Europ. J. Combinatorics (1995) **16**, 147–151

Sur une Extension des Nombres de Genocchi

DOMINIQUE DUMONT ET ARTHUR RANDRIANARIVONY

We study the sequence of polynomials $B_n(x, y)$ defined through the recurrence $B_1(x, y) = 1$, $B_n(x, y) = (x+1)(y+1)B_{n-1}(x+1, y+1) - xyB_{n-1}(x, y)$, which extend the Gandhi polynomials generating the Genocchi numbers. We give a combinatorial interpretation of these polynomials, and a continued fraction representation for their ordinary generating function.

Etant données des indéterminées c_i, nous considérons le tableau des $h_{n,k}$ définis comme suit:

$$h_{0,0} = 1, \qquad h_{n,k} = 0 \quad \text{si } k \notin [0, n],$$
$$h_{n,k} = h_{n-1,k} + c_{n-k+1}h_{n,k-1}.$$

Voici le tableau des premières valeurs des $h_{n,k}$, dans lequel le numéro de ligne est n, le numéro de colonne k:

n	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	1			
1	1	c_1		
2	1	c_1+c_2	$c_1^2+c_1c_2$	
3	1	$c_1+c_2+c_3$	$c_1^2+2c_1c_2+c_2^2+c_2c_3$	$c_1^3+2c_1^2c_2+c_1c_2^2+c_1c_2c_3$

Notons i le numéro de diagonale, de sorte que $i = n - k$, et appelons $h_i(t)$ la série génératrice de la i-ème diagonale:

$$h_0(t) = 1 + c_1t + (c_1^2 + c_1c_2)t^2 + (c_1^3 + 2c_1^2c_2 + c_1c_2^2 + c_1c_2c_3)t^3 + \ldots,$$
$$h_1(t) = 1 + (c_1 + c_2)t + [c_2(c_1 + c_2 + c_3) + (c_1^2 + c_1c_2)]t^2 + \ldots,$$
$$h_2(t) = 1 + (c_1 + c_2 + c_3)t + \ldots,$$
$$\vdots$$

La récurrence définissant les $h_{n,k}$ est équivalente à:

$$h_0(t) = 1 + c_1th_1(t),$$
$$h_1(t) = h_0(t) + c_2th_2(t),$$
$$h_2(t) = h_1(t) + c_3th_3(t),$$
$$\vdots$$

d'où

$$h_0(t) = \cfrac{1}{1 - c_1t\cfrac{h_1(t)}{h_0(t)}}, \qquad \frac{h_1(t)}{h_0(t)} = \cfrac{1}{1 - c_2t\cfrac{h_2t}{h_1(t)}}, \qquad \ldots$$

et finalement

$$h_0(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1t}{1 - \cfrac{c_2t}{1 - \cfrac{c_3t}{\ddots}}}} = 1 + c_1t + (c_1^2 + c_1c_2)t^2 + (c_1^3 + 2c_1^2c_2 + c_1c_2^2 + c_1c_2c_3)t^3 + \cdots$$

0195-6698/95/020147 + 05 $08.00/0

Le tableau des $h_{n,k}$, introduit à l'origine par Stieltjes [8], demeure l'algorithme de calcul le plus simple pour développer en série une fraction continue de ce type, qu'on appelle S-fraction. Une formule sommatoire donnant les $h_{n,n}$ est explicitée par Touchard [11]. Par ailleurs on trouvera une interprétation combinatoire de ce tableau en termes de *chemins de Dyck pondérés*, ou dans le formalisme des *histoires*, dans [4, 12]. Notre notation $h_{n,k}$ est dérivée de cette interprétation (Stieltjes notait en fait $\alpha_{i,j}$ et $\beta_{i,j}$ une paire de tableaux correspondant aux J-fractions continues obtenues comme contractions de la S-fraction).

Dans cet article nous nous intéressons au cas où la suite (c_i) est

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots) = (y, x+1, 2(y+1), 2(x+2), 3(y+2), 3(x+3), \ldots),$$

autrement dit $c_{2i-1} = iy + i(i-1)$ et $c_{2i} = ix + i^2$. On obtient alors le tableau suivant pour les polynômes $h_{n,k}(x, y)$:

n	0	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	1			
1	1	y		
2	1	$x+y+1$	$xy+y^2+y$	
3	1	$x+3y+3$	$x^2+4xy+y^2+4x+4y+3$	$x^2y+4xy^2+y^3+4xy+4y^2+3y$
4	1	$3x+3y+7$	$x^2+10xy+7y^2+10x+24y+17$	$\ldots$

La raison pour laquelle nous considérons cet exemple est qu'il conduit à une extension commune aux fractions continues relatives aux nombres de Genocchi G_{2n} et aux nombres de Genocchi médians H_{2n+1} (voir à ce sujet les références anciennes [7, 9] et récentes [3, 12]). Plus précisément on a le résultat suivant, qui résulte immédiatement de [3, 12], et de notre introduction:

