MATHEMATICS

ESPACES LOCALEMENT K-CONVEXES. II

PAR

J. VAN TIEL

(Communicated by Prof. T. A. SPRINGER at the meeting of October 31, 1964)

ESPACES LOCALEMENT K-CONVEXES

Dans tout ce qui suit, il ne sera question que d'espaces vectoriels sur K.

§ 1. *Espaces vectoriels topologiques localement compacts.*

Définition 3.1. *Une norme n.a. sur un espace vectoriel E est une semi-norme n.a. p sur E (déf. 2.8) satisfaisant à la condition suivante: $x \in E$, $p(x)=0$ entraînent $x=0$.*

Un espace vectoriel topologique E est dit espace vectoriel normé n.a. si la topologie de E peut être (est) définie par une norme n.a. Évidemment, pour qu'un espace localement K-convexe E soit normé, il faut et il suffit que la topologie de E puisse être définie par une famille Γ de semi-normes n.a. ne contenant qu'un seul élément (cet élément est donc une norme n.a., comme nous ne considérons que des espaces séparés).

La théorie des espaces vectoriels normés n.a. a été développée entre autres par A. F. MONNA dans une série d'articles dans les "Proceedings" de la "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen" dans la période 1943–1957. Dans ce qui suit nous emploierons quelques-uns de ses résultats.

Théorème 3.1 (Critère de Kolmogoroff). *Pour qu'un espace vectoriel topologique E soit un espace normé n.a., il faut et il suffit qu'il existe dans E un voisinage K-convexe borné de* 0 (cf. [17], p. 360).

Démonstration. Voir [17].

Théorème 3.2. *Supposons que K soit complet. Alors, pour qu'un espace vectoriel topologique E soit localement compact, il faut et il suffit que K soit localement compact et que E soit de dimension finie sur K* (cf. [1], p. 29).

Démonstration. Voir [1].

Remarque. Dans le cas d'un espace normé n.a. MONNA avait déjà trouvé des théorèmes analogues au théorème 3.2 ([10], p. 1048–1053).

Théorème 3.3. *Supposons que K soit complet. Pour tout espace* *vectoriel topologique localement compact E il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que E est isomorphe à l'espace K^n, normé par la norme*

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \quad (x_i \in K, \ i = 1, \ldots, n).$$

Démonstration. D'après le théorème 3.2, E est de dimension finie. En outre, tous les espaces vectoriels topologiques de la même dimension finie sur un corps valué complet sont isomorphes ([1], p. 27).

Remarque. Si dans le théorème 3.3 on suppose de plus que E soit localement K-convexe, on peut donner du théorème ainsi obtenu la démonstration suivante: d'après le théorème 3.2, E est de dimension finie. Si $n = \dim E$, l'espace vectoriel E est isomorphe à l'espace vectoriel K^n. Soit U un voisinage compact de 0 dans E; U contient un voisinage fermé K-convexe de 0 qui est compact et donc borné. De ceci et du théorème 3.1 on déduit que E est un espace normé; E est donc isomorphe à K^n muni d'une norme. D'autre part, on sait que deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sur K sont équivalentes (voir [3], p. 694), ce qui achève la démonstration. De cette démonstration on déduit encore: *tout espace localement K-convexe et localement compact est un espace normé* (*même si K n'est pas complet*).

§ 2. *Applications linéaires continues.*

Théorème 3.4. *Soient E et F deux espaces localement K-convexes, T une application linéaire de E dans F. Pour que T soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme n.a. continue q sur F, il existe une semi-norme n.a. continue p sur E et $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ tels que $q(T(x)) \leqslant c \cdot p(x)$ $(x \in E)$* (cf. [16], p. 398).

Démonstration. Nous donnons une démonstration différente de celle dans [16].

La suffisance de la condition est évidente. Nous montrons la nécessité: soit q une semi-norme n.a. continue sur F. Alors il existe une semi-norme n.a. continue p sur E telle que $x \in E$, $p(x) \leqslant 1$ entraînent $q(T(x)) \leqslant 1$. Soient $\lambda_n \in K$ tel que $|\lambda_n| = \varrho^n$ $(n \in \mathbf{Z})$, $x \in E$.

Nous pouvons distinguer deux cas: 1°. si $p(x) = 0$, on a $p(\lambda_n x) = 0$ $(n \in \mathbf{Z})$, donc $q(T(\lambda_n x)) = \varrho^n q(T(x)) \leqslant 1$ $(n \in \mathbf{Z})$. Il s'ensuit que $q(T(x)) = 0$; 2°. si $p(x) \neq 0$, il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\varrho^n < (p(x))^{-1} \leqslant \varrho^{n+1}$. Alors on a $p(\lambda_n x) = \varrho^n p(x) < 1$, donc $q(T(\lambda_n x)) = \varrho^n q(T(x)) \leqslant 1$. On en déduit que $q(T(x)) = \varrho^n q(T(x)) \cdot \varrho^{-n} \leqslant \varrho \cdot p(x)$.

Résumant les deux cas, on a: $q(T(x)) \leqslant \varrho \cdot p(x)$ $(x \in E)$.

Soit E un espace localement K-convexe. Supposons que K soit complet sphérique. On a alors les théorèmes suivants:

Théorème 3.5 (Théorème de Hahn-Banach). *Soient M un sous-espace vectoriel de E, p une semi-norme n.a. sur E, $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$, f une application linéaire de M dans K telle que $|f(x)| \leqslant c \cdot p(x)$ $(x \in M)$.*

Alors il existe une application linéaire f^* de E dans K satisfaisant aux conditions suivantes: 1°. $f^*(x)=f(x)$ $(x \in M)$; 2°. $|f^*(x)| \leqslant c \cdot p(x)$ $(x \in E)$.

