

## Control PD de Robots: Dinámica de Actuadores y Nueva Sintonía

V. M. Hernández \* V. Santibáñez \*\* R.V. Carrillo \* J. Molina \*  
J.J. López \*

\* Universidad Autónoma de Querétaro. Facultad de Ingeniería. A.P. 3-24,  
76150, Querétaro, Qro., México (e-mail: vmhg@uaq.mx)

\*\* Instituto Tecnológico de la Laguna. División de Estudios de Posgrado e  
Investigación. A.P. 49-1, 27001, Torreón, Coah. México (e-mail:  
vsantiba@itlalaguna.edu.mx)

Resumen: En el presente trabajo se estudia el control PD con compensación deseada de gravedad de robots rígidos. Se introduce un nuevo criterio, menos conservador, para seleccionar las ganancias proporcionales. Se demuestra estabilidad asintótica global cuando se toma en consideración durante el diseño la dinámica eléctrica de los motores de CD con escobillas usados como actuadores. Este resultado no requiere que la dinámica eléctrica de los actuadores sea rápida comparada con la dinámica de la parte mecánica. Se presenta un estudio formal de la técnica de control conocida como control de par la cual es ampliamente utilizada en la práctica industrial. Copyright © 2008 CEA.

Palabras Clave: control de robots, control PD, estabilidad, regulación de posición, actuadores.

### 1. INTRODUCCIÓN

El control PD con compensación deseada de gravedad para robots manipuladores fue propuesto por primera vez por Takegaki y Arimoto (1981) para robots que sólo cuentan con uniones rotativas. En ese trabajo se demostró que el equilibrio deseado es globalmente asintóticamente estable si la ganancia proporcional es suficientemente grande en algún sentido. Posteriormente, Tomei (1991) mostró que una condición suficiente para conseguir este resultado es que la menor ganancia proporcional sea mayor que la norma de la matriz Jacobiana del vector de pares gravitacionales. Este resultado es el que hasta ahora ofrece la mejor estimación de las ganancias proporcionales que aseguran la solución del problema. Trabajos posteriores (Feng y Postlethwaite, 1993; Kelly, 1997) han mostrado que esta condición también asegura robustez, es decir, que existe un único equilibrio que es globalmente asintóticamente estable a pesar de la existencia de incertidumbre en el término de pares gravitacionales. Sin embargo, también es reconocido que en dicho equilibrio se tiene un error de posición diferente de cero.

En el presente trabajo se usa una condición diferente sobre las ganancias proporcionales que permite que estas ganancias sean más pequeñas que las obtenidas con el criterio introducido por Tomei (1991). Se utiliza un método novedoso, basado en la 1-norma, para demostrar la unicidad del equilibrio en lazo cerrado el cual es globalmente asintóticamente estable. Además, también se consigue probar robustez cuando existe incertidumbre en el término de efectos gravitacionales. Estas características representan la primera contribución del presente trabajo.

Por otro lado, los estudios reportados hasta ahora sobre el control PD con compensación deseada de gravedad de robots manipuladores (Takegaki y Arimoto, 1981; Tomei, 1991; Feng y Postlethwaite, 1993; Kelly, 1997) se basan en la suposición de que no existe la dinámica de los actuadores. Por tanto, estos

trabajos consideran que el par es la señal de control, cuando en realidad es el voltaje aplicado a los motores el que en la práctica se manipula directamente y el par es resultado de la dinámica eléctrica de los actuadores. La razón para hacer tal suposición es que tradicionalmente cualquier dinámica eléctrica colocada entre la señal de control y el par generado ha complicado mucho el diseño de controladores para robots (Ailon, *et al.*, 2000). El interés de considerar la dinámica de los actuadores durante el diseño es motivado por algunos trabajos (Eppinger y Seering, 1987; Tarn, *et al.*, 1991) que han demostrado que el desempeño del sistema en lazo cerrado puede deteriorarse si no se considera la dinámica eléctrica de los actuadores.

La segunda contribución del presente trabajo es la siguiente. Se presenta por primera vez una prueba de estabilidad asintótica global del controlador PD con compensación deseada de gravedad la cual toma en consideración la presencia de la dinámica eléctrica de los actuadores. A diferencia de lo que normalmente se supone, el resultado en el presente trabajo no requiere que la dinámica eléctrica de los actuadores sea rápida comparada con la dinámica de la parte mecánica. El controlador propuesto incluye una realimentación lineal de corriente la cual, aunque no es indispensable para asegurar estabilidad, es muy importante pues permite presentar una justificación teórica para el uso de la estrategia de control conocida como control de par (Parker Automation, 1998). Aunque esta técnica es usada ampliamente en la práctica industrial desde hace tiempo para controlar motores eléctricos, sin embargo su aplicación no ha estado respaldada por un estudio formal. Todos estos resultados constituyen nuevos avances respecto de las ideas reportadas por Hernández, *et al.* (2007) donde los autores presentan un controlador adaptable lineal.

Este trabajo está organizado del siguiente modo. En la sección 2 se presenta el modelo dinámico considerado así como algunos resultados importantes. En la sección 3 se presenta un estudio sobre el término de efectos gravitacionales que permite

darse cuenta de que las condiciones introducidas por Tomei (1991) pueden ser relajadas. En la sección 4 se presentan las contribuciones de este estudio. En la sección 5 se presenta un ejemplo numérico mientras que en la sección 6 se presentan las conclusiones correspondientes.

Finalmente, una nota sobre la nomenclatura usada. Dado un  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n$  la 1-norma de  $x$  se define como  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  donde  $|\cdot|$  representa la función valor absoluto.

