Bull. Sci. math. 127 (2003) 797–813

BULLETIN DES SCIENCES MATHEMATIQUES

www.elsevier.com/locate/bulsci

Distorsion des distances dans les groupes de Lie nilpotents

Nourredine Bounechada

Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, UFR 920 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 2 juillet 2003 ; accepté le 8 juillet 2003

Résumé

Soit G un groupe de Lie connexe nilpotent et H un sous-groupe connexe de G. On calcule explicitement la distance à l'origine d'un point $g \in G$, en fonction de ses coordonnées exponentielles de seconde espèce. Ensuite, grâce a cette formule, on démontre que la distance à l'origine, dans H, d'un élément $h \in H$ est majorée par une fonction polynomiale, en la distance à l'origine de h dans G. Le degré de ce polynôme est le rang de nilpotence du groupe G.

Abstract

Let G be a connected nilpotent Lie group and H a connected subgroup of G. We give an explicit formula for the distance to the origin with the exponential coordinates of the second kind of $g \in G$. Using this fact, we prove that the distance to the origin of any element in H is bounded by a polynomial function of the distance to the origin in the group G. The degree of the polynomial is the nilpotency rank of the group G.

MSC : 22E25 ; 51K05

Mots-clés : Groupes de Lie nilpotents ; Distorsion des distances ; Coordonnées exponentielles

Adresse e-mail : bounecha@ccr.jussieu.fr (N. Bounechada).

0007-4497/$ – see front matter
doi:10.1016/S0007-4497(03)00070-8

1. Introduction et exposition des résultats

Soit G un groupe localement compact à génération compacte et e son élément neutre. A chaque voisinage compact symétrique Ω de e, engendrant G, on associe une distance sur G, invariante à gauche (i.e. $d(xg,xh)=d(g,h)$, $g,h,x\in G$), définie par :

$$d(g,h)=d\big(e,g^{-1}h\big)=\big|g^{-1}h\big|_G,\quad g,h\in G$$

où

$$|g|_G=|g|=\inf\big\{n,\ g\in\Omega^n\big\},\quad g\in G \tag{1}$$

et

$$\Omega^0=\{e\},\ \Omega^1=\Omega,\ \ldots,\ \Omega^n=\Omega.\Omega\ldots\Omega,\ n \text{ fois.}$$

La distance ainsi définie dépend certes de Ω, mais il est facile de voir que si Ω' est un autre voisinage compact de e engendrant G alors les distances associées à Ω et Ω' sont équivalentes, dans le sens où il existe une constante $C>0$ telle que :

$$C^{-1}|g|^{\Omega}\leqslant|g|^{\Omega'}\leqslant C|g|^{\Omega},\quad g\in G$$

où $|g|^{\Omega}$ désigne la distance à l'origine de g associée à Ω définie par (1).

On considère à présent un sous-groupe fermé H de G qu'on suppose à génération compacte. On note que dans le cas des groupes de Lie, tout sous-groupe fermé est à génération compacte [8,12].[1] Sur le sous-groupe H, on peut alors considérer d'une manière naturelle deux distances : la distance intrinsèque du groupe H qu'on peut définir comme dans (1) et la distance induite par G en tant qu'espace métrique. Etant donné un élément $h\in H$, quelle lien existe-t-il entre $|h|_H$ sa distance à l'origine intrinsèque dans H et $|h|_G$ sa distance à l'origine dans le groupe ambiant G ?

On a toujours l'estimation suivante

$$|h|_G\leqslant C|h|_H+c,\quad h\in H.$$

Ceci découle directement de la définition (1).

Soit $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction positive. On dit alors que H admet une ϕ-distorsion des distances dans G si

$$|h|_H\leqslant C_1\big(\phi\big(C_2|h|_G\big)\big)+C_3,\quad h\in H$$

où les $C_i,\ i=1,2,3$, sont des constantes positives indépendantes de h.

En particulier, si

(i) $\phi(t)=t$, alors on dit que H admet une 0-distorsion dans G et parfois qu'il n'y a pas de distorsion entre H et G.

(ii) $\phi(t)=t^c$ pour $c>0$, alors on dit que H admet une distorsion polynomiale de degré au plus c dans G.

(iii) $\phi(t)=\mathrm{e}^t$, alors on dit que H admet une distorsion exponentielle dans G.

[1] Voir [5] pour des contres exemples.

On verra par la suite que le phénomène de la distorsion des distances est étroitement lié à la structure algébrique des groupes en question. En effet, dans le cas abélien et dans certains cas par exemple les groupes p-adiques, il n'y a pas de distorsion des distances entre H et G [7]. Dans d'autre cas, la distorsion est au plus exponentielle comme dans les groupes de Lie connexes. Enfin dans certains cas de groupes discrets et de groupes finement engendrés, la distorsion des distances entre H et G peut être arbitrairement grande [9] et [4, par. 3.J et 3.K"].

On rappelle qu'un groupe de Lie est dit à croissance polynomiale si pour tout voisinage compact Ω de l'élément neutre e on a :

$$\text{mesure de Haar}\big(\Omega^n\big) \leqslant Cn^c, \quad n \geqslant 1.$$

Dans ce cas, on sait déjà, d'après les travaux de Gromov et de Varopoulos, que la distorsion des distances est au plus polynomiale [4,11,12]. Plus précisément, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$C^{-1}\big(|h|_G^{\alpha} - 1\big) \leqslant |h|_H \leqslant C\big(|h|_G^{\beta} + 1\big), \quad h \in H.$$

Dans le présent article, on calcule explicitement les exposants α et β, en fonction de paramètres algébriques et tout particulièrement le calcul des commutateurs, dans le cadre des groupes de Lie nilpotents. Avant d'énnoncer nos résultats, on commence par donner quelque définitions.

Soit G un groupe de Lie résoluble, simplement connexe et de dimension m et soit $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Une base $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ de $\mathcal{G}$ est dite une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce de $\mathcal{G}$ (ou bien sur G), si pour tout i, $i = 1, \ldots, m-1$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} \mathbb{R}X_j$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ et S_i est un idéal de S_{i+1}.

