Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
J. Math. Pures Appl. 94 (2010) 200–227
JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
www.elsevier.com/locate/matpur

De l'équation de prescription de courbure scalaire aux équations de contrainte en relativité générale sur une variété asymptotiquement hyperbolique

Romain Gicquaud

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier 2, Case Courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex, France

Reçu le 22 juin 2009

Disponible sur Internet le 27 mars 2010

Résumé

Cet article est consacré à l'étude de deux problèmes sur les variétés asymptotiquement hyperboliques avec un bord interne. Dans un premier temps, nous examinons le problème de la prescription de la courbure scalaire pour des conditions au bord interne de Dirichlet et de prescription de la courbure moyenne. On applique ensuite les résultats obtenus à l'étude de l'équation de Lichnerowicz avec une condition au bord interne d'horizon apparent (passé ou futur). La dernière partie traite de la construction de TT-tenseurs. On construit ainsi des données initiales, à courbure moyenne constante, pour les équations d'Einstein du vide.

Abstract

Two problems concerning asymptotically hyperbolic manifolds with an inner boundary are studied. First, we study scalar curvature presciption with either Dirichlet or mean curvature prescription interior boundary condition. Then we apply those results to the Lichnerowicz equation with (future or past) apparent horizon interior boundary condition. In the last part we show how to construct TT-tensors. Thus we obtain Cauchy data with constant mean curvature for Einstein vacuum equations.

MSC : 35Q75 ; 53C21 ; 35J65 ; 35J70

Mots-clés : Variétés asymptotiquement hyperboliques ; Courbure scalaire conforme ; Équations de contraintes ; Horizons apparents

---

1. Introduction

Dans cet article, nous étudions deux problèmes : celui de la prescription de la courbure scalaire sur une variété asymptotiquement hyperbolique et la construction de solutions des équations de contrainte en relativité générale contenant des horizons apparents.

Dans la première partie, nous rappelons les résultats de [15] et [17], et nous démontrons des variantes du principe du maximum généralisé tel qu'il apparaît dans [15] et finalement nous étendons la méthode de monotonie au cas

Adresse e-mail : romain.gicquaud@lmpt.univ-tours.fr.

0021-7824/$ – see front matter
doi:10.1016/j.matpur.2010.03.011

de sur- et sous-solutions au sens des distributions. Ces résultats nous seront utiles pour résoudre les équations de prescription de la courbure scalaire et de Lichnerowicz.

Pour le problème de la prescription de la courbure scalaire, nous généralisons les résultats de [12] au cas des variétés asymptotiquement hyperboliques avec un bord interne (éventuellement vide). Rappelons que pour une métrique riemannienne g de courbure scalaire Scal, si φ est une fonction positive alors la courbure scalaire $\widehat{\mathrm{Scal}}$ de $\hat{g} = \varphi^\kappa g$, avec $\kappa = \frac{4}{n-2}$ est donnée par (voir par exemple [6]) :

$$\widehat{\mathrm{Scal}} = \varphi^{-\kappa-1}\left(-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi\right).$$

Par convention, le laplacien est donné par $\Delta f = g^{ij}(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ij}\partial_k f)$. Nos résultats principaux sont les Théorèmes 3.1 et 3.5 :

Théorème 1.1. *Soit* (M^n, g) *une variété asymptotiquement hyperbolique de classe* $\mathcal{C}^{l,\beta}$. *Soient deux fonctions* Scal, $\widehat{\mathrm{Scal}} \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_0(M)$ $(2 < k+\alpha \leqslant l+\beta,\ 0<\alpha<1)$ *avec* $\widehat{\mathrm{Scal}} < 0$ *telles que* Scal, $\widehat{\mathrm{Scal}} \to_{\partial_\infty M} -n(n-1)$.

1. ***Problème de Dirichlet le long de*** $\boldsymbol{\partial_0 M}$ (*Théorème* 3.1) : *Soit* $\varphi_0 > 0$ *une fonction* $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ *sur* $\partial_0 M$ *alors il existe une solution unique* $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_0$ *telle que* $\varphi > 0$ *et* $\varphi \to_{\partial_\infty M} 1$, *au problème de Dirichlet* :

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi = \widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi^{\kappa+1}, \\ \varphi = \varphi_0 \quad \textit{sur } \partial_0 M. \end{cases} \tag{1.1}$$

2. ***Prescription de la courbure moyenne de*** $\boldsymbol{\partial_0 M}$ (*Théorème* 3.5) : *Soient* $H, \widehat{H} \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M)$, *avec* $\widehat{H} \geqslant 0$, *il existe une unique solution* $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_0$ *telle que* $\varphi > 0$ *et* $\varphi \to_{\partial_\infty M} 1$ *au problème de la prescription de la courbure moyenne de* $\partial_0 M$:

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi = \widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi^{\kappa+1}, \\ \dfrac{2}{n-1}\nabla_\nu\varphi - H\varphi = -\widehat{H}\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1} \quad \textit{le long de } \partial_0 M, \end{cases} \tag{1.2}$$

où ν *désigne la normale à* $\partial_0 M$ *sortant de* M. *De plus si* $\mathrm{Scal} - \widehat{\mathrm{Scal}} \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta$ *pour un certain* $\delta \in [0; n)$ *alors* $\varphi - 1 \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$.

Signalons que le problème de la prescription de la courbure scalaire sur une variété à courbure négativement pincée a été traité dans [4], ce cadre est cependant trop général pour espérer un contrôle de la fonction φ à l'infini. Pour des valeurs $\delta \geqslant n$, la fonction φ solution de l'équation de prescription de la courbure scalaire n'a plus nécessairement un comportement asymptotique aussi fort que celui de $\widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal}$, une obstruction importante est alors fournie par la masse (voir [24,8], mais également [20]).

Dans une seconde partie, nous montrons l'existence de solutions à l'équation de Lichnerowicz avec la condition au bord d'horizon apparent (passé et futur). Rappelons que l'équation de Lichnerowicz (correspondant à la première ligne de 1.3) apparaît naturellement dans la construction de données initiales à courbure moyenne constante pour les équations d'Einstein du vide (voir section 4) :

Théorème 1.2 *(Construction de solutions de l'équation de Lichnerowicz contenant des horizons apparents). Soient* M *une variété asymptotiquement hyperbolique de classe* $\mathcal{C}^{l,\beta}$ *avec* $l+\beta \geqslant 2$ *et* $\tau \in [-1; 1]$. *Fixons, pour chaque composante connexe* σ_i *de* $\partial_0 M$, *un réel* $\epsilon_i = \pm 1$ ($\epsilon_i = -1$ *pour un horizon apparent futur et* $\epsilon_i = +1$ *pour un horizon apparent passé*). *Supposons de plus, lorsque* $\tau = \pm 1$, *que, pour tout* i *tel que* $\epsilon_i = -\tau$, *l'invariant de Yamabe*

$\mathcal{Y}(\sigma_i) > 0$. Soit $L \in \mathcal{C}_0^{k-1,\alpha}(M, T^{*2}M)$ un 2-tenseur symétrique de trace nulle tel que $|L|_g^2 \to 0$ au voisinage de $\partial_\infty M$ et tel que $\epsilon_i L_{\nu_i\nu_i} \geqslant 0$ sur $\partial_0 M$. Il existe une solution $\varphi > 0$ au problème :

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi + n(n-1)\varphi^{\kappa+1} - |L|_g^2\varphi^{-\kappa-3} = 0 & \text{sur } \mathring{M}, \\ \dfrac{2(n-1)}{n-2}\nabla_{\nu_i}\varphi - H_i\varphi = \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}\varphi^{-1-\frac{\alpha}{2}} - (n-1)\tau\varphi^{\frac{\alpha}{2}+1}\big] & \text{sur } \sigma_i \text{ pour tout } i, \end{cases} \tag{1.3}$$

où Scal est le scalaire de courbure de (M, g) et ν_i la normale à σ_i sortante (i.e. dirigée vers l'intérieur de l'horizon apparent) avec $\varphi \to 1$ au voisinage de $\partial_\infty M$. De plus si $\mathrm{Scal} + n(n-1) \in \mathcal{C}_\delta^{k-2,\alpha}$ et $|L|^2 \in \mathcal{C}_\delta^{k-2,\alpha}$ avec $\delta \in [0; n)$, alors $\varphi - 1 \in \mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}$.

Remarquons qu'avec nos conventions le cas $\epsilon_i\tau = -1$ correspond à un horizon apparent futur (resp. passé) dans les hypersurfaces asymptotiquement isotropes qui sont des surfaces de Cauchy pour le développement en temps futur (resp. passé). En p. 220 nous montrons que si l'invariant de Yamabe du bord n'est pas strictement positif, il peut ne pas exister de solution à l'équation (1.3).

Notons que le problème sans bord a déjà été étudié dans [3]. Les horizons apparents sont la version « données initiales » des horizons des évènements (voir par exemple [23]). Cette construction est la version asymptotiquement hyperbolique des articles [9–11] et [19]. Le cas des variétés asymptotiquement hyperboliques permet en particulier de construire des surfaces de Cauchy asymptotiquement isotropes dans une variété lorentzienne asymptotiquement plate et des surfaces de Cauchy correspondant aux sections à courbure moyenne nulle des espaces asymptotiquement anti-de Sitter. Signalons également que d'autres auteurs ont construit des métriques contenant des horizons apparents par des techniques de recollement [22,18].

Lié à l'équation de Lichnerowicz, nous étudions finalement la construction de TT-tenseurs. Notre construction, basée sur [17], permet d'obtenir l'intervalle des poids optimal pour l'existence de TT-tenseurs. Ceci nous permet de construire des solutions des équations de contrainte en relativité générale :

Théorème 1.3. *Soit (M, g) une variété asymptotiquement hyperbolique de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ avec $l + \beta \geqslant 2$.*

1. *Soient L_0 un 2-tenseur symétrique et sans trace avec $L_0 \in W_\delta^{k-1,p}$ avec $2 \leqslant k \leqslant l$, $1 < p < \infty$ et $|\delta + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, et $b \in W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M, T^*M)$. Il existe une unique 1-forme $\psi \in W_\delta^{k,p}(M, T^*M)$ telle que, si on définit $L = L_0 + \mathcal{L}_{\psi^\sharp}g - \frac{2}{n}\operatorname{div}(\psi^\sharp)g$, alors :*
   - *L est un tenseur symétrique transverse et sans trace ;*
   - *$L(\nu, .) = b$ sur $\partial_0 M$.*
2. *Soient L_0 un 2-tenseur symétrique et sans trace avec $L_0 \in \mathcal{C}_\delta^{k-1,\alpha}$ avec $2 \leqslant k + \alpha \leqslant l$, $0 < \alpha < 1$ et $|\delta - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, et $b \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M, T^*M)$. Il existe une unique 1-forme $\psi \in \mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}(M, T^*M)$ telle que, si on définit $L = L_0 + \mathcal{L}_{\psi^\sharp}g - \frac{2}{n}\operatorname{div}(\psi^\sharp)g$, alors :*
   - *L est un tenseur symétrique transverse et sans trace ;*
   - *$L(\nu, .) = b$ sur $\partial_0 M$.*

Je remercie Erwann Delay, mon directeur de thèse, pour ses nombreux conseils et sa relecture attentive des versions préliminaires de cet article. Je remercie également Piotr Chruściel et Marc Herzlich pour leurs commentaires qui m'ont guidés tout au long de ce travail. Enfin, je suis reconnaissant envers Benoît Michel pour son aide sur le contre-exemple de la section 5.

2. Préliminaires

L'objectif de cette section est de rappeler les résultats principaux de [15] et [17] ainsi que d'étendre la méthode de monotonie au cas de sur- et sous-solutions au sens des distributions pour des conditions au bord non linéaires.

2.1. Variétés asymptotiquement hyperboliques

Soit $\overline{M}^n$ une variété compacte à bord. On suppose que ∂M est séparé en deux parties ouvertes $\partial_\infty M$ et $\partial_0 M$ (réunion de composantes connexes). On notera $M = \mathring{M} \cup \partial_0 M$. On appelle **fonction définissante** pour $\partial_\infty M$ une fonction lisse $\rho : \overline{M} \to [0; \infty)$ telle que $\rho^{-1}(0) = \partial_\infty M$ et $d\rho \neq 0$ le long de $\partial_\infty M$. Une métrique g sur M sera dite **conformément compacte** de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ si $\rho^2 g$ s'étend en une métrique $\overline{g} \in \mathcal{C}^{l,\beta}$ sur $\overline{M}$. Un calcul simple montre alors que, si g est conformément compacte de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ avec $l + \beta \geqslant 2$, la courbure sectionnelle de g tend vers $-|d\rho|^2_{\overline{g}}$ au voisinage de $\partial_\infty M$. On dira donc que g est **asymptotiquement hyperbolique** si g est conformément compacte avec $|d\rho|^2_{\overline{g}} = 1$ le long de $\partial_\infty M$. On notera par la suite $M_\sigma = \rho^{-1}((0; \sigma))$ et $S_\sigma = \rho^{-1}(\sigma)$. S_σ est une sous-variété si σ est assez petit.

2.2. Espaces de fonctions

On fixe un fibré vectoriel géométrique (i.e. associé au fibré principal $SO(M)$) E sur M. Par la suite, on se fixe $k \geqslant 0$ un entier et $0 < \alpha < 1$. On définit tout d'abord l'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{(0)}$. C'est l'ensemble des sections $f : \overline{M} \to \overline{E}$ de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ qu'on munit de la norme standard.

On définit ensuite l'espace de Sobolev $W^{k,p}_0(M, E)$. C'est l'espace de Sobolev des sections $u \in L^p$ telles qu'au sens des distributions, $\forall j \in \{0, \dots, k\}$, $\nabla^{(j)} u \in L^p$. On le munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{k,p}_0(M,E)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \int_M \left|\nabla^{(j)} u\right|^p d\mu_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Puis l'espace de Sobolev à poids $W^{k,p}_\delta(M, E) = \rho^\delta W^{k,p}_0(M, E)$ qu'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}_\delta(M,E)} = \left\|\rho^{-\delta} u\right\|_{W^{k,p}_0(M,E)}.$$

On notera $L^p_\delta = W^{0,p}_\delta$.

Finalement nous définissons les espaces de Hölder à poids. On choisit tout d'abord un nombre fini de cartes $\phi = (\rho, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ au voisinage de $\partial_\infty M$, telles que les domaines de définition des ϕ recouvrent $\partial_\infty M$ qu'on complète avec un nombre fini de cartes dont le domaine de définition est précompact dans M. On note $\mathbb{H}$ l'espace hyperbolique vu comme le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 > 0\}$ muni de la métrique $g_{hyp} = \frac{1}{x_1^2} g_{eucl}$ et on définit B_r la boule centrée en $(1, 0, \dots, 0)$ de rayon r dans $\mathbb{H}$ pour la métrique hyperbolique. Si $M \ni p_0 = \phi^{-1}(\rho_0, \theta^1_0, \dots, \theta^{n-1}_0)$ est l'image réciproque par une des cartes fixées, on définit les coordonnées de Möbius au voisinage en p_0 par :

$$\phi^r_{p_0}(p) = \left(\frac{\rho(p)}{\rho_0}, \frac{\theta^1(p) - \theta^1_0}{\rho_0}, \dots, \frac{\theta^{n-1}(p) - \theta^{n-1}_0}{\rho_0} \right),$$

$\phi^r_{p_0} : (\phi^r_{p_0})^{-1}(B_r) \to B_r$. On introduit ensuite la norme de Hölder :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M,E)} = \sup_{p_0 \in M} \rho^{-\delta}(p_0) \left\| \left(\left(\phi^1_{p_0}\right)^{-1} \right)^* u \right\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(B_1)}.$$

L'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M, E)$ est alors l'espace des sections $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ telles que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M,E)} < \infty.$$

2.3. La méthode de monotonie

Pour résoudre l'équation de prescription de la courbure scalaire, nous utilisons la méthode de monotonie adaptée pour prendre en compte des conditions au bord non linéaires telle qu'elle est décrite dans [19]. Cette méthode nous sera également utile par la suite pour la résolution de l'équation de Lichnerowicz (voir section 5). Cependant, contrairement à [19], nous regardons l'existence de solutions dans les espaces de Hölder à poids. Nos sur- et sous-solutions seront des fonctions lipschitziennes, dérivables dans un voisinage du bord interne $\partial_0 M$, sur- et sous-solutions au sens des distributions. Dans tout ce paragraphe, nous fixons une variété (M^n, g) asymptotiquement hyperbolique de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ $(l+\beta \geqslant 2)$, un entier $k \geqslant 2$ et α un réel, $0<\alpha<1$ tels que $2 < k+\alpha \leqslant l+\beta$. Supposons qu'on souhaite résoudre le problème suivant :

$$-\Delta\varphi = F(p,\varphi), \tag{2.1}$$

où $F : M \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de la forme $F(p,\varphi) = \sum_{i\in I} a_i(p)\varphi^{\beta_i}$ avec I est un ensemble fini, $\beta_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in \mathcal{C}_0^{k,\alpha}(M)$. Notons que si $\forall i \in I$, $\beta_i = 0$ ou $\beta_i \geqslant 1$, F se prolonge en une fonction dérivable à $M \times \mathbb{R}_+$, ce qui sera sous-entendu par la suite.

