I," Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1979.

[Wal] N. WALLACH, "Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces," Dekker, New York, 1973.

[War] G. WARNER, "Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups," Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1972.

[WilA] N. WILDBERGER, On the Fourier transform of a compact semi-simple Lie group, preprint, Ontario University, 1986.

[WilB] N. WILDBERGER, Convexity and unitary representations of nilpotent Lie groups, *Invent. Math.* **98** (1989), 281–292.