Démonstration. Soient $L=\{x \in E | p(x)=0\}$, $x \to \hat{x}$ l'application canonique de E sur $\hat{E}=E/L$, $\hat{M}$ l'image de M dans $\hat{E}$ par l'application canonique. L'application $\hat{x} \to ||\hat{x}||=p(x)$ est une norme n.a. sur $\hat{E}$ ([16], p. 395). Comme $x \in M$, $p(x)=0$ entraînent $f(x)=0$, on peut définir par $\hat{f}(\hat{x})=f(x)$ $(x \in M)$ une application linéaire $\hat{f}$ de $\hat{M}$ dans K; on a $|\hat{f}(\hat{x})|=$ $=|f(x)| \leqslant c \cdot p(x)=c \cdot ||\hat{x}||$ $(x \in M)$. D'après un résultat de Ingleton ([6]) il existe une application linéaire $\hat{f}^*$ de $\hat{E}$ dans K satisfaisant aux conditions suivantes: 1°. $\hat{f}^*(\hat{x})=\hat{f}(\hat{x})$ $(\hat{x} \in \hat{M})$; 2°. $|\hat{f}^*(\hat{x})| \leqslant c \cdot ||\hat{x}||$ $(\hat{x} \in \hat{E})$. L'application f^* de E dans K, définie par $f^*(x)=\hat{f}^*(\hat{x})$, est l'application cherchée.

Théorème 3.6. *Soient M un sous-espace vectoriel de E, f une application linéaire continue de M dans K. Alors il existe une application linéaire continue f^* de E dans K telle que $f^*(x)=f(x)$ $(x \in M)$.*

Démonstration. D'après la démonstration du théorème 3.4 il existe une semi-norme n.a. continue p sur E et $c \in \mathbf{R}$, $c>0$ tels que $|f(x)| \leqslant c \cdot p(x)$ $(x \in M)$. En prolongeant f d'après le théorème 3.5 on obtient l'application f^* cherchée.

Remarques. 1. Dans [6] on démontre: soient E et F des espaces vectoriels normés n.a., et supposons que F soit complet sphérique, c'est-à-dire que toute famille de boules de F, telle que deux quelconques de ces boules aient une intersection non vide, ait une intersection non vide. Soit T une application linéaire continue du sous-espace vectoriel M de E dans F. Alors il existe une application linéaire continue T^* de E dans F satisfaisant aux conditions suivantes: 1°. $T^*(x)=T(x)$ $(x \in E)$; 2°. $\sup_{x \in M, x \neq 0} ||T(x)||/||x|| = \sup_{x \in E, x \neq 0} ||T^*(x)||/||x||$ (on dit que F possède "la propriété d'extension" par rapport aux espaces vectoriels normés n.a.).

Dans [16] on généralise ce résultat: en employant le théorème 3.4, on voit que la démonstration donnée dans [6] est valable aussi si on remplace les normes n.a. sur E et F par des semi-normes n.a. (dans ce cas, on peut aussi donner la démonstration en suivant la méthode de la démonstration du théorème 3.5: soient p la semi-norme sur E, q la semi-norme sur F. Considérer les espaces normés $\hat{E}=E/L$ et $\hat{F}=F/P$, où $L=\{x \in E | p(x)=0\}$, $P=\{x \in F | q(x)=0\}$; $\hat{F}$ est complet sphérique (cf. [16], p. 405)). Le théorème 3.5 est un cas particulier du résultat démontré dans [16].

2. Soit E un espace vectoriel normé n.a. tel que l'ensemble des valeurs de la norme de E ait 0 comme seul point d'accumulation; la valuation de K est donc discrète. Supposons que K soit complet. Dans [10] (p. 1137) on démontre que le théorème de Hahn-Banach est valable dans ce cas.

Dans [3] on démontre que le théorème de Hahn-Banach est valable pour un espace vectoriel normé n.a. sur un corps complet K, si la valuation de K est discrète. Enfin, dans [6] on donne une condition nécessaire et suffisante pour que le théorème de Hahn-Banach soit valable pour tout espace vectoriel normé n.a. sur K; en effet, on démontre encore: si F est un espace vectoriel normé n.a. qui n'est pas complet sphérique, il existe un espace vectoriel normé n.a. E par rapport auquel F ne possède pas "la propriété d'extension". (Dans [16] on remarque que ce résultat reste valable si on remplace "espace vectoriel normé n.a." par "espace localement K-convexe – pas nécessairement séparé – dont la topologie est définie par une seule semi-norme n.a.".) On a donc:

Théorème 3.7. *Si K n'est pas complet sphérique, il existe un espace localement K-convexe E pour lequel le théorème de Hahn-Banach n'est pas valable.*

3. Dans [6] on démontre: si le théorème de Hahn-Banach est valable pour un espace vectoriel normé E sur K, E est un espace vectoriel normé n.a. Pour les espaces localement K-convexes on a le théorème suivant:

Théorème 3.8. *Soit E un espace localement K-convexe pour lequel est valable le théorème qu'on obtient du théorème* 3.5 *en remplaçant "semi-norme n.a." par "semi-norme". Alors toute semi-norme sur E est une semi-norme n.a.* (cf. [16], p. 402).

Démonstration. Soient p une semi-norme sur E, $x_0 \in E$, $y_0 \in E$. Si $p(x_0+y_0)=0$, on a $p(x_0+y_0) \leqslant \max(p(x_0), p(y_0))$. Supposons $p(x_0+y_0) \neq 0$; soit f l'application linéaire de $L=[x_0+y_0]$ dans K définie par $f(\lambda(x_0+y_0))= =\lambda$ $(\lambda \in K)$. Si $z \in L$, $z=\lambda(x_0+y_0)$, on a

$$|f(z)|=|\lambda|=p(\lambda(x_0+y_0))\cdot(p(x_0+y_0))^{-1}=p(z)\cdot(p(x_0+y_0))^{-1}.$$

Il existe donc une application linéaire f^* de E dans K, prolongeant f, telle que $|f^*(x)| \leqslant (p(x_0+y_0))^{-1}\cdot p(x)$ $(x \in E)$. On a alors $p(x_0+y_0)= = p(x_0+y_0)\cdot|f^*(x_0+y_0)| \leqslant p(x_0+y_0)\cdot[\max(|f^*(x_0)|, |f^*(y_0)|)] \leqslant \max(p(x_0), p(y_0))$. Il en résulte que p est une semi-norme n.a.

Dans tout ce qui suit, nous appellerons "forme linéaire sur E" une application linéaire de E dans K.

Théorème 3.9. *Supposons que K soit complet sphérique; soient E un espace localement K-convexe, $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $f(x_0)=1$* (cf. [16], p. 402).

