JOURNAL OF ALGEBRA 24, 396–404 (1973)

Über Cohen-Macaulay Punkte

MANFRED HERRMANN UND WOLFGANG VOGEL

Humboldt Universität Berlin (DDR) und Universität Halle (DDR)

In [7] wurden Prinzipien der Multiplizitätstheorie von Weil unter Verwendung des Begriffes der normalen Flachheit nach Hironaka herangezogen, um das Verhalten der Schnittkomponenten zweier homogener Varietäten bezüglich der Multiplizitätsdefinitionen von Gröbner [2], Weil [15] und Serre [12] zu vergleichen. Aus idealtheoretischer Sicht möchte man die recht starke Forderung der normalen Flachheit durch Bedingungen an die Koeffizienten gewisser Hilbert–Samuel Funktionen ersetzen. Im Hinblick auf den Zusammenhang zwischen [7] und den Untersuchungen zur Gültigkeit des Bézoutschen Satzes in [1] ergibt sich die Frage, inwieweit man aus der Cohen–Macaulay (CM) Eigenschaft eines allgemeinen Punktes einer Untervarietät $W \subset V$ auf die CM–Eigenschaft in jedem Punkt von W bezüglich V schließen kann. Verglichen mit dem regulären Fall ist hier umgekehrt die Frage interessant, inwieweit die CM Eigenschaft in einem speziellen Punkt eines geeigneten Unterraumes W auf einem lokal geringten Raum V die CM-Eigenschaft des allgemeinen Punktes impliziert (siehe Abschnitt 2).

Man findet in [9] Untersuchungen, wie sich die CM Eigenschaft von Oberringen auf Unterringe und umgekehrt überträgt. Dort sind jedoch die Voraussetzungen so einschränkend, daß sie für unsere Schnittprobleme i.a. nicht zutreffen. Für die schematheoretische Behandlung unserer Problematik auf lokal geringten Räumen bieten sich auf Grund des Zusammenhanges zwischen Flachheit und kohomologischer Dimension ("profondeur") nach [4, No. 24, §6.3] flache Morphismen ψ zwischen den Spektren gewisser lokaler Ringe O_W und O_x an. Diese starke Forderung an ψ ermöglicht es dann, jeweils aus der CM Eigenschaft einer einzigen Lokalisierung der Ringe O_W bzw. O_x (im zweiten Fall bei einer zusätzlichen Forderung an die zugehörige Faser von ψ) auf die CM Eigenschaft in einem Punkt x bzw. im allgemeinen Punkt von W bezüglich V zu schließen. Für Multiplizitätsbetrachtungen ist aber stets die CM Eigenschaft des ganzen Ringes von Interesse (vgl. in diesem Zusammenhang auch Satz i).

Daher verfolgen wir in dieser Note das Ziel, "gute" Bedingungen (H) anzugeben, die gewährleisten, daß die CM Eigenschaft des lokalen Ringes O_W bei Spezialisierung des allgemeinen Punktes $\bar{x} \in W$ erhalten bleibt. Andererseits kann die CM Eigenschaft eines speziellen Punktes $x \in W$ bezüglich V nicht nur für Varietäten oder algebraische k-Schemata $W \subset V$ auf O_W geliftet werden, sondern grundsätzlich für (lokal noethersche) Präschemata (siehe Korollar 1). Setzen wir (H) voraus, so ist die Liftung der CM Eigenschaft auch für gewisse lokal geringte Räume möglich, die "katenär längs eines (irreduziblen, abgeschlossenen) Unterraumes" sind. In gewisser Analogie zu den Überlegungen von Hironaka [8, Kap. II] (insbesondere Beweis von Korollar 4) für reguläre Punkte auf einem algebraischen Schema bietet sich für unsere Fragestellung eine Verknüpfung zwischen geeigneten Hilbert–Samuel Funktionen an. Dafür werden Definitionsideale zugrunde gelegt, die in Analogie zu Folgerungen aus der normalen Flachheit von V längs W in [4, No. 24, §6.10.5] von Parametersystemen erzeugt werden.