## 2. MODELO DINÁMICO DE ROBOTS RÍGIDOS

El modelo dinámico, sin fricción, de un robot rígido de  $n$  grados de libertad equipado únicamente con uniones rotativas y con  $n$  motores de CD con escobillas está dado como (Ailon, *et al.*, 2000):

$$L\dot{I} + R_a I + K_b \dot{q} = u \quad (1)$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_m I \quad (2)$$

donde  $q \in \mathcal{R}^n$  representa el vector de posiciones del robot,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el término de Coriolis y de efectos centrífugos mientras que  $g(q)$  es el término de efectos gravitacionales, el cual está dado como  $g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}$  donde  $U(q)$  es la energía potencial debida a la gravedad. Se define la matriz diagonal  $N$ , que representa las tasas de reducción de los engranes, como  $\theta = Nq$  donde  $\theta \in \mathcal{R}^n$  es el vector de posiciones angulares de los ejes de los actuadores. La matriz de inercia  $M(q)$  es simétrica, definida positiva de  $n \times n$ . El subsistema mecánico en (2) incluye la parte mecánica de los actuadores. Las variables  $I, u \in \mathcal{R}^n$  representan, respectivamente, la corriente eléctrica y el voltaje aplicado en los circuitos de armadura de los motores de CD, mientras que  $L, R_a, K_e$  y  $K_a$  son matrices diagonales definidas positivas de  $n \times n$  que contienen las inductancias, resistencias, constantes de fuerza contra electromotriz y las constantes de par, respectivamente, de los actuadores. Se definen  $K_b = K_e N$  y  $K_m = N K_a$ . Una propiedad importante de los motores de CD con escobillas es que  $K_e = K_a$ , lo cual implica que  $K_b = K_m$  (Hernández, *et al.*, 2007). El par aplicado por los actuadores en las uniones del robot está dado como  $\tau = K_m I$ . A lo largo de este trabajo se utilizan los símbolos  $q_d \in \mathcal{R}^n$  y  $\tilde{q} \in \mathcal{R}^n$  para representar, respectivamente, las posiciones deseadas en las uniones y el error de posición definido como  $\tilde{q} = q_d - q$ . A continuación se presentan algunas propiedades bien conocidas de la parte mecánica (2).

Propiedad 1. (Koditschek, 1984; Kelly, *et al.*, 2005). Las matrices  $\dot{M}(q) = \frac{d}{dt}M(q)$  y  $C(q, \dot{q})$  satisfacen:

$$\dot{q}^T \left( \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} = 0, \quad \forall \dot{q} \in \mathcal{R}^n \quad (3)$$

Propiedad 2. (Khalil, 2002). La matriz Jacobiana  $\frac{\partial g(q)}{\partial q}$  es simétrica para toda  $q \in \mathcal{R}^n$  porque  $g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q} \in \mathcal{R}^n$  está dada como el gradiente de una función escalar  $U(q)$ .

Propiedad 3. (Tomei, 1991; Kelly, *et al.*, 2005). Existe una constante  $k_g > 0$  tal que  $k_g \geq \left\| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\|$ , para toda  $q \in \mathcal{R}^n$ . Por tanto,  $\max_{q \in \mathcal{R}^n} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right|$  está acotado para toda  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$ .

En Kelly, *et al.* (2005) se propone calcular  $k_g$  como:

$$k_g \geq n \left( \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right) \quad (4)$$

Finalmente, se presentan algunos resultados de utilidad.

*Definición 1.* (Horn y Johnson, 1993). Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  donde  $a_{ij}$  indica el elemento de  $A$  que se encuentra colocado en el renglón  $i$  y la columna  $j$ . Se dice que la matriz  $A$  es estrictamente diagonalmente dominante si:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

*Corolario 1.* (Horn y Johnson, 1993). Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  simétrica y estrictamente diagonalmente dominante y si  $a_{ii} > 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $A$  es definida positiva.

## 3. EL TÉRMINO DE EFECTOS GRAVITACIONALES

De acuerdo a lo expuesto por Canudas, *et al.* (1997) la energía potencial del robot completo de  $n$  grados de libertad está dada por:

$$U(q) = \sum_{i=1}^n U_i(q_1, \dots, q_i) \quad (5)$$

donde  $U_i(q_1, \dots, q_i)$ , la energía potencial del eslabón  $i$ , sólo depende de  $q_1, \dots, q_i$  y está dada como:

$$U_i(q_1, \dots, q_i) = P_i + \sum_{r=1}^{m_i} b_{ir} \gamma_{ir}(q_1, \dots, q_i) \quad (6)$$

para algún entero positivo constante  $m_i$  y algunas constantes reales  $b_{ir}, P_i$ . Las funciones  $\gamma_{ir}(q_1, \dots, q_i)$  están dadas como:

$$\gamma_{ir}(q_1, \dots, q_i) = f_s(q_1) f_s(q_2) \cdots f_s(q_i) \quad (7)$$

donde  $f_s(\cdot)$ ,  $s = 1, \dots, i$ , representa la función seno o la función coseno. Por tanto, para toda  $r = 1, \dots, m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$  y  $k = 1, \dots, n$ ,  $|\gamma_{ir}(q_1, \dots, q_i)| \leq 1$ ,  $\left| \frac{\partial \gamma_{ir}(q_1, \dots, q_i)}{\partial q_j} \right| \leq 1$ ,  $\left| \frac{\partial^2 \gamma_{ir}(q_1, \dots, q_i)}{\partial q_k \partial q_j} \right| \leq 1$ . Entonces, el componente  $j$  del vector  $g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}$  está dado por:

$$g_j(q) = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^n U_i(q_1, \dots, q_i) \quad (8)$$

porque  $U_i(q_1, \dots, q_i)$  no depende de  $q_j$  para cualquier  $j > i$ . También se puede observar que el elemento de la matriz  $\frac{\partial g(q)}{\partial q}$  que está colocado en el renglón  $j$  y la columna  $k$  está dado por:

$$\frac{\partial g_j(q)}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k \partial q_j} \sum_{i \in \{j,k\}} U_i(q_1, \dots, q_i) \quad (9)$$

debido a que  $\frac{\partial}{\partial q_j} U_i(q_1, \dots, q_i)$  no depende de  $q_k$  para cualquier  $k > i$ . De acuerdo a lo anterior se puede escribir:

$$\max_q \left| \frac{\partial g_j(q)}{\partial q_k} \right| \leq \sum_{i \in \{j,k\}} \sum_{r=1}^{m_i} |b_{ir}| \quad (10)$$

por lo que esta cantidad es cada vez menor conforme  $j$  ó  $k$  corresponden a uniones que se encuentran cada vez más cerca del extremo final del robot. Como se explica en el comentario 4 del presente trabajo esta característica es muy importante para relajar la condición introducida por Tomei (1991) sobre las ganancias proporcionales.