Démonstration. Il existe une semi-norme n.a. continue p sur E telle que $p(x_0) \neq 0$. Soit f la forme linéaire sur $L=[x_0]$ définie par $f(\lambda x_0)=\lambda$ $(\lambda \in K)$. Si $z \in L$, $z=\lambda x_0$, on a

$$|f(z)|=|\lambda|=p(\lambda x_0)\cdot(p(x_0))^{-1}=p(z)\cdot(p(x_0))^{-1},$$

donc f est continue sur L. D'après le théorème 3.6 il existe une forme linéaire continue f^* sur E, prolongeant f; on a évidemment $f^*(x_0)=1$.

Théorème 3.10. *Supposons que K soit complet sphérique. Soient E un espace localement K-convexe, A une partie fermée K-convexe de E, $x_0 \in E$, $x_0 \notin A$.*

1°. *Si la valuation de K est dense, il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $|f(A)| \leqslant 1$, $f(x_0)=1$.*

2°. *Si la valuation de K est discrète, il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $|f(A)| \leqslant 1$, $|f(x_0)|>1$.*

Démonstration. Comme A est fermée et $x_0 \notin A$, il existe $p \in \Gamma$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon>0$ tels que $\{x \in E | p(x-x_0)<\varepsilon\} \cap A=\emptyset$. D'après le théorème 2.8 il existe un ensemble K-convexe et absorbant S dans E tel que $A \subset S$, $x_0 \notin S$; d'après la remarque suivant le théorème 2.8, S est ouvert. D'après le théorème 2.9 il existe $q \in \Gamma$ avec $\{x \in E | q(x)<1\} \subset S \subset \{x \in E | q(x) \leqslant 1\}$; si la valuation de K est discrète on a $S=\{x \in E | q(x) \leqslant 1\}$ et $q(E) \subset W_K$.

1°. Supposons que la valuation de K soit dense. On a $x_0 \notin S$, donc $q(x_0) \geqslant 1$. Soit f la forme linéaire sur $L=[x_0]$ définie par $f(\lambda x_0)=\lambda$ $(\lambda \in K)$; si $z \in L$, $z=\lambda x_0$, on a $|f(z)|=|\lambda|=q(\lambda x_0)\cdot(q(x_0))^{-1} \leqslant q(\lambda x_0)=q(z)$. D'après le théorème 3.5 il existe une forme linéaire f^* sur E, prolongeant f, telle que $|f^*(x)| \leqslant q(x) \leqslant 1$ $(x \in A)$; évidemment f^* est continue, et on a $f^*(x_0)=1$.

2°. Supposons que la valuation de K soit discrète. On a $x_0 \notin S$, donc $q(x_0)>1$. Soient $\mu \in K$ tel que $|\mu|=q(x_0)$, f la forme linéaire sur $L=[x_0]$ définie par $f(\lambda x_0)=\lambda\mu$ $(\lambda \in K)$; si $z \in L$, $z=\lambda x_0$, on a $|f(z)|=|\lambda| q(x_0)= q(\lambda x_0)=q(z)$. D'après le théorème 3.5 il existe une forme linéaire f^* sur E, prolongeant f, telle que $|f^*(x)| \leqslant q(x) \leqslant 1$ $(x \in A)$; évidemment f^* est continue, et on a $|f^*(x_0)|=q(x_0)>1$.

Théorème 3.11. *Supposons que K soit complet sphérique. Soient E un espace localement K-convexe, M un sous-espace vectoriel fermé de E, $x_0 \in E$, $x_0 \notin M$. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $f(M)=\{0\}$, $f(x_0)=1$.*

Démonstration. Comme $x_0 \notin M$, il existe $p \in \Gamma$ avec $p(x-x_0)>1$ $(x \in M)$. Soit f la forme linéaire sur $M+[x_0]$ définie par $f(x+\lambda x_0)=\lambda$ $(x \in M,\ \lambda \in K)$. Soit $z \in M+[x_0]$, $z=x+\lambda x_0$ (où $x \in M$). Si $\lambda \neq 0$, on a $|f(z)|=|\lambda|<|\lambda| p(x_0+\lambda^{-1}x)=p(x+\lambda x_0)=p(z)$; si $\lambda=0$, on a $|f(z)|=0 \leqslant p(z)$. On en déduit que f est continue sur $M+[x_0]$. D'après le théorème 3.6 il existe une forme linéaire continue f^* sur E, prolongeant f, et qui est la forme cherchée.

Remarque. Nous pouvons démontrer le théorème 3.11 aussi de la façon suivante: pour chaque $p \in \Gamma$, soit $\hat{p}$ l'application de $\hat{E}=E/M$ dans K définie par $\hat{p}(\hat{x})=\inf_{x \in \hat{x}} p(x)$ $(\hat{x} \in \hat{E}$; $x \to \hat{x}$ est l'application canonique de E dans $\hat{E})$; alors, chaque p est une semi-norme n.a. sur $\hat{E}$. On vérifie aisément que $\hat{E}$, muni de la topologie définie par la famille $\hat{\Gamma}=\{\hat{p}|p \in \Gamma\}$, est un espace localement K-convexe (cf. [8], p. 131, 209). D'après le théorème 3.9 il existe une forme linéaire continue $\hat{f}$ sur $\hat{E}$ telle que $\hat{f}(\hat{x}_0)=1$; l'application f de E dans K, définie par $f(x)=\hat{f}(\hat{x})$ $(x \in E)$, est l'application cherchée.

§ 3. *Espaces $(\mathscr{F})$ et espaces $(\mathscr{L}\mathscr{F})$.*

Définition 3.2. *On appelle espace $(\mathscr{F})$ un espace localement K-convexe, métrisable et complet* (cf. [4], p. 65).

Rappelons que, pour qu'un espace vectoriel topologique métrisable E soit complet, il faut et il suffit que toute suite de Cauchy dans E ait une limite dans E.