Proposition 2.1. *On suppose qu'il existe deux fonctions φ_+ et φ_- appelées respectivement* ***sur-solution*** *et* ***sous-solution*** *à valeurs dans $(\epsilon;\infty)$ pour un certain $\epsilon > 0$ petit (ou dans $\mathbb{R}_+$ dans le cas où les β_i sont nuls ou supérieurs ou égaux à 1), continues sur $\overline{M}$, $\varphi_+ \geqslant \varphi_-$, telles que*

$$\forall\psi \in \mathcal{C}_c^2(\mathring{M}), \quad -\int_M \varphi_+\Delta\psi \geqslant \int_M \psi F(p,\varphi_+) \quad \left(\textit{resp.} \ -\int_M \varphi_-\Delta\psi \leqslant \int_M \psi F(p,\varphi_-)\right)$$

alors, si on sait que (estimation a priori) si φ est solution avec $\varphi_- \leqslant \varphi \leqslant \varphi_+$, alors $\varphi \geqslant \epsilon > 0$ pour un certain ϵ, on a :

1. ***Problème de Dirichlet le long de $\boldsymbol{\partial_0 M}$***
   Soit $h \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\partial_0 M)$. Si $\varphi_- \leqslant h \leqslant \varphi_+$ sur $\partial_0 M$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^{k,\alpha}$, $\varphi_- \leqslant \varphi \leqslant \varphi_+$, solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = F(p,\varphi), \\ \varphi = h \quad \textit{sur } \partial_0 M. \end{cases} \tag{2.2}$$

2. ***Condition au bord $\boldsymbol{\partial_0 M}$ non linéaire***
   On se donne ici une fonction $f : \partial_0 M \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1,\alpha}$. On suppose de plus que $\partial_\nu\varphi_+ \geqslant f(p,\varphi_+)$ (resp. $\partial_\nu\varphi_- \leqslant f(p,\varphi_-)$) $\forall p \in \partial_0 M$. Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^{k,\alpha}$ telle que $\varphi_- \leqslant \varphi \leqslant \varphi_+$ solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = F(p,\varphi), \\ \partial_\nu\varphi = f(p,\varphi) \quad \textit{sur } \partial_0 M. \end{cases} \tag{2.3}$$

Démontrons le second point, le premier étant plus simple. Notre démonstration est basée sur des lemmes issus de [15]. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 2.2 *(Principe du maximum généralisé). Soient M une variété asymptotiquement hyperbolique et $f \in \mathcal{C}^2(M)$ une fonction majorée. On suppose que f n'atteint pas son maximum en un point de $\partial_0 M$. Alors il existe une suite $p_i \in M$ telle que*

1. $\lim_{i\to\infty} f(p_i) = \sup_M f$,
2. $\lim_{i\to\infty} |\nabla f(p_i)|_g = 0$,
3. $\limsup_{i\to\infty} \Delta f(p_i) \leqslant 0$.

Pour la démonstration, nous renvoyons à [15, Théorème 3.5]. Celle-ci reste néanmoins proche de celle du Lemme 3.2 qui s'en inspire.

Lemme 2.3. *Soit $\delta \in \mathbb{R}$. Si A est assez grand, pour tous $g \in \mathcal{C}_\delta^{k-2,\alpha}(M)$ et $h \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}$ à :*

$$\begin{cases} -\Delta u + Au = g, \\ \partial_\nu u + Au = h \quad \textit{sur } \partial_0 M. \end{cases}$$

Démonstration. Posons $\Omega_i = \rho^{-1}((\frac{1}{2^i}; \infty))$. Choisissant i assez grand, on peut supposer que $\partial_0 M \subset \Omega_i$. Ω_i est relativement compact donc le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + Au = g & \text{sur } \Omega_i, \\ \partial_\nu u + Au = h & \text{sur } \partial_0 M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \setminus \partial_0 M \end{cases}$$

admet une unique solution $u_i \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega_i)$. (On voit facilement que la seule solution du problème homogène est 0 et l'opérateur est Fredholm d'index 0.) En constatant que si $p_0 \in \Omega_i$, $B_{\log 2}(p_0) \subset \Omega_{i+1}$, on a, en utilisant les estimations de Schauder internes [17, Lemme 4.8] et au niveau de $\partial_0 M$ [14, Lemme 6.29] :

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(\Omega_{i-1})} &\leqslant C\big(\|g\|_{\mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta(\Omega_i)} + \|h\|_{\mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M)} + \|u_i\|_{\mathcal{C}^{0,0}_\delta(\Omega_i)}\big) \\ &\leqslant C\big(\|g\|_{\mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta(M)} + \|h\|_{\mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M)} + \|u_i\|_{\mathcal{C}^{0,0}_\delta(\Omega_i)}\big), \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de i. Reste à estimer $\|u_i\|_{\mathcal{C}^{0,0}_\delta(\Omega_i)}$:

$$\begin{aligned} -\Delta\rho^\delta + A\rho^\delta &= -\rho^2\left(\overline{\Delta}\rho^\delta - (n-2)\left\langle \frac{\overline{\nabla}\rho}{\rho}, \overline{\nabla}\rho^\delta \right\rangle_{\bar{g}}\right) + A\rho^\delta \\ &= -\rho^2\big(\delta\rho^{\delta-1}\overline{\Delta}\rho + \delta(\delta-1)|\overline{\nabla}\rho|^2_{\bar{g}}\rho^{\delta-2} - (n-2)\delta|\overline{\nabla}\rho|^2_{\bar{g}}\rho^{\delta-2}\big) + A\rho^\delta \\ &= \big(\delta(n-1-\delta)|\overline{\nabla}\rho|^2_{\bar{g}} + A - \delta\rho\overline{\Delta}\rho\big)\rho^\delta. \end{aligned}$$

Donc si A est assez grand, on a $-\Delta\rho^\delta + A\rho^\delta \geqslant \frac{A}{2}\rho^\delta$. Maintenant :

$$\begin{aligned} -\Delta u_i &= -\Delta\left(\rho^\delta \frac{u_i}{\rho^\delta}\right) = -\frac{u_i}{\rho^\delta}\Delta\rho^\delta - \left\langle \nabla\rho^\delta, \nabla\frac{u_i}{\rho^\delta}\right\rangle_g - \rho^\delta\Delta\frac{u_i}{\rho^\delta}, \\ g - Au_i &= -\frac{u_i}{\rho^\delta}\Delta\rho^\delta - \left\langle \nabla\rho^\delta, \nabla\frac{u_i}{\rho^\delta}\right\rangle_g - \rho^\delta\Delta\frac{u_i}{\rho^\delta}, \\ \frac{g}{\rho^\delta} - A\frac{u_i}{\rho^\delta} &= -\frac{u_i}{\rho^\delta}\frac{\Delta\rho^\delta}{\rho^\delta} - \left\langle \frac{\nabla\rho^\delta}{\rho^\delta}, \nabla\frac{u_i}{\rho^\delta}\right\rangle_g - \Delta\frac{u_i}{\rho^\delta}, \\ \frac{g}{\rho^\delta} &= \frac{u_i}{\rho^\delta}\left(-\frac{\Delta\rho^\delta}{\rho^\delta} + A\right) - \delta\left\langle \frac{\nabla\rho}{\rho}, \nabla\frac{u_i}{\rho^\delta}\right\rangle_g - \Delta\frac{u_i}{\rho^\delta}. \end{aligned}$$

En distinguant les cas où $|\frac{u_i}{\rho^\delta}|$ est maximal en un point intérieur à Ω_i et le cas où le maximum est atteint sur $\partial_0 M$, on a alors que $\|\frac{u_i}{\rho^\delta}\|_\infty \leqslant \frac{2}{A}\|\frac{g}{\rho^\delta}\|_\infty + \frac{1}{B}\|h\|_\infty$ (où on a posé $B = \min_{\partial_0 M}(\rho^\delta A + \delta\rho^{\delta-1}\partial_\nu\rho)$, $B > 0$ si A est assez grand, ce qu'on supposera par la suite). Les fonctions u_i sont donc bornées en norme $\mathcal{C}^{2,\alpha}_\delta$ sur les compacts de M. Le théorème d'Ascoli et un procédé d'extraction diagonal permettent alors, par une méthode analogue à celle utilisée dans la preuve de [15, Proposition 3.7], de trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^{0,0}_\delta(M) \cap \mathcal{C}^{2,0}_{\mathrm{loc}}(M)$ qui satisfait à :

$$\begin{cases} -\Delta u + Au = g & \text{sur } M, \\ \partial_\nu u + Au = h & \text{sur } \partial_0 M. \end{cases}$$

On a alors $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_\delta(M)$. Par le principe du maximum généralisé (Lemme 2.2), on constate que u est l'unique solution de ce problème. Finalement en utilisant la régularité elliptique [17], on a $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M)$. □

Revenons maintenant à la preuve de la méthode de monotonie :

Démonstration de la méthode de monotonie (Proposition 2.1). Posons $\lambda = \min_M \varphi_-$ et $\Lambda = \max_M \varphi_+$. Choisissons une constante A assez grande telle que, pour tout $p \in M$, les fonctions $\varphi \mapsto A\varphi + F(p, \varphi)$ soient croissantes sur $[\lambda; \Lambda]$ de même que les fonctions $\varphi \mapsto A\varphi + f(p, \varphi)$ pour tout $p \in \partial_0 M$ et telle que le Lemme 2.3

soit vérifié pour $\delta = 0$. On peut alors définir une suite $(\varphi_i)_i$ de fonctions telles que $\varphi_0 = \varphi_+$ et telles que φ_{i+1} soit l'unique solution dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}_0(M)$ de :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + A\varphi = A\varphi_i + F(p,\varphi_i) & \text{sur } M, \\ \partial_\nu\varphi + A\varphi = A\varphi_i + f(p,\varphi_i) & \text{sur } \partial_0 M. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de φ_{i+1} sont garanties par le Lemme 2.3. La suite des fonctions φ_i est décroissante et minorée par φ_-. En effet, montrons par exemple qu'on a $\varphi_1 \leqslant \varphi_0 = \varphi_+$. Ceci revient au même que montrer que la fonction $\varphi_1 - \varphi_0$ est partout négative. Supposons par l'absurde qu'il existe un point $p \in M$ tel que $\varphi_1(p) - \varphi_0(p) > 0$. On a trois cas :

- Soit le supremum de $\varphi_1 - \varphi_0$ est atteint en un point $p \in \partial_0 M$. Dans ce cas $\partial_\nu(\varphi_1 - \varphi_0) \geqslant 0$. Mais $\partial_\nu\varphi_1 + A\varphi_1 = f(p,\varphi_0) + A\varphi_0 \leqslant \partial_\nu\varphi_0 + A\varphi_0$. Ce qui impose $A(\varphi_0 - \varphi_1) \geqslant 0$: absurde.
- Soit le supremum de $\varphi_1 - \varphi_0$ est atteint en un point intérieur à M et il existe $0 < \epsilon < \sup_M(\varphi_1 - \varphi_0)$ et un compact $K \subset \mathring{M}$ tels que sur $M \setminus K$, $\varphi_1 - \varphi_0 \leqslant \sup_M(\varphi_1 - \varphi_0) - \epsilon$. Dans ce cas :

$$\int_M (-\Delta\psi + A\psi)(\varphi_1 - \varphi_0) \leqslant 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{C}^{2,0}_c.$$

Comme φ_0 et φ_1 sont localement lipschitziennes et $\psi = 0$ au voisinage de ∂M, on a :

$$\int_M \big(\langle\nabla\psi, \nabla(\varphi_1 - \varphi_0)\rangle + A\psi(\varphi_1 - \varphi_0)\big) \leqslant 0.$$

Par densité, ce résultat reste vrai pour toute fonction ψ lipschitzienne à support compact. En particulier pour $\psi_\epsilon = \max\{\varphi_1 - \varphi_0 - \frac{\epsilon}{2}, 0\}$:

$$\int_{\{\varphi_1 \geqslant \varphi_0 - \frac{\epsilon}{2}\}} \left(\left|\nabla\left(\varphi_1 - \varphi_0 - \frac{\epsilon}{2}\right)\right|^2 + A\left(\varphi_1 - \varphi_0 - \frac{\epsilon}{2}\right)^2\right) = \int_M \big(|\nabla\psi_\epsilon|^2 + A\psi_\epsilon^2\big) \leqslant 0$$

absurde car $\psi_\epsilon \neq 0$.
- Sinon, le supremum est atteint à l'infini, posons $F = \sup_M(\varphi_1 - \varphi_0) - (\varphi_1 - \varphi_0)$. Il existe une suite de points $p_i \in M$ telle que $F(p_i) \to 0$. Par hypothèse, cette suite sort de tout compact de M. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $p_i \to \hat{p} \in \partial_\infty M$. On choisit alors une carte $(\rho, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ au voisinage de $\hat{p}$. Posons ensuite $r_i = \frac{\rho(p_i)}{2}$ et

$$g_i(p) = 1 - \frac{(\rho(p) - \rho(p_i))^2 + \sum_j (\theta^j(p) - \theta^j(p_i))^2}{r_i^2}.$$

On a $\max_{\{g_i \geqslant 0\}} |\partial_\alpha g_i| \leqslant \frac{2}{r_i}$, $\max_{\{g_i \geqslant 0\}} |\partial_\alpha\partial_\beta g_i| \leqslant \frac{2}{r_i^2}$ donc $\sup_{\{g_i \geqslant 0\}} |dg_i|_g \leqslant C$, $\sup_{\{g_i \geqslant 0\}} |\Delta g_i|_g \leqslant C$ où C est une constante indépendante de i. Soit q_i un point où $\frac{F}{g_i}$ atteint son minimum dans $\{g_i \geqslant 0\}$. $F(q_i) \leqslant \frac{g_i(q_i)}{g_i(p_i)} F(p_i) \leqslant F(p_i)$ donc $F(q_i) \to 0$. On définit ensuite $h_i = \max\{0, \epsilon_i - \frac{F}{g_i}\}$ où $\min_{\{g_i \geqslant 0\}} \frac{F}{g_i} < \epsilon_i < 2\min_{\{g_i \geqslant 0\}} \frac{F}{g_i}$. On a alors :

$$\begin{aligned} A\sup(\varphi_1 - \varphi_0) \int_M h_i &\leqslant \int_M \big(\langle\nabla h_i, \nabla F\rangle + AFh_i\big) \\ &\leqslant \int_M \left(\left\langle\nabla h_i, \nabla\frac{F}{g_i}\right\rangle g_i + \langle\nabla h_i, \nabla g_i\rangle\frac{F}{g_i} + AFh_i\right) \\ &\leqslant \int_M \big(-|\nabla h_i|_g^2 g_i - \langle\nabla h_i^2, \nabla g_i\rangle + \epsilon_i\langle\nabla h_i, \nabla g_i\rangle\big) \\ &\leqslant \int_M \big(-|\nabla h_i|_g^2 g_i + \langle h_i^2, \Delta g_i\rangle - \epsilon_i\langle h_i, \Delta g_i\rangle\big). \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que, pour une certaine constante $C > 0$,

$$0 < \int_M h_i \leqslant C\epsilon_i \int_M h_i$$

absurde car $\epsilon_i \to 0$.