#### 4. CONTROL PD CON COMPENSACIÓN DESEADA DE GRAVEDAD

##### 4.1 Caso sin incertidumbres

*Proposición. 1.* Considere el sistema en lazo cerrado dado por (1), (2) y el siguiente controlador:

$$u = -r_a I + \overline{K_p} \tilde{q} - \overline{K_d} \dot{q} + R K_m^{-\bullet} g(q_d) \quad (11)$$

donde  $\overline{K_p}$ ,  $\overline{K_d}$ ,  $r_a$  y  $R = R_a + r_a$  son matrices diagonales, definidas positivas de  $n \times n$ . El único punto de equilibrio es tal que  $\tilde{q} = 0$ ,  $\dot{q} = 0$  si:

$$\frac{K_{mi} \overline{K_{pi}}}{R_i} > \sum_{j \bullet \bullet}^n \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right|, \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

donde  $K_{mi}$ ,  $R_i$ ,  $\overline{K_{pi}}$  representan los  $i$ -ésimos elementos de la diagonal de las matrices  $K_m$ ,  $R$  y  $\overline{K_p}$ , respectivamente, y si  $\overline{K_d}$  es suficientemente grande. Bajo estas condiciones el punto de equilibrio mencionado es globalmente asintóticamente estable.

*Comentario. 1.* La ley de control (11) constituye el primer controlador PD con compensación deseada de gravedad que incluye el término  $-r_a I$  así como el coeficiente matricial  $R K_m^{-\bullet}$  del término de compensación de la gravedad. Como se muestra más adelante, estas características son importantes para conseguir presentar por primera vez un estudio formal de la técnica de control conocida como control de par. Nótese que cada término en (11) debe tener unidades de voltaje. Por tanto, las unidades de cada matriz son las siguientes  $r_a$ [Ohms],  $\overline{K_p}$ [volts/rad],  $\overline{K_d}$ [volts/(rad/seg)],  $R$ [Ohms],  $K_m$ [Nm/Amp].

**Prueba.** Sustituyendo el controlador (11) en (1) y definiendo  $\rho = I - R^{-\bullet} [\overline{K_p} \tilde{q} + R K_m^{-\bullet} g(q_d)]$  se obtiene  $L \dot{\rho} = -R \rho - K_b \dot{q} - \overline{K_d} \dot{q} + L R^{-\bullet} \overline{K_p} \dot{q}$ . Sea  $K_d$  una matriz diagonal definida positiva totalmente arbitraria. Defínase:

$$\overline{K_d} = L K_d + L R^{-\bullet} \overline{K_p} \quad (13)$$

Entonces  $L \dot{\rho} = -R \rho - K_b \dot{q} - L K_d \dot{q}$ . Nótese que esta expresión es equivalente a la combinación de las siguientes ecuaciones si se define  $\rho = \varrho + \sigma$ :

$$L \dot{\varrho} = -R \varrho - K_b \dot{q} \quad (14)$$

$$L \dot{\sigma} = -R \sigma - L K_d \dot{q} \quad (15)$$

Por otro lado, la expresión (2) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) &= \\ &= K_m \rho + K_m R^{-\bullet} [\overline{K_p} \tilde{q} + R K_m^{-\bullet} g(q_d)] \\ &= K_m \varrho + K_m \sigma + K_p \tilde{q} + g(q_d) \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $K_p = K_m R^{-\bullet} \overline{K_p}$ . La dinámica en lazo cerrado está dada por (14), (15), (16). Se puede observar que los puntos de equilibrio correspondientes son los estados  $(\tilde{q}^*, \dot{q}^*, \varrho^*, \sigma^*)$  que satisfacen  $\dot{q}^* = \varrho^* = \sigma^* = 0$  y:

$$K_p \tilde{q}^* = g(q^*) - g(q_d), \quad q^* = q_d - \tilde{q}^* \quad (17)$$

es decir:

$$\|K_p \tilde{q}^*\|_{\bullet} = \|g(q^*) - g(q_d)\|_{\bullet} \quad (18)$$

Esta expresión es equivalente a lo siguiente:

$$\sum_{i \bullet \bullet}^n K_{pi} |\tilde{q}_i^*| = \sum_{i \bullet \bullet}^n |g_i(q^*) - g_i(q_d)| \quad (19)$$

donde el subíndice  $i$  representa el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal, si se trata de una matriz, o el  $i$ -ésimo componente, si se trata de un vector. Por otro lado, se ha usado  $|K_{pi} \tilde{q}_i^*| = K_{pi} |\tilde{q}_i^*|$  porque  $K_{pi} > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Dado un vector  $x \in R^n$ , una propiedad fundamental de la 1-norma es que  $\|x\|_{\bullet} = 0$  si y sólo si  $x = 0$ . Por tanto, si se consigue demostrar que  $|\tilde{q}_i^*| = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ , es la única solución de (19) entonces  $\|K_p \tilde{q}^*\|_{\bullet} = 0$  es la única solución de (18), lo cual es equivalente a demostrar que  $\tilde{q}^* = 0$  es la única solución de (17) porque  $K_p$  es definida positiva. Nótese que se puede usar el teorema del valor medio (Khalil, 2002) para escribir:

$$|g_i(q^*) - g_i(q_d)| \leq \sum_{j \bullet \bullet}^n \left[ \left( \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right) |\tilde{q}_j^*| \right]$$

Usando esta expresión en (19) se obtiene:

$$\sum_{i \bullet \bullet}^n K_{pi} |\tilde{q}_i^*| \leq \sum_{i \bullet \bullet}^n \sum_{j \bullet \bullet}^n \left[ \left( \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right) |\tilde{q}_j^*| \right] \quad (20)$$