Une telle base existe et assure l'existence d'un difféomorphisme [10]

$$\begin{aligned}&\psi : \mathbb{R}^m \to G\\ &(t_1, \ldots, t_m) \mapsto \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_m X_m.\end{aligned}$$

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et soit

$$G \supseteq G_2 = [G, G] \supseteq \cdots \supseteq G_i = [G, G_{i-1}] \supseteq \cdots \supseteq G_{n+1} = \{e\},$$

sa suite centrale descendante. Rappelons que, dans ce cas, on dit que n est le rang de nilpotence de G.

On dit qu'une base B de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G, est adaptée à la suite centrale descendante de G si elle s'écrit sous la forme :

$$\{X_1, \ldots, X_{i_n-1}, X_{i_n}, X_{i_n+1}, \ldots, X_{i_{n-1}}, \ldots, X_{i_2}, X_{i_2+1}, \ldots, X_{i_1}\}$$

où la partie $\{X_1, \ldots, X_{i_k}\}$ est une base sur G_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $i_n = \dim G_n$, $i_1 = \dim G$ et $i_{k-1} = i_k + \dim(G_{k-1}/G_k)$, $2 \leqslant k \leqslant n$.

Soient G un groupe de Lie nilpotent de rang n, H un sous-groupe de G de rang de nilpotence n' et G_i (resp. H_i) le ième élément de la suite centrale descendante de G (resp. de H). On appelle indice de "compatibilité" de la suite centrale descendante de H avec celle de G, le rationnel l défini par :

$$l = \max\big\{j/l_j \text{ pour } j \in \{1, 2, \ldots, n'\}\big\}$$

où $l_j = \min\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid (G_i \backslash G_{i+1}) \cap H_j \neq \emptyset\}$.

Cet indice mesure la position des éléments de la suite centrale descendante de H par rapport à celle de G. On note également qu'il est toujours inférieur ou égal à 1.

On dit que la distorsion entre H et G est polynomiale de degré exactement k, si on a l'estimation :

$$|h|_H \leqslant C|h|_G^k + C_1, \quad h \in H,$$

avec k optimal, dans le sens où s'il existe un réel $l > 0$ tel qu'on ait l'inégalité

$$|h|_H \leqslant C|h|_G^l + c, \quad h \in H,$$

alors ceci entraîne que $k \leqslant l$.

Notations et conventions. Dans tout ce qui suit et sauf mention du contraire, G désigne un groupe de Lie connexe. On utilisera la convention de désigner par les lettres C et c, parfois indexées, des constantes positives qui peuvent différer d'un endroit à un autre mais qui resteront toujours indépendantes des paramètres importants des formules.

Soient d_1 et d_2 deux distances invariantes à gauche et connectées [13, chap IV] sur un groupe de Lie G. Alors il existe [13, Proposition III.4.2] $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$C_1\big(d_2(x,e) - 1\big) \leqslant d_1(x,e) \leqslant C_2\big(d_2(x,e) + 1\big), \quad x \in G.$$

Par conséquent, dans toute la suite, on désigne par $|x|_G$ la distance dans G qui sépare un point $x \in G$ de l'élément neutre e de G pour une distance d invariante à gauche et connectée quelconque. Autrement dit, tous les résultats qu'on démontre sont vérifiés pour toute distance invariante à gauche et connectée sur G.

On rappelle que tout groupe de Lie nilpotent connexe G (non simplement connexe) contient un unique sous-groupe K compact maximal et central tel que le groupe quotient G/K est simplement connexe [10, Chap. 3].

Les principaux résultats de cet article sont les suivant :

Théorème 1. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe, nilpotent de rang n et de dimension m, et soit G_k le k-ième élément de la suite centrale descendante de G. Alors pour toute base $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G, adaptée à la suite centrale descendante de G il existe des constantes positives C et C_1 telles que la distance à l'origine d'un point $g = \exp t_1X_1 \dots \exp t_mX_m \in G$ satisfait :*

$$C\left(\sum_{i=1}^{m} |t_i|^{1/d_i} - 1\right) \leqslant |g|_G \leqslant C_1\left(\sum_{i=1}^{m} |t_i|^{1/d_i} + 1\right), \quad g \in G,$$

où $d_i = \max\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \exp t_iX_i \in G_j\},\ i = 1, \dots, m$.

Théorème 2. *Soit G un groupe de Lie connexe nilpotent. Soient K l'unique sous-groupe compact maximal et central de G et n le rang de nilpotence du groupe quotient G/K. Alors tout sous-groupe connexe fermé H de G admet une distorsion polynomiale de degré au plus n.*

De plus, on peut trouver un sous-groupe à un paramètre H de G pour lequel le degré de la distorsion est exactement n.

Dans la direction opposée, on a le résultat suivant :

Théorème 3. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et H un sous-groupe connexe fermé de G. Soient K l'unique sous-groupe compact maximal et central de G et π la projection canonique de G sur G/K et soit l l'indice de compatibilité de la suite centrale descendante de $\pi(H)$ avec celle de G/K. Alors il existe deux constantes $C, C_1 > 0$ telles que*

$$|h|_G \leqslant C\big(|h|_H\big)^l + C_1; \quad h \in H. \tag{2}$$

De plus, l est l'indice optimal pour lequel l'estimation (2) *a lieu.*

L'indice l est optimal dans le sens où s'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$|h|_G \leqslant C|h|_H^k + c, \quad h \in H$$

alors ceci entraîne que $l \leqslant k$.

Ce travail est une partie de ma thèse de doctorat [1] préparée sous la direction de N. Varopoulos que je remercie vivement pour ses conseils et son soutient.

2. Démonstration des théorèmes dans le cas d'un sous-groupe à un paramètre

Soient X un champ de vecteurs sur G et $A = \{\exp tX;\ t \in \mathbb{R}\}$ le sous-groupe à un paramètre défini par X. Dans ce cas les trois théorèmes ci-dessus se ramènent au résultat ci-dessous énoncé, sans démonstration, par M. Gromov [4, par. 3.B.2].

Proposition 1. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang n et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathcal{G}_i$ le i-ième élément de la suite centrale descendante de $\mathcal{G}$. Pour $X \in \mathcal{G}$ on note*

$$k = \max\big\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid X \in \mathcal{G}_i\big\}.$$

Alors on a :

$$C^{-1}\big(|t|^{1/k} - 1\big) \leqslant |\exp tX|_G \leqslant C\big(|t|^{1/k} + 1\big), \quad t \in \mathbb{R}$$

où $|.|_G$ désigne la distance à l'origine pour une distance d invariante à gauche et connectée sur G.