On a donc montré que $\varphi_1 \leqslant \varphi_0$ partout. On a donc $A\varphi_1 + F(p,\varphi_1) \leqslant A\varphi_0 + F(p,\varphi_0)$ et $A\varphi_1 + f(p,\varphi_1) \leqslant A\varphi_0 + f(p,\varphi_0)$. Par récurrence, on voit que la suite φ_i est décroissante et une preuve analogue à la précédente montre que $\varphi_i \geqslant \varphi_-$. Montrons maintenant que la suite φ_i est bornée dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}_0$. Pour cela, constatons qu'on a l'inégalité suivante dont la preuve est directe :

$$\left\| f(p,\varphi_i)\right\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M\times[\lambda;\Lambda])}\left(1+\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)}\right)^2,$$

on en déduit alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0((M)} &\leqslant C\left(\|-\Delta\varphi_{i+1} + A\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0(M)} + \|\partial_\nu\varphi_{i+1} + A\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)} + \|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0(M)}\right)\\
&\leqslant C\left(\left\|F(p,\varphi_i) + A\varphi_i\right\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0(M)} + \left\|f(p,\varphi_i) + A\varphi_i\right\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)} + \|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0(M)}\right)\\
&\leqslant C'\left(\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0(M)} + \left(\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)} + 1\right)^2 + \|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0(M)}\right),
\end{aligned}$$

où pour obtenir la seconde ligne, on a utilisé le fait que F est uniformément lipschitzienne en φ pour $\lambda \leqslant \varphi \leqslant \Lambda$. Nous ne pouvons pas utiliser directement l'inégalité d'interpolation pour majorer $\|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0(M)}$ à cause du terme quadratique dans l'inégalité précédente. Il nous faut majorer $\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)}$. Montrons tout d'abord comment cette majoration permet de conclure. Reprenant l'inégalité précedente, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0} &\leqslant C''\left(\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0} + 1\right)\\
&\leqslant C^{(3)}_\mu\left(\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0} + 1\right) + \mu\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0} \quad \text{[14, Lemme 6.35]}\\
&\leqslant C^{(3)}_\mu\left(\|\varphi_+\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0} + 1\right) + \mu\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0}.
\end{aligned}$$

Choisissant $\mu \in (0;1)$, on obtient alors par récurrence que $\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0}$ est borné indépendamment de i :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0} &\leqslant \frac{C^{(3)}_\mu(\|\varphi_+\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0} + 1)}{1-\mu}\left(1-\mu^i\right) + \mu^i\|\varphi_+\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0}\\
&\leqslant \frac{C^{(3)}_\mu(\|\varphi_+\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0} + 1)}{1-\mu} + \|\varphi_+\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0}.
\end{aligned}$$

En utilisant les théorèmes d'Ascoli et de Dini, $\varphi_\infty = \inf_i \varphi_i$ est une fonction $\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ sur M et φ_i converge en norme $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ sur tout compact de M. On a alors que $\partial_\nu\varphi_\infty = f(p,\varphi_\infty)$ et $-\Delta\varphi_\infty = F(p,\varphi_\infty)$. On en déduit que $\varphi_\infty \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_0$. En utilisant le Lemme 2.3, on obtient alors[1] $\varphi_\infty \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_0$.

Montrons finalement comment majorer $\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)}$. Pour cela, choisissons Ω, Ω' des ouverts réguliers, relativement compacts de M tels que $\partial_0 M \subset \overline{\Omega}$ et $\Omega \Subset \Omega'$. L'estimation a priori pour les espaces de Sobolev sur Ω s'écrit :

$$\|\varphi_{i+1}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\left(\|-\Delta\varphi_{i+1} + A\varphi_{i+1}\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial_\nu\varphi_{i+1} + A\varphi_{i+1}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M)} + \|\varphi_{i+1}\|_{L^p(\Omega')}\right).$$

Pour $p = \frac{n}{1-\alpha}$, on a l'injection de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, et :

[1] C'est ici qu'intervient l'hypothèse $\varphi \geqslant \epsilon > 0$. En effet $\varphi \mapsto \varphi^{\beta_i}$ n'est pas borné en norme $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ si $\beta_i < k + \alpha$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leqslant C'\big(\big\|F(p,\varphi_i)+A\varphi_i\big\|_{L^p(\Omega)}+\big\|f(p,\varphi_i)+A\varphi_i\big\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M)}+\|\varphi_{i+1}\|_{L^p(\Omega')}\big)\\
&\leqslant C''\Big(\sup_{p\in\Omega}\big|F\big(p,\varphi_i(p)\big)+A\varphi_i(p)\big|+\big\|f(p,\varphi_i)+A\varphi_i\big\|_{C^{1,0}(\partial_0 M)}+\sup_{p\in\Omega'}\big|\varphi_{i+1}(p)\big|\Big)\\
&\leqslant C''\Big(\sup_{p\in\Omega}\big|F\big(p,\varphi_+(p)\big)+A\varphi_+(p)\big|+\sup_{p\in\Omega'}\big|\varphi_+(p)\big|\\
&\quad+\|f\|_{\mathcal{C}^{1,0}(\partial_0 M\times[m,M])}\big(1+\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,0}(\partial_0 M)}\big)\Big)\\
&\leqslant C^{(3)}\big(1+\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,0}(\overline{\Omega})}\big).
\end{aligned}$$

En appliquant, comme précédemment, l'inégalité d'interpolation [14, Lemme 6.35], on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{i+1}\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leqslant \mu\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}+C_\mu^{(3)}\big(1+\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{0,0}(\overline{\Omega})}\big)\\
&\leqslant \mu\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}+C_\mu^{(3)}\big(1+\|\varphi_+\|_{\mathcal{C}^{0,0}(\overline{\Omega})}\big).
\end{aligned}$$

Un raisonnement identique au précédent permet de conclure que les $\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$, donc en particulier les $\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial_0 M)}$ sont bornés. □

3. Résolution de l'équation de prescription de la courbure scalaire

Nous regardons ici le problème de l'existence et de l'unicité de solutions à l'équation :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi+\mathrm{Scal}\,\varphi=\widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi^{\kappa+1} \tag{3.1}$$

sur une variété M asymptotiquement hyperbolique. Scal désigne ici la courbure scalaire de la métrique g et $\widehat{\mathrm{Scal}}$, la courbure scalaire de $\hat{g}=\varphi^\kappa g$ avec $\kappa=\frac{4}{n-2}$, est une fonction donnée.

3.1. *Problème de Dirichlet le long de $\partial_0 M$*

3.1.1. *Existence et unicité de la solution*

On regarde ici le cas où on prescrit $\varphi=\varphi_0$ le long de $\partial_0 M$ ($\varphi_0>0$). On va montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 *(Solutions de l'équation de prescription de la courbure scalaire avec condition au bord de Dirichlet). Soient deux fonctions* Scal, $\widehat{\mathrm{Scal}}\in\mathcal{C}_0^{k-2,\alpha}(M)$ $(k+\alpha\leqslant l+\beta)$ *avec* $\widehat{\mathrm{Scal}}<0$ *et telles que* Scal, $\widehat{\mathrm{Scal}}\to_{\partial_\infty M}-n(n-1)$ *et* $\varphi_0>0$ *une fonction* $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ *sur* $\partial_0 M$ *alors il existe une solution unique* $\varphi\in\mathcal{C}_0^{k,\alpha}$ *telle que* $\varphi>0$ *et* $\varphi\to_{\partial_\infty M}1$*, au problème de Dirichlet* :

$$\begin{cases}-\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi+\mathrm{Scal}\,\varphi=\widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi^{\kappa+1},\\ \varphi=\varphi_0\quad\textit{sur }\partial_0 M.\end{cases} \tag{3.2}$$

Ce théorème utilise le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Soit* $f:M\to\mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^2$ *bornée. Il existe une suite* $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $p_i\in M$ *telle que*

1. $f(p_i)\to\limsup_{\partial_\infty M} f$;
2. $|\nabla f(p_i)|_g\to 0$;
3. $\limsup_{i\to\infty}\Delta f(p_i)\leqslant 0$.

Démonstration. On choisit une suite de points $q_i\in M_{\frac{1}{i}}$ tels que $\sup_{M_{\frac{1}{i}}} f-f(q_i)\leqslant\frac{1}{i}$. On a donc $f(q_i)\to\limsup_{\partial_\infty M} f$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que q_i converge vers un point $\hat{q}\in\partial_\infty M$.

On pose ensuite $F_i = \sup_{M_{\frac{1}{i}}}(f) + \frac{1}{i} - f$, ainsi $F_i \geqslant \frac{1}{i}$ sur $M_{\frac{1}{i}}$. Comme précédemment, on introduit une carte $(\rho, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ au voisinage de $\hat{q}$, on pose ensuite $r_i = \frac{\rho(q_i)}{2}$, et

$$g_i(p) = 1 - \frac{(\rho(p) - \rho(q_i))^2 + \sum_j (\theta^j(p) - \theta^j(q_i))^2}{r_i^2}.$$

On a $\max_{\{g_i \geqslant 0\}} |\partial_\alpha g_i| \leqslant \frac{2}{r_i}$, $\max_{\{g_i \geqslant 0\}} |\partial_\alpha \partial_\beta g_i| \leqslant \frac{2}{r_i^2}$ donc $\sup_{\{g_i \geqslant 0\}} |dg_i|_g \leqslant C$, $\sup_{\{g_i \geqslant 0\}} |\Delta g_i|_g \leqslant C$ où C est une constante indépendante de i. On choisit ensuite un point $p_i \in \{g_i > 0\}$ tel que $\frac{F_i}{g_i}(p_i)$ soit minimal. Remarquons que $\frac{F_i}{g_i} \to_{g_i \to 0^+} \infty$ donc le minimum est atteint. En un tel point $0 \leqslant \frac{F_i}{g_i}(p_i) \leqslant F_i(q_i) \leqslant \frac{2}{i}$ par conséquent on a encore $f(p_i) \to \limsup_{\partial_\infty M} f$. On a ensuite :

$$0 = \nabla \log\left(\frac{F_i}{g_i}\right)(p_i) = \frac{\nabla F_i}{F_i}(p_i) - \frac{\nabla g_i}{g_i}(p_i).$$

Donc $|\nabla f|_g(p_i) = |\nabla F_i|_g(p_i) = |\frac{F_i}{g_i}|(p_i)|\nabla g_i|_g(p_i) \leqslant \frac{2C}{i} \to 0$. Ensuite, $0 \leqslant \Delta \log(\frac{F_i}{g_i})(p_i) = \frac{\Delta F_i}{F_i}(p_i) - \frac{\Delta g_i}{g_i}(p_i)$. On en déduit que $-\Delta f(p_i) = \Delta F_i \geqslant \frac{F_i \Delta g_i}{g_i}(p_i) \to 0$. Ce qui montre que $\limsup_{i \to \infty} \Delta f(p_i) \leqslant 0$. $\square$

Démonstration du Théorème 3.1. La démonstration de ce théorème repose sur la méthode de monotonie (Proposition 2.1). L'hypothèse $\widehat{\mathrm{Scal}} < 0$ implique que $\varphi_+ = \Lambda$ avec Λ grand est une sur-solution. On peut supposer de plus que $\Lambda \geqslant \varphi_0$. De même $\varphi_- = 0$ est une sous-solution naturelle. Cependant, c'est également une solution et il faut s'assurer que la méthode de monotonie ne converge pas vers cette solution. Nous allons donc modifier φ_- au voisinage de $\partial_\infty M$ pour obtenir une solution φ telle que $\varphi \to_{\partial_\infty M} 1$. Pour cela, on introduit :

$$\varphi_\sigma = \max\{\sigma - \rho, 0\}. \tag{3.3}$$

Sur M_σ, si σ est assez petit, on a :

$$\begin{aligned}
-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_\sigma + \mathrm{Scal}\,\varphi_\sigma &= -\frac{4(n-1)}{n-2}\rho^2\left(-\overline{\Delta}\rho + (n-2)\frac{|\overline{\nabla}\rho|^2_{\overline{g}}}{\rho}\right) + \mathrm{Scal}(\sigma - \rho) \\
&= \underbrace{-\frac{4(n-1)}{n-2}\left(-\rho^2\overline{\Delta}\rho + (n-2)\rho|\overline{\nabla}\rho|^2_{\overline{g}}\right)}_{\leqslant 0 \text{ si } \sigma \text{ assez petit}} + \mathrm{Scal}(\sigma - \rho) \\
&\leqslant \mathrm{Scal}(\sigma - \rho) \\
&\leqslant \widehat{\mathrm{Scal}}(\sigma - \rho)^{\kappa+1}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que Scal, $\widehat{\mathrm{Scal}} \to_{\partial_\infty M} -n(n-1)$ donc $\min_{M_\sigma} \frac{\mathrm{Scal}}{\widehat{\mathrm{Scal}}} \to_{\sigma \to 0} 1$. On peut donc choisir $\sigma > 0$ assez petit tel que $(\sigma - \rho)^\kappa \leqslant \sigma^\kappa \leqslant \min_{M_\sigma} \frac{\mathrm{Scal}}{\widehat{\mathrm{Scal}}}$. Ce qui montre que φ_σ est une sous-solution sur M_σ pour $\sigma > 0$ assez petit. Fixons un tel $\sigma > 0$. Quitte à diminuer σ, on peut supposer de plus que $d\rho$ est partout non nul sur $M_{2\sigma}$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^2_c(M)$ une fonction test, on a :

$$\begin{aligned}
\int_M (-\Delta\psi)\varphi_\sigma &= \int_M \langle \nabla\psi, \nabla\varphi_\sigma \rangle_g \quad (\varphi_\sigma \text{ est lipschitzienne}) \\
&= \int_{M_\sigma} \langle \nabla\psi, \nabla\varphi_\sigma \rangle_g + \int_{M \setminus M_\sigma} \langle \nabla\psi, \nabla\varphi_\sigma \rangle_g \\
&= \lim_{\sigma_1 \to 0^+} \left(\int_{M_{\sigma-\sigma_1}} (-\Delta\varphi_\sigma)\psi + \int_{\{\rho = \sigma - \sigma_1\}} \psi \nabla_{N_{\sigma-\sigma_1}} \varphi_\sigma \right. \\
&\quad \left. + \int_{M \setminus M_{\sigma+\sigma_1}} (-\Delta\varphi_\sigma)\psi - \int_{\{\rho = \sigma + \sigma_1\}} \psi \nabla_{N_{\sigma+\sigma_1}} \varphi_\sigma \right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant -\int_{M_\sigma} (\psi\, \Delta\varphi_\sigma) - \int_{M\setminus M_\sigma} (\psi\, \Delta\varphi_\sigma)$$
$$\leqslant \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M \bigl(-\operatorname{Scal}\varphi_\sigma + \widehat{\operatorname{Scal}}\varphi_\sigma^{\kappa+1}\bigr)\psi,$$

où on a noté, pour $\sigma' \in (0; 2\sigma)$, $N_{\sigma'}$ la normale unitaire à l'hypersurface $\{\rho = \sigma'\}$ pointant dans la direction ρ croissant : $d\rho(N_{\sigma'}) > 0$. Ainsi φ_σ est une sous-solution au sens des distributions. Il existe donc une solution au problème de Dirichlet (3.2). Il faut maintenant vérifier que $\varphi \to 1$ sur $\partial_\infty M$. Or il existe une suite $p_i \in M$ telle que $\lim_{i\to\infty} \varphi(p_i) = \limsup_{\partial_\infty M} \varphi$, $\limsup_{i\to\infty} \Delta\varphi(p_i) \leqslant 0$. On en déduit, en regardant l'équation (3.1) en p_i et en passant à la limite :

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{Scal}\varphi(p_i) \leqslant \lim_{i\to\infty} \widehat{\operatorname{Scal}}\,\varphi(p_i)^{\kappa+1},$$

donc

$$-n(n-1)\limsup_{\partial_\infty M} \varphi \leqslant -n(n-1)\limsup_{\partial_\infty M} \varphi^{\kappa+1},$$

ainsi $0 \leqslant \limsup_{\partial_\infty M} \varphi \leqslant 1$. De la même façon, on peut trouver une suite $p'_i \in M$ telle que $\lim_{i\to\infty} \varphi(p'_i) = \liminf_{\partial_\infty M} \varphi$, $\liminf_{i\to\infty} \Delta\varphi(p'_i) \geqslant 0$. On trouve alors $\liminf_{\partial_\infty M} \varphi = 0$ ou $\liminf_{\partial_\infty M} \varphi \geqslant 1$. Cependant le premier cas est impossible car $\varphi \geqslant \varphi_\sigma$ et $\lim_{\partial_\infty M} \varphi_\sigma = \sigma > 0$. Ce qui montre $\varphi \to 1$ au niveau de $\partial_\infty M$. Par le principe du maximum de Hopf (voir par exemple [14, Théorème 3.5]), $\varphi > 0$. Ceci permet de montrer que $\varphi \geqslant \epsilon > 0$ pour ϵ assez petit, ce qui est l'estimation a priori nécessaire pour montrer la régularité de φ : $\varphi \in \mathcal{C}_0^{k,\alpha}$. Suivant [12], on peut maintenant poser $\varphi = e^\theta$. θ vérifie l'équation :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\bigl(\Delta\theta + |\nabla\theta|_g^2\bigr) + \operatorname{Scal} = \widehat{\operatorname{Scal}}\, e^{\kappa\theta}.$$

Supposons maintenant qu'on a deux solutions θ_1, θ_2 de cette équation telles que $\theta_1 = \theta_2 = 0$ sur $\partial_\infty M$, $\theta_1 = \theta_2$ sur $\partial_0 M$, on a alors en soustrayant :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\bigl(\Delta(\theta_1-\theta_2) + \langle \nabla(\theta_1+\theta_2), \nabla(\theta_1-\theta_2)\rangle_g\bigr) = \widehat{\operatorname{Scal}}\bigl(e^{\kappa\theta_1} - e^{\kappa\theta_2}\bigr).$$

Or :

$$e^{\kappa\theta_1} - e^{\kappa\theta_2} = \kappa\int_{\theta_2}^{\theta_1} e^{\kappa\theta}\, d\theta = (\theta_1-\theta_2)\kappa \underbrace{\int_0^1 e^{\kappa\theta_x}\, dx}_{\geqslant 0} \quad \text{en posant } \theta_x = (1-x)\theta_2 + x\theta_1.$$