Solche Betrachtungen liefern dann für den Fall homogener Varietäten Informationen über die Zusammenhänge zwischen den Multiplizitäten im Sinne von Gröbner [2] and Weil [15] bzw. Serre [12 (siehe Satz i)].

Abschließend geben wir eine Charakterisierung unserer (H)-Bedingung — auch unter kohomologischen Aspekten (siehe Korollar 3.1.).

1.

Sei W eine irreduzible Untervarietät von V. Bezeichne O_x den (affinen) lokalen Ring von $x \in W$ bezüglich V und O_W den lokalen Ring für einen allgemeinen Punkt $\bar{x} \in W$. Ferner bedeute für nichtnegative ganze Zahlen n

$$H(\mathfrak{q}_x, n) = \sum_{i=0}^{n} l_{O_x/\mathfrak{q}_x}(\mathfrak{q}_x^{\,i}/\mathfrak{q}_x^{i+1}),$$

wobei $\mathfrak{q}_x$ ein Primärideal ist, das zum maximalen Ideal $\mathfrak{m}_x \subset O_x$ gehört. Für $H(\mathfrak{q}_{\bar{x}}, n)$ schreiben wir $H(\mathfrak{q}_W, n)$. Im folgenden bezeichnen wir mit (H) die Bedingung für die Funktionen $H(\mathfrak{q}_x, n)$ und $H(\mathfrak{q}_W, n)$:

$$\text{(H)} \qquad H(\mathfrak{q}_x, n) = \sum_{p+q=n} H(\mathfrak{q}_W, p) \binom{q+r-1}{r-1},$$

wobei $n \geqslant 0$ und $r = \dim O_{W,x}$ ist. Wir sagen, (H) gilt für x, $\bar{x} \in W$, wenn in O_x und O_W Parameterideale $\mathfrak{q}_x$ und $\mathfrak{q}_W$ existieren, so daß (H) für $\mathfrak{q}_x$ und $\mathfrak{q}_W$ erfüllt ist.

Definition 1. Ein Punkt $x \in W$ heißt nach [4, No. 24], (5.7.1) ein Cohen–Macaulay Punkt bezüglich V (kurz: CM_V Punkt), wenn der lokale Ring O_x ein Cohen–Macaulay Ring ist.

Satz 1. *Sei W eine irreduzible Untervarietät von V. Der allgemeine Punkt $\bar{x} \in W$ sei ein* CM_V *Punkt* (d.h. *es existiert ein $\mathfrak{m}_W$-primäres Ideal* $\mathfrak{q}_W \subset O_W$, *das von einem charakteristischen Parametersystem erzeugt wird). Wenn* (H) *für* $\bar{x}$ *und einen weiteren Punkt* $x \in W$ *gilt, dann ist auch* x *ein* CM_V *Punkt.*

Beweis. Da $\bar{x}$ ein CM_V Punkt ist, folgt aus [16, App. 6, Th. 3], daß der zugehörige Formenring von O_W bezüglich $\mathfrak{q}_W$ isomorph zum Polynomring in $\dim O_W = s$ Variablen über dem (Artinschen Ring) $O_W/\mathfrak{q}_W$ ist. Hieraus ergibt sich z.B. nach [13, S. 69]

$$H(\mathfrak{q}_W, p) = l(O_W/\mathfrak{q}_W) \cdot \binom{p+s}{s}. \tag{1}$$

Indem wir die Formel

$$\sum_{p+q=n} \binom{p+s}{s}\binom{q+r-1}{r-1} = \binom{n+s+r}{s+r}$$

benutzen, ergeben (1) und (H)

$$H(\mathfrak{q}_x, n) = l(O_W/\mathfrak{q}_W) \binom{n+s+r}{s+r}.$$

Für $n = 0$ ergibt die (H)-Bedingung:

$$l(O_W/\mathfrak{q}_W) = l(O_x/\mathfrak{q}_x)$$

und somit

$$H(\mathfrak{q}_x, n) = l(O_x/\mathfrak{q}_x) \binom{n+s+r}{s+r}.$$

Da $s + r = \dim O_x$ ist, erhält man $e(\mathfrak{q}_x) = l(O_x/\mathfrak{q}_x)$, und somit ist nach [16, App. 6, Th. 3] O_x ein Cohen–Macaulay Ring. Q.E.D.

