JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 78, 185–196 (1988)

Problème de Cauchy semi-linéaire en 3 dimensions d'espace. Un résultat de finitude

GILLES LEBEAU

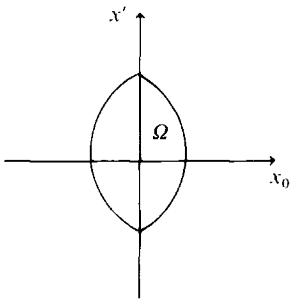
Départment de Mathématiques, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, Paris, France

Communicated by Richard Melrose

Received December 16, 1986

1. ÉNONCE DU RÉSULTAT

Soit $x=(x_0, x')$ le point courant de l'espace temps $\mathbb{R}^4$, $x'=(x_1, x_2, x_3)$, $\Box$ l'opérateur des ondes, $\Box = \partial^2_{x_0} - \Delta_{x'}$. Ω un ouvert de $\mathbb{R}^4$, $\omega = \{\Omega \cap x_0 = 0\}$; on suppose que Ω est un domaine d'influence pour ω



Soit $u(x_0, x')$ un élément de $H^s(\Omega)$, $s > 2 = (3+1)/2$ qui vérifie l'équation des ondes semi-linéaires:

$$\Box u = p(u) \qquad \text{dans } \Omega$$

$$u|_{x_0=0} = u_0 \in H^s_{\mathrm{loc}}(\omega)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = u_1 \in H^{s-1}_{\mathrm{loc}}(\omega).$$

On suppose que $p(u) = \sum_{j=0}^{d} p_j(x)\, u^j$, où les $p_j(x)$ sont des fonctions C^∞ sur Ω, et que les traces u_0 et u_1 sont des distributions intégrales de Fourier C^∞ sur Λ, où $\Lambda \subset T^*\omega$ est une Lagrangienne analytique réelle lisse.

0022-1236/88 $3.00

THEORÈME. *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, il existe un ensemble sous-analytique, homogène, isotrope L_σ dans $T^*\Omega$, tel que*

$$WF^\sigma(u) \subset L_\sigma.$$

On en déduit le corollaire suivant: pour tout entier k, u est de classe C^k sur un ouvert dense (et sous-analytique) de Ω.

Remarque. Le contre-example de Beals [1] ne se produit donc pas avec des traces de type distributions Lagrangiennes analytiques.

2. PREMIÈRE RÉDUCTION ALGÉBRIQUE

Soit $v(x)$ la solution du problème linéaire

$$\Box v = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

$$v|_{x_0=0} = u_0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = u_1$$

et L la Lagrangienne (analytique) de $T^*\Omega$, réunion des bicaractéristiques de $\Box$ passant au-dessus de Λ. Alors $v \in H^s(\Omega)$ et est une distribution intégrale de Fourier sur L. On pose

$$u = v + f$$

$$f = f_+ + f_-, \qquad f_\pm = f \mathbb{1}_{\pm x_0 \geqslant 0}.$$

On est donc ramené à prouver le théorème pour f_+. On désigne par E_+ (resp. E_-) la parametrix de $\Box$ propageant vers le futur ($x_0 \geqslant 0$) (resp. le passé $x_0 \leqslant 0$). On suppose dans la suite qu'on a

$$2 < s < \tfrac{5}{2}.$$

LEMME 1. *Soit $g \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$. Alors $h = E_+(g \mathbb{1} x_0 \geqslant 0)$ appartient à $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, est à support dans $x_0 \geqslant 0$ et par suite $h|_{x_0=0} = 0$, $\partial h/\partial x_0|_{x_0=0} = 0$.*

Preuve. On a $\Box h = g \mathbb{1} x_0 \geqslant 0$, et on peut supposer g à support compact dans Ω.