La démonstration de la proposition se fait en deux etapes. On commence par le cas où le groupe G est stratifié.

Groupes stratifiés [3,13]. Un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang n est dit stratifié si son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet la décomposition :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

où V_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{G}$ vérifiant :

$$V_i = [V_1, V_{i-1}], \quad i = 2, \ldots, n.$$

Dans ce cas, il est clair que les termes de la suite centrale descendante de $\mathcal{G}$ vérifient :

$$\mathcal{G}_k = \bigoplus_{i=k}^{n} V_i, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Groupe de dilatation sur G. Les applications linéaires définie par :

$$\tilde{\phi}_t(X) = t^i X, \quad X \in V_i,\ t > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

sont des homomorphismes d'algèbres $\tilde{\phi}_t$ sur $\mathcal{G}$. Ils induisent, par l'intermédiaire de l'application exponentielle de $\mathcal{G}$ dans G, un groupe de dilatation

$$\left\{\phi_t = \exp \circ \tilde{\phi}_t \circ \exp^{-1},\ t > 0\right\}$$

adapté à la structure de G. D'une manière plus précise, les automorphismes ϕ_t de G vérifient :

(i) $\phi_1 = \mathrm{Id}_G$ et $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{ts}$, pour tous $t, s > 0$,
(ii) $d\phi_t = \tilde{\phi}_t$, pour tout $t > 0$.

Distance et dilatation sur G. Soit $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur G, vérifiant la condition de Hörmander (i.e. l'algèbre de Lie qu'ils engendrent est l'algèbre de Lie de G toute entière) et contenu dans la première tranche de la stratification (i.e. $\mathbf{X} \subset V_1$), alors la distance $d_{\mathbf{X}}(e, g) = |g|_G$ de Carnot–Carathéodory associé à $\mathbf{X}$ [13, par. III.4] vérifie la propriété suivante :

$$\left|\phi_t(g)\right|_G = t|g|_G, \quad t > 0,\ g \in G. \tag{3}$$

2.1. Démonstration de la proposition 1 dans le cas stratifié

Soient G un groupe de Lie stratifié et $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ la stratification de son algèbre de Lie. Soit $B = \{X_1, \ldots, X_m\}$ une base sur G adapté à sa suite centrale descendante. Pour chaque $X_j \in B$, on note d_j l'unique entier appartenant à $\{1, \ldots, n\}$ tel que $X_j \in V_{d_j}$. On considère la fonction définie par :

$$\rho : G \to \mathbb{R}^+,$$
$$x = \exp\left(\sum_{j=1}^{m} c_j X_j\right) \mapsto \sum_{j=1}^{m} |c_j|^{1/d_j}.$$

Montrons qu'il existe alors $m > 0$ et $M > 0$ telles que

$$m\rho(x) \leqslant |x|_G \leqslant M\rho(x), \quad x \in G. \tag{4}$$

En effet, observons tout d'abord que ρ vérifie la propriété suivante :

$$\rho\bigl(\phi_t(x)\bigr) = t\rho(x), \quad t > 0,\ x \in G. \tag{5}$$

On munit le groupe G d'une distance $d(e,x) = |x|_G$ qui vérifie (3).

La continuité de la fonction $x \mapsto |x|_G$ sur l'ensemble

$$K = \{x \in G \mid \rho(x) = 1\}$$

qui est compact et qui ne contient pas l'élément neutre de G, entraîne qu'elle possède un minimum $m > 0$ et un maximum $M > 0$ sur K. Par conséquent on a :

$$m\rho(x) \leqslant |x|_G \leqslant M\rho(x), \quad x \in K,$$

et par suite, l'inégalité (4) découle immédiatement des égalités (5) et (3).

Par ailleurs, la définition de $k = \max\{i \in \{1,2,\dots,n\} \mid X \in \mathcal{G}_i\}$ et le fait que $\mathcal{G}_k = \bigoplus_{i=k}^n V_i$, entraînent que X s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{j=i_{k-1}+1}^{m} c_j X_j$$

et qu'il existe (au moins un) $j_0 \in \{i_{k-1}+1,\dots,i_k\}$ tel que $c_{j_0} \neq 0$. Ainsi la preuve de la proposition dans le cas stratifié se déduit directement de l'inégalité (4) puisque $\rho(\exp tX) = \sum_{j=i_{k-1}+1}^m |tc_j|^{1/d_j}$.

2.2. Démonstration de la proposition 1 dans le cas général

Pour passer du cas stratifié au cas général, on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang n et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Alors il existe un groupe stratifié $\widetilde{G}$ de rang de nilpotence n et un homomorphisme surjectif π de l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathcal{G}}$ de $\widetilde{G}$ dans $\mathcal{G}$ tels que* :

(i) *Pour tout $X \in \mathcal{G}$ et tout $\widetilde{X} \in \pi^{-1}(X)$ on a* :

$$|\exp X|_G \leqslant C|\exp \widetilde{X}|_{\widetilde{G}} + c.$$

(ii) *Il existe un élément $\widetilde{X_0} \in \pi^{-1}(X)$ tel que*

$$|\exp t\widetilde{X_0}|_{\widetilde{G}} \leqslant C|\exp X|_G + c,$$

où $|.|_G$ (resp. $|.|_{\widetilde{G}}$) désigne la distance à l'origine pour une distance d invariante à gauche et connectée sur G (resp. $\widetilde{G}$).

(iii) *Si $X \in \mathcal{G}_k \backslash \mathcal{G}_{k+1}$, alors il existe $\widetilde{X} \in \pi^{-1}(X)$ tel que $\widetilde{X} \in \mathcal{L}_k \backslash \mathcal{L}_{k+1}$ où $\mathcal{G}_i$ et $\mathcal{L}_i$ désignent les i-ièmes éléments des suites centrales descendantes de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ un système de Hörmander sur G. Soit $\mathcal{L}(m,n)$ l'algèbre de Lie libre nilpotente de rang n à m générateurs $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Pour la construction de cette cette algèbre, on refère le lecteur aux travaux [6] et [13]. Par définition de $\mathcal{L}(m,n)$ il existe un unique homomorphisme surjectif

$$\pi : \mathcal{L}(m,n) \to \mathcal{G}$$

tel que $\pi(e_i) = X_i;\ 1 \leqslant i \leqslant m$. Notons aussi que $\mathcal{L}(m,n)$ est stratifiée puisque elle admet la décomposition

$$\mathcal{L}(m,n) = \bigoplus_{i=1}^n V_i,$$

avec $V_1 = vect\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ et $V_i = [V_1, V_{i-1}],\ i = 2, \dots, n$.