Dieser Satz wurde im Hinblick auf seine Anwendung im Satz i nur für Varietäten ausgesprochen; er gilt jedoch auch für geeignete lokal geringte Räume (siehe Korollar 1.2). Insbesondere gilt die Dimensionsbeziehung $s + r = \dim O_x$ im Beweis von Satz 1 nach [4, No. 20, 16.1.3.2 und 16.1.4.2] oder [4, No. 24, 5.1.9.1]. für algebraische Schemata über einem Körper k. Daher erhalten wir in Analogie mit Hironakas Betrachtungen für algebraische Schemata in [8, Kap. II] das

KOROLLAR 1.1. *Sei* V *ein algebraisches* k*-Schema und* W *ein irreduzibles, abgeschlossenes Unterschema von* V. *Ist der allgemeine Punkt* $\bar{x} \in W$ *ein* CM_V *Punkt und existiert für* $\bar{x}$ *und einen weiteren Punkt* $x \in W$ *eine analoge* (H)*-Bedingung wie im Satz* 1, *dann ist auch* x *ein* CM_V *Punkt.*

Das folgende Lemma bestätigt, daß die Cohen–Macaulay Eigenschaft des allgemeinen Punktes $\bar{x} \in W$ nicht "spezialisierungsinvariant" ist.

LEMMA. *Die Spitze S des Kegels V im 4-dimensionalen projektiven Raum mit dem zugehörigen Primideal*

$$\mathfrak{p}_V = (x_1{}^2x_3 - x_2{}^3, x_1x_4 - x_2x_3 , x_1x_3{}^2 - x_2{}^2x_4 , x_2x_4{}^2 - x_3{}^3)$$

(*siehe* [2, 144.11]) *ist kein* CM_V *Punkt.*

Beweis. Nach [7], 4. gilt für das Summenideal aus $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{b} = (x_1 , x_4{}^2)$ der Bézoutsche Satz im Sinne von Gröbner [2], 144.5. nicht. Daher kann nach [1, Satz 2] der lokale Ring von V in S oder die Lokalisierung L von $k[x_0 , x_1 ,..., x_4]/\mathfrak{b}$ bezüglich S kein Cohen–Macaulay Ring sein. Da $\mathfrak{b}$ ein Ideal der Hauptklasse ist, besitzt aber L die Cohen–Macaulay Eigenschaft. Folglich ist S kein CM_V Punkt. Q.E.D.

Derartige Beispiele sind im P^n mit $n \geqslant 4$ zu suchen, da für ungemischte Schnitte im P^3 und P^2 der Bézoutsche Satz stets gilt. Andere Beispiele findet man, indem man nach [3] weitere imperfekte Primideale betrachtet.

2.

Bemerkung. Satz 1 und das Lemma zeigen, daß die CM Eigenschaft des allgemeinen Punktes $\bar{x} \in W$ bei der Spezialisierung zu einem speziellen Punkt x im allgemeinem nicht erhalten bleibt. Im Gegensatz dazu ist das Liften der CM Eigenschaft eines speziellen Punktes $x \in W$ auf O_W immer möglich. Beachtet man nämlich, daß O_W isomorph zu einer Lokalisierung von O_x ist, dann hat man

KOROLLAR 1. *Sei V ein lokal noethersches Präschema und W ein abgeschlossenes, irreduzibles Unterpräschema von V. Wenn ein beliebiger Punkt $x \in W$ ein* CM_V *Punkt ist, dann ist auch der allgemeine Punkt $\bar{x} \in W$ ein* CM_V *Punkt.*