Théorème 3.12. *Soit E un espace localement K-convexe. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1°. *La topologie de E est métrisable et peut être définie par une distance invariante d qui satisfait à l'inégalité triangulaire forte (c'est-à-dire $d(x, y) \leqslant \max\,(d(x, z), d(y, z))$ pour tout $x, y, z \in E$).*
2°. *Il existe dans E un système fondamental dénombrable de voisinages de* 0.
3°. *La topologie de E peut être définie par une suite croissante (p_n) de semi-normes n.a. (c'est-à-dire $p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in E$).* (Cf. [8], p. 208 et [17], p. 365.)

Démonstration. 1° entraîne 2°: un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E est donné par les enveloppes K-convexes des ensembles $\{x \in E|d(x, 0)<1/n\}$, où $n \in \mathbf{N}$.

2° entraîne 3°: soit $\{U_i|i \in \mathbf{N}\}$ un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E. Pour chaque U_i on peut définir, suivant le théorème 2.9, une semi-norme n.a. q_i. Soit p_k la semi-norme n.a. sur E définie par $p_k(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} q_i(x)$ $(k \in \mathbf{N},\ x \in E)$. Alors on a

$$\{x \in E|p_k(x)<1\} \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i \subset \{x \in E|p_k(x) \leqslant 1\} \quad (k \in \mathbf{N})$$

et $p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x)$ $(n \in \mathbf{N},\ x \in E)$, et la famille $\{p_k|\ k \in \mathbf{N}\}$ de semi-normes n.a. définit la topologie sur E.

3° entraîne 1°: supposons que la topologie de E soit définie par une suite croissante (p_n) de semi-normes n.a. Soit $x \to ||x||_F$ l'application de E dans $\mathbf{R}$ définie par

$$||x||_F=\sup_n \frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \qquad (x \in E).$$

Alors on a:

a. $||x||_F \geqslant 0$ $(x \in E)$, et $||x||_F=0$ si, et seulement si, $x=0$.

b. Comme $0<a\leqslant b$ entraîne $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \dfrac{b}{1+b}$, on a, en supposant

$p_n(x) \leqslant p_n(y)$:

$$\frac{p_n(x+y)}{1+p_n(x+y)} \leqslant \frac{\max\,(p_n(x),\, p_n(y))}{1+\max\,(p_n(x),\, p_n(y))} = \frac{p_n(y)}{1+p_n(y)}$$

et aussi

$$\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leqslant \frac{p_n(y)}{1+p_n(y)}\,;$$

il en résulte que $\|x+y\|_F \leqslant \max\,(\|x\|_F, \|y\|_F)$ $(x, y \in E)$. Donc $d(x, y) = \|x-y\|_F$ $(x, y \in E)$ définit sur E une distance invariante d qui satisfait à l'inégalité triangulaire forte. Démontrons maintenant que la topologie définie sur E par d est identique à la topologie définie sur E par la suite (p_n): si

$$p_k(x) < \frac{1}{2^{n-k}} \quad (k=1, \ldots, n-1),$$

on a $\|x\|_F \leqslant 1/2^n$, donc l'ensemble $\{x \in E|\ \|x\|_F \leqslant 1/2^n\}$ contient l'ensemble

$$\{x \in E | p_k(x) < \frac{1}{2^{n-k}} \quad (k=1, \ldots, n-1)\}.$$

Si

$$\|x\|_F < \frac{1}{2^{m+k+1}},$$

on a

$$\frac{1}{2^m} \cdot \frac{p_m(x)}{1+p_m(x)} < \frac{1}{2^{m+k+1}}, \text{ donc } \frac{p_m(x)}{1+p_m(x)} < \frac{1}{2^{k+1}}\,;$$

il s'ensuit que $p_m(x) < 1/2^k$, donc l'ensemble $\{x \in E | p_m(x) < 1/2^k\}$ contient l'ensemble

$$\{x \in E|\ \|x\|_F < \frac{1}{2^{m+k+1}}\}.$$

Remarque. L'application $x \to \|x\|_F$ satisfait aussi aux conditions suivantes: 1°. si $|\lambda| \leqslant 1$, on a $\|\lambda x\|_F \leqslant \|x\|_F$ $(\lambda \in K,\ x \in E)$; 2°. si $|\lambda_i| \to 0$, on a $\|\lambda_i x\|_F \to 0$ $(\lambda_i \in K,\ x \in E)$; 3°. si $x_i \to 0$, on a $\|\lambda x_i\|_F \to 0$ $(x_i \in E,\ \lambda \in K)$. Nous appelons $x \to \|x\|_F$ une F-norme n.a. sur E (cf. [8], p. 167).

Exemples. 1. Supposons que K soit un corps local. Soit G l'espace vectoriel des fonctions continues sur K à valeurs dans K. Définissons sur G une topologie localement K-convexe par la famille dénombrable $\{p_n | n \in \mathbf{N}\}$ de semi-normes n.a., où $p_n(f) = \max_{|\alpha| \leqslant \varrho^n} |f(\alpha)|$ $(n \in \mathbf{N},\ f \in G)$. Soient $f_n \in G$ $(n \in \mathbf{N})$, $f \in G$; $f_n \to f$ signifie: $f_n(\alpha) \to f(\alpha)$ uniformément dans l'ensemble $\{\alpha \in K|\ |\alpha| \leqslant \varrho^k\}$ $(k \in \mathbf{N})$. G est complet, donc G est un espace $(\mathscr{F})$ (th. 3.12). Dans G il n'existe pas de voisinages bornés de 0, donc G n'est pas normé (th. 3.1).

2. Soit F l'espace vectoriel des suites infinies (α_i) d'éléments de K. Définissons sur F une topologie localement K-convexe par la famille dénombrable $\{p_n | n \in \mathbf{N}\}$ de semi-normes n.a., où $p_n(\alpha) = |\alpha_n|$ pour

$\alpha = (\alpha_i) \in F$ $(n \in \mathbf{N})$. Si K est complet, F est complet, donc F est un espace $(\mathscr{F})$ (th. 3.12). F est l'espace vectoriel topologique $\prod_{i=1}^{\infty} K_i$ $(K_i = K,$ $i \in \mathbf{N})$, produit d'une famille dénombrable d'espaces K. Il n'existe pas de voisinages bornés de 0 dans F, F n'est donc pas normé (th. 3.1). Si $\varphi^{(n)}$ désigne l'élément de F tel que $\varphi_n{}^{(n)} = 1$, $\varphi_k{}^{(n)} = 0$ pour $k \neq n$ $(n \in \mathbf{N})$, on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi^{(i)} \to (\alpha_i)$ $(n \to \infty)$ pour $(\alpha_i) \in F$.