Soit $\widetilde{G}$ le groupe de Lie simplement connexe correspondant à $\mathcal{L} = \mathcal{L}(m,n)$. Alors $\widetilde{G}$ est un groupe stratifié et l'homomorphisme π induit (par l'intermédiaire de l'application exponentielle) un homomorphisme surjectif $\tilde{\pi}$ de $\widetilde{G}$ dans G tel que $d\tilde{\pi} = \pi$.

Pour démontrer les deux premières assertions du lemme, il suffit d'observer qu'on peut prendre comme distance de l'origine dans G celle définie par :

$$|\exp X|_G = \inf_{\widetilde{X} \in \pi^{-1}(X)} |\exp \widetilde{X}|_{\widetilde{G}},$$

où $|.|_{\widetilde{G}}$ désigne la distance de l'origine dans $\widetilde{G}$ pour une distance invariante à gauche et connectée sur $\widetilde{G}$. Par conséquent, la première assertion est clairement vérifiée. La seconde découle du fait qu'un groupe de Lie est localement compact. La dernière résulte directement de la surjectivité de l'application π.

Lemme 2. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe nilpotent de rang n. Alors pour tout $X \in \mathcal{G}$, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que*

$$|t|^{1/n} \leqslant C|\exp tX|_G + c, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $|.|_G$ désigne la distance de l'origine dans G pour une distance d invariante à gauche et connectée sur G.

Démonstration. Si G est stratifié, alors le lemme se déduit de la proposition 1. Le passage au cas général est une application directe de la deuxième assertion du lemme 1.

Démonstration de la proposition 1. Pour démontrer l'inégalité

$$|t|^{1/k} \leqslant C|\exp tX|_G + c; \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

on remarque, tout d'abord, que si $k = n$ (i.e. $X \in \mathcal{G}_n$), alors l'inégalité découle du lemme 2. Par conséquent, on peut supposer que $G_{k+1} \neq \{e\}$. Le groupe quotient $\overline{G} = G/G_{k+1}$ est alors nilpotent de rang k.

Soient $p : G \to \overline{G}$ la projection canonique et $dp : \mathcal{G} \to \overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_{k+1}$ sa différentielle. Comme $X \in \mathcal{G}_k$, l'élément $Y = dp(X)$ appartient à $\overline{\mathcal{G}}_k$. On déduit du corollaire 2 que :

$$|t|^{1/k} \leqslant C|\exp tY|_{\overline{G}} + c, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Par ailleurs, le sous-groupe G_{k+1} étant distingué dans G, il résulte alors que

$$\big|p(x)\big|_{\overline{G}} \leqslant C|x|_G + c, \quad x \in G. \tag{8}$$

Finalement, l'estimation (6) découle directement des deux inégalités (7) et (8) puisque $p(x) = \exp tY$.

Pour prouver l'inégalité

$$|\exp tX|_G \leqslant C|t|^{1/k} + c, \quad t \in \mathbb{R},$$

il suffit d'appliquer le lemme 1 et la proposition 1 dans le cas stratifié. En effet, en utilisant les notations du lemme 1 et de sa démonstration, il résulte de la troisième assertion du lemme qu'il existe $\widetilde{X} \in \pi^{-1}(X)$ tel que $\widetilde{X} \in \mathcal{L}_k \backslash \mathcal{L}_{k+1}$. Du cas stratifié, on déduit que $|\exp t\widetilde{X}|_{\widetilde{G}} \leqslant C|t|^{1/k} + c$. Pour conclure, on utilise la première assertion du lemme 1 :

$$|\exp tX|_G \leqslant C|\exp t\widetilde{X}|_{\widetilde{G}} \leqslant C|t|^{1/k} + c.$$

3. Démonstration du théorème 1

Soit $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G, adaptée à sa suite centrale descendante.

Soit $g = \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_m X_m \in G$. Il résulte de la proposition 1 que :

$$|g|_G \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\exp t_i X_i|_G \leqslant C \sum_{i=1}^{m} |t_i|^{1/d_i} + c.$$

Pour démontrer l'inégalité dans l'autre sens, on procède par récurrence sur la dimension m du groupe G. Pour $m = 1$, l'inégalité est clairement vérifiée. On suppose que l'on a l'inégalité pour tout groupe de dimension inférieure à m. On considère le sous-groupe à un paramètre $A = \{\exp t X_1;\ t \in \mathbb{R}\}$. On note que A est central et que $d_1 = n$ puisque $A \subset G_n$ le n-ième élément de la suite centrale descendante de G. Si π désigne la projection canonique $\pi : G \to \overline{G} = G/A$, alors $\{d\pi(X_2), d\pi(X_3), \ldots, d\pi(X_m)\}$ est aussi une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur $\overline{G}$, adaptée à sa suite centrale descendante. On déduit alors, de l'hypothèse de récurrence, qu'il existe $C, c > 0$ telles que :

$$\sum_{i=2}^{m} |t_i|^{1/d_i} \leqslant C \left|\pi(g)\right|_{\overline{G}} + c.$$

En utilisant la normalité de A, on obtient l'estimation suivante :

$$\sum_{i=2}^{m} |t_i|^{1/d_i} \leqslant C|g|_G + c. \tag{9}$$

Il reste à montrer l'estimation suivante :

$$|t_1|^{1/n} \leqslant C|g|_G + c. \tag{10}$$

Si on pose $g_1 = \exp t_2 X_2 \ldots \exp t_m X_m$, alors on a :

$$|\exp t_1 X_1|_G = \left|g_1^{-1} g\right|_G \leqslant |g_1|_G + |g|_G.$$

La proposition 1 et l'estimation (9) entraînent que :

$$|g_1|_G \leqslant C \sum_{i=2}^{m} |t_i|^{1/d_i} + c \leqslant C|g|_G + c.$$

Enfin, on utilise de nouveau la proposition 1 on obtient alors l'estimation (10).