Die Überlegung von Kor. 1 ist nicht mehr für beliebige lokal geringte Räume möglich. Für einen gewissen Typ von lokal geringten Räumen liefert aber die (H)-Bedingung eine hinreichende Bedingung für das Liften der CM Eigenschaft im obigen Sinne. Zu diesem Zweck bezeichnen im folgenden $V = (\mathbf{V}, O_V)$ und $W = (\mathbf{W}, O_W)$ lokal geringte Räume mit $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$, deren Halme (lokale) noethersche Ringe sind. Ferner sei $\mathbf{W}$ stets ein abgeschlossener, irreduzibler Unterraum von $\mathbf{V}$, der genau einen algemeinen Punkt $\bar{x}$ besitzt. (Zur Existenz solcher Punkte siehe [4, No. 4]). Zusätzlich geben wir

DEFINITION 2. Seien V und W lokal geringte Räume wie oben. V heißt katenär längs W in einem Punkt $x \in W$, wenn

$$\dim O_{V,x} = \dim O_{W,x} + \dim O_{V,\bar{x}} .$$

V heißt katenär längs W, wenn diese Eigenschaft für jeden Punkt $x \in W$ erfüllt ist.

Für Schemata (wo $\dim O_{V,\bar{x}} = \operatorname{codim}(W, V)$) steht diese Definition in engem Zusammenhang mit einem entsprechenden Begriff von Grothendieck. Nach [4, No. 20, §14.3.2 und 16.1.4.2] haben wir nämlich

KOROLLAR 2. *Für ein affines Schema V mit noetherschem Ring A sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *A ist katenär und $A_{\mathfrak{p}}$ ist äquidimensional für alle $\mathfrak{p} \subset A$*

(b) *V ist katenär längs W für alle $W \subset V$.*

SATZ 2. *Seien V und W lokal geringte Räume wie oben. V sei katenär längs W in einem CM_V Punkt $x \neq \bar{x}$ auf $\mathbf{W}$. Wenn (H) für x und den allgemeinen Punkt $\bar{x} \in \mathbf{W}$ gilt, dann ist auch $\bar{x}$ ein CM_V Punkt.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen gilt für alle $p \geqslant 0$

$$H(\mathfrak{q}_x, p) = l(O_x/\mathfrak{q}_x) \binom{p+s+r}{s+r} \tag{2}$$

mit $s = \dim O_W$, $r = \dim O_{W,x}$ und $s + r = \dim O_{V,x}$. Wegen

$$l(O_x/\mathfrak{q}_x) = l(O_W/\mathfrak{q}_W) =: l_0 \tag{3}$$

bleibt zu zeigen, daß $H(\mathfrak{q}_W, n) = l_0\binom{n+s}{s}$. Dies erfolgt durch Induktion nach n: im Fall $n = 0$ bedeutet dies (3). Für beliebiges n ergibt sich aus (H)

$$l_0 \binom{n+s+r}{s+r} = \sum_{p+q=n}' l_0 \binom{p+s}{s}\binom{q+r-1}{r-1} + H(\mathfrak{q}_W, n).$$

(Σ' entsteht aus Σ durch Fortlassen des Gliedes für $p = n$, $q = 0$). Also

$$H(\mathfrak{q}_W, n) = l(O_W/\mathfrak{q}_W)\binom{n+s}{s}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

KOROLLAR 1.2. *Seien V und W wie im Satz 2. Wenn V katenär längs W in x ist, dann bleibt Korollar 1.1 unter den entsprechenden Voraussetzungen richtig.*

Die Liftungseigenschaft im Sinne von Korollar 1 unterscheidet (lokal noethersche) Präschemata von den meisten lokal geringten Räumen. Die Beweise von Kor. 1 und Satz 2 deuten darauf hin, daß die (H)-Bedingung hinsichtlich der CM_V Eigenschaft von x und seinen Generalisierungen ein gewisses (lokal) affines Verhalten des Raumes V beschreibt.

Eine genaure Analyse des Beweises von Satz 2 zeigt, daß aus der Existenz eines speziellen CM_V Punktes x und aus einer abgeänderten (H)-Bedingung in der für $\bar{x}$ ein spezieller Punkt $x' \neq x$ steht, nicht geschlossen werden kann, daß x' ein CM_V Punkt ist. Wie man in diesem Rahmen die CM Eigenschaft von x' erhalten kann, zeigt das folgende Korollar zu Satz 2 und Kor. 1.2.