Desarrollando la doble sumatoria en el miembro derecho de la expresión anterior y, de acuerdo a la propiedad 2, usando:

$$\max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| = \max_q \left| \frac{\partial g_j(q)}{\partial q_i} \right| \quad (21)$$

se puede escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{i \bullet \bullet}^n \sum_{j \bullet \bullet}^n \left[ \left( \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right) |\tilde{q}_j^*| \right] &= \\ &= \sum_{i \bullet \bullet}^n \sum_{j \bullet \bullet}^n \left[ \left( \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right) |\tilde{q}_i^*| \right] \end{aligned}$$

Por tanto, (20) es equivalente a lo siguiente:

$$\sum_{i \bullet \bullet}^n \left[ \left( K_{pi} - \sum_{j \bullet \bullet}^n \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right) |\tilde{q}_i^*| \right] \leq 0 \quad (22)$$

Si se seleccionan los elementos de la diagonal de  $K_p$  de modo que:

$$K_{pi} - \sum_{j \bullet \bullet}^n \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (23)$$

entonces la única manera de satisfacer la igualdad en (22), es decir para satisfacer (19), es  $|\tilde{q}_i^*| = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se concluye que la única solución que (19) admite, y (17) también, es  $\tilde{q}^* = 0$ . Por tanto, el único punto de equilibrio de la dinámica de lazo cerrado (14), (15), (16) es  $(\tilde{q}^*, \dot{q}^*, \varrho^*, \sigma^*) = (0, 0, 0, 0)$  si se satisface (23) lo cual, recordando que  $K_p = K_m R^{-\bullet} \overline{K_p}$ , es equivalente a (12).

A continuación se demuestra que la siguiente función escalar es definida positiva y radialmente desacetada si se satisface (12):

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + P(\tilde{q}) \quad (24)$$

$$P(\tilde{q}) = U(q_d - \tilde{q}) - U(q_d) + \tilde{q}^T g(q_d) + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}$$

Nótese lo siguiente:

$$\frac{\partial^* P(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}^*} = \frac{\partial g(q)}{\partial q} + K_p \quad (25)$$

Debido a que  $K_p$  es una matriz diagonal y  $\partial g(q)/\partial q$  es una matriz simétrica, de acuerdo al corolario 1 la matriz en (25) es definida positiva si se cumplen las condiciones:

$$\min_q \left| K_{pi} + \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_i} \right| > \sum_{j^* \bullet \bullet, j^*/i} \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right|, \quad (26)$$

$$K_{pi} + \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_i} > 0$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Nótese que:

$$\min_q \left| K_{pi} + \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_i} \right| \geq K_{pi} - \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_i} \right|$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Por tanto, (26) se satisface si:

$$K_{pi} - \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_i} \right| > \sum_{j^* \bullet \bullet, j^*/i} \max_q \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right|$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Nótese que esta condición es equivalente a (12). Así, se asegura que  $P(\tilde{q})$  en (24) es definida positiva y radialmente desacotada. Por otro lado, la matriz de inercia  $M(q)$  también es definida positiva. Así, se concluye que la función  $V_*(\tilde{q}, \dot{q})$  definida en (24) es definida positiva y radialmente desacotada.

Para realizar el correspondiente análisis de estabilidad se propone utilizar la siguiente función definida positiva y radialmente desacotada como función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}, \varrho, \sigma) = \frac{1}{2} \varrho^T L \varrho + \frac{1}{2} \sigma^T K_m K_d^{-*} \sigma + V_*(\tilde{q}, \dot{q})$$

donde  $V_*(\tilde{q}, \dot{q})$  es la función definida en (24). Usando (3) y  $K_b = K_m$  se encuentra que la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema (14), (15), (16) está dada como:

$$\dot{V} = -\varrho^T R \varrho - \sigma^T K_m K_d^{-*} L^{-*} R \sigma$$

la cual es globalmente semidefinida negativa. El uso del principio de invariancia de LaSalle (Khalil, 2002) permite asegurar estabilidad asintótica global del punto de equilibrio  $(\tilde{q}, \dot{q}, \varrho, \sigma) = (0, 0, 0, 0)$  porque la única solución de (17) es  $\tilde{q}^* = 0$  si se satisface (12). Así, se completa la prueba de la proposición 1.

*Comentario. 2.* Las matrices  $\overline{K_p}$  y  $\overline{K_d}$ , presentes en el controlador (11), deben satisfacer (12) y (13). Dado que  $K_d$  es una matriz definida positiva totalmente arbitraria siempre se puede cumplir (13), es decir  $K_d = L^{-*} (\overline{K_d} - LR^{-*} \overline{K_p})$ , sin requerir del conocimiento exacto de  $L$  ni de  $R$ . De hecho, el uso de valores aproximados de  $L$  y  $R$  es suficiente para calcular una cota inferior de  $\overline{K_d}$  que asegure que (13) sea satisfecha. Se puede proceder de manera similar para seleccionar una  $\overline{K_p}$  suficientemente grande que asegure que (12) también se cumple sin requerir valores exactos de  $K_m$  ni de  $R$ .

*Comentario. 3.* Nótese que el resultado de la proposición 1 no necesita que se imponga ninguna restricción sobre el valor de la inductancia  $L$  ni sobre la constante de tiempo  $LR_a^{-*}$ . Por otro lado, el estudio hasta aquí presentado puede reducirse al caso en el cual no existe dinámica de los actuadores si se supone que

$L = 0, K_b = 0$ . Sustituyendo estas consideraciones en (1) y usando la ley de control (11) se puede escribir (2) como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \\ = K_m R^{-*} \overline{K_p} \tilde{q} - K_m R^{-*} \overline{K_d} \dot{q} + g(q_d)$$

Entonces la matriz  $K_p = K_m R^{-*} \overline{K_p}$  definida anteriormente representa la ganancia proporcional en el caso en el que la dinámica de los actuadores no existe, es decir, el caso reportado hasta ahora en la literatura (Takegaki y Arimoto, 1981; Tomei, 1991; Feng y Postlethwaite, 1993; Kelly, 1997).