Corollaire 1. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe, nilpotent de rang n et de dimension m et soit $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G, adaptée à sa suite centrale descendante. Alors il existe des constantes $C, c > 0$ telles que, pour tout $x = \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_m X_m \in G$, on a* :

$$|\exp t_j X_j|_G \leqslant C|x|_G + c, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

4. Démonstration du théorème 3

4.1. Le cas simplement connexe

Preuve de l'estimation (2). Soit $\{X_1, X_2, \ldots, X_d\}$ une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur H adaptée à sa suite centrale descendante. Chaque élément x de H s'écrit alors d'une manière unique sous la forme $x = \exp t_1 X_1 \exp t_2 X_2 \ldots \exp t_d X_d$ et il résulte du corollaire 1 que

$$|\exp t_i X_i|_H \leqslant C|x|_H + c, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{11}$$

On définit pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$

$$g(i) = \max\bigl\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \exp t_i X_i \in G_j\bigr\}$$
$$\text{et } h(i) = \max\bigl\{j \in \{1, 2, \ldots, n'\} \mid \exp t_i X_i \in H_j\bigr\}.$$

De la définition $l_{h(i)} = \min\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid (G_j \backslash G_{j+1}) \cap H_{h(i)} \neq \emptyset\}$, on déduit que

$$l_{h(i)} \leqslant g(i), \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \tag{12}$$

puisque $\exp t_i X_i \in H_{h(i)} \cap (G_{g(i)} \backslash G_{g(i)+1})$, $1 \leqslant i \leqslant d$, $t_i \neq 0$.

En utilisant la proposition 1 à deux reprises, puis les inégalités (12) et (11), on obtient l'estimation souhaitée. En effet,

$$\begin{aligned}
|x|_G &\leqslant \sum_{i=1}^{d} |\exp t_i X_i|_G \leqslant C \sum_{i=1}^{d} |t_i|^{1/g(i)} + c \\
&\leqslant C \sum_{i=1}^{d} \bigl(|\exp t_i X_i|_H\bigr)^{h(i)/g(i)} + c \leqslant C \sum_{\substack{i=1 \\ |t_i| \geqslant 1}}^{d} \bigl(|\exp t_i X_i|_H\bigr)^{h(i)/l_{h(i)}} + c \\
&\leqslant C|x|_H^l + c.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle de la définition de $l = \max\{j/l_j \text{ pour } j \in \{1, 2, \ldots, n'\}\}$.

Optimalité de l'indice l. On suppose qu'il existe un réel $k < l$ tel que pour tout $h \in H$ on a l'estimation suivante :

$$|h|_G \leqslant C|h|_H^k + c. \tag{13}$$

Il résulte alors de la définition de l qu'il existe un entier $s \in \{1, 2, \ldots, n'\}$ tel que

$$l = \frac{s}{l_s}, \quad \text{où } l_s = \min\bigl\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid (G_i \setminus G_{i+1}) \cap H_s \neq \emptyset\bigr\}.$$

Soit x un élément de $(G_{l_s} \backslash G_{l_s+1}) \cap H_s$ et soit A le sous-groupe à un paramètre défini par le champ de vecteurs $X = \exp^{-1} x$. Il résulte alors de la proposition 1 que

$$|t|^{1/l_s} \leqslant C|\exp tX|_G + c, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

puisque dans ce cas $l_s = \max\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \exp tX \in G_i\}$.

De nouveau, la proposition 1 entraîne que

$$|\exp tX|_H \leqslant C|t|^{1/s} + c, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

puisque $s \leqslant \max\{i \in \{1, 2, \ldots, n'\} \mid \exp tX \in H_i\}$.

En utilisant successivement les inégalités (14), (13) et (15), on déduit que

$$|t|^l \leqslant C|t|^k + c, \quad t > 1.$$

Pour t suffisamment grand, on obtient une contradiction puisque $k < l$.

4.2. Le cas non simplement connexe

Preuve de l'estimation (2). Soit $\pi : G \to G/K$ la projection canonique. Sur le groupe quotient $\overline{G} = G/K$, on considère la distance définie par :

$$|\bar{x}|_{\overline{G}} = \inf\bigl\{|x|_G,\ x \in G,\ \pi(x) = \bar{x}\bigr\}, \quad \bar{x} \in \overline{G}. \tag{16}$$

Il résulte alors (par un raisonnement similaire à celui du lemme 1) que pour tout élément $\bar{x} \in \overline{G}$, il existe un élément $x \in G$ tel que :

(i) $\pi(x) = \bar{x}$,
(ii) $|\bar{x}|_{\overline{G}} = |x|_G$.

Par conséquent, pour tout $h \in H$ il existe $h' \in G$ tel que :

$$\pi(h) = \pi(h') \quad \text{et} \quad \bigl|\pi(h)\bigr|_{\overline{G}} = |h'|_G.$$

L'égalité $\pi(h) = \pi(h')$ entraîne qu'il existe $z \in \ker\pi$ tel que $h = h'z$.

En utilisant successivement le fait que $|z|_G \leqslant C$, l'égalité $|\pi(h)|_{\overline{G}} = |h'|_G$ et le cas simplement connexe du théorème 3, on obtient l'estimation voulue. En effet,

$$\begin{aligned} |h|_G = |h'z|_G \leqslant |h'|_G + C \leqslant \bigl|\pi(h)\bigr|_{\overline{G}} + C \\ \leqslant C\bigl|\pi(h)\bigr|_{\overline{H}}^l + C \leqslant C|h|_H^l + C. \end{aligned}$$

La dernière estimation découle du fait que sur H on peut prendre la distance donnée par (16).