On conclut alors par le principe du maximum classique que $\theta_2 = \theta_1$. La solution du problème de Dirichlet est donc unique. □

3.1.2. Comportement au voisinage de $\partial_\infty M$

Nous souhaitons maintenant étudier le comportement de la solution φ au voisinage de $\partial_\infty M$. On a le théorème suivant :

Théorème 3.3 *(Comportement à l'infini des solutions de l'équation de prescription de la courbure scalaire). Soient $\delta \in (0, n)$ et* $\operatorname{Scal}, \widehat{\operatorname{Scal}} \in \mathcal{C}_0^{k,\alpha}$ *tels que*

$$\begin{cases} \operatorname{Scal}, \widehat{\operatorname{Scal}} \to -n(n-1) & \text{au voisinage de } \partial_\infty M,\\ \operatorname{Scal} - \widehat{\operatorname{Scal}} \in \mathcal{C}_\delta^{k-2,\alpha} \end{cases}$$

alors la solution φ de (3.2) *est dans $1 + \mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Si σ est assez petit,*

- *Si $\Lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda > 1$, il existe une sur-solution $\varphi_+ \in 1 + \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$ de* (3.1) *sur M_σ avec $\varphi_+|_{S_\sigma} = \Lambda$.*
- *Si $0 \leqslant \lambda < 1$, si on a l'inégalité $\frac{4(\delta+1)(n-\delta)}{n-2} > nA_{\kappa+1}(1-\lambda)$ avec $A_p = \max\{p, \frac{p(p-1)}{2}\}$, il existe une sous-solution $\varphi_- \in 1 + \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$ avec $\varphi_-|_{S_\sigma} = \lambda$.*

Montrons tout d'abord comment ce lemme implique le théorème. Pour cela posons :

$$\begin{cases} \Lambda_\sigma = \sup\limits_{M_\sigma} \varphi, \\ \lambda_\sigma = \inf\limits_{M_\sigma} \varphi. \end{cases}$$

Comme $\varphi = 1$ sur $\partial_\infty M$, $\Lambda_\sigma, \lambda_\sigma \to 1$ quand $\sigma \to 0$. On peut donc supposer que λ_σ vérifie l'inégalité $\frac{4(\delta+1)(n-\delta)}{n-2} > nA_{\kappa+1}(1-\lambda_\sigma)$. Le lemme fournit alors des fonctions $\varphi_\pm$, définies sur $M_{\sigma'}$ avec $\sigma' \leqslant \sigma$, valant respectivement Λ_σ et λ_σ sur $M_{\sigma'}$ soient des sur- et sous-solutions. En utilisant, comme pour l'unicité de la solution (à la fin de la preuve du Théorème 3.1), les inéquations vérifiées par $\log\varphi$ et $\log\varphi_\pm$, on obtient $\varphi_- \leqslant \varphi \leqslant \varphi_+$ ce qui montre que $\varphi - 1 \in \mathcal{C}^{0,0}_\delta$. On réécrit alors l'équation (3.1) sous la forme :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta(\varphi-1) + \left(\mathrm{Scal} - \widehat{\mathrm{Scal}}(\kappa+1)\int_0^1 \big(x\varphi + (1-x)\big)^\kappa\, dx\right)(\varphi - 1) = \widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal}. \tag{3.4}$$

On a alors $(\mathrm{Scal} - \widehat{\mathrm{Scal}}(\kappa+1)\int_0^1 (x\varphi + (1-x))^\kappa\, dx) \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_0$. Finalement, par régularité elliptique (voir [17, Lemme 4.8]), on obtient $\varphi - 1 \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$.

Démonstration du Lemme 3.4. Nous allons naturellement chercher des fonctions de la forme :

$$\begin{cases} \varphi_+ = 1 + K\rho^\delta, \\ \varphi_- = 1 - k\rho^\delta. \end{cases}$$

Pour cela, calculons $\Delta\rho^\delta$:

$$\Delta\rho^\delta = \rho^2\left(\overline{\Delta}\rho^\delta - (n-2)\left\langle \frac{\overline{\nabla}\rho}{\rho}, \overline{\nabla}\rho^\delta \right\rangle_{\bar{g}}\right) = \delta(\delta - n + 1)\rho^\delta |\overline{\nabla}\rho|^2_{\bar{g}} + \delta\rho^{\delta+1}\overline{\Delta}\rho.$$

φ_+ est une sur-solution si :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_+ + \mathrm{Scal}\,\varphi_+ \geqslant \widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi_+^{\kappa+1},$$
$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_+ + \mathrm{Scal}\, u_+ \geqslant \widehat{\mathrm{Scal}}\,\underbrace{\big((1+u_+)^{\kappa+1} - 1\big)}_{\text{convexe en } u_+} + \widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal},$$

où on a posé $u_+ = \varphi_+ - 1 = K\rho^\delta$. Ce sera le cas si :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_+ + \mathrm{Scal}\, u_+ \geqslant (\kappa+1)\,\widehat{\mathrm{Scal}}\, u_+ + \widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal},$$
$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_+ + \big(\mathrm{Scal} - (\kappa+1)\,\widehat{\mathrm{Scal}}\big)u_+ \geqslant \widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal}.$$

Or :

$$\begin{aligned} &-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_+ + \big(\mathrm{Scal} - (\kappa+1)\,\widehat{\mathrm{Scal}}\big)u_+ \\ &\quad= \left[-\frac{4(n-1)}{n-2}\big(\delta(\delta-n+1)|\overline{\nabla}\rho|^2_{\bar{g}} + \delta\rho\overline{\Delta}\rho\big) + \big(\mathrm{Scal} - (\kappa+1)\,\widehat{\mathrm{Scal}}\big)\right]K\rho^\delta \end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{4(n-1)}{n-2}\delta(\delta - n + 1) + \kappa n(n-1) + o(1) \right] K\rho^\delta$$
$$= \left[\frac{4(n-1)}{n-2}(\delta + 1)(n - \delta) + o(1) \right] K\rho^\delta.$$

Si on choisit σ assez petit, on peut donc supposer que, sur M_σ :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_+ + \big(\mathrm{Scal} - (\kappa + 1)\,\widehat{\mathrm{Scal}}\big) u_+ \geqslant \frac{2(n-1)}{n-2}(\delta + 1)(n - \delta)K\rho^\delta.$$

Si K est assez grand, on a alors :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_+ + \big(\mathrm{Scal} - (\kappa + 1)\,\widehat{\mathrm{Scal}}\big) u_+ \geqslant \widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal}.$$

On veut ensuite que sur S_σ, $\varphi_+ = \Lambda$ ce qui conduit à choisir $K = \frac{\Lambda - 1}{\sigma^\delta}$ mais, quitte à diminuer σ ou à augmenter K, on peut supposer que c'est le cas.

Pour trouver une sous-solution, il va nous falloir majorer $(1 + u_-)^{\kappa+1} - 1$ pour $u_- \in [-1, 0]$ (où comme précédemment, on a posé $\varphi_- = 1 + u_-$ avec $u_- = -k\rho^\delta$). Admettons pour l'instant l'inégalité suivante :

$$(1 + u_-)^{\kappa+1} - 1 - (\kappa + 1)u_- \leqslant A_{\kappa+1} u_-^2. \tag{3.5}$$

On a :

$$\widehat{\mathrm{Scal}}\big[(1 + u_-)^{\kappa+1} - 1\big] \geqslant \widehat{\mathrm{Scal}}\big[(\kappa + 1)u_- + A_{\kappa+1}u_-^2\big].$$

u_- étant minimal en $\rho = \sigma$, $u_- \geqslant \lambda - 1$ et $u_-^2 \leqslant (\lambda - 1)u_-$:

$$\widehat{\mathrm{Scal}}\big[(1 + u_-)^{\kappa+1} - 1\big] \geqslant \widehat{\mathrm{Scal}}\big[(\kappa + 1)u_- - A_{\kappa+1}(1 - \lambda)u_-\big].$$

Comme précédemment, on aura une sous-solution si :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_- + \mathrm{Scal}\, u_- \leqslant \widehat{\mathrm{Scal}}\big[(\kappa + 1)u_- - A_{\kappa+1}(1 - \lambda)u_-\big] + \widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal}.$$

Or :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u_- + \mathrm{Scal}\, u_- - \widehat{\mathrm{Scal}}\big[(\kappa + 1)u_- - A_{\kappa+1}(1 - \lambda)u_-\big]$$
$$= -\left[\frac{4(n-1)}{n-2}(\delta + 1)(n - \delta) - n(n-1)A_{\kappa+1}(1 - \lambda) + o(1) \right] k\rho^\delta.$$

Si σ est assez petit, on peut supposer que

$$\widehat{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal} \geqslant -\epsilon k\rho^\delta$$

pour un certain $\epsilon > 0$. Donc si k est assez grand, φ_- est une sous-solution et, comme précédemment, on peut supposer que $\varphi_- = \sigma$ le long de S_σ.

Démontrons maintenant l'inégalité (3.5). Pour cela dinstingons deux cas :

1. Si $\kappa \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto (1 + x)^\kappa - 1$ est convexe donc elle est toujours au dessus de sa tangente en $x = 0$, $(1 + x)^\kappa - 1 \geqslant \kappa x$. En intégrant cette inégalité entre u_- et 0, on obtient (3.5).
2. Si $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$, $\forall x \in [-1; 0]$ la fonction $\kappa \mapsto (1 + x)^{\kappa+1} - 1 - (\kappa + 1)x - (\kappa + 1)x^2$ est convexe et négative pour $\kappa = 0$ et $\kappa = 1$. On en déduit donc l'inégalité (3.5) pour $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. □

3.2. Prescription de la courbure moyenne de $\partial_0 M$

Sous une transformation conforme, la courbure moyenne varie de la manière suivante[2] :

$$\frac{2}{n-1}\nabla_\nu \varphi - H\varphi = -\widehat{H}\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1}.$$

[2] La courbure extrinsèque est définie par rapport à la normale N pointant vers l'intérieur de M alors que ν est dirigé dans l'autre sens (convention E.D.P.) c'est ce qui explique les signes moins.

On constate que la fonction φ_- construite précédemment (équation (3.3)) reste une sous-solution pour ce problème au bord. On souhaite ensuite trouver une sur-solution. Pour cela, constatons qu'on peut toujours supposer qu'on a $H \leqslant 0$ sur $\partial_0 M$. En effet, il suffit d'effectuer une première transformation conforme non triviale uniquement dans un voisinage du bord $\partial_0 M$. La fonction $\varphi_+ = \Lambda$ constante est donc une sur-solution si Λ est assez grand. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.5 *(Solutions de l'équation de prescription de la courbure scalaire avec courbure moyenne du bord donnée). Sous les hypothèses du Théorème* 3.1*, si* $\widehat{H} \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M)$*,* $\widehat{H} \geqslant 0$*, il existe une unique solution* $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_0$ *telle que* $\varphi > 0$ *et* $\varphi \to_{\partial_\infty M} 1$ *au problème de la prescription de la courbure scalaire avec courbure moyenne au bord donnée* :

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi = \widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi^{\kappa+1}, \\ \dfrac{2}{n-1}\nabla_\nu\varphi - H\varphi = -\widehat{H}\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1} \quad \textit{le long de } \partial_0 M. \end{cases} \tag{3.6}$$

De plus si on a, pour un certain $\delta \in (0,n)$*,* $\mathrm{Scal} - \widehat{\mathrm{Scal}} \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta$*, alors* $\varphi \in 1 + \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle faite pour le problème de Dirichlet. Nous n'indiquons donc que les différences entre les deux preuves. Posons $\gamma = \min\{\alpha, \frac{\kappa}{2}\}$, la fonction $f(p,\varphi) = H(p)\varphi - \widehat{H}\varphi^{1+\frac{\kappa}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^{1,\gamma}$ sur $\partial_0 M \times \mathbb{R}^*_+$. La méthode de monotonie fournit alors une solution $\varphi \in \mathcal{C}^{1,\gamma}_0(M)$, $\varphi \to_{\partial_\infty M} 1$. On sait que $\varphi > 0$ sur $\mathring{M}$. Donc φ peut être nulle uniquement sur $\partial_0 M$. Cependant, en un tel point, on doit avoir $0 = H\varphi - \widehat{H}\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1} = \frac{2}{n-2}\nabla_N\varphi < 0$ absurde. Ce qui permet de conclure que $\varphi - 1 \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_0(M)$. On peut donc comme précédemment poser $\varphi = e^\theta$. Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (3.6) alors $\theta_1 - \theta_2$ satisfait à :

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\big(\Delta(\theta_1-\theta_2) + \langle\nabla(\theta_1+\theta_2), \nabla(\theta_1-\theta_2)\rangle_g\big) = (\theta_1-\theta_2)\kappa\displaystyle\int_0^1 e^{\kappa\theta_x}\,dx, \\ \dfrac{2}{n-2}\nabla_\nu(\theta_1-\theta_2) + \underbrace{\widehat{H}\dfrac{n-2}{2}\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{\kappa}{2}((1-x)\theta_1+x\theta_2)}\,dx}_{\geqslant 0}(\theta_1-\theta_2) = 0 \quad \text{le long de } \partial_0 M, \\ \theta_1 - \theta_2 = 0 \quad \text{le long de } \partial_\infty M. \end{cases}$$

On a donc $\theta_1 = \theta_2$ (la démonstration est analogue à celle du Lemme 2.3) et φ est unique. □

4. Construction de solutions des équations de contrainte avec des horizons apparents

4.1. La méthode Choquet–Bruhat–Lichnerowicz–York

L'objectif de ce paragraphe est, principalement, de fixer les notations. Nous renvoyons à [5] pour plus de détails. Les données initiales pour le problème de Cauchy en relativité générale sont une variété riemanienne (M,g), et un 2-tenseur symétrique K sur M qui s'interprète comme la seconde forme fondamentale du plongement de M dans $\mathcal{M}$, la solution des équations d'Einstein correspondant à ces données initiales. Par convention, on choisit ici

$$K(X,Y) = \langle\nabla_X T, Y\rangle,$$

où T est le vecteur unitaire futur, normal à M. K est relié, dans l'analyse hamiltonienne de la relativité générale, au moment π^{ij} conjugué à la métrique g_{ij} par :

$$\pi^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial g_{ij})} = \sqrt{g}\big(K^{ij} - g^{ij}K\big).$$

Voir par exemple [7]. Ce système est contraint et les données initiales doivent vérifier les équations suivantes[3] :

$$\mathrm{Scal}_g - 2\Lambda_c - |K|_g^2 + (\mathrm{tr}_g K)^2 = 0 \quad \text{(contrainte hamiltonienne)} \tag{4.1}$$

$$\mathrm{div}_g K - d(\mathrm{tr}_g K) = 0 \quad \text{(contraintes moment)} \tag{4.2}$$

où Λ_c est la constante cosmologique et $(\mathrm{div}_g K)_j = \nabla^i K_{ij}$. Décomposons K en deux parties : $K = \tau g + L$ où $\tau = \frac{1}{n}\mathrm{tr}_g K$ et L est un tenseur symétrique sans trace. L'équation (4.2) devient alors :

$$\mathrm{div}_g L - (n-1)\, d\tau = 0.$$

Si l'on suppose que τ est une constante, ce qui signifie qu'on impose à notre surface de Cauchy d'être à courbure moyenne constante, on obtient donc que $\mathrm{div}_g L = 0$. Cette condition est naturelle, voir par exemple [13]. L est donc un TT-tenseur. Il existe une bijection simple entre les TT-tenseurs de deux métriques conformément équivalentes :

Proposition 4.1. *Si L est un TT-tenseur pour g alors $\hat{L} = \varphi^{-2} L$ est un TT-tenseur pour $\hat{g} = \varphi^\kappa g$ où $\kappa = \frac{4}{n-2}$.*

Ceci suggère la construction suivante. On choisit τ une constante, g une métrique sur M et L un TT-tenseur pour g. On cherche ensuite une fonction $\varphi > 0$ telle que $\hat{g} = \varphi^\kappa g$, $\widehat{K} = \varphi^{-2} L + \tau \hat{g}$ soit une solution des équations de contraintes. L'équation (4.1) donne pour φ l'équation de Lichnerowicz :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi - |L|_g^2 \varphi^{-\kappa-3} + \big(n(n-1)\tau^2 - 2\Lambda_c\big)\varphi^{\kappa+1} = 0. \tag{4.3}$$

Nous allons nous intéresser au cas où la constante cosmologique Λ_c est négative ou nulle et $(n(n-1)\tau^2 - 2\Lambda_c) > 0$. Par un changement d'echelle, on voit qu'on peut supposer $n(n-1)\tau^2 - 2\Lambda_c = n(n-1)$. En particulier $|\tau| \leqslant 1$. Ce cas inclut, par exemple, les hypersurfaces asymptotiquement isotropes d'une variété asymptotiquement lorentzienne pour lesquelles $\Lambda_c = 0$ et $\tau = \pm 1$ ($\tau = +1$, resp. -1, pour les hypersurfaces de Cauchy pour le développement en temps futur, resp. passé) et le cas $\tau = 0$, $2\Lambda_c = -n(n-1)$, des hypersurfaces de Cauchy à courbure moyenne nulle dans un espace–temps asymptotiquement anti-de Sitter.