*Comentario. 4.* Es importante subrayar que a diferencia de lo propuesto anteriormente en la literatura (Tomei, 1991) en el presente trabajo no se requiere satisfacer  $\lambda_{min}(K_p) > k_g$ , donde  $\lambda_{min}(K_p)$  es la más pequeña de las ganancias proporcionales cuando  $K_p$  es una matriz diagonal. La cota inferior que debe satisfacer la matriz  $\overline{K_p}$  está dada por (12), o por (23) para  $K_p$  en el caso de que no se considere la dinámica de los actuadores. La condición (23) es una condición más relajada que  $\lambda_{min}(K_p) > k_g$  porque  $\sum_{j^* \bullet \bullet} \max_q \left| \frac{\partial g_i^* \cdot q^*}{\partial q_j} \right| < k_g, \forall i = 1, \dots, n$ , cuando  $k_g$  se estima de acuerdo a (4). La razón es que  $\max_q \left| \frac{\partial g_i^* \cdot q^*}{\partial q_j} \right|$  es menor cuando  $i$  y  $j$  corresponden a uniones que se encuentran más cerca del extremo final del robot, lo cual es establecido en la sección 3. Es interesante darse cuenta de que la condición  $\lambda_{min}(K_p) > k_g$ , propuesta por Tomei (1991), implica que incluso la ganancia proporcional usada en la unión más cercana al extremo final del robot debe dominar todo el efecto gravitacional sobre el robot completo lo cual, de acuerdo a la sección 3, es una condición excesiva para la mayoría de las uniones.

#### 4.2 Robustez ante incertidumbres

Un aspecto interesante del control PD con compensación deseada de gravedad es su robustez ante incertidumbre en  $g(q_d)$ . Trabajos previos que no consideran la dinámica de los actuadores y que se basan en la condición  $\lambda_{min}(K_p) > k_g$  (Feng y Postlethwaite, 1993; Kelly, 1997) aseguran que, aunque existe un error de posición en estado estacionario diferente de cero cuando existe incertidumbre en  $g(q_d)$ , el sistema en lazo cerrado es robusto en el sentido de que hay un único punto de equilibrio el cual es globalmente asintóticamente estable. Resulta de interés saber si la regla de sintonía dada en (23), o equivalentemente en (12), también asegura robustez ante incertidumbre en  $g(q_d)$  y, además, en las matrices  $K_m$  y  $R$ , es decir en  $R_a$ . La siguiente proposición resume los resultados obtenidos.

*Proposición. 2.* Considere el sistema en lazo cerrado formado por (1), (2) y el controlador:

$$u = -r_a I + \overline{K_p} \tilde{q} - \overline{K_d} \dot{q} + R_e K_{me}^{-*} g_e(q_d)$$

donde  $g_e(q_d) \in \mathcal{R}^n$  es un vector constante que representa el estimado de  $g(q_d)$  mientras que  $K_{me}$  y  $R_e$  son matrices diagonales definidas positivas que representan los estimados de las matrices  $K_m$  y  $R = R_a + r_a$ , respectivamente. Por otro lado,  $\overline{K_p}$ ,  $\overline{K_d}$  y  $r_a$  son matrices diagonales definidas positivas de  $n \times n$ . Si  $\overline{K_p}$  se selecciona de acuerdo a (12) y  $\overline{K_d}$  se selecciona de acuerdo a (13) entonces existe un único punto de equilibrio el cual es globalmente asintóticamente estable. Sin embargo, no se asegura que  $\tilde{q} = 0$  en dicho punto de equilibrio.

**Prueba.** Procediendo exactamente como en la prueba de la proposición 1, simplemente definiendo  $\bar{\rho} = I - R^{-*} [\overline{K_p} \tilde{q} +$

$R_e K_{m_e}^{-\bullet} g_e(q_d)$ ] y  $\bar{p} = \bar{q} + \bar{\sigma}$ , se encuentra la siguiente dinámica de lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \bar{p} \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-\bullet} [-C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} - g(q) + K_m \bar{p} + \\ + K_m \bar{\sigma} + K_p \tilde{q} + \varepsilon g_e(q_d)] \\ -L^{-\bullet} R \bar{p} - L^{-\bullet} K_b \dot{\tilde{q}} \\ -L^{-\bullet} R \bar{\sigma} - K_d \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde  $\varepsilon = K_m R^{-\bullet} R_e K_{m_e}^{-\bullet}$  es igual a la matriz identidad de  $n \times n$  cuando no existe incertidumbre en ninguna de las matrices  $K_m$  y  $R$ . Los puntos de equilibrio son aquellos valores que satisfacen  $\dot{q}^* = \bar{p}^* = \bar{\sigma}^* = 0$  y:

$$K_p \tilde{q}^* = g(q^*) - \varepsilon g_e(q_d), \quad \tilde{q}^* = q_d - q^* \quad (28)$$

Considere la siguiente función escalar:

$$P_e(\tilde{q} - \tilde{q}^*) = U(q_d - \tilde{q}) - U(q_d - \tilde{q}^*) + \\ + (\tilde{q} - \tilde{q}^*)^T \varepsilon g_e(q_d) + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} - \frac{1}{2} \tilde{q}^{*T} K_p \tilde{q}^* \quad (29)$$

Esta función es definida positiva y radialmente desacotada si la siguiente matriz es definida positiva:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left[ \frac{\partial P_e(\tilde{q} - \tilde{q}^*)}{\partial \tilde{q}} \right] = \frac{\partial g(q)}{\partial q} + K_p \quad (30)$$

lo cual es cierto si se cumple (12). Bajo estas condiciones sólo existe una solución a lo siguiente:

$$\frac{\partial P_e(\tilde{q} - \tilde{q}^*)}{\partial \tilde{q}} = \varepsilon g_e(q_d) - g(q) + K_p \tilde{q} = 0 \quad (31)$$

