JOURNAL OF ALGEBRA 112, 430-466 (1988)

Pushing Up $Sp(4, 2^k)$

ULRICH MEIERFRANKENFELD*

Universität Bielefeld

Communicated by Gernot Stroth

Received February 26, 1986

Sei M eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und S eine p-Sylowgruppe von M mit folgender Eigenschaft:

(P) Keine nichttriviale charakteristische Untergruppe von S ist normal in M.

Die Bestimmung der Hauptfaktoren von M bezeichnet man als das Pushing up-Problem für M. Im Falle $M/O_p(M) \simeq SL(2, p^n)$ wurde das Pushing up-Problem von Baumann [1] für $p=2$ und unabhängig davon dann von Niles [13] für beliebiges p gelöst. Mit Hilfe der sogenannten Amalgam-Methode gelang es Stellmacher [14], einen elementaren Beweis für den Satz von Baumann–Niles anzugeben.

Pushing up-Probleme treten häufig bei der Untersuchung p-lokaler Untergruppen endlicher (einfacher) Gruppen auf. Sei z.B. M eine maximale 2-lokale Untergruppe einer endlichen Gruppe H. Dann ist eine wesentliche Frage, ob M den Normalisator einer 2-Sylowgruppe von H enthält. Ist dies nicht der Fall, so gilt (P). Bei der Untersuchung quasidünner Gruppen stieß Mason auf ein solches Problem, wobei $M/O_2(M) \simeq Sp(4, 2)$ war. In dieser Arbeit wenden wir die Amalgam-Methode an, um diesen Fall unter den folgenden allgemeineren Voraussetzungen zu lösen.

(A) $p=2$, $\bar{M} = M/O_2(M)$, $\bar{M}/\Phi(\bar{M}) \simeq Sp(4, 2^k)$, und $O(M)=1$.

Dazu beweisen wir den folgenden Satz:

SATZ. *M erfülle* (A) *und* (P). *Sei $\tilde{M} = O^2(M)$ und $V = O_2(\tilde{M})$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen*:

(i) $\tilde{M} \simeq Sp(4, 2^k)'$.

(ii) $\tilde{M}/V \simeq A_6$, *V ist ein natürlicher $Sp(4, 2)'$-oder natürlicher $O(5, 2)'$-Modul für $\tilde{M}$, und es existiert ein Komplement zu V in $\tilde{M}$.*

* Present address: Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824.

0021-8693/88 $3.00

(iii) *$\tilde{M}/V \simeq \hat{A}_6$, V ist ein irreduzibler $\hat{A}_6$-Modul der Ordnung 2^6 für $\tilde{M}$, und es existiert ein Komplement zu V in $\tilde{M}$.*

(iv) *$\tilde{M}/V \simeq Sp(4, 4)$, V ist ein natürlicher $Sp(4, 4)$-Modul für $\tilde{M}$, und es existiert kein Komplement zu V in M.*

Ist weiterhin φ ein Automorphismus ungerader Ordnung von S, dann ist $V^{\varphi} \leqslant O_2(M)$.

Zu jedem der im Satz angegebenen Fälle existieren Beispiele. Im Fall (i) ist die Gruppe $Sp(4, 2^k)$ selbst ein Beispiel. Für die anderen Fälle sei $G = \mathrm{Aut}(U(4, 3))$, Aut(He) oder $U(16, 3)$. Dann besitzt G eine Untergruppe M, die (ii), (iii), bzw. (iv) erfüllt. Außerdem existiert ein 2-Element $x \in N_G(S)$ und eine maximale Untergruppe P von M, die S enthält, so daß $P^x = P$ und $G' \leqslant \langle M, x\rangle$ gilt.

Für die Idee, die zu dem Beispiel $U(16, 3)$ führte, bin ich Herrn Th. Meixner dankbar.

1. Kapitel

In diesem Kapitel beweisen wir einige Eigenschaften der $Sp(4, 2^n)$ und ihrer GF(2)-Moduln.