Optimalité de l'indice l. On suppose qu'il existe $k < l$ tel que

$$|h|_G \leqslant C|h|_H^k + C, \quad h \in H. \tag{17}$$

Si on prend sur $\overline{H} = \pi(H)$ la distance donnée par (16), alors pour tout $y \in \overline{H}$ il existe $h \in H$ tel que $y = \pi(h)$ et $|y|_{\overline{H}} = |h|_H$. En utilisant la normalité de K, l'inégalité (17), le lemme 1 et l'égalité précédente, on déduit que

$$|y|_{\overline{G}} = \bigl|\pi(h)\bigr|_{\overline{G}} \leqslant C|h|_G + C \leqslant C|h|_H^k + C \leqslant C|y|_{\overline{H}}^k + C.$$

Ceci contredit la démonstartion ci-dessus de l'optimalité de l pour le groupe simplement connexe $\overline{G}$. Ceci achève la démonstration du théorème 3.

5. Démonstration du théorème 2

5.1. *Le cas simplement connexe*

5.1.1. *Préliminaires et constructions techniques*

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et de dimension m et soit $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G. Soit H un sous-groupe connexe de G de dimension d. On dit alors que B est adaptée à H si $\{X_1, X_2, \ldots, X_d\}$ forme une base de coordonnées exponentielles de H.

Notons que si G, H et B sont comme ci-dessus et $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ sont les coordonnées exponentielles de seconde espèce de $x \in G$, alors on a :

$$x \in H \text{ si, et seulement si, } t_i = 0 \text{ pour } i = r+1, \ldots, m.$$

Proposition 2. *Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Soit N un sous-groupe central dans G. Alors on peut construire une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G adaptée à sa suite centrale descendante et qu'on peut réordonner de sorte qu'elle s'adapte au sous-groupe N.*

Démonstration. Notons m (resp. $d(N)$) la dimension de G (resp. de N) et G_k le k-ième élément de la suite centrale descendante de G. Pour $k = n, \ldots, 2$, on considère une base

$$B_k(N) = \{X_1, \ldots, X_{i_n}, \ldots, X_{i_{k+1}+1}, \ldots, X_{i_k}\} \quad \text{sur } N \cap G_k \quad \text{et}$$
$$B_k = \{X_1, \ldots, X_{i_n}, Y_1, \ldots, Y_{i_n}, \ldots, X_{i_{k+1}+1}, \ldots, X_{i_k}, Y_{i_{k+1}+1}, \ldots, Y_{i_k}\}$$

une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G_k.

Dans un premier temps, on complète la base $B_k(N)$ en une base

$$B_{k-1}(N) = \{X_1, \ldots, X_{i_n}, \ldots, X_{i_{k+1}+1}, \ldots, X_{i_k}, X_{i_k+1}, \ldots, X_{i_{k-1}}\}$$

sur $N \cap G_{k-1}$. Notons qu'éventuellement la partie $\{X_{i_k+1}, \ldots, X_{i_{k-1}}\}$ peut être vide. Ensuite, en utilisant le fait [2, corollaire 1.1.14] qu'une sous-algèbre propre $\mathfrak{h}$ d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}$ est strictement contenue dans son normalisateur $N_{\mathcal{G}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathcal{G} \mid [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$, on complète la partie libre $B_k \cup \{X_{i_k+1}, \ldots, X_{i_{k-1}}\}$ en une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G_{k-1}. A la fin, on obtient une base sur G de la forme :

$$B = \{X_1, \ldots, X_{i_n}, Y_1, \ldots, Y_{i_n}, \ldots, X_{i_2+1}, \ldots, X_{i_1}, Y_{i_2+1}, \ldots, Y_{i_1}\}.$$

Il est immédiat que B est bien une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G adaptée à sa suite centrale descendante. La centralité de N garantit que le nouvel ordre

$$B' = \{X_1, \ldots, X_{i_n}, \ldots, X_{i_2+1}, \ldots, X_{i_1}, Y_1, \ldots, Y_{i_n}, \ldots, Y_{i_2+1}, \ldots, Y_{i_1}\}$$

est encore une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur G et qui s'adapte au sous-groupe N. Ceci achève la preuve de la proposition 2.

Avant d'aborder le principal résultat de ce paragraphe (la proposition 3), donnons quelques conséquences immédiates de cette proposition. Pour alléger les notations, on va noter la base B' ci-dessus par :

$$\{X_1, \ldots, X_{d(N)}, X_{d(N)+1}, \ldots, X_m\}.$$

Corollaire 2. *Avec les notations ci-dessus, on a* :

(i) $\{d\pi(X_{d(N)+1}), \ldots, d\pi(X_m)\}$ *est une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce sur le quotient G/N adaptée à sa suite centrale descendante.*

(ii) *Soit* $d_i = \max\{j \in \{1,2,\ldots,n\} \mid \exp t_i X_i \in G_j\}$. *Alors pour tout élément* $g = \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_{d(N)} X_{d(N)} \exp t_{d(N)+1} X_{d(N)+1} \ldots \exp t_m X_m \in G$, *on a* :

$$C\left(\sum_{i=1}^{m} |t_i|^{1/d_i} - 1\right) \leqslant |g|_G \leqslant C_1\left(\sum_{i=1}^{m} |t_i|^{1/d_i} + 1\right).$$

La première assertion résulte directement de la surjectivité de π et la seconde du théorème 1.

Proposition 3. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang n. Soient N un sous-groupe central de G et π la projection canonique $\pi : G \to G/N$. Alors il existe des constantes positives C, c, C_1 et c_1 telles que, pour la décomposition* (*qui provient de la base de la construction ci-dessus*) *d'un élément $x = x_1x_2 \in G$ avec $x_1 \in N$ et $\pi(x_2) = \pi(x) \in G/N$, on a* :

$$|x_1|_G \leqslant C|x|_G + c \quad \textit{et} \quad |x_2|_G \leqslant C_1\big|\pi(x)\big|_{G/N} + c_1.$$

Démonstration. On sait que tout élément x dans G s'écrit sous la forme :

$$x = x_1x_2 = \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_{d(N)} X_{d(N)} \exp t_{d(N)+1} X_{d(N)+1} \ldots \exp t_m X_m$$

avec

$$x_1 = \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_{d(N)} X_{d(N)} \in N,$$
$$x_2 = \exp t_{d(N)+1} X_{d(N)+1} \ldots \exp t_m X_m.$$

La première inégalité découle automatiquement du théorème 1. La seconde estimation résulte elle aussi du théorème 1 appliqué au groupe quotient G/N puisque $d_i = \max\{j \in \{1,2,\ldots,n'\} \mid \exp t_i d\pi(X_i) \in (G/N)_j\}$ où n' le rang de nilpotence de G/N et $(G/N)_j$ le j-ème élément de la suite centrale descendante de G/N.