Soit $\tilde{h}$ la solution du problème de Cauchy

$$\Box \tilde{h} = g \qquad \text{sur } \mathbb{R}^4$$

$$\tilde{h}|_{x_0=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = 0.$$

On a $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_{x_0}, H^{s-1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_{x_0}, H^{s-3/2}(\mathbb{R}^3))$ et

$$\hat{\tilde{h}}(x_0, \xi') = Cte \int_0^{x_0} \frac{\sin(x_0 - y_0)\,|\xi'|}{|\xi'|}\, \hat{g}(y_0, \xi')\, dy_0$$

d'où il résulte qu'on a

$$\tilde{h} \in H^{s+1/2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4).$$

On a $h = \tilde{h} 1_{x_0 \geqslant 0}$ et donc si $|\alpha| \leqslant 2$ on en déduit $\partial_x^\alpha h = (\partial_x^\alpha \tilde{h})\, 1_{x_0 \geqslant 0}$. Or $\partial_x^\alpha \tilde{h} \in H^{s-2+1/2}(\mathbb{R}^4)$ d'où $\partial_x^\alpha h \in H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^4)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme $s < \frac{5}{2}$ on a $h \in H^s(\mathbb{R}^4)$.

Pour tout entier l, on décompose f_+ sous la forme

$$f_+ = a_l + s_l$$

où a_l, s_l sont des éléments de $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, à support dans $x_0 \geqslant 0$, définis par récurrence par:

$$a_0 = 0, \qquad s_0 = f_+$$

$$\left.\begin{aligned} a_{l+1} &= E_+\left(\sum_{j,k} p_j C_j^k v^{j-k} 1_{x_0 \geqslant 0} a_l^k\right), \\ s_{l+1} &= E_+\left(\sum_{j,k,m \geqslant 1} p_j C_j^k v^{j-k} C_k^m a_l^{k-m} s_l^m\right), \end{aligned}\right\} \quad l \geqslant 0 \qquad (*)$$

où les $C_n^m = n!/m!(n-m)!$ sont les coefficients du binôme. On obtient $(*)$ en remplaçant f_+ par $a_l + s_l$ dans l'identité

$$f_+ = E_+[p(v 1_{x_0 \geqslant 0} + f_+)]$$

et en séparant les termes qui contiennent des puissances de s_l des termes indépendants de s_l.

On remarquera que les a_l sont entièrement calculables à partir de la solution v du problème linéaire.

3. Étude des s_l

3.1. *Espaces de Sobolev*

On introduit des espaces de Sobolev pour des distributions $b(x^1, ..., x^k; y)$ sur l'espace produit $\underbrace{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4}_{k+1 \text{ facteurs}}$. On notera X^k la variable $(x^1, ..., x^k)$ et $x^j = (x_0^j, x^{j'})$.

DÉFINITION. Soit $\underline{X}^k \in \mathbb{R}^{4k}$, $\bar{y}^* = (\bar{y}, \bar{\eta}) \in \dot{T}^*\mathbb{R}^4$, et $\sigma \geqslant 0$. On dit que $b(x^1, ..., x^k; y)$ appartient à l'espace B_k^σ au point $(\underline{X}^k, \bar{y}^*)$ s'il existe $\phi(X^k) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{4k})$, égale à 1 près de $\underline{X}^k$, $\varphi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ égale à 1 près de $\bar{y}$ et Γ, voisinage conique de η_0 tels que

$$\widehat{\phi \cdot \varphi \cdot b}(\xi^1, ..., \xi^k; \eta) \frac{1}{\prod_{j=1}^k (1+|\xi^j|)^s} (1+|\eta|)^\sigma \in L^2(\mathbb{R}^{4k} \times \Gamma).$$

On notera $\dot{B}_{k,\bar{y}^*}^\sigma = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega^{k+1})$, support $u \subset \{(X^k, y), \forall j, x^j \in$ cône rétrograde issue de $y\}$ et $u \in B_k^\sigma$ en tout point $(X^k, \bar{y}^*)\}$.

LEMME 2. *Soit $j \in \{1, ..., k\}$, $a(x^j) \in H^s(\mathbb{R}^4)$ près de $\underline{x}^j$, $b(x^1, ..., x^k, y) \in B_k^\sigma$ près de $\underline{X}^k = (\underline{x}^1, ..., \underline{x}^j, ..., \underline{x}^k)$, $\bar{y}^*$. Alors $a \cdot b \in B_k^\sigma$ près de $(\underline{X}^k, \bar{y}^*)$.*

Preuve. La preuve est identique à celle de la propriété $H^s(\mathbb{R}^n) \cdot H^{-s}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2$.