Entonces, si  $K_p$  se selecciona de acuerdo con (12) sólo existe un  $\tilde{q}^*$  que es solución de (28), es decir el sistema en lazo cerrado (27) sólo tiene un punto de equilibrio. Sin embargo, es importante subrayar que no se asegura  $\tilde{q}^* = 0$  en dicho punto de equilibrio. Finalmente, el análisis de estabilidad del punto de equilibrio  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \bar{p}, \bar{\sigma}) = (\tilde{q}^*, 0, 0, 0)$  se hace usando la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$W(\tilde{q} - \tilde{q}^*, \dot{\tilde{q}}, \bar{p}, \bar{\sigma}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \\ + P_e(\tilde{q} - \tilde{q}^*) + \frac{1}{2} \bar{p}^T L \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^T K_m K_d^{-\bullet} \bar{\sigma} \quad (32)$$

donde  $P_e(\tilde{q} - \tilde{q}^*)$  está dada en (29). Es decir  $W(\tilde{q} - \tilde{q}^*, \dot{\tilde{q}}, \bar{p}, \bar{\sigma})$  es definida positiva y radialmente desacotada si se cumple (12). Usando de nuevo (3) y  $K_b = K_m$  se encuentra que la derivada de  $W$  a lo largo de las trayectorias del sistema (27) está dada como:

$$\dot{W} = -\bar{p}^T R \bar{p} - \bar{\sigma}^T K_m K_d^{-\bullet} L^{-\bullet} R \bar{\sigma}$$

la cual es globalmente semidefinida negativa. Usando el principio de invariancia de LaSalle (Khalil, 2002) y el hecho de que sólo existe una solución  $\tilde{q}^*$  para (28) se asegura que el punto de equilibrio  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \bar{p}, \bar{\sigma}) = (\tilde{q}^*, 0, 0, 0)$  es globalmente asintóticamente estable. Así, se completa la prueba de la proposición 2.

### 4.3 Control de par o de corriente

De acuerdo a la expresión  $\tau = K_m I$ , el par aplicado por los motores de CD en las uniones del robot es proporcional a la

corriente eléctrica. Este hecho ha motivado que en la práctica industrial se diseñen manejadores para estos motores que incluyan algunos controladores de corriente eléctrica que aseguran que se genere el par deseado. Esta estrategia es conocida como control de par o control de corriente (véase por ejemplo Parker Automation (1998)). De acuerdo a este esquema el voltaje aplicado a los motores está dado como:

$$u = \beta(I^* - I) \quad (33)$$

donde  $\beta$  es una matriz diagonal definida positiva de  $n \times n$  mientras que  $I^*$  representa el valor de corriente eléctrica  $I$  necesaria para generar el par que se desea  $\tau^*$ , es decir:

$$I^* = K_m^{-\bullet} \tau^* \quad (34)$$

Cuando se usa un controlador PD como la consigna de par se tiene:

$$\tau^* = \kappa_p \tilde{q} - \kappa_d \dot{\tilde{q}} + g(q_d) \quad (35)$$

Nótese que el controlador (11) es obtenido a partir de (33), (34), (35) seleccionando:

$$r_a = \beta \\ \overline{K}_p = \beta K_m^{-\bullet} \kappa_p \\ \overline{K}_d = \beta K_m^{-\bullet} \kappa_d$$

Es importante señalar que  $r_a = \beta$  normalmente se selecciona como un valor grande de manera que  $r_a \gg R_a$  (véase Chiasson (2005)). Por ejemplo, Campa, *et al.* (2005) describe la manera de usar control de par en un motor comercial donde  $R_a = 1,9[\text{Ohm}]$  mientras que el manejador suministrado por el fabricante junto con dicho motor usa  $r_a = 698[\text{Ohm}]$ . Por tanto  $R \approx r_a$ , es decir:

$$R K_m^{-\bullet} \approx \beta K_m^{-\bullet}$$

*Comentario. 5.* La proposición 2 muestra que el conocimiento exacto de las matrices  $K_m$  y  $R$ , es decir  $R_a$ , es necesario para compensar correctamente el efecto de la gravedad pues, de otro modo, existirá un error de posición diferente de cero en estado estacionario. Sin embargo, cuando se usa control de par se tiene  $r_a \gg R_a$  lo cual implica, para propósitos prácticos, que el requisito de conocer de manera exacta el valor de la resistencia de armadura de los actuadores  $R_a$  es relajado. Así que  $K_m$  es el único parámetro de los motores de CD que debe ser conocido con exactitud.

## 5. SIMULACIONES

En esta sección se presenta un ejemplo de aplicación usando los valores numéricos del robot reportado por Campa, *et al.* (2004) y Kelly, *et al.* (2005). El objetivo es mostrar cuánto pueden reducirse las ganancias proporcionales usando el criterio propuesto en este trabajo. El vector de pares gravitacionales está dado como:

$$g(q) = \begin{bmatrix} 11,4961 \sin(q_\bullet) + 0,4591 \sin(q_\bullet + q_\bullet) \\ 0,4591 \sin(q_\bullet + q_\bullet) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Para propósitos de simulación se considera que este robot está equipado con los motores de CD con escobillas modelos MT-4060 ALYBE (unión 1) y MT-4060 BLYBE

(unión 2) (Baldor, 2002) cuyos parámetros están dados como  $K_a = \text{diag}\{0,573, 0,382\}[\text{Nm/A}]$ ,  $K_e = K_a$ ,  $R_a = \text{diag}\{2,3, 1,2\}[\text{Ohm}]$ ,  $J = \text{diag}\{12,43 \times 10^{-5}, 12,43 \times 10^{-5}\}[\text{kg m}^2]$ ,  $L = \text{diag}\{9,6 \times 10^{-5}, 4,6 \times 10^{-5}\}[\text{Hy}]$ ,  $N = \text{diag}\{15, 15\}$ . Finalmente se usa  $r_a = 698[\text{Ohm}]$ .