3. Soit M l'espace vectoriel des suites (α_i) $(\alpha_i \in K,\ i \in \mathbf{Z}^+)$ telles que $\sup_n |\alpha_n| \varrho^{kn} < \infty$ $(k \in \mathbf{N})$ (ce qui équivaut à $\lim_{n \to \infty} |\alpha_n| \varrho^{kn} = 0$ $(k \in \mathbf{N})$); par exemple, si $|\alpha_n| = \varrho^{-n^2}$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$, on a $(\alpha_i) \in M$. M est isomorphe à l'espace vectoriel des séries entières, à coefficients dans K et partout convergentes dans K.

Définissons sur M une topologie localement K-convexe par la famille dénombrable $\{p_k | k \in \mathbf{N}\}$ de semi-normes n.a., où $p_k(\alpha) = \sup_n |\alpha_n| \varrho^{kn}$ pour $\alpha = (\alpha_i) \in M$ $(k \in \mathbf{N})$. Si la valuation de K est dense ou si le corps des restes de K n'est pas fini, on a $p_k(\alpha) = \sup_{|x| \leqslant \varrho^k} |\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n|$ ([19], p. 19; voir aussi Séminaire Delange-Pisot, 1959/60, ch. 4, p. 46).

Supposons que K soit complet. Soit $(\alpha^{(p)})$ une suite de Cauchy dans M, où $\alpha^{(p)} = (\alpha_i{}^{(p)})$ $(p \in \mathbf{N})$. On a $\lim_{p \to \infty,\, q \to \infty} p_k(\alpha^{(p)} - \alpha^{(q)}) = 0$, et $\sup_n |\alpha_n{}^{(p)} - \alpha_n{}^{(q)}| \leqslant \sup_n |\alpha_n{}^{(p)} - \alpha_n{}^{(q)}| \varrho^{kn} = p_k(\alpha^{(p)} - \alpha^{(q)})$ $(k \in \mathbf{N})$. Il s'ensuit que la suite $\alpha_n{}^{(1)}, \alpha_n{}^{(2)}, \alpha_n{}^{(3)}, \ldots$ est une suite de Cauchy dans K; soit β_n la limite de cette suite $(n \in \mathbf{Z}^+)$. Soit $k_0 \in \mathbf{N}$; il existe $p_0 \in \mathbf{R}$ tel que $|\alpha_n{}^{(p)} - \alpha_n{}^{(q)}| \varrho^{k_0 n} \leqslant 1$ pour $p > p_0$, $q > q_0$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$, donc $|\beta_n - \alpha_n{}^{(q)}| \varrho^{k_0 n} \leqslant 1$ $(n \in \mathbf{Z}^+,\ q > q_0)$. On en déduit que $\sup_n |\beta_n| \varrho^{k_0 n} \leqslant \max(1, p_{k_0}(\alpha^{(q)}))$ $(q > p_0)$, donc $(\beta_i) \in M$. Il en résulte que M est complet, donc M est un espace $(\mathscr{F})$ (th. 3.12).

M n'est pas normé: soient $N \in \mathbf{N}$ et $\alpha^{(m)} \in M$, $|\alpha_{Nm}^{(m)}| = \varrho^{-N^2 m}$, $|\alpha_n{}^{(m)}| = 0$ pour $n \neq Nm$ $(m \in \mathbf{N})$. On a $p_k(\alpha^{(m)}) = \varrho^{Nm(k-N)} \leqslant 1$ pour $k \leqslant N$ $(k, m \in \mathbf{N})$, et $p_{2N}(\alpha^{(m)}) = \varrho^{N^2 m} \to \infty$ $(m \to \infty)$. On en déduit que dans M il n'existe pas de voisinages bornés de 0, donc M n'est pas normé (th. 3.1).

Si $\mu^{(n)}$ désigne l'élément de M tel que $\mu_n{}^{(n)} = 1$, $\mu_k{}^{(n)} = 0$ pour $k \neq n$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$, on a $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu^{(i)} \to (\alpha_i)$ $(n \to \infty)$ pour $(\alpha_i) \in M$.

Soient E un espace vectoriel et $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ une suite infinie strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E, tels que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Supposons que E_n soit muni d'une topologie $\mathfrak{T}_n$ pour laquelle E_n est un espace $(\mathscr{F})$ et telle que $\mathfrak{T}_{n+1} | E_n = \mathfrak{T}_n$ $(n \in \mathbf{N})$; E_n est donc fermé dans E_{n+1} $(n \in \mathbf{N})$. Soit $\mathscr{P}$ la famille des ensembles K-convexes V dans E qui ont la propriété suivante: $V \cap E_n$ est un voisinage de 0 pour $\mathfrak{T}_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Tout $V \in \mathscr{P}$ est absorbant, et $V+V \subset V$. D'après [1] (p. 7, prop. 5), $\mathscr{P}$ définit sur E une topologie localement K-convexe $\mathfrak{T}_\omega$ pour laquelle $\mathscr{P}$ est un système fondamental de voisinages de 0; évidemment, $\mathfrak{T}_\omega$ est la topologie localement K-convexe la plus fine sur E telle que $\mathfrak{T}_\omega|E_n \subset \mathfrak{T}_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Cf. [1], ch. II, § 2.

Définition 3.3. *On appelle espace* $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ *un espace localement* K-*convexe dont la topologie* $\mathfrak{T}_\omega$ *peut être définie comme ci-dessus.*

Si E est un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$, (E_n) désignera une suite de sous-espaces de E comme ci-dessus; on dit que E est la *limite inductive stricte* des espaces E_n.