LEMMA 3. *Soit $\bar{y}^*$ un point de $T^*\mathbb{R}^4$ $b(X^k, y) \in \mathscr{D}'(\Omega^{k+1})$ telle que le support de b soit contenu dans $\{(x^1, ..., x^k, y); \forall j, x_0^j \geqslant 0$ et $x^j \in$ cône d'onde rétrograde issue de $y\}$.*

On suppose que $b \in B_k^\sigma$ en tout point de la forme $(X^k, \bar{y}^*)$. Alors

$$\int b(x^1, ..., x^k; y)\, dx^1 \cdots dx^k \in H_{\bar{y}^*}^\sigma(\mathbb{R}^4)$$

où l'espace de droite est le Sobolev microlocal usuel.

Soit $b \in \dot{B}_{k,\bar{y}^*}$. On note

$$E_-^{\otimes k} b$$

l'unique distribution sur Ω^{k+1} qui verifie

$$\square_{x_1} \cdots \square_{x_k} (E_-^{\otimes k} b) = b.$$

Support $(E_-^{\otimes k} b) \subset \{(x^1, ..., x^k; y)\ \forall j, x^j \in$ cône rétrograde issue de $y\}$. Si $e_-(x - \tilde{x})$ désigne le noyau de E_- on a

$$E_-^{\otimes k} b(x^1, ..., x^k, y) = \int \prod_{j=1}^k e_-(x^j - \tilde{x}^j)\, b(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^k; y)\, d\tilde{x}^1\, d\tilde{x}^k.$$

LEMME 4. *Soit b vérifiant les hypothèses du lemma 2. Alors $E_-^{\otimes k} b \in \dot{B}_{k,\bar{y}^*}^\sigma$. On suppose de plus:*

$$\forall X^k, \qquad (X^k; \xi^1 = \cdots = \xi^k = 0; \bar{y}^*) \notin WF(b).$$

Alors $E_-^{\otimes k} b \in \dot{B}_{k,\bar{y}^*}^{\sigma+1}$ avec $X^k \in \Omega^k$.

Preuve. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{\varphi(x_0)\, e_-(x_0, x')}(\xi_0, \xi') \leqslant \frac{Cte}{(1+|\xi_0|+|\xi'|)}$$

donc on a $E_-^{\otimes k} b \in \dot{B}^\sigma_{k, \bar{y}^*}$.

Si on a de plus la condition sur le front d'onde, on a $|\eta| \leqslant Cte\,|\xi|$ si (ξ, η) appartient au front d'onde de b au-dessus d'un point (X^k, y) avec y près de $\bar{y}$ et η dans un voisinage conique de $\bar{\eta}$. Il en résulte

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^k (1+|\xi^j|)} \leqslant \frac{Cte}{1+|\eta|}$$

donc $E_-^{\otimes k} b \in \dot{B}^{\sigma+1}_{k, \bar{y}^*}$.

On définit à présent un opérateur d'extension du nombre des variables

$$b \to \prod_{j=1}^{k} \delta_{x^j, l_j}(b) \qquad (l_j \text{ entier } \geqslant 1)$$

qui envoie $\mathscr{D}'(\Omega^{k+1})$ dans $\mathscr{D}'(\Omega^{l_1+\cdots l_k+1})$, par:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega^{l_1+\cdots+l_k+1}),$$

$$\int \prod_{j=1}^{k} \delta_{x^j, l_j}(b)\, \varphi \overset{\text{def}}{=} \int b(x^1, ..., x^k; y) \cdot \varphi(\underbrace{x^1, ..., x^1}_{l_1 \text{ fois}}, ..., \underbrace{x^k, ..., x^k}_{l_k \text{ fois}}; y).$$

LEMME 5. *Si* $b \in B^\sigma_k$ *au point* $(x^1, ..., x^k; \bar{y}^*)$, *alors* $\prod_{j=1}^k \delta_{x^j, l_j}(b) \in B^\sigma_{l_1+\cdots+l_k}$ *au point* $(\underbrace{x^1, ..., x^1}_{l_1 \text{ fois}}, ..., \underbrace{x^k, ..., x^k}_{l_k \text{ fois}}; \bar{y}^*)$.