4.2. La condition au bord d'horizon apparent

Soit (M, g) une variété asymptotiquement hyperbolique avec un bord interne (éventuellement vide). On pose :

$$\partial_0 M = \bigcup_i \sigma_i,$$

où les σ_i représentent les composantes connexes de $\partial_0 M$. Pour chaque σ_i, on fixe $\epsilon_i = \pm 1$ qui correspond au choix d'une la condition d'horizon apparent futur ($\epsilon_i = -1$) ou passé ($\epsilon_i = +1$). Sous une transformation conforme, la trace de la seconde forme fondamentale H_i de σ_i devient :

$$\widehat{H_i} = \varphi^{-\frac{\kappa}{2}}\left(H_i + 2\frac{n-1}{n-2}\frac{\nabla_{N_i}\varphi}{\varphi}\right), \tag{4.4}$$

où N_i est la normale sortante de l'horizon, i.e. pointant vers l'intérieur de M. La condition d'horizon apparent pour σ_i s'écrit (voir par exemple [23, section 12.2]) :

$$\widehat{H_i} = \epsilon_i \widehat{\mathrm{tr}}_{\sigma_i} \widehat{K},$$

$$\varphi^{-\frac{\kappa}{2}}\left(H_i + 2\frac{n-1}{n-2}\frac{\nabla_{N_i}\varphi}{\varphi}\right) = \epsilon_i\big[(n-1)\tau + \varphi^{-2}\widehat{\mathrm{tr}}_{\sigma_i} L\big],$$

$$\frac{2(n-1)}{n-2}\nabla_{N_i}\varphi + H_i\varphi = \epsilon_i\big[(n-1)\tau\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1} - L(N_i, N_i)\varphi^{-1-\frac{\kappa}{2}}\big].$$

Si on pose $\nu_i = -N_i$, on a donc :

$$\frac{2(n-1)}{n-2}\nabla_{\nu_i}\varphi - H_i\varphi = \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}\varphi^{-1-\frac{\kappa}{2}} - (n-1)\tau\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1}\big]. \tag{4.5}$$

[3] Par la suite, nous ne considèrerons que les équations d'Einstein du vide.

5. Résolution de l'équation de Lichnerowicz

Comme pour l'étude de la prescription de la courbure scalaire, nous fixons une variété asymptotiquement hyperbolique (M, g) de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ avec $l+\beta \geqslant 2$, une constante $\tau \in [-1; 1]$, des constantes $\epsilon_i = \pm 1$ associées aux composantes connexes du bord intérieur et un TT-tenseur L sur M.

Nous allons montrer l'existence d'une solution à l'équation de Lichnerowicz (4.3) dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$ avec $2 \leqslant k+\alpha \leqslant l+\beta$, $0<\alpha<1$ et $\delta \in [0; n)$, satisfaisant au niveau du bord interne à la condition d'horizon apparent (4.5), sous les hypothèses :

1. $\mathrm{Scal} + n(n-1) \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta$, $\mathrm{Scal} + n(n-1) \to_{\partial_\infty M} 0$,
2. $L \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_{\frac{\delta}{2}}(M, T^{*2}M)$, $L \to_{\partial_\infty M} 0$,
3. L satisfait à $\epsilon_i L_{\nu_i\nu_i} \geqslant 0$ sur chacune des composantes connexes σ_i du bord interne.

Nous devrons de plus supposer que si $\epsilon_i \tau = -1$, le bord σ_i a un invariant de Yamabe $\mathcal{Y}(\sigma_i)$ strictement positif. Ceci n'impose de restriction que lorsque $\Lambda_c = 0$. Ce cas apparaît comme un cas critique pour ce problème et n'est pas soluble dans le cas général (voir contre-exemple, p. 220). Nous renvoyons au Théorème 5.3, p. 219, pour un énoncé plus précis du résultat. La construction est basée sur la méthode de monotonie (Proposition 2.1).

5.0.1. Construction d'une sous-solution

Afin de construire une sous-solution, commençons par constater qu'on a une sous-solution naturelle à l'intérieur de M (en oubliant les conditions au bord interne) donnée par la solution de l'équation de Yamabe :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_- + \mathrm{Scal}\,\varphi_- + n(n-1)\varphi_-^{\kappa+1} = 0.$$

Montrons le lemme suivant :

Lemme 5.1. *Soient (M, g) une variété asymptotiquement hyperbolique à bord de classe au moins $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $0<\alpha<1$, $\mathrm{Scal}, \widehat{\mathrm{Scal}} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_0$ deux fonctions telles que $\mathrm{Scal} = \widehat{\mathrm{Scal}} \to -n(n-1)$ au voisinage de $\partial_\infty M$ avec $\widehat{\mathrm{Scal}} < 0$. Si $\epsilon > 0$ est une constante, on note $\varphi_\epsilon \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_0$ la solution du problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi = \widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi^{\kappa+1}, \\ \varphi = \epsilon \quad \text{sur } \partial_0 M, \\ \varphi = 1 \quad \text{sur } \partial_\infty M. \end{cases}$$

Alors il existe $\eta > 0$ tel que si $\epsilon > 0$ est assez petit, on a au niveau du bord intérieur :

$$\partial_\nu \varphi_\epsilon \leqslant -\eta.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $\epsilon \leqslant \epsilon'$, $\varphi_\epsilon \leqslant \varphi_{\epsilon'}$. On a vu (Théorème 3.1) que $\varphi_\epsilon, \varphi_{\epsilon'} > 0$. On peut donc poser $\theta_\epsilon = \log\varphi_\epsilon$ (resp. $\theta_{\epsilon'} = \log\varphi_{\epsilon'}$). $\theta_\epsilon, \theta_{\epsilon'}$ vérifient alors l'équation :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\left(\Delta\theta_{\epsilon(')} + |\nabla\theta_{\epsilon(')}|^2_g\right) + \mathrm{Scal} - \widehat{\mathrm{Scal}}\,e^{\kappa\theta_{\epsilon(')}} = 0.$$

En soustrayant les deux équations, on obtient :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\left(\Delta(\theta_\epsilon - \theta_{\epsilon'}) + \left\langle\nabla(\theta_\epsilon + \theta_{\epsilon'}), \nabla(\theta_\epsilon - \theta_{\epsilon'})\right\rangle_g\right) - \widehat{\mathrm{Scal}}\,\kappa\int_0^1 e^{\kappa\theta_x}\,dx\,(\theta_\epsilon - \theta_{\epsilon'}) = 0,$$

où on a posé $\theta_x = (1-x)\theta_{\epsilon'} + x\theta_\epsilon$. Par le principe du maximum classique, on a alors $\theta_{\epsilon'} \geqslant \theta_\epsilon$.

Les fonctions φ_ϵ, $\epsilon \leqslant \epsilon_0$ sont équicontinues sur les compacts de M. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\epsilon\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0(M)} &\leqslant C\Big(\|-\Delta\varphi_\epsilon + A\varphi_\epsilon\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0(M)} + \sup_M|\varphi_\epsilon|\Big)\\
&\leqslant C\Big(\big\|(A-\mathrm{Scal})\varphi_\epsilon - n(n-1)\varphi_\epsilon^{\kappa+1}\big\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0(M)} + \sup_M|\varphi_\epsilon|\Big)\\
&\leqslant C'_{\epsilon_0}\Big(\|\varphi_\epsilon\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0(M)} + \sup_M|\varphi_\epsilon|\Big)\\
&\leqslant C''_{\epsilon_0}\Big(\sup_M|\varphi_\epsilon|+1\Big) \quad \text{(inégalité d'interpolation)}\\
&\leqslant C''_{\epsilon_0}\Big(\sup_M|\varphi_{\epsilon_0}|+1\Big).
\end{aligned}$$

Les fonctions φ_ϵ tendent donc uniformément sur tout compact vers une fonction φ_0 continue. On voit ensuite facilement que φ_0 est dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}_0$ avec $\varphi_0 \neq 0$, que $\varphi_\epsilon \to \varphi_0$ uniformément sur $\overline{M}$ (les fonctions φ_ϵ sont toujours plus grandes que la fonction φ_- définie en (3.3) ce qui permet de montrer que $\varphi_0 \to_{\partial_\infty M} 1$ et φ_ϵ converge simplement en décroissant vers φ_0) et que φ_0 est solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases}
-\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi = \widehat{\mathrm{Scal}}\,\varphi^{\kappa+1},\\
\varphi = 0 \quad \text{sur } \partial_0 M,\\
\varphi = 1 \quad \text{sur } \partial_\infty M.
\end{cases}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\epsilon - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0} &\leqslant C\Big(\big\|(-\Delta + A)(\varphi_\epsilon - \varphi_0)\big\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0} + \|\varphi_\epsilon - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0}\Big)\\
&\leqslant C'\|\varphi_\epsilon - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_0}\\
&\leqslant C''\|\varphi_\epsilon - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{0,0}_0} \quad \text{(inégalité d'interpolation).}
\end{aligned}$$

Posons $\eta = \frac{1}{2}\min_{\partial_0 M}|\partial_\nu\varphi_0|$. Le principe du maximum de Hopf décrit dans [14] permet de montrer $\eta > 0$. Si ϵ est assez petit, l'inégalité précédente montre que $\|\varphi_\epsilon - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0} \leqslant \frac{1}{2}\min_{\partial_0 M}|\partial_\nu\varphi_0|$, on a alors $\partial_\nu\varphi_\epsilon \leqslant \frac{1}{2}\partial_\nu\varphi_0 \leqslant -\eta$. □

Pour ϵ assez petit, on a donc sur $\partial_0 M$:

$$\begin{aligned}
\frac{2(n-1)}{n-2}\partial_\nu\varphi_\epsilon - H_i\varphi_\epsilon &\leqslant -\frac{2(n-1)}{n-2}\eta - H_i\epsilon \leqslant -\epsilon_i(n-1)\tau\epsilon^{\frac{\kappa}{2}+1}\\
&\leqslant \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}\epsilon^{-1-\frac{\kappa}{2}} - (n-1)\tau\epsilon^{\frac{\kappa}{2}+1}\big]\\
&\leqslant \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}\varphi_\epsilon^{-1-\frac{\kappa}{2}} - (n-1)\tau\varphi_\epsilon^{\frac{\kappa}{2}+1}\big].
\end{aligned}$$

Ainsi φ_ϵ est une sous-solution pour ϵ assez petit.

5.0.2. Construction d'une sur-solution

Dans toute la suite, on pose $\partial_\delta M = \{p \in M \mid d_g(p, \partial_0 M) < \delta\}$. On choisit δ_0 assez petit tel que l'application :

$$\begin{aligned}
r : \partial_{2\delta_0} M &\to \mathbb{R},\\
p &\mapsto d_g(p, \partial_0 M),
\end{aligned}$$

soit non singulière. Les hypersurfaces $r = \text{cste}$ sont alors des sous-variétés compactes de M naturellement difféomorphes à $\partial_0 M$. On note H_r la trace de la courbure extrinsèque de l'hypersurface $r = \text{cste}$. Rappelons que le laplacien se décompose en :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + H_r\frac{\partial f}{\partial r} + \Delta_r f, \tag{5.1}$$

où Δ_r désigne le laplacien associé à la métrique induite sur l'hypersurface $r = \text{cste}$.

Comme pour la prescription de la courbure scalaire, constatons que si Λ est une constante assez grande alors $\varphi_+ = \Lambda$ est une sur-solution de (4.3). Nous allons ensuite modifier φ_+ au voisinage de $\partial_0 M$ pour que φ_+ soit une sur-solution pour la condition au bord d'horizon apparent (4.5). Concentrons-nous tout d'abord sur le cas $\epsilon_i \tau > -1$. On remarque tout d'abord que, quitte à modifier la métrique par un facteur conforme non trivial au voisinage de $\partial_0 M$, on peut supposer que $H_r \geqslant 0$ et $\mathrm{Scal} > 0$ dans un voisinage de $\partial_0 M$ (il suffit de choisir une fonction $\varphi = \varphi(r) > 0$ telle que $\frac{2(n-1)}{(n-2)}\varphi'(0) + H\varphi(0) > 0$ et $\varphi''(0) < 0$ très grand négativement de sorte à avoir $\mathrm{Scal} > 0$ sur $\partial_0 M$, les fonctions Scal et H_r étant continues, elles restent positives dans un voisinage de $\partial_0 M$).

Soit f la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} f'' = \dfrac{n(n-2)}{4} f^{\kappa+1}, \\ f(0) = \Lambda, \\ f'(0) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

f est définie sur $[0, \delta_\Lambda)$ pour un certain $\delta_\Lambda > 0$. En multipliant par f' et en intégrant entre 0 et $x \in [0, \delta_\Lambda)$ l'équation différentielle, on obtient l'équation « conservation de l'énergie » :

$$f'(x)^2 = \frac{(n-2)^2}{4}\big(f(x)^{\kappa+2} - \Lambda^{\kappa+2}\big). \tag{5.3}$$

Cette équation du premier ordre s'intègre en :

$$\int_\Lambda^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^{\kappa+2} - \Lambda^{\kappa+2}}} = \frac{n-2}{2} x.$$

Finalement en posant $y = \Lambda z$:

$$\int_1^{\frac{f(x)}{\Lambda}} \frac{dz}{\sqrt{z^{\kappa+2} - 1}} = \frac{n-2}{2} x \Lambda^{\frac{\kappa}{2}}.$$

L'intégrale $I = \int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{z^{\kappa+2}-1}}$ est convergente donc $f(x)$ n'est défini que si $\frac{n-2}{2} x \Lambda^{\frac{\kappa}{2}} < I$, ce qui montre $\delta_\Lambda = \frac{2I}{n-2}\Lambda^{-\frac{\kappa}{2}}$.

Quitte à prendre une valeur plus grande pour Λ, on peut supposer que $\delta_\Lambda < \delta_0$ et Scal, $H_r > 0$ sur $\partial_{\delta_\Lambda} M$. Soit $\delta \in (0; \delta_\Lambda)$ à déterminer plus tard. Définissons :

$$\varphi_+ = \begin{cases} \Lambda & \text{sur } M \setminus \partial_\delta M, \\ f(\delta - r) & \text{sur } \partial_\delta M. \end{cases} \tag{5.4}$$

On a vu que φ_+ est une sur-solution sur $M \setminus \partial_\delta M$. Vérifions que φ_+ est une sur-solution sur $\partial_\delta M$. En utilisant la formule (5.1), on a :

$$\begin{aligned}
&-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_+ + \mathrm{Scal}\,\varphi_+ - |L|_g^2 \varphi_+^{-\kappa-3} + n(n-1)\varphi_+^{\kappa+1} \\
&\quad = -\frac{4(n-1)}{n-2}\big(\partial_r^2 f(\delta - r) + H_r \partial_r f(\delta - r)\big) + \mathrm{Scal}\, f(\delta - r) - |L|_g^2 f(\delta - r)^{-\kappa-3} + n(n-1) f(\delta - r)^{\kappa+1} \\
&\quad = -\frac{4(n-1)}{n-2}\big(f''(\delta - r) - H_r f'(\delta - r)\big) + \mathrm{Scal}\, f(\delta - r) - |L|_g^2 f(\delta - r)^{-\kappa-3} + n(n-1) f(\delta - r)^{\kappa+1} \\
&\quad \geqslant -\frac{4(n-1)}{n-2} f''(\delta - r) + \mathrm{Scal}\, f(\delta - r) - |L|_g^2 f(\delta - r)^{-\kappa-3} + n(n-1) f(\delta - r)^{\kappa+1} \\
&\quad \geqslant \mathrm{Scal}\, f(\delta - r) - |L|_g^2 f(\delta - r)^{-\kappa-3} \\
&\quad \geqslant \mathrm{Scal}\, \Lambda - |L|_g^2 \Lambda^{-\kappa-3},
\end{aligned}$$

où, pour obtenir la dernière ligne, on a utilisé $\mathrm{Scal} > 0$ et $f(x) \geqslant \Lambda$ pour $x \in [0; \delta_\Lambda)$. Donc, si Λ est assez grand, on a que φ_+ est une sur-solution sur $\partial_\delta M$. Maintenant φ_+ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles sont lipschitziennes.