De acuerdo a (23) y (36) las ganancias proporcionales deben cumplir  $K_{p\bullet} > 12,4143[\text{Nm/rad}]$  y  $K_{p\bullet} > 0,9182[\text{Nm/rad}]$ . Por otro lado, también se debe satisfacer (13) con  $K_d$  una matriz definida positiva arbitraria. Las siguientes ganancias fueron seleccionadas pues consiguen desempeños aceptables:

$$\begin{aligned}\overline{K_{p\bullet}} &= 1150[\text{volts/rad}], \\ \overline{K_{p\bullet}} &= 400[\text{volts/rad}], \\ \overline{K_{d\bullet}} &= 550[\text{volts/(rad/seg)}], \\ \overline{K_{d\bullet}} &= 90[\text{volts/(rad/seg)}]\end{aligned}\quad (37)$$

y satisfacen las condiciones mencionadas con  $K_p = K_m R^{-1} \overline{K_p} = \text{diag}\{14,1143, 3,2780\}[\text{Nm/rad}]$ . Lo anterior fue verificado usando el valor exacto de la matriz  $K_m$  y considerando una incertidumbre del 10 % en los valores de  $R_a$  y de  $L$ .

Por otro lado, Kelly, *et al.* (2005) usa el criterio (4) para establecer que  $k_g = 23,94[\text{Nm/rad}]$ . Con el fin de satisfacer la condición  $\lambda_{\min}(K_p) > k_g$  Kelly, *et al.* (2005) utiliza las ganancias  $K_p = \text{diag}\{30, 30\}[\text{Nm/rad}]$  para mostrar el desempeño obtenido con el controlador PD con compensación deseada de gravedad cuando la dinámica de los actuadores es despreciada. Usando de nuevo  $K_p = K_m R^{-1} \overline{K_p}$  así como el valor exacto de la matriz  $K_m$  y una incertidumbre del 10 % en el valor de  $R_a$  se encuentra que estos valores de  $K_p$  equivalen a:

$$\begin{aligned}\overline{K_{p\bullet}} &= 2448[\text{volts/rad}], \\ \overline{K_{p\bullet}} &= 3670[\text{volts/rad}], \\ \overline{K_{d\bullet}} &= 572[\text{volts/(rad/seg)}], \\ \overline{K_{d\bullet}} &= 370[\text{volts/(rad/seg)}]\end{aligned}\quad (38)$$

Las ganancias derivativas en (38) equivalen a los valores usados por Kelly, *et al.* (2005) en el caso que no se considere la dinámica de los actuadores, es decir  $K_m R^{-1} \overline{K_d} = \text{diag}\{7, 3\}[\text{Nm/(rad/seg)}]$  (véase el comentario 3).

Nótese que las ganancias proporcionales obtenidas de acuerdo al criterio propuesto en el presente trabajo, es decir las mostradas en (37), son claramente más pequeñas que las presentadas en (38), es decir aquellas obtenidas de acuerdo al criterio  $\lambda_{\min}(K_p) > k_g$  introducido por primera vez por Tomei (1991). También se puede observar que ninguna de las ganancias proporcionales en (37) satisface  $\lambda_{\min}(K_p) > k_g$  con  $k_g = 23,94[\text{Nm/rad}]$ . Además, las condiciones  $K_{p\bullet} > 12,4143[\text{Nm/rad}]$  y  $K_{p\bullet} > 0,9182[\text{Nm/rad}]$  claramente permiten ganancias proporcionales mucho más pequeñas para las uniones más cercanas al extremo final del robot. La fig. 1 muestra las ventajas de este hecho. Todas las condiciones iniciales son cero y se usa el controlador (11) con valores exactos de  $R$  y  $K_m$ . Cuando se usan las ganancias en (38) se utilizan los valores deseados  $q_{d\bullet} = \frac{\pi}{\bullet\bullet}[\text{rad}]$ ,  $\dot{q}_{d\bullet} = \frac{\pi}{\bullet\bullet}[\text{rad}]$ , tal como propone Kelly, *et al.* (2005), mientras que las ganancias en (37) se usan junto con los valores deseados  $q_{d\bullet} = 1,6 \times \frac{\pi}{\bullet\bullet}[\text{rad}]$ ,  $\dot{q}_{d\bullet} = 8 \times \frac{\pi}{\bullet\bullet}[\text{rad}]$ . Los valores deseados utilizados fueron seleccionados de manera que en ambos casos se obtuvieran los mismos valores máximos de par, lo cual puede verificarse en

la fig. 2. Estos resultados muestran claramente que el criterio presentado en este trabajo permite utilizar cambios más grandes en la consigna de posición  $q_d$  sin que se saturen los pares entregados por cada motor. De acuerdo a Campa, *et al.* (2004) los pares máximos permitidos son 15[Nm] en la unión 1 y 4[Nm] en la unión 2. Se ha preferido presentar el par generado,  $\tau = K_m I$ , en lugar del voltaje aplicado,  $u$ , con el fin de comparar con los resultados reportados por Kelly, *et al.* (2005) en donde la variable  $u$  no existe. Nótese que las ganancias en (38) consiguen respuestas más rápidas, lo cual es de esperarse porque dichas ganancias son más grandes.

Finalmente, es conveniente aclarar que las simulaciones presentadas no buscan mostrar que el esquema de control propuesto en este trabajo tiene mejores desempeños por el hecho de tomar en cuenta la dinámica de los actuadores en el diseño. De hecho, debido a que se trata de una estrategia común en la práctica, el prototipo experimental usado por Kelly, *et al.* (2005) así como todas las simulaciones en el presente trabajo incluyen el lazo de corriente que constituye la estrategia conocida como control de par. Por tanto, es de esperarse que no haya diferencias en las simulaciones que se puedan atribuir al uso de la realimentación de corriente introducida en este trabajo. La contribución del presente trabajo en ese sentido es la demostración formal de estabilidad asintótica global cuando se toma en cuenta dicha realimentación de corriente.