Preuve. Le problème étant de nature locale, on peut supposer $b \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^{4k+4})$ et $b \in B^\sigma_k$ pour tout point de la forme $(X^k, \bar{y}^*)$, $X^k \in \mathbb{R}^{4k}$. De plus, par récurrence sur le nombre de variables d'extension, il suffit de traiter le cas $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, ..., $l_k = 1$. On a alors

$$\text{Fourier}\left(\prod \delta_{x^j, l_j}(b)(x^1, x'^1, x^2, ..., x^k; y)\right)(\xi^1, \xi'^1, \xi^2, ..., \xi^k, \eta)$$
$$= \hat{b}(\xi^1 + \xi'^1, \xi^2, ..., \xi^k, \eta).$$

En revenant à la définition de B^σ_{k+1}, on voit que le résultat est conséquence de

$$\sup_\xi\, (1+|\xi|)^{2s} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{(1+|\xi-\xi'|)^{2s}} \frac{1}{(1+|\xi'|)^{2s}}\, d\xi' < +\infty$$

qui résulte de $2s > 4$.

3.2. *Intégration par parties*

Dans ce paragraphe, on fixe un point $\bar{y}^* \in \dot{T}^*\Omega$, et un entier $l \geqslant 0$. On désigne par B^σ l'espace vectoriel

$$B^\sigma_{\bar{y}^*} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \dot{B}^\sigma_{k,\bar{y}^*}.$$

Un sous-espace vectoriel V de dimension finie de $B^\sigma_{\bar{y}^*}$ est dit homogène s'il possède une base $w_1, ..., w_N$ telle que pour tout j, il existe $k_j \geqslant 1$ avec $w_j \in \dot{B}^\sigma_{k_j,\bar{y}^*}$.

On définit par récurrence des sous $\mathbb{C}$ e.v. de B^0 de dimension finie, homogènes, V_l^ν pour $0 \leqslant \nu \leqslant l$ en posant

$$V_l^0 = \mathbb{C} \cdot \delta_{x=y}$$

$V_l^\nu = \mathbb{C}$ e.v. engendré par les distributions de la forme

$$\prod \delta_{x^j, l_j} \cdot \prod_{j=1}^{k} a_{l-\nu}^{k_j - l_j}(x^j)\, v^{n_j - k_j}(x^j)\, p_{n_j}(x^j) \cdot E_-^{\otimes k}(b(x^1, ..., x^k; y))$$

où $b(x^1, ..., x^k; y) \in V_l^{\nu-1} \cap \dot{B}^0_{k,\bar{y}^*}$, et l_j, k_j, n_j parcourt les triplets d'entiers vérifiant $l_j \leqslant k_j \leqslant n_j \leqslant d$.

On remarquera qu'on a bien $\delta_{x=y} \in \dot{B}^0_{1,\bar{y}^*}$; Il résulte alors des lemmes 2, 4, 5 et du fait que $a_{l-\nu}$ et v sont dans $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, que les V_l^ν sont bien des sous-espaces de $B^0_{\bar{y}^*}$; ces espaces sont indépendants de $\bar{y}^*$.

LEMME 6. *Pour tout $i \in \{0, ..., l\}$, $s_l(y)$ est combinaison linéaire finie de fonctions de la forme*

$$\int s_{l-i}(x^1) \cdots s_{l-i}(x^k)\, b(x^1, ..., x^k; y)\, dx^1\, dx^k$$

avec $b \in V_l^i \cap \dot{B}^0_{k,\bar{y}^*}$.

Preuve du lemme 6. Par récurrence sur i. Pour $i = 0$, on a bien $s_l(y) = \int s_l(x)\, \delta_{x=y}\, dx$. Supposons l'assertion démontrée au rang i. On va réduire le terme

$$A = \int s_{l-i}(x^1)\, s_{l-i}(x^k)\, b(x^1, ..., x^k; y)\, dx^1 \cdots dx^k.$$

Pour tout $j \in \{1, ..., k\}$ on a:

$$s_{l-i}(x^j) = E_+\left(\sum_{(l_j \geqslant 1)} p_{n_j} C_{n_j}^{k_j} [v(x^j)]^{n_j - k_j} C_{k_j}^{l_j} [a_{l-i-1}(x^j)]^{k_j - l_j} s_{l-i-1}^{l_j}(x^j) \right).$$