Un calcul analogue à celui fait dans la preuve du Théorème 3.2 montre alors que φ_+ est une sur-solution au sens des distributions de (4.3). Il reste à voir que, pour les conditions au bord (4.5), φ_+ est une sur-solution (pour δ bien choisi) :

$$\frac{2(n-1)}{n-2}\partial_\nu\varphi_+ - H_i\varphi_+ \geqslant \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}\varphi_+^{-1-\frac{\kappa}{2}} - (n-1)\tau\varphi_+^{1+\frac{\kappa}{2}}\big],$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2(n-1)}{n-2}f'(\delta) - H_i f(\delta) \geqslant \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}f(\delta)^{-1-\frac{\kappa}{2}} - (n-1)\tau f(\delta)^{1+\frac{\kappa}{2}}\big].$$

Or, en utilisant l'équation (5.3), ceci revient à montrer :

$$(n-1)\sqrt{f(\delta)^{\kappa+2} - \Lambda^{\kappa+2}} - H_i f(\delta) \geqslant \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}f(\delta)^{-1-\frac{\kappa}{2}} - (n-1)\tau f(\delta)^{1+\frac{\kappa}{2}}\big].$$

Si on choisit δ proche de δ_Λ, on peut obtenir des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite pour $f(\delta)$:

$$\begin{aligned}&(n-1)\sqrt{f(\delta)^{\kappa+2} - \Lambda^{\kappa+2}} + (n-1)\epsilon_i\tau f(\delta)^{1+\frac{\kappa}{2}} - H_i f(\delta) - \epsilon_i L_{\nu_i\nu_i}f(\delta)^{-1-\frac{\kappa}{2}}\\ &\quad= (n-1)(1+\epsilon_i\tau)f(\delta)^{1+\frac{\kappa}{2}} + O\big(f(\delta)\big).\end{aligned}$$

Par hypothèse $1+\epsilon_i\tau > 0$ donc en choisissant δ assez proche de δ_Λ, on peut supposer que :

$$(n-1)\sqrt{f(\delta)^{\kappa+2} - \Lambda^{\kappa+2}} + (n-1)\epsilon_i\tau f(\delta)^{1+\frac{\kappa}{2}} - H_i f(\delta) - \epsilon_i L_{\nu_i\nu_i}f(\delta)^{-1-\frac{\kappa}{2}} \geqslant 0.$$

φ_+ est alors une sur-solution.

Traitons maintenant le cas d'un bord pour lequel $\epsilon_i\tau = -1$. Nous devrons de plus supposer que $\mathcal{Y}(\sigma_i) > 0$. Nous allons procéder exactement comme dans le cas $\epsilon_i\tau > -1$, c'est-à-dire en modifiant la sur-solution dans un voisinage du bord σ_i. Nous n'indiquerons donc que les différences. Remarquons tout d'abord qu'on a le lemme suivant :

Lemme 5.2. *Il existe une métrique g' conforme à g telle que $g' = g$ en dehors d'un voisinage relativement compact de σ_i, et telle que*

$$\mathrm{Scal}'_{\sigma_i}\ \textit{est une constante strictement positive}\quad \textit{et}\quad H'_i(r'=0) = 0, \qquad \partial_{r'}H'_i(r'=0) = 0,$$

où $\mathrm{Scal}'_{\sigma_i}$ *est la courbure scalaire de σ_i muni de la métrique induite par g', r' est la fonction distance à σ_i pour g' et H'_i est la courbure moyenne des hypersurfaces de niveau* $\{r' = \mathrm{cste}\}$.

Démonstration. La construction de g' se fait en trois étapes. Tout d'abord on construit un premier facteur conforme u_1 tel que $u_1 = 1$ sauf dans un voisinage de σ_i tel que la métrique $g_1 = u_1^\kappa$ restreinte à σ_i a une courbure scalaire constante strictement positive. Puis à l'aide d'un second facteur conforme u_2 valant 1 au niveau de σ_i, $u_2 = 1$ en dehors d'un voisinage de σ_i et dont la dérivé normale en σ_i est bien ajustée, on contruit une métrique $g_2 = u_2^\kappa g_1$ telle que la courbure moyenne de σ_i est nulle (voir formule (4.4)). Finalement, imposer $\partial_{r'}H'(r'=0) = 0$ est plus délicat car sous un changement conforme les hypersurfaces $\{r = \mathrm{cste} > 0\}$ changent, ce qui change la définition de ∂_r. L'astuce est de remarquer que si on note u_3 le facteur conforme à déterminer et qu'on pose $g' = u_3^{-2}g_2$, $r' = d_{g'}(\sigma_i, .), \dots$ on a, en notant S la seconde forme fondamentale du bord σ_i (les quantités r', $H', \dots$ sont associées à la métrique g' alors que $N_2, \mathrm{Ric}_2, \dots$ sont associées à la métrique g_2) :

$$\begin{aligned}\partial_{r'}H' + \left|S'\right|^2_{g'} &= -\mathrm{Ric}'\big(N', N'\big) \quad \text{(équation de Mainardi, voir par exemple [21])}\\ &= -u_3^2\,\mathrm{Ric}'(N_2, N_2)\\ &= -u_3^2\left[\mathrm{Ric}_{g_2}(N_2, N_2) + (n-2)\frac{\mathrm{Hess}_{N_2,N_2}\ u_3}{u_3} - \left((n-1)\left|\frac{du_3}{u_3}\right|^2_{g_2} - \frac{\Delta u_3}{u_3}\right)\right]\end{aligned}$$

(transformation conforme du tenseur de Ricci, voir par exemple [6]).

Choisissant u_3 tel que $u_3(r_2=0) = 1$, $\partial_{r_2}u_3(r_2=0) = 0$, on a, en $r=0$:

$$\partial_{r'}H' + |S|^2_g = -\mathrm{Ric}_2(N_2, N_2) - (n-1)\partial^2_{r_2}u_3,$$

ce qui permet de déterminer $\partial^2_{r_2} u_3$ de manière à avoir $\partial_{r'} H' = 0$ et, comme pour les étapes précédentes, on peut choisir u_3 non trivial uniquement dans un voisinage de σ_i. $\square$

Nous allons donc supposer par la suite que g est telle que $\mathrm{Scal}_{\sigma_i} = \mathrm{cste} > 0$, $H_i(r=0) = 0$, et $\partial_r H_i(r=0) = 0$. Réécrivons ensuite l'équation (4.3) sous la forme :

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\big(\partial_r^2 \varphi + H\partial_r\varphi + \Delta_r\varphi\big) + \big(\mathrm{Scal}_r + |S|^2 - 2\partial_r H - H^2\big)\varphi + n(n-1)\varphi^{\kappa+1} = |L|^2_g \varphi^{-\kappa-3}, \tag{5.5}$$

où Scal_r désigne le scalaire de courbure de (la composante connexe associée à σ_i de) l'hypersurface $r = \mathrm{cste}$, S sa seconde forme fondamentale et H sa courbure moyenne. Comme précédemment, soit h la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} h'' = \dfrac{n(n-2)}{4} h^{\kappa+1} + Ah, \\ h(0) = \Lambda, \\ h'(0) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

où $A > 0$ est une constante à préciser. L'équation de conservation de l'énergie devient alors :

$$h'(x)^2 = \frac{(n-2)^2}{4}\big(h(x)^{\kappa+2} - \Lambda^{\kappa+2}\big) + A\big(h(x)^2 - \Lambda^2\big). \tag{5.7}$$

On voit clairement que $h \geqslant f$ donc h_Λ diverge vers $+\infty$ en un temps fini μ_Λ avec $0 < \mu_\Lambda < \delta_\Lambda$. Choisissant A tel que $0 < A < \frac{n-2}{4(n-1)} \mathrm{Scal}_{\sigma_i}$, il est alors aisé de modifier l'argument précédent pour en déduire qu'en posant $\varphi_+ = h(\delta - r)$ dans un voisinage $\{r \leqslant \delta\}$ de σ_i pour δ assez petit et quitte à choisir Λ assez grand, on obtient une sur-solution. Seule pose problème l'estimation du terme $H\partial_r\varphi$. Or, en utilisant l'équation (5.7), on voit qu'il existe une constante $B > 0$ indépendante de $\Lambda > 1$ telle que $h'(r)^2 \leqslant Bh^{\kappa+2}(r)$ pour tout $0 \leqslant r < \mu_\Lambda$. On en déduit que

$$h(r) \leqslant \left(\frac{2B}{\kappa}(\mu_\Lambda - r)\right)^{-\frac{2}{\kappa}}.$$

En décomposant le $h^{\kappa+2}$ qui apparaît dans l'équation (5.7) en $h^\kappa h^2$, on obtient :

$$h^{\kappa+2}(r) \leqslant \left(\frac{2B}{\kappa}(\mu_\Lambda - r)\right)^{-2} h^2(r),$$

ce qui prouve qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de B telle que

$$h'(r) \leqslant \frac{C}{\mu_\Lambda - r} h(r).$$

Combiné au fait que $H(0) = \partial_r H(0) = 0$, donc que $H(r) = o(r)$, ceci permet de prouver que le terme $H\partial_r\varphi$ est dominé par le terme linéaire $(\mathrm{Scal}_r + |S|^2 - 2\partial_r H - H^2 - \frac{4(n-1)}{n-2}A)\varphi$ pour δ assez petit.

En utilisant la méthode de monotonie (section 2.3), on a alors le théorème suivant :

Théorème 5.3 *(Construction de solutions de l'équation de Lichnerowicz contenant des horizons apparents). Soient M une variété asymptotiquement hyperbolique de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ avec $l + \beta \geqslant 2$ et $\tau \in [-1; 1]$. Fixons, pour chaque composante connexe σ_i de $\partial_0 M$, un réel $\epsilon_i = \pm 1$ ($\epsilon_i = -1$ pour un horizon apparent futur et $\epsilon_i = +1$ pour un horizon apparent passé). Supposons de plus, lorsque $\tau = \pm 1$, que, pour tout i tel que $\epsilon_i = -\tau$, l'invariant de Yamabe $\mathcal{Y}(\sigma_i) > 0$. Soit $L \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}_0(M, T^{*2}M)$ un 2-tenseur symétrique de trace nulle tel que $|L|^2_g \to 0$ au voisinage de $\partial_\infty M$ et tel que $\epsilon_i L_{\nu_i\nu_i} \geqslant 0$ sur $\partial_0 M$. Il existe une solution $\varphi > 0$ au problème :*

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi + n(n-1)\varphi^{\kappa+1} - |L|^2_g\varphi^{-\kappa-3} = 0 \quad \text{sur } \mathring{M}, \\ \dfrac{2(n-1)}{n-2}\nabla_{\nu_i}\varphi - H_i\varphi = \epsilon_i\big[L_{\nu_i\nu_i}\varphi^{-1-\frac{\alpha}{2}} - (n-1)\tau\varphi^{\frac{\alpha}{2}+1}\big] \quad \text{sur } \sigma_i \text{ pour tout } i, \end{cases} \tag{5.8}$$

où Scal est le scalaire de courbure de (M, g) et ν_i la normale à σ_i sortante (i.e. dirigée vers l'intérieur de l'horizon apparent) avec $\varphi \to 1$ au voisinage de $\partial_\infty M$. De plus si $\mathrm{Scal} + n(n-1) \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta$ et $|L|^2 \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta$ avec $\delta \in [0; n)$, alors $\varphi - 1 \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$.

Un contre-exemple dans le cas $\epsilon_i\tau = -1$. Comme nous l'avons vu, dans le cas limite $\epsilon_i\tau = -1$, la situation est plus complexe. Nous allons montrer que l'existence d'une solution n'est plus garantie. Rappelons que ce cas-ci n'apparaît que lorsque la constante cosmologique Λ_c est nulle. Les difficultés apparaissent dans la construction de la sur-solution. Nous allons donc nous concentrer sur le cas $L = 0$. Le problème que nous souhaitons résoudre est alors le suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + \mathrm{Scal}\,\varphi + n(n-1)\varphi^{\kappa+1} = 0 & \text{sur } \mathring{M}, \\ \dfrac{2(n-1)}{n-2}\partial_\nu\varphi - H\varphi = (n-1)\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1} & \text{sur } \partial_0 M. \end{cases} \tag{5.9}$$

Nous allons considérer le cas d'un horizon à bord torique : $M = \mathbb{T}^{n-1} \times (0; A]$ $(A > 0)$ muni de la métrique $g = \frac{1}{y^2}(dy^2 + g_0)$ où y désigne la composante selon $(0; A]$ et g_0 est une métrique sur $\mathbb{T}^{n-1}$ invariante sous les translations. Remarquons que cet espace est la partie du demi-espace de Poincaré « en dessous » de $y = A$ compactifiée par l'action d'un réseau de $\mathbb{R}^{n-1}$. Le groupe d'isométrie contient $\mathbb{T}^{n-1}$. Les fonctions invariantes sous ce groupe de symétrie ne dépendent alors que d'une seule coordonnée radiale et l'étude des solutions de (5.9) invariantes sous l'action se ramène à l'étude des solutions d'une équation différentielle. Montrons donc le lemme suivant :

Lemme 5.4. *Supposons qu'il existe une solution $\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_0$, $\varphi > 0$ au problème* (5.9) *telle que $\varphi \to_{\partial_\infty M} 1$, alors il existe une solution $\tilde\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_\delta$ $(\delta \in [0; n))$ à* (5.9) *invariante sous l'action de $\mathbb{T}^{n-1}$ telle que $0 < \tilde\varphi \leqslant \varphi$, $\tilde\varphi \to_{\partial_\infty M} 1$.*

Démonstration. Reprenons les fonctions φ_ϵ construites dans le Lemme 5.1 dans le cas particulier $\mathrm{Scal} = \widehat{\mathrm{Scal}} = -n(n-1)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi_\epsilon - n(n-1)\varphi_\epsilon = -n(n-1)\varphi_\epsilon^{\kappa+1}, \\ \varphi_\epsilon = \epsilon \quad \text{sur } \partial_0 M, \\ \varphi_\epsilon \underset{\partial_\infty M}{\to} 1. \end{cases} \tag{5.10}$$

Comme $\varphi > 0$, on peut choisir ϵ tel que $\varphi > \epsilon$ sur $\partial_0 M$. Quitte à diminuer ϵ, on peut supposer, de plus, que φ_ϵ est une sous-solution de (5.9). Comme φ_ϵ est l'unique solution de (5.10), elle est invariante sous l'action du groupe d'isométrie. Reprenons la méthode de monotonie (section 2.3), il est possible de construire la suite des itérés en partant de φ_ϵ. Cette suite est alors croissante et, par récurrence, la suite des itérés φ_i est invariante sous le groupe des isométries et inférieures à φ. La fonction limite $\tilde\varphi = \lim_{i\to\infty}\varphi_i$ est alors une solution $\mathcal{C}^{2,\alpha}_0$ de (5.9) invariante sous le groupe d'isométries, $\varphi_\epsilon \leqslant \tilde\varphi \leqslant \varphi$. La preuve du Théorème 3.3 montre alors que $\tilde\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_\delta$, $\forall\delta \in [0; n)$. $\square$

Ce lemme montre que nous pouvons nous contenter de montrer qu'il n'existe pas de solution $\tilde\varphi$ invariante sous le groupe des isométries de M. Les tores $y = \text{cste}$ ont une courbure moyenne $H = n - 1$. Introduisons la coordonnée $r = r(y)$ telle que r soit la distance pour la métrique g au tore $y = A$. Si $\tilde\varphi$ est une fonction de r, on a (formule (5.1)) :

$$\Delta\tilde\varphi = \partial_r^2\tilde\varphi + H_r\partial_r\tilde\varphi = \partial_r^2\tilde\varphi + (n-1)\partial_r\tilde\varphi.$$

L'équation (5.9) se ramène à :

$$\begin{cases} \tilde\varphi''(r) + (n-1)\tilde\varphi'(r) + \dfrac{n(n-2)}{4}\big(\tilde\varphi(r) - \tilde\varphi^{\kappa+1}(r)\big) = 0 & \text{sur } [0; \infty), \\ -\tilde\varphi'(0) = \dfrac{n-2}{2}\big(\tilde\varphi(0) + \tilde\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1}(0)\big), \\ \tilde\varphi(r) \underset{r\to\infty}{\to} 1. \end{cases} \tag{5.11}$$

Posons

$$B(r) = \tilde\varphi'(r) + \frac{n-2}{2}\big(\tilde\varphi(r) + \tilde\varphi^{\frac{\kappa}{2}+1}(r)\big),$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
B'(r) &= \tilde{\varphi}''(r) + \frac{n-2}{2}\left(\tilde{\varphi}'(r) + \frac{n}{n-2}\tilde{\varphi}^{\frac{\kappa}{2}}(r)\tilde{\varphi}'(r)\right) \\
&= -(n-1)\tilde{\varphi}'(r) - \frac{n(n-2)}{4}\big(\tilde{\varphi}(r) - \tilde{\varphi}^{\kappa+1}(r)\big) + \frac{n-2}{2}\tilde{\varphi}'(r) + \frac{n}{2}\tilde{\varphi}^{\frac{\kappa}{2}}(r)\tilde{\varphi}'(r) \\
&= \frac{n}{2}\big(\tilde{\varphi}^{\frac{\kappa}{2}}(r) - 1\big)\tilde{\varphi}'(r) - \frac{n(n-2)}{4}\tilde{\varphi}(r)\big(1 - \tilde{\varphi}^{\frac{\kappa}{2}}\big)\big(1 + \tilde{\varphi}^{\frac{\kappa}{2}}\big) \\
&= \frac{n}{2}\big(\tilde{\varphi}^{\frac{\kappa}{2}}(r) - 1\big)B(r).
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $B(0) = 0$ donc $B(r) = 0$ pour tout $r \geqslant 0$, ce qui contredit le fait que $\lim_{r\to\infty} B(r) = n - 2$ (car $\tilde{\varphi}(r) \to 1$ et $\tilde{\varphi}'(r) \to 0$ à l'infini).