Korollar 2.1. *Sei V katenär längs W in x und x'. Sei x ein* CM_V *Punkt, und es gelte (H) für x, $\bar{x}$ und x', $\bar{x}$,* d.h.,

$$H(\mathfrak{q}_x, n) = \sum_{p+q=n} H(\mathfrak{q}_W, p) \binom{q+r-1}{r-1},$$

$$H(\mathfrak{q}_{x'}, n) = \sum_{p+q=n} H(\mathfrak{q}_W', p) \binom{q+r'-1}{r'-1},$$

mit $r = \dim_x W$ und $r' = \dim_{x'} W$. Dann ist x' ein CM_V *Punkt.*

Bemerkung. Sind V und W lokal noethersche Präschemata, dann gilt Kor. 2.1 allein mit der (H)-Bedingung für x' $\bar{x}$ nach Kor. 1.

3. Um diese Untersuchungen auf Schnittprobleme im Sinne von [7] anwenden zu können, setzen wir im folgenden V und W als homogene Varietäten mit den definierenden Primidealen $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$ in dem Polynomring $R =: k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ in $n+1$ Unbestimmten über einem beliebigen Körper k voraus. Wie in der Schnitt-Theorie üblich, nehmen wir an, daß sich V und W nur eigentlich schneiden, d.h., es gilt

$$\dim(\mathfrak{p}_V, \mathfrak{p}_W) = \dim \mathfrak{p}_V - \operatorname{rang} \mathfrak{p}_W .$$

In der Multiplizitätstheorie von Weil kann häftig unter gewissen "glättenden" Bedingungen von der Multiplizität einer Schnittkomponente C von $V \cap W$ auf die Multiplizitäten der anderen Komponenten geschlossen werden. Dieses Prinzip zur Multiplizitätsbestimmung wurde in [7] mit Hilfe der normalen Flachheit im Sinne von Hironaka [8] herangezogen, um das Verhalten der Schnittkomponenten bezüglich der Multiplizitätsdefinitionen von Gröbner [2] und Weil [15] zu vergleichen. Dazu stellte man an gewisse Schnittkomponenten von $V \subset W$ spezielle Einbettungseigenschaften in V bzw. W. In unserem idealtheoretischen Rahmen liefert nun die (H)-Bedingung im folgenden Satz *i* ein besseres "Maß" für die Abweichung der Multiplizitäten von Gröbner und Weil.

Sei $x^{(0)}$ der Punkt einer homogenen Varietät, der durch das Ideal $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ definiert wird.

Satz i. *Seien C_1 und C_2 beliebige Schnittkomponenten von $V \cap W$, deren allgemeine Punkte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$* CM_V — bzw. CM_W — *Punkte sind. Wenn (H)*

sowohl für $x^{(0)}$, $\bar{x}_1 \in C_1$ *als auch für* $x^{(0)}$, $\bar{x}_2 \in C_2$ *gilt, dann stimmen die Schnittmultiplizitäten von Gröbner und Weil in* jeder *Komponente von* $V \cap W$ *überein, und* $\mathfrak{p}_V$ *und* $\mathfrak{p}_W$ *sind perfekte Ideale.*

Beweis. Nach Satz 1 sind die lokalen Ringe von V und W in $x^{(0)} \in C_1$, C_2 Cohen–Macaulay Ringe. Daher sind nach Rees [11] und Northcott [10, S. 81–82] die Primideale $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$ perfekt im Sinne von Gröbner [2, S. 198]. Nach [14] ist dies hinreichend für die Gültigkeit des Bézoutschen Satzes im Sinne von Gröbner [2, 144.5], und dies ist nach [7, Satz 1] äquivalent zu der Behauptung des Satzes. Q.E.D.

Sind anstelle von $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ jeweils ein beliebiger CM_V Punkt und CM_W Punkt auf C_1 bzw. C_2 gegeben, dann bleibt Satz i unter denselben Voraussetzungen nach Kor. 1 richtig.