Comme $l_j \geqslant 1$ dans la sommation de droite, le terme à l'intérieur de la parenthèse est à support dans $x_0^j \geqslant 0$ et appartient à $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On a donc A combinaison linéaire de termes de la forme:

$$\int \prod_j s_{l-i-1}^{l_j}(x^j) \cdot \left[\prod_j p_{n_j}(x^j)\, v(x^j)^{n_j - k_j}\, (a_{l-i-1}(x^j))^{k_j - l_j} \right] E_-^{\otimes k}(b) \cdot dx^1 \cdots dx^k. \tag{$*$}$$

On a utilisé ici la formule d'intégration par partie

$$\int \prod_j E_+(h_j(x^j))\, b(x^1, ..., x^k; y)\, dx^1 \cdots dx^k = \int \prod_j h_j(x^j)\, E_-^{\otimes k}(b)\, dx^1 \cdots dx^k$$

avec $b \in B^0_{\bar{y}^*}$ pour tout $\bar{y}^* \in T^*\Omega$ et $h_j \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, à support dans $x_0^j \geqslant 0$.

Equation $(*)$ n'est autre que l'intégrale

$$\int \prod_j [s_{l-i-1}(x^{j,1}) \, s_{l-i-1}(x^{j,l_j})]$$

$$\underbrace{\cdot \prod \delta_{x^j, l_j} \prod_j p_{n_j}(x^j)\, v^{n_j - k_j}(x^j)\, a_{l-i-1}^{k_j - l_j}(x^j)\, E_-^{\otimes k}(b)}\, dx^1 \cdots dx^k.$$

Par définition, le terme sous-ligné appartient à V_l^{l+1} et le lemme est démontré.

COROLLAIRE 1. *$s_l(y)$ est combinaison linéaire finie de fonctions de la forme*

$$\int f_+(x^1) \cdots f_+(x^k)\, b(x^1, ..., x^k; y)\, dx^1 \cdots dx^k$$

avec $b \in V_l^l$.

Introduisons à présent les sous-ensembles de $T^*\Omega$ qui vont servir à majorer le front d'onde.

DÉFINITION. $Z_l^i = \{ \bar{y}^* \in T^*\Omega,\ \exists b(x^1, ..., x^k; y) \in V_l^i,\ \exists (\underline{x}^1, ..., \underline{x}^k)$ tels que $\forall j,\ \underline{x}_0^j \geqslant 0$ et $(\underline{x}^1, ..., \underline{x}^k;\ \xi^1 = 0, ..., \xi^k = 0;\ \bar{y}^*) \in WF(b) \}$.

LEMME 7. *Si $\bar{y}^* \notin Z_l^0 \cup \cdots \cup Z_l^{l-1}$, on a $s_l \in H^l_{\bar{y}^*}(\Omega)$.*

Preuve. D'après les lemmes 2 et 3 et le corollaire 1 il suffit de vérifier que tout élément $b(x^1, ..., x^k; y)$ de V_l^i appartient à B_k^i au voisinage des points $(x^1, ..., x^k)$, $\bar{y}^*$ vérifiant $x_0^j \geqslant 0$. Or cela se voit par récurrence sur i en utilisant le lemme 4, la propriété de support de la solution élémentaire E_-, la définition des espaces V_l^i, et les lemmes 2 et 5.

4. Réduction du théorème à un résultat géométrique

Définition. Une distribution T vérifie l'hypothèse (I) si son front d'onde C^∞, $WF(T)$ est contenu dans un ensemble sous-analytique *isotrope* homogène.

Lemme 8. *Soit $Z \subset T^*(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^p_y)$ un sous-ensemble sous-analytique isotrope, homogène, contenu dans $|x| \leqslant M$. Alors $\{(y, \eta) \in T^*(\mathbb{R}^n_y), \exists x, (x, y, \xi = 0, \eta) \in Z\}$ est sous-analytique isotrope, homogène.*

Preuve. Classique.

Corollaire 2. *Si $T(x, y)$ vérifie l'hypothèse* (I) *et est à support compact en x, alors $\int T(x, y)\, dx$ vérifie l'hypothèse* (I).

La proposition suivante entraîne le théorème:

Proposition 1. *Pour tout entier l, a_l vérifie l'hypothèse* (I) *et tout élément $b(x^1, ..., x^k; y)$ de V_l^i $0 \leqslant i \leqslant l$ vérifie l'hypothèse* (I).