6. Construction de TT-tenseurs

Par la suite, on fixe une variété asymptotiquement hyperbolique (M, g) contenant éventuellement un bord interne $\partial_0 M$ et on note ν la normale sortante de $\partial_0 M$ (dans la section 5, le bord interne correspondra aux horizons apparents de la donnée initiale, ν sera alors la normale entrante de l'horizon). On fixe un 2-tenseur symétrique de trace nulle L_0 (quelconque) puis on cherche une 1-forme ψ telle que $L_{ij} = L_{0ij} + \mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g$ soit un TT-tenseur. On définit donc le **laplacien vectoriel** Δ_{TT} par :

$$\Delta_{TT}\psi = \operatorname{div}\big(\mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g\big),$$
$$\Delta_{TT}\psi_j = \Delta\psi_j + \nabla^i\nabla_j\psi_i - \frac{2}{n}\nabla_j\big(\nabla^k\psi_k\big).$$

Il est facile de voir que cet opérateur est elliptique au sens de [1] pour $s_i = 0$ et $t_j = 2$. Une condition au bord naturelle pour ψ est de prescrire $L_{0\nu i}$ sur $\partial_0 M$. On introduit donc également l'opérateur $\mathcal{B}$ correspondant aux conditions au bord :

$$\mathcal{B}\psi = \mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g(\nu, .),$$
$$\mathcal{B}\psi_i = \nabla_\nu\psi_i + \nabla_i\psi_\nu - \frac{2}{n}\nabla^k\psi_k g_{\nu i}.$$

L'opérateur $\mathcal{B}$ satisfait la condition de complémentarité au bord (voir [1]) pour $r_h = -1$. On pose :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\delta^{k,p} : W_\delta^{k,p}\big(M, T^*M\big) &\to W_\delta^{k-2,p}\big(M, T^*M\big) \times W^{k-1-\frac{1}{p},p}\big(\partial_0 M, T^*M\big), \\
\psi &\mapsto (\Delta_{TT}\psi, \mathcal{B}\psi),
\end{aligned} \tag{6.1}$$
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\delta^{k,\alpha} : \mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}\big(M, T^*M\big) &\to \mathcal{C}_\delta^{k-2,\alpha}\big(M, T^*M\big) \times \mathcal{C}^{k-1,\alpha}\big(\partial_0 M, T^*M\big), \\
\psi &\mapsto (\Delta_{TT}\psi, \mathcal{B}\psi).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Par la suite, nous ne donnerons que les démonstrations dans le cas des espaces de Sobolev, celles dans le cas des espaces de Hölder étant analogues. De plus nous abrégerons $\mathcal{P}_\delta^{k,p}$ en $\mathcal{P}$.

6.1. Théorème de Fredholm

Lemme 6.1 *(Calcul des exposants critiques de Δ_{TT}). Les exposants critiques* (*au sens de* [17]) *de Δ_{TT} sont $s = -2$ et $s = n - 1$. Le rayon indicial de Δ_{TT} est $R = \frac{n+1}{2}$.*

Démonstration. Notons

$$U_{ij}^k = -\left(\frac{\partial_i\rho}{\rho}\delta_j^k + \frac{\partial_j\rho}{\rho}\delta_i^k - \bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\frac{\partial_l\rho}{\rho}\right).$$

U_{ij}^k satisfait à :

$$\nabla_i X^j = \overline{\nabla}_i X^j + U_{ik}^j X^k,$$

où $\overline{\nabla}$ désigne la connexion de Levi-Civita associée à $\bar{g}$. Décomposons le calcul en plusieurs étapes :

$$\begin{aligned}
&\nabla_i\big(\rho^s\psi_j\big)+\nabla_j\big(\rho^s\psi_i\big)-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\nabla_k\big(\rho^s\psi_l\big)\\
&\quad=\overline{\nabla}_i\big(\rho^s\psi_j\big)+\overline{\nabla}_j\big(\rho^s\psi_i\big)-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\overline{\nabla}_k\big(\rho^s\psi_l\big)-U^k_{ij}\rho^s\psi_k-U^k_{ji}\rho^s\psi_k+\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}U^m_{kl}\rho^s\psi_m\\
&\quad=\rho^s\left(\overline{\nabla}_i\psi_j+\overline{\nabla}_j\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\overline{\nabla}_k\psi_l\right)+s\rho^{s-1}\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)\\
&\qquad+2\big(\partial_i\rho\delta^k_j+\partial_j\rho\delta^k_i-\bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\partial_l\rho\big)\rho^{s-1}\psi_k-\frac{2}{n}\bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\big(\partial_k\rho\delta^m_l+\partial_l\rho\delta^m_k-g_{kl}\bar{g}^{mp}\partial_p\rho\big)\rho^{s-1}\psi_m\\
&\quad=\rho^s\left(\overline{\nabla}_i\psi_j+\overline{\nabla}_j\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\overline{\nabla}_k\psi_l\right)+s\rho^{s-1}\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)\\
&\qquad+2\big(\partial_i\rho\delta^k_j+\partial_j\rho\delta^k_i-\bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\partial_l\rho\big)\rho^{s-1}\psi_k+\frac{2}{n}(n-2)\bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\rho^{s-1}\partial_k\rho\psi_l\\
&\quad=\rho^s\left(\overline{\nabla}_i\psi_j+\overline{\nabla}_j\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\overline{\nabla}_k\psi_l\right)+(s+2)\rho^{s-1}\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right).
\end{aligned}$$

Si T_{ij} est un tenseur symétrique de trace nulle :

$$\begin{aligned}
g^{ik}\nabla_k T_{ij}&=\rho^2\bar{g}^{ik}\big(\overline{\nabla}_k T_{ij}-U^l_{ki}T_{lj}-U^l_{kj}T_{il}\big)\\
&=\rho^2\bar{g}^{ik}\left[\overline{\nabla}_k T_{ij}+\left(\frac{\partial_k\rho}{\rho}\delta^l_i+\frac{\partial_i\rho}{\rho}\delta^l_k-\bar{g}_{ki}\bar{g}^{lm}\frac{\partial_m\rho}{\rho}\right)T_{lj}+\left(\frac{\partial_k\rho}{\rho}\delta^l_j+\frac{\partial_i\rho}{\rho}\delta^l_k-\bar{g}_{kj}\bar{g}^{lm}\frac{\partial_m\rho}{\rho}\right)T_{il}\right]\\
&=\rho^2\bar{g}^{ik}\overline{\nabla}T_{ij}-(n-2)\rho\bar{g}^{ik}\partial_k\rho T_{ij}.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
&g^{ik}\nabla_k\left[\nabla_i\big(\rho^s\psi_j\big)+\nabla_j\big(\rho^s\psi_i\big)-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\nabla_k\big(\rho^s\psi_l\big)\right]\\
&\quad=g^{ik}\nabla_k\left[\rho^s\left(\overline{\nabla}_i\psi_j+\overline{\nabla}_j\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\overline{\nabla}_k\psi_l\right)+(s+2)\rho^{s-1}\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)\right]\\
&\quad=\rho^2\bar{g}^{ik}\overline{\nabla}_k\left[\rho^s\left(\overline{\nabla}_i\psi_j+\overline{\nabla}_j\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\overline{\nabla}_k\psi_l\right)+(s+2)\rho^{s-1}\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)\right]\\
&\qquad-(n-2)\rho\bar{g}^{ik}\partial_k\rho\left[\rho^s\left(\overline{\nabla}_i\psi_j+\overline{\nabla}_j\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\overline{\nabla}_k\psi_l\right)\right.\\
&\qquad\left.+(s+2)\rho^{s-1}\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}g_{ij}g^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)\right]\\
&\quad=(s+2)(s-1)\bar{g}^{ik}\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}\bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)\\
&\qquad-(s+2)(n-2)\bar{g}^{ik}\partial_k\rho\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}\bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)+o\big(\rho^s\big)\\
&\quad=(s+2)(s-n+1)\bar{g}^{ik}\partial_k\rho\left(\partial_i\rho\psi_j+\partial_j\rho\psi_i-\frac{2}{n}\bar{g}_{ij}\bar{g}^{kl}\partial_k\rho\psi_l\right)+o\big(\rho^s\big).
\end{aligned}$$

L'application indiciale [17, Chapitre 4] de Δ_{TT} est donc donnée par :

$$I_s(\Delta_{TT})(\psi)=(s+2)(s-n+1)\left[\psi+\left(1-\frac{2}{n}\right)\psi(\overline{\nabla}\rho)\,d\rho\right].$$

Ce qui montre que les exposants critiques de Δ_{TT} sont $s=-2$ et $s=n-1$. □

Nous allons tout d'abord montrer que $\mathcal{P}$ est semi-Fredholm. Notre démonstration est basée sur celle de [17].

Lemme 6.2 *(Estimation L^2 à l'infini). Il existe un compact K de M et une constante $C > 0$ tels que si $u \in \mathcal{C}^2_c(M \setminus K)$, on a :*

$$\|u\|_{L^2} \leqslant C \|\Delta_{TT} u\|_{L^2}.$$

Démonstration. En coordonnées, on a :

$$\begin{aligned}\Delta_{TT}\psi_k &= g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_j\psi_k + \nabla_i\nabla_k\psi_j - \frac{2}{n} g_{jk}\nabla_i\nabla^l\psi_l\right)\\ &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j\psi_k + g^{ij}\left(\nabla_k\nabla_i\psi_j - R^l_{jik}\psi_l\right) - \frac{2}{n}\nabla_k\nabla^l\psi_l\\ &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j\psi_k + \mathrm{Ric}^l_k\,\psi_l + \left(1-\frac{2}{n}\right)\nabla_k\left(\nabla^l\psi_l\right).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_M \psi^k\Delta_{TT}\psi_k &= \int_M \psi^k\left(g^{ij}\nabla_i\nabla_j\psi_k + \mathrm{Ric}^l_k\,\psi_l + \left(1-\frac{2}{n}\right)\nabla_k\left(\nabla^l\psi_l\right)\right)\\ &= -\int_M\left[(\nabla_i\psi_j)\left(\nabla^i\psi^j\right) + \left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\nabla^k\psi_k\right)^2 - \mathrm{Ric}^{kl}\,\psi_k\psi_l\right].\end{aligned}$$

Or, comme M est asymptotiquement hyperbolique $\mathrm{Ric} \simeq -(n-1)g$ au voisinage du bord à l'infini. On peut donc choisir K tel que, sur $M \setminus K$, on a $-\mathrm{Ric} \geqslant \frac{n-1}{2} g$. On a alors :

$$\|\psi\|_{L^2}\|\Delta_{TT}\psi\|_{L^2} \geqslant \left|\int_M \psi^k\Delta_{TT}\psi_k\right| \geqslant \int_M (-\mathrm{Ric})^{kl}\psi_k\psi_l \geqslant \frac{n-1}{2}\|\psi\|^2_{L^2}. \qquad \square$$

Lemme 6.3.

- *Soient δ, δ' tels que $|\delta + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, $|\delta' + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$ avec $\delta - 1 < \delta' < \delta$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall \psi \in W^{k,p}_\delta(M, T^*M)$, on a :*
$$\|\psi\|_{W^{k,p}_\delta} \leqslant C\left(\|\Delta_{TT}\psi\|_{W^{k-2,p}_\delta(M)} + \|\mathcal{B}\psi\|_{W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M)} + \|\psi\|_{L^p_{\delta'}}\right).$$
- *Soient δ, δ' tels que $|\delta - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, $|\delta' - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$ avec $\delta - 1 < \delta' < \delta$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall \psi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M, T^*M)$, on a :*
$$\|\psi\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta} \leqslant C\left(\|\Delta_{TT}\psi\|_{\mathcal{C}^{k-2,\alpha}_\delta(M)} + \|\mathcal{B}\psi\|_{\mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M)} + \|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,0}_{\delta'}}\right).$$

Démonstration. On choisit une fonction de troncature lisse u_∞ sur $\overline{M}$ à valeurs dans $[0; 1]$, telle que $u_\infty = 1$ sur $\partial_\infty M$ et $u_\infty = 0$ au voisinage de $\partial_0 M$. On pose $\psi_\infty = u_\infty\psi$ et $\psi_0 = (1-u_\infty)\psi$. ψ_∞ est nulle au voisinage de $\partial_0 M$. Une application du Corollaire 6.3 de [17] donne alors :

$$\begin{aligned}\|\psi_\infty\|_{W^{k,p}_\delta} &\leqslant \|\widetilde{Q}\Delta_{TT}\psi_\infty\|_{W^{k,p}_\delta} + \|\widetilde{T}\psi_\infty\|_{W^{k,p}_\delta}\\ &\leqslant C\left(\|\Delta_{TT}\psi_\infty\|_{W^{k-2,p}_\delta} + \|\psi_\infty\|_{W^{k-1,p}_{\delta'}}\right)\\ &\leqslant C'\left(\|\Delta_{TT}\psi_\infty\|_{W^{k-2,p}_\delta} + \|\psi_\infty\|_{L^p_{\delta'}}\right),\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité d'interpolation [2] :

$$\|\psi_\infty\|_{W^{k-1,p}_{\delta'}} \leqslant C(\epsilon)\|\psi_\infty\|_{L^p_{\delta'}} + \epsilon\|\psi_\infty\|_{W^{k,p}_{\delta'}}.$$

Les opérateurs qui apparaissent ici sont ceux du Corollaire 6.3 de [17] :

$$\widetilde{Q} : W^{k-2,p}_{\delta} \to W^{k,p}_{\delta},$$
$$\widetilde{T} : W^{k-1,p}_{\delta} \to W^{k,p}_{\delta'},$$

ils vérifient $\widetilde{Q}\Delta_{TT}\psi = \psi + \widetilde{T}\psi$. De même, comme ψ_0 est à support compact et que $\mathcal{B}$ satisfait la condition de complémentarité au bord (voir p. 221), on peut utiliser les résultats de [1] :

$$\|\psi_0\|_{W^{k,p}} \leqslant C\big(\|\Delta_{TT}\psi_0\|_{W^{k-2,p}} + \|\mathcal{B}\psi_0\|_{W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M)} + \|\psi_0\|_{L^p}\big).$$

En additionnant et en utilisant à nouveau l'inégalité d'interpolation :

$$\|\psi\|_{W^{k,p}_{\delta}} \leqslant C\big(\|\Delta_{TT}\psi\|_{W^{k-2,p}_{\delta}(M)} + \|\mathcal{B}\psi\|_{W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M)} + \|\psi\|_{L^p_{\delta'}}\big). \qquad \square$$

Corollaire 6.4. *$\mathcal{P}$ est semi-Fredholm (i.e. $\ker\mathcal{P}$ est de dimension finie et $\operatorname{Im}\mathcal{P}$ est fermée).*

Démonstration. La démonstration est standard (voir par exemple [19]). On montre tout d'abord que $\ker\mathcal{P}$ est de dimension finie. En effet, soit $\psi_i \in \ker\mathcal{P}$ une suite d'éléments dans $\ker\mathcal{P}$. L'injection $W^{k,p}_{\delta} \hookrightarrow L^p_{\delta'}$ est compacte (car $\delta' < \delta$) on peut donc supposer que la suite converge dans $L^p_{\delta'}$. Cette suite est en particulier de Cauchy, or :

$$\|\psi_i - \psi_j\|_{W^{k,p}_{\delta}} \leqslant C\|\psi_i - \psi_j\|_{L^p_{\delta'}}.$$

La suite des ψ_i est donc de Cauchy dans $W^{k,p}_{\delta}$. Elle converge. Ceci prouve que la boule unité de $\ker\mathcal{P}$ est compacte et $\ker\mathcal{P}$ est de dimension finie. $\ker\mathcal{P}$ admet donc un complémentaire fermé F dans $W^{k,p}_{\delta}$. Montrons maintenant qu'il existe une constante $\widetilde{C}$ telle que $\forall\psi \in F$:

$$\|\psi\|_{W^{k,p}_{\delta}} \leqslant \widetilde{C}\big(\|\Delta_{TT}\psi\|_{W^{k-2,p}_{\delta}(M)} + \|\mathcal{B}\psi\|_{W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M)}\big).$$

Dans le cas contraire, on peut trouver une suite $\psi_i \in F$ telle que $\|\psi_i\|_{W^{k-2,p}_{\delta}(M)} = 1$ et $\|\Delta_{TT}\psi\|_{W^{k-2,p}_{\delta}(M)} + \|\mathcal{B}\psi\|_{W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M)} \leqslant \frac{1}{i}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite des ψ_i converge dans $L^p_{\delta'}$. On a alors :

$$\|\psi_i - \psi_j\|_{W^{k,p}_{\delta}} \leqslant C\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \|\psi_i - \psi_j\|_{L^p_{\delta'}}\right).$$

La suite des ψ_i est donc de Cauchy dans $W^{k,p}_{\delta}$. Elle converge vers un élément de norme 1 tel que $\mathcal{P}\psi = 0$. Absurde. On en déduit finalement que $\operatorname{Im}\mathcal{P}$ est fermée (en effet, $\mathcal{P} : F \to \operatorname{Im}\mathcal{P}$ est un isomorphisme bicontinu). $\square$

Avant de prouver que $\mathcal{P}$ est un isomorphisme, nous allons tout d'abord montrer que :

Lemme 6.5. *Soit $\psi \in L^{p_0}_{\delta_0}$ avec $1 < p_0 < \infty$ et $|\delta_0 + \frac{n-1}{p_0} - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$.*

1. *Si :*

$$\begin{cases} \Delta_{TT}\psi \in W^{k-2,p}_{\delta}, \\ \mathcal{B}\psi \in W^{k-1-\frac{1}{p},p} \end{cases}$$

avec $2 \leqslant k \leqslant l + \beta$, $1 < p < \infty$ et $|\delta + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$. Alors $\psi \in W^{k,p}_{\delta}$.