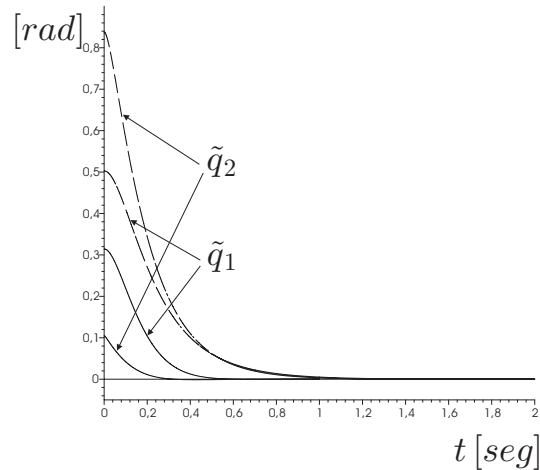


Figura 1. Evolución de los errores de posición. Líneas interrumpidas: ganancias en (37). Líneas continuas: ganancias en (38).

## 6. CONCLUSIONES

Se ha demostrado existencia y unicidad del equilibrio deseado en lazo cerrado usando una nueva condición sobre las ganancias proporcionales del control PD con compensación deseada de gravedad. Esta nueva condición hace posible el uso de ganancias proporcionales menores que las permitidas por los esquemas propuestos hasta ahora. Más aún, se muestra que las ganancias proporcionales usadas pueden ser menores para uniones que se encuentran cada vez más cerca del extremo final del robot. Esta característica es importante desde el punto de vista teórico porque propone una cota inferior menos conservadora sobre dichas ganancias. Desde el punto de vista práctico se permite utilizar cambios más grandes en las posiciones deseadas sin que se saturen los actuadores. Contrariamente a lo que se creía hasta ahora, se ha demostrado que para asegurar estabilidad asintótica global no es necesario exigir que la dinámica



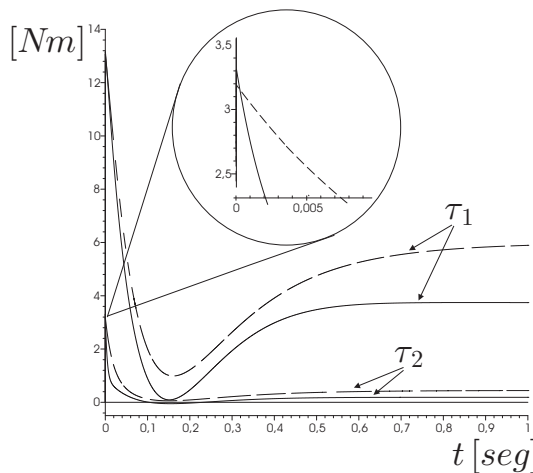


Figura 2. Pares producidos. Líneas interrumpidas: ganancias en (37). Líneas continuas: ganancias en (38).

eléctrica de los actuadores sea rápida comparada con la parte mecánica del sistema. Además, también se ha mostrado que el análisis y el diseño no son complicados a pesar de la presencia de una dinámica eléctrica entre la señal de control y el par aplicado a los eslabones. En este sentido es importante señalar que las complicaciones encontradas para tomar en consideración la dinámica eléctrica de los actuadores había evitado hasta ahora que se presentara el resultado que se reporta en este trabajo.

#### AGRADECIMIENTOS

V. Santibáñez agradece el apoyo económico de DGEST y CONACyT, México. R.V. Carrillo agradece el apoyo económico de CONACyT, México.

#### REFERENCIAS

- Ailon, A., R. Lozano, and M.I. Gil' (2000). Iterative regulation of an electrically driven flexible-joint robot with model uncertainty. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, **16**, 863-870.
- Baldor Electric Company (2002). Catalog BR1202, BALDOR Motion Products: servo, linear and motion control products, G-11, P.O. Box 2400, Forth Smith AR 72902-2400 USA, www.baldor.com.
- Campa, R., R. Kelly, and V. Santibáñez (2004). Windows-based real-time control of direct-drive mechanisms: platform description and experiments. *Mechatronics*, **14**, 1021-1036.
- Campa, R., E. Torres, V. Santibáñez and R. Vargas (2005). Electromechanical dynamics characterization of a brushless direct-drive servomotor. *Proc. VII Mexican Congress on Robotics, COMRob 2005*, México, D.F., October 27-28.
- Canudas de Wit, C., B. Siciliano, and G. Bastin (1997). *Theory of robot control*, 6,7,9,23. Springer, London.
- Chiasson, J. (2005). *Modeling and High-performance control of electric machines*, 76. IEEE Press-Wiley Interscience, New Jersey.
- Eppinger, S. and W. Seering (1987). Introduction to dynamic models for robot force control. *IEEE Control Systems Magazine*, **7**, 48-52.
- Feng, W. and I. Postlethwaite (1993). A simple robust control scheme for robot manipulators with only joint position measurements. *International Journal of Robotics Research*, **12**, 490-496.

- Hernández Guzmán, V.M., V. Santibáñez, and G. Herrera (2007). Control of rigid robots equipped with brushed DC-motors as actuators. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, **5**, 718-724.
- Horn, R.A. and C. R. Johnson (1993). *Matrix analysis*, 349,403. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kelly, R. (1997). PD control with desired gravity compensation of robotic manipulators: a review. *International Journal of Robotics Research*, **16**, 660-672.
- Kelly, R., V. Santibáñez, and A. Loría (2005). *Control of robot manipulators in joint space*, 98,101,128,186, Cap. 5. Springer, London.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*, 120,651,129. Prentice-Hall, Upper Saddle River.
- Koditschek, D. (1984). Natural motion for robot arms. *Proceeding of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, 733-735.
- Parker Automation (1998). Position systems and Controls, Training and Product Catalog DC-ROM. *Compumotor's Virtual Classroom*.
- Takegaki, M., and S. Arimoto (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **102**, 119-125.
- Tarn, T.-J., A.K. Bejczy, X. Yun, X., and Z. Li (1991). Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **7**, 114-122.
- Tomei, P. (1991). Adaptive PD controller for robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **7**, 565-570.