4. Wir geben nun eine Charakterisierung der (H)-Bedingung.

SATZ 3. *Seien* V, W *lokal noethersche Präschemata und* $W \subset V$ *abgeschlossen und irreduzibel.* V *sei katenär längs* W *in einem Punkt* $x \in W$. *Dann erhält man*:

(1) *Ist* (H) *für* x, $\bar{x} \in W$ *erfüllt, so gilt* $e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W)$ *für die in* (H) *auftretenden Parameterideale* $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_W$.

(2) *Ist* $\bar{x}$ *ein* CM_V *Punkt, dann gilt* (H) *für* x, $\bar{x}$ *genau dann, wenn* x *ein* CM_V *Punkt und* $e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W)$ *sind.*

Beweis. (1) Für große n betrachten wir das Hilbert–Samuel Polynom

$$H_W{}^0(n) = e_0(\mathfrak{q}_W)\binom{n+s}{s} + \cdots + e_s(\mathfrak{q}_W)$$

mit $s = \dim O_{V,\bar{x}} = \operatorname{codim}(W, V)$; $e_i(\mathfrak{q}_W)$ ganze Zahlen und $e_0(\mathfrak{q}_W) =$ Multiplizität von $\mathfrak{q}_W \subset O_W = O_{V,\bar{x}}$. Ferner sei $H_x{}^0(n)$ das Polynom

$$H_x{}^0(n) = \sum_{p+q=n} H_W(p)\binom{q+r-1}{r-1},$$

das durch (H) für großes n gegeben ist. Die Differenz

$$H_x{}^0(n) - \sum_{p+q=n} H_W{}^0(p)\binom{q+r-1}{r-1} =: P_{r-1}$$

ist ein Polynom vom Grad $\leqslant r-1$. Unter Berücksichtigung der Formel

$$\sum_{p+q=n}\binom{p+s}{s}\binom{q+r-1}{r-1} = \binom{n+s+r}{s+r}$$

erhalten wir:

$$H_x^0(n) = e_0(\mathfrak{q}_W)\binom{n+s+r}{s+r} + \cdots + e_s(\mathfrak{q}_W)\binom{n+r}{r} + P_{r-1}$$

und damit $e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W)$.

(2) Gilt (H), dann ist x ein CM_V Punkt nach Kor. 1.2. Ist umgekehrt x ein CM_V Punkt, dann haben wir

$$l(O_x/q_x^{n+1}) = e_0(\mathfrak{q}_x)\binom{n+s+r}{s+r}$$

und

$$l(O_W/\mathfrak{q}_W^{n+1}) = e_0(\mathfrak{q}_W)\binom{n+s}{s},$$

mit $r = \dim O_{W,x}$, $s = \dim O_{V,\bar{x}}$ und $s + r = \dim O_{V,x}$ nach Voraussetzung. Weil $e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W)$, erhalten wir

$$e_0(\mathfrak{q}_x)\binom{n+s+r}{s+r} = \sum_{p+q=n} e_0(\mathfrak{q}_W)\binom{p+s}{s}\binom{q+r-1}{r-1}.$$

Die CM Eigenschaften von x und $\bar{x}$ liefern somit (H). Q.E.D.

Satz 3 ergibt eine idealtheoretische Charakterisierung von (H). In dem folgenden Korollar geben wir eine kohomologische Beschreibung von (H).

Seien $V_x =: \operatorname{spec} O_x (O_x =: O_{V,x})$ und $W_x =: \operatorname{spec} O_x/\mathfrak{q}_x$. Mit $H_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x)$ bezeichnen wir die (lokale) Kohomologie im Sinne von [5, 3.2].

Korollar 3.1. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 3, (2) *haben wir*: (H) *gilt für* x, $\bar{x}$ (*d.h.* (H) *ist erfüllt für Parameterideale* $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_W$) *dann und nur dann, wenn* $e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W)$ *und* $H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x) = 0$ *für* $i \leqslant d - 1$ *mit* $d = \dim O_x$.