2. *Si :*

$$\begin{cases} \Delta_{TT}\psi \in C^{k-2,\alpha}_{\delta}, \\ \mathcal{B}\psi \in C^{k-1,\alpha} \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$, $2 \leqslant k + \alpha \leqslant l + \beta$ et $|\delta - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$. Alors $\psi \in C^{k,\alpha}_{\delta}$.

Démonstration. Comme précédemment, on décompose $\psi = \psi_0 + \psi_\infty$. ψ_∞ est nulle dans un voisinage de $\partial_0 M$ donc on peut appliquer la Proposition 6.5 de [17]. Remarquons que $\Delta_{TT}\psi_\infty = \Delta_{TT}\psi$ au voisinage de $\partial_\infty M$. On a : $\psi_\infty \in W^{k,p}_\delta$. De même pour ψ_0, on peut appliquer le Théorème 10.5 de [1] : $\psi_0 \in W^{k,p}_c \subset W^{k,p}_\delta$. On en déduit $\psi \in W^{k,p}_\delta$. □

Ceci montre que si $\psi \in \ker \mathcal{P}$ est dans un certain $L^p_{\delta_0}$ avec $|\delta_0 + \frac{n-1}{p_0} - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, alors $\psi \in W^{2,2}_0$. De plus si $\psi \in \mathcal{C}^{0,0}_{\delta_0}$, avec $|\delta_0 - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, on voit que $\psi \in L^p_{\delta_1}$ pour δ_1 légèrement plus petit que δ_0 et p grand donc en appliquant ce qui précède $\psi \in W^{2,2}_0$. Ce qui permet de conclure que si $\psi \in \ker \mathcal{P}$, $\psi \in W^{2,2}_0$. Montrons finalement le résultat suivant :

Lemme 6.6. *Soit M une variété asymptotiquement hyperbolique. On suppose qu'il n'existe aucun champ de vecteur de Killing conforme L^2 sur M. Alors $\mathcal{P}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Procédons comme [19]. Nous savons tout d'abord que le noyau de $\mathcal{P}^{k,l}_\delta$ est égal à celui de $\mathcal{P}^{2,2}_0$. Or si $\psi \in \ker \mathcal{P}^{2,2}_0$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \langle \psi, \Delta_{TT}\psi\rangle = \int_{\partial_0 M} \langle \psi, \mathcal{B}\psi\rangle - \int_M \left|\mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g\right|^2_g \\ &= -\int_M \left|\mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g\right|^2_g, \end{aligned}$$

$\psi^\sharp$ est alors un champ de vecteurs de Killing conforme L^2. Ceci montre que $\mathcal{P}^{k,p}_\delta$ est injectif. Pour montrer qu'il est surjectif, il suffit de montrer que $\mathcal{P}^{2,2}_0$ est surjectif. En effet, $\mathcal{C}^{k,0}_c(M, T^*M) \times \mathcal{C}^{k,0}(\partial_0 M, T^*M)$ est dense dans $W^{k-2,p}_\delta(M, T^*M) \times W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M, T^*M)$. S'il existe une solution $\psi \in W^{2,2}_0$ au problème $\Delta_{TT}\psi = u$, $\mathcal{B}\psi = b$ avec $u \in \mathcal{C}^{k,0}_c(M, T^*M)$ et $b \in \mathcal{C}^{k,0}(\partial_0 M, T^*M)$ alors le Lemme 6.5 permet alors de conclure que $\psi \in W^{k,p}_\delta$. Ceci montre alors que $\operatorname{Im} \mathcal{P}^{k,p}_\delta \supset \mathcal{C}^{k,0}_c(M, T^*M) \times \mathcal{C}^{k,0}(\partial_0 M, T^*M)$ est dense dans $W^{k-2,p}_\delta(M, T^*M) \times W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M, T^*M)$.

Montrons donc que $\mathcal{P}^{2,2}_0 : W^{2,2}_0 \to L^2(M) \times W^{\frac{1}{2},2}(\partial_0 M)$ est surjectif. Pour cela, il suffit de montrer que son adjoint est injectif. Or le dual de $L^2(M) \times W^{\frac{1}{2},2}(\partial_0 M)$ est $L^2(M) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial_0 M)$. Soit $(\widetilde{\psi}, b) \in \ker(\mathcal{P}^{2,2}_0)^*$. On a alors [16] que $\widetilde{\psi}$ et b sont de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ avec $\widetilde{\psi} \in W^{2,2}_0$. Si ψ est à support compact sur $\mathring{M}$:

$$\int_M \langle \widetilde{\psi}, \Delta_{TT}\psi\rangle_g = 0.$$

L'opérateur Δ_{TT} étant formellement autoadjoint, ceci prouve que $\Delta_{TT}\widetilde{\psi} = 0$. Si maintenant $\psi \in W^{2,2}_0$ est quelconque :

$$0 = \int_{\partial_0 M} \langle \mathcal{B}\psi, b\rangle_g + \int_M \langle \widetilde{\psi}, \Delta_{TT}\psi\rangle_g = \int_{\partial_0 M} \langle \mathcal{B}\psi, b + \widetilde{\psi}\rangle_g + \int_{\partial_0 M} \langle \mathcal{B}\widetilde{\psi}, \psi\rangle_g.$$

Or il est facile de voir qu'on peut toujours construire des 1-formes ψ régulières telles que $\psi|_{\partial_0 M}$ et $\mathcal{B}\psi$ soient des fonctions (régulières) données. On en déduit donc que $b + \widetilde{\psi} = 0$ et $\mathcal{B}\widetilde{\psi} = 0$. On a ensuite :

$$0 = \int_{\partial_0 M} \langle \mathcal{B}\widetilde{\psi}, l\rangle_g + \int_M \langle \widetilde{\psi}, \Delta_{TT}\widetilde{\psi}\rangle_g = -\int_M \left|\mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g\right|^2_g.$$

$\widetilde{\psi}$ est un champ de vecteurs de Killing conforme L^2. Ce qui montre $\widetilde{\psi} = 0$ et, comme $b + \widetilde{\psi} = 0$, $b = 0$: $\mathcal{P}^{2,2}_0$ est surjectif. □

6.2. Champs de vecteurs de Killing conformes

Lemme 6.7. *Soit X un champ de vecteurs de Killing conforme sur M. Si $X \in L^2(M, g)$ alors $X = 0$.*

Démonstration. On a tout d'abord $X \in W_0^{2,2}(M)$. En effet X vérifie l'équation elliptique $\Delta_{TT} X^\flat = 0$. Un processus standard d'itération montre alors que $X \in \mathcal{C}_0^{0,\alpha}(M)$, $0 < \alpha < 1$. On en déduit (en utilisant le Lemme 3.7 de [17]) que $X \in \mathcal{C}_{\alpha-1}^{0,\alpha} \hookrightarrow \mathcal{C}_{(0)}^{0,\alpha}$. On voit qu'on doit avoir $X = 0$ sur $\partial_\infty M$ car sinon $X \notin L^2(M)$. X est ensuite un champ de vecteurs de Killing conforme sur $(\overline{M}, \bar{g})$. Par la suite nous identifierons le champ X et sa forme duale associée à la métrique $\bar{g}$, ainsi $X_j = \bar{g}_{ij} X^i$. En particulier, on a

$$\overline{\Delta}_{TT} X = 0.$$

Donc $X \in \mathcal{C}_{(0)}^{l,\beta}$. Les dérivées dans des directions tangentes à $\partial_\infty M$ de X sont nulles. Ceci implique que $\overline{\nabla} X = 0$ sur $\partial_\infty M$. En effet, soit $\hat{p} \in \partial_\infty M$, choisissons une carte $\phi = (\rho, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ au voisinage de $\hat{p}$. Par la suite, on notera $\theta^0 = \rho$. Quitte à redéfinir les θ^i pour $i > 0$, on peut supposer $\bar{g}_{ij}(\hat{p}) = \delta_{ij}$ $(i, j \geqslant 0)$. Les dérivées $\partial_i X_j(\hat{p})$ pour $i > 0$, $j \geqslant 0$ correspondent à des dérivations de X dans des directions tangentes à $\partial_0 M$ et sont nulles. De plus comme $X(\hat{p}) = 0$, $\nabla_i X_j = \partial_i X_j$ $(i, j \geqslant 0)$. L'équation satisfaite par X en $\hat{p}$ s'écrit :

$$\partial_i X_j + \partial_j X_i - \frac{2}{n} \partial^k X_k \delta_{ij} = 0.$$

En particulier, appliquée à $i = 0$ et $j > 0$, l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_0 X_j + \partial_j X_0 \\ &= \partial_0 X_j \quad \text{(car } X_0 \text{ est nul le long de } \partial_\infty M\text{)}, \end{aligned}$$

puis à $i = j = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\partial_0 X_0 - \frac{2}{n} \partial^k X_k \\ &= \left(2 - \frac{2}{n}\right) \partial_0 X_0 - \frac{2}{n} \sum_{k>0} \partial^k X_k \\ &= \left(2 - \frac{2}{n}\right) \partial_0 X_0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que toutes les dérivées de X sont nulles en $\hat{p}$.

On élargit ensuite $(\overline{M}, \bar{g})$ au niveau de $\partial_\infty M$ pour avoir une variété $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ $\mathcal{C}^{k,\beta}$ et on prolonge X par 0 à tout $\widetilde{M}$. $\widetilde{X}$ est alors un champ de vecteur de Killing conforme $\mathcal{C}^{1,1}$, nul sur le collier qu'on a ajouté à $\overline{M}$. Comme $\widetilde{\Delta}_{TT} X = 0$ au sens des distributions, $\widetilde{X} \in \mathcal{C}^{k,\beta}(\widetilde{M})$. On conclut alors, en utilisant le théorème d'unique continuation des champs de vecteurs de Killing conformes [19, Théorème 6.4] valable pour les métriques $W^{2,p}$ avec $p > n$, que $\widetilde{X} = 0$. □

On en déduit donc le théorème suivant :

Théorème 6.8. *Soit (M, g) une variété asymptotiquement hyperbolique de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ avec $l + \beta \geqslant 2$. Les opérateurs*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\delta^{k,p} : W_\delta^{k,p}\big(M, T^*M\big) &\to W_\delta^{k-2,p}\big(M, T^*M\big) \times W^{k-1-\frac{1}{p},p}\big(\partial_0 M, T^*M\big), \\ \psi &\mapsto (\Delta_{TT}\psi, \mathcal{B}\psi), \\ \mathcal{P}_\delta^{k,\alpha} : \mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}\big(M, T^*M\big) &\to \mathcal{C}_\delta^{k-2,\alpha}\big(M, T^*M\big) \times \mathcal{C}^{k-1,\alpha}\big(\partial_0 M, T^*M\big), \\ \psi &\mapsto (\Delta_{TT}\psi, \mathcal{B}\psi) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

En particulier, appliquant ce théorème à l'équation

$$\begin{cases} 0 = \operatorname{div} L = \Delta_{TT}\psi + \operatorname{div} L_0, \\ b = L(\nu, .) = \mathcal{B}\psi + L_0(\nu, .), \end{cases}$$

on obtient le théorème suivant de construction des TT-tenseurs :

Théorème 6.9 *(Construction de TT-tenseurs sur une variété asymptotiquement hyperbolique). Soit (M, g) une variété asymptotiquement hyperbolique de classe $\mathcal{C}^{l,\beta}$ avec $l + \beta \geqslant 2$.*

1. *Soient L_0 un 2-tenseur symétrique et sans trace avec $L_0 \in W^{k-1,p}_\delta$ avec $2 \leqslant k \leqslant l$, $1 < p < \infty$ et $|\delta + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, et $b \in W^{k-1-\frac{1}{p},p}(\partial_0 M, T^*M)$. Il existe une unique 1-forme $\psi \in W^{k,p}_\delta(M, T^*M)$ telle que, si on définit $L = L_0 + \mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g$, alors :*
   - *L est un tenseur symétrique transverse et sans trace ;*
   - *$L(\nu, .) = b$ sur $\partial_0 M$.*
2. *Soient L_0 un 2-tenseur symétrique et sans trace avec $L_0 \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}_\delta$ avec $2 \leqslant k + \alpha \leqslant l$, $0 < \alpha < 1$ et $|\delta - \frac{n-1}{2}| < \frac{n+1}{2}$, et $b \in \mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\partial_0 M, T^*M)$. Il existe une unique 1-forme $\psi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M, T^*M)$ telle que, si on définit $L = L_0 + \mathring{\mathcal{L}}_{\psi^\sharp} g$, alors :*
   - *L est un tenseur symétrique transverse et sans trace ;*
   - *$L(\nu, .) = b$ sur $\partial_0 M$.*

Références

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II, Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964) 35–92.
[2] L. Andersson, Elliptic systems on manifolds with asymptotically negative curvature, Indiana Univ. Math. J. 42 (4) (1993) 1359–1388.
[3] L. Andersson, P.T. Chruściel, Solutions of the constraint equations in general relativity satisfying "hyperboloidal boundary conditions", Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 355 (1996) 100.
[4] P. Aviles, R. McOwen, Conformal deformations of complete manifolds with negative curvature, J. Differential Geom. 21 (2) (1985) 269–281.
[5] R. Bartnik, J. Isenberg, The constraint equations, in: The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 1–38.
[6] A.L. Besse, Einstein Manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) (Results in Mathematics and Related Areas (3)), vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
[7] S. Carlip, Quantum Gravity in 2 + 1 Dimensions, Cambridge Univ. Pr., Cambridge, UK, 1998, 276 p.
[8] P.T. Chruściel, M. Herzlich, The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds, Pacific J. Math. 212 (2) (2003) 231–264.
[9] S. Dain, 2002. Initial data for black hole collisions, in: Proceedings of the Spanish Relativity Meeting on Gravitation and Cosmology (ERE 2002), 2002, pp. 183–187.
[10] S. Dain, Trapped surfaces as boundaries for the constraint equations, Classical Quantum Gravity 21 (2) (2004) 555–573.
[11] S. Dain, Corrigendum: "Trapped surfaces as boundaries for the constraint equations", Classical Quantum Gravity 22 (4) (2005) 769.
[12] E. Delay, Analyse précisée d'équations semi-linéaires elliptiques sur l'espace hyperbolique et application à la courbure scalaire conforme, Bull. Soc. Math. France 125 (3) (1997) 345–381.
[13] C. Gerhardt, On the CMC foliation of future ends of a spacetime, Pacific J. Math. 226 (2) (2006) 297–308.
[14] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001 (Reprint of the 1998 edition).
[15] C.R. Graham, J.M. Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, Adv. Math. 87 (2) (1991) 186–225.
[16] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III: Pseudo-Differential Operators, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1994 (Corrected reprint of the 1985 original).
[17] J.M. Lee, Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. 183 (864) (2006), vi+83.
[18] Z. Li, Y. Shi, P. Wu, Asymptotically hyperbolic metrics on a unit ball admitting multiple horizons, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (11) (2008) 4003–4010.
[19] D. Maxwell, Solutions of the Einstein constraint equations with apparent horizon boundaries, Comm. Math. Phys. 253 (3) (2005) 561–583.
[20] M. Min-Oo, Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds, Math. Ann. 285 (4) (1989) 527–539.
[21] P. Petersen, Riemannian Geometry, Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer-Verlag, New York, 1998.
[22] Y. Shi, L.-F. Tam, Asymptotically hyperbolic metrics on the unit ball with horizons, Manuscripta Math. 122 (1) (2007) 97–117.
[23] R.M. Wald, General Relativity, Univ. of Chicago Pr., Chicago, USA, 1984, 491 p.
[24] X. Wang, The mass of asymptotically hyperbolic manifolds, J. Differential Geom. 57 (2) (2001) 273–299.