Supposons cela démontré. Soit l un entier; on a $f_+ = a_l + s_l$. D'après la proposition 1, $WF(a_l)$ est contenu dans un ensemble isotrope sous-analytique; le lemme 8 entraîne que les Z_l^i sont contenus dans des ensembles de même type. On déduit alors du lemme 7 que $f_+ \in H^l_{\bar{y}^*}(\Omega)$ pour $\bar{y}^*$ en dehors d'un ensemble isotrope sous-analytique et le théorème est démontré.

Définition. On désigne par A la $\mathbb{C}$-algèbre de fonctions sur Ω engendrée par les coefficients $p_j(x)$ du polynôme p, la solution du problème linéaire v, et la fonction caractéristique $1_{x_0 \geqslant 0}$. Les éléments de A sont des fonctions mesurables et bornées.

Lemme 9. *Pour tout l entier, $a_l(x)$ est combinaison linéaire d'intégrales (à support propre en z) du type*

$$\int \prod_{j=1}^{N'} g_j(M_j(x; z_1, ..., z_N)) \prod_{i=1}^{N} e_+(z_i)\, dz_1 \cdots dz_N$$

où $e_+(z)$ est la solution élémentaire des ondes à support dans $z_0 \geqslant 0$, les g_j sont des éléments de A et

$$(x; z_1, ..., z_N) \to M_j(x; z_1, ..., z_N)$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^{4(N+1)}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Preuve. On rappelle d'abord qu'en dimension 3 d'espace, $e_+(z)\, dz$ est une *mesure* loc bornée, de sorte que l'intégrale écrite est bien définie et est a priori fonction bornée de x. Il résulte de la preuve que les M_j prennent leurs valeurs dans Ω pour z dans le support de l'intégrant et x dans Ω. On montre le résultat par récurrence sur l. On a par définition

$$a_{l+1}(x) = \int e_+(x-x') \sum_{j,k} p_j(x')\, C_j^k v^{j-k}(x')\, 1_{x'_0 \geqslant 0} a_l^k(x')\, dx'$$

d'où $a_{l+1}(x)$ combinaison linéaire de termes de la forme

$$\int e_+(x-x')\, p_\cdot(x')\, v^\cdot(x')\, 1_{x'_0 \geqslant 0} \prod_{n=1}^{k} \prod_{j=1}^{N'_n} g_{j,n}[M_{j,n}(x'; z_{1,n}, ..., z_{N_n,n})]$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{N_n} e_+(z_{i,n})\, dx'\, dz$$

et il suffit de poser $x' = x - z_0$ pour se ramener à la forme désirée.

LEMME 10. *Pour $v \geqslant 1$, tout élément $b(x^1, ..., x^M; y)$ de V_l^v est combinaison linéaire de mesures de la forme*

$$\prod_{j=1}^{k} \delta_{x^j, l_j} \int \prod_{j=1}^{k} e_-(x^j - T_j(y, z'))$$
$$\cdot \prod_\alpha g_\alpha[M_\alpha(x^1, ..., x^k; y, z_1, ..., z_N, z'_1, ..., z'_{N'})]$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{N} e_+(z_i) \prod_{i=1}^{N'} e_-(z'_i)\, dz_1 \cdots dz_N\, dz'_1 \cdots dz'_{N'}$$

où comme précédemment les g_α sont dans l'algèbre A, les applications M_α, T_j sont linéaires, et $e_-(z)$ est la solution élémentaire à support dans $z_0 \leqslant 0$ de l'équation des ondes.

Preuve. Pour $v = 1$, on a

$$b(x^1, ..., x^M; y) = \left(\prod \delta_{x, M}\right) [a_{l-1}(x)]^{(\cdot)}\, v(x)^{(\cdot)}\, p_\cdot(x)\, e_-(x-y)$$

qui est bien de la forme indiquée en utilisant le lemme 9, avec $k=1$, $N'=0$, $T(y)=y$.

Ensuite la preuve se fait par récurrence: supposons la propriété vérifiée au rang $v-1$.