PROPOSITION. *Avec le choix ci-dessus des c_i, on a $h_{n,n}(0,1) = H_{2n+1}$ et $h_{n,n}(1,1) = G_{2n+2}$.*

Notre objectif est de démontrer que les polynômes $h_{n,n-1}(x, y)$ sont symétriques en x, y et sont une extension des polynômes de Gandhi de première et de deuxième espèces (cf. 1, 2, 6, 10), comme le montre le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soient les polynômes $B_n(x, y)$ définis par la récurrence:*

$$B_n(x,y) = (x+1)(y+1)B_{n-1}(x+1, y+1) - xyB_{n-1}(x,y), \qquad B_1(x,y) = 1.$$

Alors on a l'identité:

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{yt}{1 - \cfrac{(x+1)t}{1 - \cfrac{2(y+1)t}{1 - \cfrac{2(x+2)t}{1 - \cfrac{3(y+2)t}{\ddots}}}}}} = 1 + y[t + (x+y+1)t^2 + \cdots + B_n(x,y)t^n + \cdots].$$

Autrement dit, avec les notations ci-dessus on a

$$B_n(x,y) = h_{n,n-1}(x,y) = \frac{1}{y} h_{n,n}(x,y).$$

La démonstration respose sur le lemme suivant, dans lequel la lettre Δ désigne l'opérateur de différence double en x et en y: $\Delta f(x, y) = f(x+1, y+1) - f(x, y)$.

LEMME. *Les polynômes $h_{n,k}(x, y)$ satisfont les identités*:

$$\Delta h_{k+2i-1,k} = i(i+1)h_{k+2i,k-1}, \qquad \Delta h_{k+2i,k} = (i+1)^2 h_{k+2i+1,k-1}.$$

DÉMONSTRATION. Selon que l'indice de diagonale est $2i$ ou $2i-1$, la récurrence définissant les $h_{n,k}$ est

$$h_{k+2i-1,k} = h_{k+2i-2,k} + (ix + i^2)h_{k+2i-1,k-1},$$
$$h_{k+2i,k} = h_{k+2i-1,k} + ((i+1)y + i(i+1))h_{k+2i,k-1}.$$

Nous démontrons le lemme par récurrence sur $n+k$. Nous supposons d'abord le lemme vrai pour $n+k = 2k+2i-1$, et le démontrons pour $n+k = 2k+2i$. Notons que Δ est linéaire et que

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + \Delta f \Delta g.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\Delta h_{k+2i,k} = {} & \Delta h_{k+2i-1,k} + ((i+1)y + i(i+1))\Delta h_{k+2i,k-1} + (i+1)h_{k+2i,k-1} \\ & + (i+1)\Delta h_{k+2i,k-1}.\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $\Delta h_{k+2i,k-1} = \Delta h_{k-1+(2i+1),k-1} = (i+1)(i+2)h_{k+2i+1,k-2}$. D'où

$$\begin{aligned}\Delta h_{k+2i,k} &= i(i+1)h_{k+2i,k-1} + ((i+1)y + (i+1)^2)(i+1)(i+2)h_{k+2i+1,k-2} + (i+1)h_{k+2i,k-1} \\ &= (i+1)^2[h_{k+2i,k-1} + ((i+2)y + (i+1)(i+2))h_{k+2i+1,k-2}] \\ &= (i+1)^2[h_{k-1+(2i+1),k-1} + ((i+2)y + (i+1)(i+2))h_{k-1+(2i+2),k-2}] \\ &= (i+1)^2 h_{k-1+(2i+2),k-1} \\ &= (i+1)^2 h_{k+2i+1,k-1},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. De manière analogue, on montre que si le lemme est vrai pour $n+k = 2k+2i$, il est vrai pour $n+k = 2k+2i+1$.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de vérifier que les $h_{n,n-1}(x, y)$ vérifient la récurrence des $B_n(x, y)$. Or

$$\begin{aligned}h_{n,n-1}(x, y) &= h_{n-1,n-1}(x, y) + (x+1)h_{n,n-2}(x, y) \\ &= h_{n-1,n-1}(x, y) + (x+1)\Delta h_{n-1,n-1}(x, y) \qquad \text{(lemme)} \\ &= (x+1)h_{n-1,n-1}(x+1, y+1) - xh_{n-1,n-1}(x, y) \\ &= (x+1)(y+1)h_{n-1,n-2}(x+1, y+1) - xyh_{n-1,n-2}(x, y)\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. On peut donner une autre forme à la série génératrice

$$B(x, y; t) = \sum_{n \geq 1} B_n(x, y)t^n$$

en itérant son équation fonctionnelle:

$$\begin{aligned}
B(x,y;t) &= t + (x+1)(y+1)tB(x+1,y+1;t) - xytB(x,y;t)\\
&= \frac{t}{1+xyt}[1+(x+1)(y+1)B(x+1,y+1;t)]\\
&= \frac{t}{1+xyt} + \frac{(x+1)(y+1)t^2}{(1+xyt)(1+(x+1)(y+1)t)}\\
&\quad + \frac{(x+1)(x+2)(y+1)(y+2)t^3}{(1+xyt)(1+(x+1)(y+1)t)(1+(x+2)(y+2)t)} + \cdots
\end{aligned}$$

En revanche, nous ne connaissons pas d'expression explicite pour la série génératrice exponentielle (la transformée de Borel de cette série).