5.1.2. Cas d'un sous-groupe central

Lemme 3. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe nilpotent de rang n et H un sous-groupe central dans G. Alors H possède une distorsion polynomiale de degré exactement k où*

$$k = \max\big\{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid H \cap G_i \neq \{e\}\big\}.$$

Démonstration. Soient $\{X_1, X_2, \ldots, X_d, \ldots, X_m\}$ une base de coordonnées exponentielles de seconde espèce adaptée à la suite centrale descendante de G et qui s'adapte à H. Alors il résulte du corollaire 1 que pour tout $h = \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_d X_d \in H$, on a :

$$|\exp t_i X_i|_G \leqslant C|h|_G + c, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{18}$$

On note

$$k_s = \max\Big\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \exp t_s X_s \in G_i\Big\}.$$

Par définition de k, on a alors $k_s \leqslant k$, $1 \leqslant s \leqslant d$ et ceci entraîne par la proposition 1 que :

$$|h|_H \leqslant \sum_{s=1}^{d} |\exp t_s X_s|_H \leqslant C \sum_{s=1}^{d} |t_s| \leqslant C \sum_{\substack{s=1\\ |t_s|>1}}^{d} |\exp t_s X_s|_G^{k_s} + c \leqslant C_1 |h|_G^k + C_2.$$

Montrons maintenant que le degré k est optimal. On suppose qu'il existe un réel $l < k$ tel que l'on a :

$$|h|_H \leqslant C|h|_G^l + c, \quad h \in H. \tag{19}$$

Soient x un élément de $G_k \cap H$ et $X = \exp^{-1} x$. Il résulte alors de la proposition 1 que

$$|\exp tX|_G \leqslant C|t|^{1/k} + c, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Par ailleurs, la centralité de H entraîne que :

$$|t| \leqslant C|\exp tX|_H + c, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Enfin, en utilisant successivement les inégalités (21), (19) et (20), on déduit que

$$|t| \leqslant C|t|^{l/k} + c, \quad t > 1.$$

Pour t suffisamment grand, on obtient une contradiction puisque $l < k$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Remarque 1. Notons que dans la preuve du lemme 3 le théorème 1 n'intervient que pour établir l'estimation (18). On peut obtenir cette estimation sans utiliser le théorème 1.

Remarque 2. Notons aussi que pour la preuve du théorème 2 on utilise un résultat plus faible que celui démontré ci-dessus. Plus précisément, on a juste besoin du fait que H possède une distorsion polynomiale de degré au plus n (i.e. $|h|_H \leqslant C|h|_G^n + c$; $h \in H$) où n désigne le rang de nilpotence du groupe G.

5.1.3. Démonstration du théorème 2

Montrons tout d'abord qu'on peut se ramener au cas où le sous-groupe H contient un sous-groupe N non trivial et central dans G.

En effet, soit $Z(G)$ le centre de G. Si $H \cap Z(G) \neq \{e\}$, alors $N = H \cap Z(G)$. Sinon, on considère le sous-groupe $H' = H \cdot Z(G)$, où le point désigne le produit direct. Le sous-groupe H' contient donc un sous-groupe central et si on démontre le théorème pour H', alors le théorème est aussi vrai pour H puisque le sous-groupe H admet 0-distorsion des distances dans H' du fait que le produit est direct.

Dans la suite de la preuve, on suppose donc que le sous-groupe H contient un sous-groupe N (non trivial) central dans G et on procède par récurrence sur la dimension m du groupe G.

Pour $m = 1$, l'estimation est clairement vérifiée. Supposons le théorème vrai pour tout groupe de dimension inférieure à m. Soit π la projection canonique de G sur G/N. Il résulte de la normalité de N qu'il existe des constantes C, $c > 0$ telles que :

$$\left|\pi(x)\right|_{G/N} \leqslant C|x|_G + c, \quad x \in G. \tag{22}$$

Le sous-groupe N étant aussi central dans H, on déduit, de la proposition 3, qu'on peut écrire tout élément $x \in H$ sous la forme $x = x_1x_2$ avec $x_1 \in N$ et $\pi(x_2) = \pi(x)$ de sorte qu'il existe deux constantes $C, C_1 > 0$ telles que :

$$|x_2|_H \leqslant C\left|\pi(x)\right|_{H/N} + C_1.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au groupe G/N on déduit que :

$$\left|\pi(x)\right|_{H/N} \leqslant C\left|\pi(x)\right|_{G/N}^{n'} + c,$$

où n' est le rang de nilpotence de G/N. Ceci entraîne, après utilisation de l'estimation (22) et du fait que $n' \leqslant n$, que :

$$|x_2|_H \leqslant C|x|_G^n + c. \tag{23}$$

Soit

$$k = \max\bigl\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid N \cap G_i \neq \{e\}\bigr\},$$

où G_i désigne le i-ème élément de la suite centrale descendante de G. Alors il résulte du lemme 3 et de la proposition 3 que :

$$|x_1|_N \leqslant C|x_1|_G^k + c \leqslant C|x_1|_G^n + c \leqslant C|x|_G^n + c. \tag{24}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser les estimations (23) et (24). En effet,

$$|x|_H \leqslant |x_1|_H + |x_2|_H \leqslant C|x_1|_N + C|x|_G^n + c \leqslant C|x|_G^n + c.$$

Optimalité du degré n. Soit H un sous-groupe à un paramètre contenu dans G_n le dernier élément de la suite centrale descendante de G. Montrons que H possède une distorsion polynomiale de degré exactement n dans G. Il résulte de ce qui précède que H possède une distorsion polynomiale de degré au plus n dans G. Pour montrer que n est optimal, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un réel positif $k < n$ tel que

$$|t| = |\exp tX|_H \leqslant C|\exp tX|_G^k + c; \quad t \in \mathbb{R},$$

où X désigne un champ de vecteurs qui détermine H.

La proposition 1 entraîne que :

$$|\exp tX|_G \leqslant C|t|^{1/n} + c; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour t suffisamment grand nous obtenons une contradiction puisque $k < n$.