Théorème 3.13. *Soit* E *un espace* $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. *Alors on a:*

1°. $\mathfrak{T}_\omega|E_n = \mathfrak{T}_n \quad (n \in \mathbf{N})$.
2°. E_n *est fermé dans* E $(n \in \mathbf{N})$.
3°. E *est complet.*
4°. E *n'est pas métrisable.*

Démonstration. On démontre les propositions comme dans le cas réel. Pour 1° et 2°, voir [4], p. 68, 69; pour 3°, voir [8], p. 226–228. Nous démontrons 4°: E_n est fermé dans E (voir 2°) et n'a pas de points intérieurs dans E, donc E_n est rare dans E $(n \in \mathbf{N})$. La proposition 4° est alors une conséquence immédiate du théorème de Baire (voir [8], p. 28).

Remarque. Quoique, pour démontrer le théorème 3.13, on puisse suivre les démonstrations indiquées ci-dessus, on peut simplifier ces démonstrations dans notre cas. Nous donnons un exemple: dans la démonstration du "lemme" dans [4], p. 68, on voit tout de suite que d'après le théorème 2.2 l'ensemble U est ouvert.

Théorème 3.14. *Soient* E *un espace* $(\mathscr{L}\mathscr{F})$, A *une partie de* E, F *un espace localement* K-*convexe. Alors on a:*

1°. *Pour que* A *soit bornée dans* E, *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $A \subset E_n$ *et que* A *soit bornée dans* E_n.
2°. *Pour que* A *soit fermée dans* E, *il faut et il suffit que* $A \cap E_n$ *soit fermé dans* E_n $(n \in \mathbf{N})$.
3°. *Pour qu'une application linéaire* f *de* E *dans* F *soit continue, il faut et il suffit que* $f|E_n$ *soit continue* $(n \in \mathbf{N})$.

Démonstration. On démontre les propositions comme dans le cas réel. Pour 1°, on peut suivre la démonstration dans [4] (prop. 4, p. 70), en prenant au lieu de la suite $((1/k)x_k)$ la suite $(\lambda_k x_k)$, où $\lambda_k \in K$, $|\lambda_k| = \varrho^{-k}$ $(k \in \mathbf{N})$; pour 2°, voir [8], p. 226–228; pour 3°, voir [4], prop. 5, p. 71.

Corollaire. Pour qu'une suite (x_n) dans E soit convergente dans E, il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\{x_n | n \in \mathbf{N}\} \subset E_k$ et que (x_n) soit convergente dans E_k.

Exemples. 4. Supposons que K soit un corps local. Soit H l'espace vectoriel des fonctions continues sur K, à valeurs dans K et à support compact, et soit H_n le sous-espace vectoriel de H formé des fonctions dont le support est contenu dans l'ensemble $\{\alpha \in K \| \alpha| \leqslant \varrho^n\}$ $(n \in \mathbf{N})$. Évidemment, on a $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$ et $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Nous munissons H_n d'une norme n.a. par $\|f\|_n = \max_{|\alpha| \leqslant \varrho^n} |f(\alpha)|$ $(f \in H_n)$; H_n est alors un espace de Banach n.a. $(n \in \mathbf{N})$. Muni de la topologie $\mathscr{T}_\omega$ mentionnée ci-dessus, H est un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. Soient $f_n \in H$ $(n \in \mathbf{N})$, $f \in H$; $f_n \to f$ signifie: il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que le support de f_n est contenu dans l'ensemble $C_k = \{\alpha \in K |\, |\alpha| \leqslant \varrho^k\}$ $(n \in \mathbf{N})$, et $f_n(\alpha) \to f(\alpha)$ uniformément dans C_k (corollaire du th. 3.14).

5. Supposons que K soit complet. Soient F l'espace vectoriel de l'exemple 2, E le sous-espace vectoriel de F formé des suites (α_i) telles que $\alpha_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, E_n le sous-espace vectoriel de E formé des suites (α_i) telles que $\alpha_i = 0$ pour $i > n$ $(n \in \mathbf{N})$. Évidemment, on a $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Nous munissons E_n d'une norme n.a. par $\|\alpha\|_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$ pour $\alpha = (\alpha_i) \in E_n$; E_n est alors un espace de Banach n.a. $(n \in \mathbf{N})$. Muni de la topologie $\mathscr{T}_\omega$ mentionnée ci-dessus, E est un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. $\delta^{(n)}$ désigne l'élément de E tel que $\delta_n{}^{(n)} = 1$, $\delta_k{}^{(n)} = 0$ pour $k \neq n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Étudions la topologie $\mathscr{T}_\omega$. Soient $\varepsilon_i \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_i > 0$ $(i \in \mathbf{N})$, $V = \{(\alpha_i) \in E |$ $|\alpha_i| \leqslant \varepsilon_i$ $(i \in \mathbf{N})\}$.
L'ensemble V est K-convexe, et $V \cap E_n$ est un voisinage de 0 dans E_n $(n \in \mathbf{N})$. Soit U un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}_\omega$. Alors il existe une suite (ε_i), où $\varepsilon_i \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_i > 0$ $(i \in \mathbf{N})$, telle que U contient l'ensemble $\{\alpha \in E_i |\, \|\alpha\|_i \leqslant \varepsilon_i\}$ $(i \in \mathbf{N})$. Soit $W = \{(\alpha_i) \in E |\, |\alpha_i| \leqslant \varepsilon_i$ $(i \in \mathbf{N})\}$, et soit (α_i) un élément de $W \cap E_k$. Alors on a $(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta^{(i)}$. Comme $\alpha_i \delta^{(i)} \in U$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ et comme U est K-convexe, on a $(\alpha_i) \in U$. On en déduit que $W \subset U$. Les ensembles $\{(\alpha_i) \in E |\, |\alpha_i| \leqslant \varepsilon_i$ $(i \in \mathbf{N})\}$, où $\varepsilon_i \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_i > 0$ $(i \in \mathbf{N})$, forment donc un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathscr{T}_\omega$. Il s'ensuit que E est la somme directe topologique $\bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i$ $(K_i = K,\ i \in \mathbf{N})$ d'une famille dénombrable d'espaces K.

Définition 3.4. *Dans un espace localement K-convexe E, on appelle K-tonneau tout ensemble K-convexe, absorbant et fermé dans E.*

Définition 3.5. *On dit qu'un espace localement K-convexe E est K-tonnelé si tout K-tonneau dans E est un voisinage de* 0.

Théorème 3.15. *Tout espace localement K-convexe qui est un espace de Baire est K-tonnelé.*

Démonstration. Voir [17], p. 366.