Par construction, v_l^v est le $\mathbb{C}$ e.v. engendré par les distributions

$$\prod \delta_{x^j, l_j} \prod_{j=1}^{k} a_{l-v}^{k_j - l_j}(x^j)\, v^{n_j - k_j}(x^j)\, p_{n_j}(x^j)\, E_-^{\otimes k}(b(x^1, ..., x^k, y))$$

avec b élément de $V_l^{\gamma-1} \cap \dot{B}^0_{k,\bar{\nu}^*}$. D'après le lemme 9 il suffit d'étudier le terme $E_-^{\otimes k}(b(x^1, ..., x^k, y))$ qui est par hypothèse combinaison linéaire de termes de la forme

$$\int dx'\, dz\, dz' \prod_{j=1}^{k} \left[e_-(x^j - x'^{n(j)}) \prod_{n=1}^{k'} e_-(x'^n - T_n(y, z')) \right]$$

$$\cdot \prod g_\alpha \cdot \prod e_+(\cdot) \prod e_-(\cdot)$$

on introduit alors de nouvelles variables z' en posant

$$x'^n = z'_{N'+n} + T_n(y, z'_n)$$

et les nouvelles applications linéaires T'_j sont définies par

$$T'_j(y, z') = z'_{N'+n(j)} + T_{n(j)}(y, z').$$

D'après le corollaire 2, l'hypothèse (I) est stable par image directe. Comme elle est stable par produit tensoriel et opérateur d'extension $\prod \delta_{x^j, l_j}$, il suffit de prouver la:

Proposition 2. *Une mesure de la forme*

$$\prod_{i=1}^{N} e_+(z_1) \prod_{i=1}^{N'} e_-(z'_i) \prod_\alpha g_\alpha(M_\alpha(x, z, z')) = h(x, z, z')$$

où $z_i, z'_i \in \mathbb{R}^4$, $x \in \mathbb{R}^N$, M_α *linéaire*, g_α *dans l'algèbre* A *vérifie l'hypothèse* (I).

On va d'abord ramener la preuve de cette proposition à une proposition plus simple. Tout d'abord, quitte à changer z'_i en $-z'_i$, on peut supposer $N' = 0$. Ensuite on écrit

$$e_+(z) = \frac{\delta(z_0 - |z'|)}{|z'|} \qquad \text{(à une constante près)}$$

et on pose $z'_j = \rho_j \omega_j$, $\rho_j \in \mathbb{R}$, $\omega_j \in \mathbb{S}^2$ $(\omega_j^2 = 1)$. On obtient alors

$$h(x, z) = \int d\rho\, d\omega \prod_{j=1}^{N} \delta_{z_{0,j} = \rho_j}$$

$$\otimes\, \delta_{z'_j = \rho_j \omega_j} \prod_{j=1}^{N} \rho_j 1_{\rho_j \geqslant 0} \prod_\alpha g_\alpha[M_\alpha(x; \rho_1, \rho_1\omega_1, ..., \rho_N, \rho_N\omega_N)]$$

avec par définition

$$\int \delta_{z' = \rho\omega}\, \varphi(z', \rho, \omega)\, dz'\, d\rho\, d\omega = \int \varphi(\rho\omega, \rho, \omega)\, d\rho \cdot d\omega$$

et $d\omega$ désigne la mesure superficielle sur la sphère. Comme l'hypothèse (I) est stable par changement de variable, produit tensoriel, image directe et que la mesure de Dirac vérifie l'hypothèse (I), on est ramené à prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *Soit $S_\beta\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^4$ des applications analytiques réelles, $h_\beta(x)$ des intégrales de phases, C^∞ à Lagrangiennes analytiques, dans $H^s(\mathbb{R}^4)$ avec $s>2$, $1_\beta(x)$ des fonctions caractéristiques de demi-espaces analytiques fermés. Alors la fonction sur $\mathbb{R}^q$*

$$\prod_\beta 1_\beta(S_\beta(y))\, h_\beta(S_\beta(y))$$

vérifie l'hypothèse (I).

La preuve de cette proposition fait l'objet du paragraphe 5.