5.2. Le cas non simplement connexe

Soient π la projection canonique $G \to G/K$ et n est le rang de nilpotence de G/K. Le sous-groupe $\overline{H} = \pi(H)$ est aussi connexe fermé dans G/K, on déduit du cas simplement connexe que :

$$\left|\pi(h)\right|_{\overline{H}} \leqslant C\left|\pi(h)\right|_{G/K}^{n} + C_1.$$

Il résulte de la normalité de K que

$$\left|\pi(g)\right|_{G/K} \leqslant C|g|_G; \quad g \in G.$$

et par suite,

$$\left|\pi(h)\right|_{\overline{H}} \leqslant C|h|_G^n + C_1, \quad h \in H.$$

En considérant alors sur $\overline{H}$ la distance donnée par :

$$|\bar{x}|_{\overline{H}} = \inf\left\{|h|_H;\ h \in H,\ \pi(h) = \bar{x}\right\}, \quad \bar{x} \in \overline{H},$$

on déduit que pour tout élément $\bar{x} \in \overline{H}$, il existe un élément $h' \in H$ tel que :

$$\pi(h') = \bar{x} \quad \text{et} \quad |\bar{x}|_{\overline{H}} = |h'|_H.$$

Il résulte alors que pour tout $h \in H$, il existe $h' \in H$ (car $\pi(h) \in \overline{H}$) tel que :

$$\pi(h) = \pi(h') \quad \text{et} \quad \left|\pi(h)\right|_{\overline{H}} = |h'|_H.$$

Par conséquent, il existe $z \in \ker\pi$ tel que $h = h'z$. En utilisant le fait que le sous-groupe H admet donc 0-distorsion dans $H_1 = \overline{Gp(H; z)}$ [12, lemme 1] et la compacité de K (i.e. $|z|_{H_1} \leqslant C$), on obtient alors que :

$$\begin{aligned} |h|_H = |h'z|_H &\leqslant C|h'z|_{H_1} + C_1 \leqslant C|h'|_{H_1} + C|z|_{H_1} + C_1 \\ &\leqslant C|h'|_H + c \leqslant C\left|\pi(h)\right|_{\overline{H}} + c \leqslant C|h|_G^n + c. \end{aligned}$$

Optimalité du degré n. Soient $\mathcal{G} = Lie(G)$, $\overline{\mathcal{G}} = Lie(G/K)$ et $\tilde{\pi} : \mathcal{G} \to \overline{\mathcal{G}}$ la projection canonique. Soient $\overline{X} \in \overline{\mathcal{G}}_n$ le dernier élément de la suite centrale descendante de $\overline{\mathcal{G}}$, $A = \{\exp t\overline{X} \mid t \in \mathbb{R}\}$ le sous-groupe à un paramètre défini par $\overline{X}$ et $X \in \tilde{\pi}^{-1}(\overline{X})$. Montrons alors que $H = \{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\}$ admet une distorsion polynomiale de degré exactement n dans G.

Le fait que H possède une distorsion au plus n découle de ce qui précède. Pour montrer que la distorsion est de degré exactement n, on procède par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $k < n$ tel que

$$|x|_H \leqslant C|x|_G^k + c, \quad x \in H. \tag{25}$$

Soient $x = \exp tX \in H$ et $y = \pi(x) = \exp t\overline{X} \in A$. En considérant sur le groupe quotient $\overline{G} = G/K$ la distance définie par :

$$|\bar{x}|_{\overline{G}} = \inf\left\{|x|_G;\ x \in G,\ \pi(x) = \bar{x}\right\}, \quad \bar{x} \in \overline{G},$$

on déduit qu'il existe $x' \in \pi^{-1}(y)$ tel que

$$|y|_{\overline{G}} = |x'|_G. \tag{26}$$

Par ailleurs, il existe $z \in K = \ker \pi$ tel que $x = x'z$. La compacité de K entraîne que

$$|x|_G \leqslant C|x'|_G + c. \tag{27}$$

Finalement, en utilisant successivement les deux inégalité (25) et (27) et l'égalité (26), on déduit que

$$|y|_A = |t| = |x|_H \leqslant C|x|_G^k + c \leqslant C|x'|_G^k + C_1 \leqslant C|y|_G^k + C_1.$$

On obtient ainsi une contradiction avec l'optimalité de n pour le sous-groupe à un paramètre A dans $\overline{G} = G/K$ donnée par le cas simplement connexe. Ceci achève la preuve du théorème 2.

Références

[1] N. Bounechada, Distorsion des distances dans les groupes de Lie a croissance polynomiale, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2002.
[2] L.J. Corwin, F.P. Greenleaf, Representation of Lie Groups and their Applications, Cambridge Univ. Press, 1989.
[3] G.B. Folland, E. Stein, Hardy Spaces on Homogeneous Groups, Princeton University Press, 1982.
[4] M. Gromov, Asymptotic invariant of infinite groups, in: G.A. Nibb, M.A. Roller (Eds.), Geometric Group Theory, Vol. 2, in: London Math. Soc. Lecture Notes, Vol. 182, Cambridge Univ. Press, 1993.
[5] P. de la Harpe, Topics in geometric group theory, Notes prepared for a "DES" set of lectures in Geneva, Octobre 1995.
[6] N. Jacobson, Lie Algebra, Villey, 1962.
[7] S. Mustapha, Distorsion des distances dans les groupes p-adiques, Bull. Sci. Math. 124 (3) (2000) 175–191.
[8] M.S. Raghunathan, Discrete Subgroups of Lie Groups, Springer Ergebrisse, N° 68.
[9] E. Rips, Subgroups of small cancellation groups, Bull. London Math. Soc. 14 (1982) 45–47.
[10] V.S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras and their Representations, Springer-Verlag, 1984.
[11] N.Th. Varopoulos, Diffusion on Lie groups I et II, Canad. J. Math. 46 (2) (1994) 438–448; Canad. J. Math. 46 (5) (1994) 1073–1092.
[12] N.Th. Varopoulos, Distance distorsion on Lie groups, Institute Mittag-Leffler, Repport 31, 1995/1996.
[13] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, Th. Coulhon, Analysis and Geometry on Groups, in: Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 102, 1993.