Corollaire. Un espace $(\mathscr{F})$ est K-tonnelé.

Théorème 3.16. *Un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ est K-tonnelé.*

Démonstration. Soient E un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$, A un K-tonneau dans E. D'après le théorème 3.14, 2°, $A \cap E_n$ est un K-tonneau dans E_n, donc A est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}_n$ $(n \in \mathbf{N})$. D'après la définition de la topologie $\mathscr{T}_\omega$ sur E, A est un voisinage de 0 pour $\mathscr{T}_\omega$.

Exemple 6. Les espaces G, H, E des exemples 1, 4, 5 sont K-tonnelés. Si K est complet, les espaces F et M des exemples 2 et 3 sont K-tonnelés. Un exemple d'un espace localement K-convexe, qui n'est pas K-tonnelé, est le suivant:

Soit L l'espace vectoriel E de l'exemple 5, muni de la topologie induite sur E par la topologie de l'espace F de l'exemple 2. L est un espace localement K-convexe métrisable et non complet. L'ensemble

$$T = \{(\alpha_i) \in L \mid \max_i |\alpha_i| \leqslant 1\}$$

est un K-tonneau dans L, mais on vérifie aisément que T n'est pas un voisinage de 0 dans L.

Définition 3.6. *On dit qu'une application T d'un espace vectoriel topologique E dans un espace vectoriel topologique F est localement bornée si, pour toute partie bornée B de E, l'ensemble $T(B)$ est borné dans F.*

Théorème 3.17. *Soient E un espace localement K-convexe métrisable ou un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$, F un espace localement K-convexe. Alors, pour qu'une application linéaire T de E dans F soit continue, il faut et il suffit que T soit localement bornée* (cf. [4], prop. 6, p. 71).

Démonstration. Il est évident que, si T est continue, T est localement bornée. Démontrons la suffisance:

1°. Soient E un espace localement K-convexe, (p_n) une suite croissante de semi-normes n.a. sur E qui définit la topologie sur E (th. 3.12), et supposons que T soit localement bornée. Raisonnons par l'absurde. Si T n'était pas continue, il existerait une semi-norme n.a. continue q sur F et une suite (x_n), $x_n \in E$ $(n \in \mathbf{N})$, telles que $p_n(x_n) \leqslant \varrho^{-n}$, $q(T(x_n)) \geqslant 1$ $(n \in \mathbf{N})$. Si $\lambda_n \in K$, $|\lambda_n| = \varrho^n$ $(n \in \mathbf{N})$, on aurait $p_n(\lambda_n x_n) \leqslant 1$ $(n \in \mathbf{N})$, donc

$$p_k(\lambda_{k+n} x_{k+n}) \leqslant p_{k+n}(\lambda_{k+n} x_{k+n}) \leqslant 1 \quad (k, n \in \mathbf{N})$$

et $p_k(\lambda_i x_i) \leqslant \max(1, p_k(\lambda_1 x_1), \ldots, p_k(\lambda_k x_k))$ $(k, i \in \mathbf{N})$. L'ensemble $\{\lambda_n x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ serait donc borné dans E. On a aussi $q(T(\lambda_n x_n)) \geqslant \varrho^n$ $(n \in \mathbf{N})$, et $\varrho^n \to \infty$, donc l'ensemble $\{T(\lambda_n x_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ ne serait pas borné dans F, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2°. Soit E un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. Supposons que T soit localement bornée. Si B est une partie bornée de E_n, B est bornée dans E, donc $T(B)$ est borné dans F. D'après 1°, $T|E_n$ est continue $(n \in \mathbf{N})$, donc T est continue (th. 3.14, 3°).

Définition 3.7. *On appelle espace bornologique tout espace localement K-convexe dans lequel toute partie K-convexe absorbant tous les ensembles bornés est un voisinage de* 0.

Théorème 3.18. *Soient E un espace bornologique, F un espace localement K-convexe. Alors toute application linéaire et localement bornée T de E dans F est continue.*

Démonstration. Soient U un voisinage de 0 dans F, B une partie bornée de E. L'ensemble $T(B)$ est borné dans F, donc il existe $\lambda \in K$ tel que $T(B) \subset \lambda U$, c'est-à-dire $B \subset \lambda T^{-1}(U)$. D'autre part, $T^{-1}(U)$ est K-convexe. Il s'ensuit que $T^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 dans E, donc T est continue.

Remarque. Nous caractériserons plus loin (ch. IV, § 5, e) les espaces bornologiques sur un corps complet sphérique, et nous verrons que les espaces $(\mathscr{F})$ et les espaces $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ (sur un corps complet sphérique) sont des espaces bornologiques.

Théorème 3.19. *Soient E et F deux espaces $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. Toute application linéaire continue T de E sur F est un homomorphisme* (cf. [4], th. 1, p. 72).

Démonstration. Il faut démontrer que, pour tout ouvert U dans E, $T(U)$ est ouvert dans F.

1°. Si E et F sont deux espaces $(\mathscr{F})$, on a la proposition suivante: si T est une application linéaire continue de E dans F, T est un homomorphisme, ou sinon, $T(E)$ est maigre dans $\overline{T(E)}$ ($\overline{T(E)}$ étant l'adhérence de $T(E)$ dans F). En effet, soient $x \to ||x||_F$ une F-norme n.a. sur E, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, $\lambda_n \in K$, $|\lambda_n| = \varrho^n$ $(n \in \mathbf{N})$, $U_\varepsilon = \{x \in E|\ ||x||_F < \varepsilon\}$. On a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n U_\varepsilon$, donc $T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n T(U_\varepsilon)$. Si $T(E)$ n'est pas maigre dans $\overline{T(E)}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\lambda_n T(U_\varepsilon)$, donc aussi $T(U_\varepsilon)$, n'est pas rare dans $\overline{T(E)}$. On peut maintenant suivre la démonstration dans [8], p. 170. (Observons que dans [8] un homomorphisme est appelé "topologischer Homomorphismus".)