Beweis. Nach Satz 3 ist zu zeigen, daß genau dann $H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x) = 0$, $i \leqslant d - 1$, wenn x ein CM_V Punkt ist. Die Kohomologiegarbe $\underline{H}^i_{W_x}(\tilde{O}_x)$ ist die zum O_x-Modul $H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x)$ assoziierte Garbe (siehe [6, Prop. 2.2]), und das Verschwinden dieser Garben charakterisiert nach [6, Th. 3.8] die kohomologische Dimension von $\tilde{O}_x$ bezüglich W_x. In unserem Fall ist $W_x = \{\mathfrak{m}_x\}$, damit

$$H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x)^\sim = \underline{H}^i_{\{\mathfrak{m}_x\}}(\tilde{O}_x),$$

und [6, Kor. 3.10(i), (iv)] liefert die Behauptung. Q.E.D.

Bemerkung. Im Falle von affinen homogenen Varietäten zeigt Satz i, daß gewisse (H)-Bedingungen ein "Maß" für die Abweichung der Multiplizitäten von Gröbner und Weil liefern. Kor. 3.1 ergibt somit, daß das Verschwinden von lokalen Kohomologiegruppen — abgesehen von einer "schwachen Äquimultiplizität" (im Sinne von Satz 3) — als Obstruktionsmaß für die Gleichheit dieser Multiplizitäten angesehen werden kann.

Natürlich kann diese Abweichung auch durch das Verschwinden von Kohomologiegruppen des Koszulkomplexes von O_x bezüglich des Parameterideals $\mathfrak{q}_x = (f_1, ..., f_d)$ beschrieben werden. Es gilt nämlich nach [12, S.IV-21], daß $H^{d-1}(\mathfrak{q}_x, O_x) = 0$ die CM Eigenschaft von x charakterisiert.

Der Zusammenhang zwischen dieser Aussage und Kor. 3.1 wird durch [6], Th. 3.2 gegeben:

$$H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x) = \varinjlim_n H^i(\mathfrak{q}_x, O_x),$$

mit der Familie $\underline{\mathfrak{q}}_x = (f_1^n, ..., f_d^n)$.

References

1. L. Budach und W. Vogel, Cohen–Macaulay Moduln und der Bézoutsche Satz, *Monatsh. Math.* **73** (1969), 97–111.
2. W. Gröbner, "Moderne algebraische Geometrie.—Die idealtheoretischen Grundlagen," Springer–Verlag, Vienna, 1949.
3. W. Gröbner, Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen, *Arch. Math.* **14** (1965), 257–264.
4. A. Grothendieck, "Éléments de Géométrie Algébrique," IHES, Publ. Math., Paris, No. 4 (1960), No. 20 (1964), No. 24 (1965).
5. A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.
6. A. Grothendieck, "Local Cohomology," Lecture Notes in Math. No. 41, Springer–Verlag, Berlin, 1967.
7. M. Herrmann und W. Vogel, Bemerkungen zur Multiplizitätstheorie von Gröbner und Serre, *J. Reine Angew. Math.* **241** (1970), 42–46.
8. H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, *Ann. of Math.* **79** (1964), 109–203.
9. M. Nagata, "Local Rings," Interscience, New York, 1962.
10. D. G. Northcott, Semi-regular rings and semi-regular ideals, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **9** (1960), 81–104.
11. D. Rees, The grade of an ideal or module, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 28–42.
12. J.-P. Serre, "Algèbre locale—Multiplicités," Lectures Notes in Math., No. 11, Springer–Verlag, Berlin, 1965.
13. W. Vogel, Eine Bemerkung zur idealtheoretischen Multiplizitätstheorie, *Math. Ann.* **166** (1966), 64–75.
14. W. Vogel, Schnitte von perfekten Mannigfaltigkeiten, *In* Hochschulskriptum der Univ. Innsbruck (Austria), Math. Institut "Beiträge zur Algebraischen Geometrie," B. I. Mannheim, to appear.
15. A. Weil, "Foundations of algebraic geometry," *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* No. 29, Providence, RI, 1962.
16. O. Zariski and P. Samuel, "Commutative Algebra," Vol. 2, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960.

Printed in Belgium