Les polynômes de Gandhi $B_n(x)$ et $C_n(x) = xH_n(x)$, définis dans [1], [2] et [6], par

$$\begin{cases} B_1(x) = x^2, \\ B_n(x) = x^2 B_{n-1}(x+1) - x^2 B_{n-1}(x) \qquad (n \geq 2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(x) = x^2, \\ C_n(x) = x^2 C_{n-1}(x+1) - x(x+1) C_{n-1}(x) \qquad (n \geq 2), \end{cases}$$

s'obtiennent à partir des polynômes $B_n(x, y)$ comme suit:

$$B_n(x) = x^2 B_n(x,x), \qquad C_n(x) = x^2(x+1)B_{n-1}(x, x+1),$$
$$H_n(x) = x(x+1)B_{n-1}(x, x+1).$$

Par suite, il suffit de porter $y = x$ ou $y = x+1$ pour obtenir des fractions continues correspondant à leurs séries génératrices, annoncées dans [2].

Pour conclure cet article, nour donnerons une interprétation combinatoire des polynômes $B_n(x, y)$, extension de celle des polynômes $B_n(x)$ donnée en [1]. Nous suivrons les notations de [5].

Un *escalier surjectif* de taille $2n$ est une application f de $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ dans $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, telle que, pour tout i, $i \leq f(i)$, et dont l'ensemble-image est exactement l'ensemble des entiers pairs $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$, qui est donc surjective sur cet ensemble. Un point $(i, f(i))$ tel que $1 \leq i \leq 2n-2$ et $f(i) = 2n$ est dit *point maximal* de f. Il est *pair* ou *impair* selon que i est pair ou impair. On note $maxp(f)$ et $maxi(f)$ le nombre des points maximaux pairs et des points maximaux impairs de f. On note A_n l'ensemble des escaliers surjectifs f de taille $2n$.

THÉORÈME 2. *On a l'identité suivant:*

$$B_n(x,y) = \sum_{f \in A_n} x^{maxp(f)} y^{maxi(f)}.$$

On peut pour démontrer ce théorème introduire les coefficients du polynôme, leur récurrence, et montrer qu'elle coïncide avec la récurrence qu'on déduit de l'interprétation combinatoire. Mais il est plus élégant de se passer des coefficients, et de procéder comme le fait Han Guo Niu dans [5] en appliquant sa méthode des *escaliers évalués* au cas où l'évaluation consiste à mettre x dans chaque case maximale paire, y dans chaque case maximale impaire, et 1 dans toutes les autres cases. On obtient alors des analogues des Lemmes 3.1 et 3.2 de [5] qui conduisent directement à la récurrence définissant les polynômes $B_n(x, y)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Dumont, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math. J.* **41** (1974), 305–318.
2. D. Dumont et A. Randrianarivony, Dérangements et nombres de Genocchi, à paraître.
3. D. Dumont et J. Zeng, A note on the Euler and Genocchi numbers, à paraître.
4. P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discr. Math.*, **32** (1980) 125–161.
5. Han Guo Niu, Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi, preprint, Strasbourg.
6. M. E. H. Ismail et D. Stewart, On Dumont's polynomials, *Discr. Math.*, **41** (1982), 155–160.
7. C. Preece, Theorems stated by Ramanujan (X), *J. Lond. Math. Soc.*, **6** (1931), 23–32.
8. T. J. Stieltjes, Sur la réduction en fraction continue d'une série..., *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **3** (1887), H1–H17.
9. T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, chapitre XI, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **9** (1895), 39–41.
10. V. Strehl, Alternating permutations and modified Gandhi polynomials, *Discr. Math.*, **28** (1979), 89–100.
11. J. Touchard, Sur un problème de configurations et sur les fractions continues, *Can. J. Math.*, **4** (1952), 2–25.
12. X. G. Viennot, Théorie combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi, dans: *Séminaire de Théorie des Nombres, Exposé n° 11*, Publications de l'Université de Bordeaux I, 1980.

Received 29 June 1994 and accepted 1 July 1994

DOMINIQUE DUMONT ET ARTHUR RANDRIANARIVONY
E.E.S. Sciences,
B.P. 906, Antananarivo,
Madagascar