5

Soit $u(x)$ une intégrale de phase dans R^n:

$$u(x) = \int e^{i\phi(x,\theta)}\sigma(x,\theta)\, d\theta; \qquad \theta\in R^N$$

où la phase ϕ est non dégénérée, analytique, associée à une lagrangienne analytique lisse, σ étant un symbole C^∞. Si $u\in H^s$ avec $s>n/2$, on peut supposer $\deg(\sigma) < -N$ et $N \leqslant n$, de sorte que l'intégrale de définition de u est absolument convergente. En posant $\theta=\lambda\omega$, $\omega^2=1$, $\lambda\in R^+$, on a alors:

$$u(x) = \int d\omega \int e^{i\lambda\phi(x,\omega)}\sigma(x,\omega,\lambda)\,\lambda^{N-1}\, d\lambda.$$

En utilisant le corollaire 2, on voit donc que la proposition 3 est conséquence de la proposition suivante:

PROPOSITION 4. *Soit $g_1(z), ..., g_M(z)$, $f_1(z), ..., f_M(z)$ des fonctions analytiques réelles, $\sigma_1(z,\lambda), ..., \sigma_M(z,\lambda)$ des symboles C^∞ de degré strictement inférieur à -1, et*:

$$h(z) = 1_{\{g_1>0,\dots,g_M>0\}}\cdot \prod_{j=1}^{M}\int_0^\infty e^{i\lambda_j f_j(z)}\sigma_j(z,\lambda_j)\, d\lambda_j.$$

Alors h vérifie l'hypothèse (I).

Preuve. Fixons un point z_0. D'après le théorème de dèsingularisation réel d'Hironaka il existe un morphisme analytique réel propre

$$A \xrightarrow{\ \phi\ } (z_0, V)$$

où A est lisse, V est un voisinage (sous-analytique) de z_0 tel que ϕ induise un isomorphisme de $A-\phi^{-1}(f^{-1}(0))$ sur $V-f^{-1}(0)$ avec $f=\prod_{j=1}^{M} f_j \prod_{j=1}^{N} g_j$, et tel que près de chaque point a_0 de A on ait:

$$F \stackrel{\text{def}}{=} f\circ\phi = e\, a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n} \tag{$*$}$$

où $(a_1, ..., a_n)$ est une carte locale, les α_i des entiers positifs ou nuls et $e(a)$ une fonction analytique réelle vérifiant $e(a_0)\neq 0$.

Soit $|dz|$ la mesure de Lebesgue sur V et $\phi^*(|dz|)$ la densité sur A qui vaut $|\det\phi'|\ |da|$ dans une carte locale. Pour toute fonction $h(z)$ mesurable et bornée on a $\phi_*(h\circ\phi\cdot\phi^*(|dz|))=h|dz|$. En factorisant ϕ par: $A \rightarrow^{\mathrm{Gr}\,\phi} A\times V \rightarrow^{\mathrm{pr}_2} V$, et en utilisant à nouveau le lemme 8, on voit qu'il suffit de vérifier que $WF[h\circ\phi\cdot\phi^*(|dz|)]$ est contenu dans un ensemble isotrope sous-analytique. Posons $F_j=f_j\circ\phi$, $G_j=g_j\circ\phi$. Alors F_j et G_j divisent F donc sont aussi de la forme $(*)$.

Soit Q un quadrant du diviseur près de a_0. Alors $h\circ\phi\cdot\phi^*(|dz|)$ est somme de termes de la forme

$$1_Q\cdot w(a)$$

avec

$$w(a)=\prod_{j=1}^{M}\int_0^{\infty} e^{i\lambda_j F_j(a)}\sigma_j(\phi(a),\lambda_j)\,d\lambda_j.$$

Il en résulte que le spectre en a_0 de $(h\circ\phi)\,\phi^*(|dz|)$ est contenu dans

$$\{(a_0;\xi_1, ..., \xi_n);\ \xi_j=0 \text{ si } \alpha_j=0\}$$

donc dans le conormal au diviseur définit par F, qui est isotrope semi-analytique.

Références

1. M. Beals, Self spreading and strength of singularities for solutions to semi-linear wave equations, *Ann. of Math.* **118**.
2. J. M. Bony, Interaction des singularités, Sem. Goulaouic Meyer Schwartz, No. 2, 1981/1982, and No. 10, 1983/1984.
3. J. M. Bony, Singularités de problème de Cauchy hyperbolique non linéaire, *in* "Advances in Microlocal Analysis" (H. G. Garnir, Ed.), Nato ASI Series 1985, Castelvecchio Pascoli, Italy, Reidel, Dordrecht, 1985.
4. R. Melrose, Conormal rings and semi-linear wave equation, *in* "Advances in Microlocal Analysis" (H. G. Garnir, Ed.), Nato ASI Series 1985, Castelvecchio Pascoli, Italy, Reidel, Dordrecht, 1985.

Printed in Belgium