2°. Il s'ensuit de 1° que pour deux espaces $(\mathscr{F})$ E et F on a les propositions suivantes: a. si T est une application linéaire continue et biunivoque de E sur F, T^{-1} est continue (cf. [1], p. 36 et [10], p. 1137); b. si T est une application linéaire continue de E dans F, on a $T(E) = F$, ou sinon, $T(E)$ est maigre dans F (cf. [10], p. 1137).

3°. À l'aide de 1° et 2°, on peut suivre maintenant la démonstration dans [4] (p. 72).

Définition 3.8.a. *On appelle espace de Montel un espace localement K-convexe K-tonnelé, dans lequel tout ensemble borné est relativement compact.*

b. *On appelle espace $(c\mathscr{M})$ un espace localement K-convexe K-tonnelé, dans lequel tout ensemble K-convexe, fermé et borné est c-compact.*

Remarques. 1. Dans un espace normé n.a. qui est un espace de Montel, la boule unité est fermée et bornée, donc compacte. D'après le théorème 3.2, tout espace normé n.a. qui est un espace de Montel sur un corps complet est de dimension finie.

2. Considéré comme un espace de Banach n.a. sur soi-même, un corps complet sphérique (un corps local) est un espace $(c\mathscr{M})$ (un espace de Montel).

Exemples. 7. Soit F l'espace de l'exemple 2. Supposons que K soit complet sphérique; F est alors un espace $(\mathscr{F})$. Soient A une partie K-convexe, fermée et bornée de F, q_n l'application de F dans K définie par $q_n(\alpha)=\alpha_n$ pour $\alpha=(\alpha_i)\in F$ $(n\in\mathbf{N})$. $q_n(A)$ est une partie K-convexe, donc c-compacte, de K $(n\in\mathbf{N})$ (th. 2.6). A est une partie fermée de l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} q_i(A)$; comme le dernier ensemble est c-compact dans F, il en est de même de A. On en déduit que F est un espace $(c\mathscr{M})$.

Si K n'est pas complet sphérique, F n'est pas un espace $(c\mathscr{M})$: soit B la boule $\{\lambda\in K|\,|\lambda|\leqslant 1\}$; B n'est pas c-compacte (th. 2.6). Soit C la partie de F formée des suites (α_i) telles que $\alpha_1\in B$, $\alpha_i=0$ pour $i>1$; C est une partie de F K-convexe, fermée et bornée, mais non c-compacte.

De la même façon on démontre: pour que F soit un espace de Montel, il faut et il suffit que K soit un corps local.

8. Soit E l'espace de l'exemple 5. Supposons que K soit un corps local; E est alors un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. Soit B une partie fermée et bornée de E. Il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $B\subset E_{n_0}$, que B est bornée dans E_{n_0} (th. 3.14, 1°) et que $B\cap E_{n_0}=B$ est fermée dans E_{n_0} (th. 3.14, 2°). L'espace E_{n_0} est de dimension finie, donc il est localement compact (th. 3.2). Il s'ensuit que B est compacte dans E_{n_0}, donc dans E. On en déduit que E est un espace de Montel.

De la même façon on démontre: si K est complet sphérique, E est un espace $(c\mathscr{M})$.

9. Soit $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ qui est un espace de Montel. Démontrons que E_n est un espace de Montel $(n\in\mathbf{N})$. Si B est une partie fermée et bornée de E_n, B est fermée et bornée dans E (th. 3.13, 2°); il s'ensuit que B est compacte dans E, donc compacte dans E_n. E_n est un espace K-tonnelé (corollaire du th. 3.15), donc un espace de Montel $(n\in\mathbf{N})$.

De la même façon on démontre que, si E est un espace $(c\mathscr{M})$, E_n est un espace $(c\mathscr{M})$ $(n\in\mathbf{N})$. On en déduit, si K n'est pas un corps complet sphérique (un corps local), que l'espace E de l'exemple 5 n'est pas un espace $(c\mathscr{M})$ (un espace de Montel); cf. ex. 8.

On démontre facilement (cf. ex. 8) que, si $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ est un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ et si E_n est un espace $(c\mathscr{M})$ (espace de Montel) $(n\in\mathbf{N})$, l'espace E est un espace $(c\mathscr{M})$ (espace de Montel).

10. Soit M l'espace de l'exemple 3. Supposons que K soit un corps local; M est alors un espace $(\mathscr{F})$. Soient B une partie bornée de M, $\alpha^{(p)} \in B$ $(p \in \mathbf{N})$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $l_k \in \mathbf{R}$ tel que $p_k(\alpha^{(p)}) \leqslant l_k$ $(p \in \mathbf{N})$. On a $|\alpha_n{}^{(p)}| \leqslant |\alpha_n{}^{(p)}|\varrho^n \leqslant l_1$ $(n \in \mathbf{Z}^+,\ p \in \mathbf{N})$, donc l'ensemble $\{\alpha_n{}^{(p)} | p \in \mathbf{N}\}$ est borné dans K $(n \in \mathbf{Z}^+)$. Soit $\alpha_0{}^{(p_1)}, \alpha_0{}^{(p_2')}, \alpha_0{}^{(p_3')}, \ldots$ une suite partielle convergente de $(\alpha_0{}^{(p)})$, et soit β_0 sa limite. Soit $\alpha_1{}^{(p_2)}, \alpha_1{}^{(p_3'')}, \alpha_1{}^{(p_4'')}, \ldots$ une suite partielle convergente de la suite $\alpha_1{}^{(p_2')}, \alpha_1{}^{(p_3')}, \ldots$, et soit β_1 sa limite. En continuant ainsi, on définit une suite croissante de nombres entiers $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ telle que $(\alpha_n{}^{(p_i)})$ ait pour limite β_n $(n \in \mathbf{Z}^+)$. On a $|\alpha_n{}^{(p_i)}|\varrho^{nk} \leqslant l_k$ $(n \in \mathbf{Z}^+;\ i, k \in \mathbf{N})$, donc $|\beta_n|\varrho^{nk} \leqslant l_k$ $(n \in \mathbf{Z}^+,\ k \in \mathbf{N})$. On en déduit que $\beta = (\beta_i) \in M$. On vérifie aisément que $\alpha^{(p_i)} \to \beta$. M est donc un espace de Montel. Comme dans l'exemple 7, on démontre que M n'est pas un espace de Montel si K n'est pas un corps local.

(To be continued)