(1.1) *Sei p eine Primzahl, K ein Körper der Charakteristik p, G eine endliche Gruppe und V ein endlichdimensionaler $K[G]$-Modul. Gilt $V = \langle C_V(S) \mid S \in \mathrm{Syl}_p(G)\rangle$, dann ist $V = [V, G]\, C_V(G)$.*

Beweis. Sei $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ fest gewählt. Aus $V = \langle C_V(S) \mid S \in \mathrm{Syl}_p(G)\rangle$ folgt die Existenz von Elementen $x_1, ..., x_n$ aus $C_V(S)$, so daß für $V_i = \langle x_i^G\rangle$ gilt: $V = V_1 V_2 \cdots V_n$. Offensichtlich genügt es, die Behauptung für jedes V_i zu zeigen. Sei dazu $V_0 = (1_S)^G$ der natürliche Permutationsmodul von G auf den Nebenklassen von S, d.h. es existiert eine Basis $\{a_H \mid H \in S\backslash G\}$ von V_0 mit $(a_H)^g = a_{Hg}$ für alle $g \in G$. Dann folgt

$$C_{V_0}(G) = \left\{\lambda \left(\sum_{H \in S\backslash G} a_H\right) \middle| \lambda \in K\right\},$$

$$[V_0, G] = \left\{\sum_{H \in S\backslash G} \lambda_H a_H \middle| \lambda_H \in K, \sum_{H \in S\backslash G} \lambda_H = 0\right\}.$$

Aus char $K = p$ und $\mathrm{ggt}(|G : S|, p) = 1$ folgt $C_{V_0}(G) \cap [V_0, G] = 1$ und $V_0 = [V_0, G] \times C_{V_0}(G)$.

Nun ist offensichtlich V_i ein Faktormodul von V_0 für jedes $i \in \{1, ..., n\}$. und es folgt $V_i = [V_i, G]\, C_{V_i}(G)$ und $V = [V, G]\, C_V(G)$. ∎

(1.2) *Sei p eine Primzahl, A eine elementarabelsche p-Gruppe und V ein treuer* $\mathrm{GF}(p)[A]$*-Modul mit* $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$.
Dann existiert eine Untergrupe $B \leqslant A$ mit:

(i) $|V/C_V(B)| \leqslant |B|$, $B \neq 1$,

(ii) $[V, B, B] = 1$.

Beweis. Sei $d := \max\{|C_V(B)| \cdot |B| \mid B \leqslant A\}$ und $X := \{B \leqslant A \mid B \neq 1, |C_V(B)| \cdot |B| = d\}$. Wegen $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$ ist $d \geqslant |V|$.

Wie in [6, 8.2.4] zeigt man nun: Ist $B \in X$, $v \in V$ und $M = [v, B]$, dann gilt $|MC_V(B)|\,|C_B(M)| = |C_V(B)| \cdot |B| = d$. Wir zeigen nun, daß $C_B(M) \neq 1$ ist. Andernfalls folgt $|MC_V(B)| = d \geqslant |V|$, also $V = MC_V(B)$ und $[v, B] \leqslant [V, B] = [M, B] = [v, B, B]$, im Widerspruch zu [10, 4.2]. Somit ist $C_B(M) \neq 1$, und aus $[MC_V(B), C_B(M)] = 1$ folgt $C_B(M) \in X$.

Sei nun $B \in X$ mit $|B|$ minimal, dann ist $C_B(M) = B$ und $[v, B, B] = 1$ für alle $v \in V$. Also ist $[V, B, B] = 1$, und wegen $|C_V(B)|\,|B| = d \geqslant |V|$ ist $|V/C_V(B)| \leqslant |B|$. ∎

(1.3) *Sei G eine endliche Gruppe, p ein Primzahl, V ein treuer* $\mathrm{GF}(p)$ *G-Modul und A eine nichttriviale elementarabelsche p-Untergruppe von G. Es gelte*:

(i) $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$.

(ii) $O^p(G) \leqslant \langle y^{O^p(G)} \rangle$ *für alle* $y \in A^{\#}$.

(iii) *Ist $p = 3$, so besitzt G keine Untergruppen N_1 und N_2 mit* $N_1 \lhd N_2$, $O^3(G) \leqslant N_2$ *und* $N_2/N_1 \simeq SL(2, 3)$.

Dann ist $[O_{p'}(G), O^p(G)] = 1$.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Sei (G, V, A) ein Gegenbeispiel mit $|G| + |A| + |V|$ minimal.

(1) *V ist ein irreduzibler G-Modul.*

Sei V_0 ein Kompositionsfaktor von V mit $V_0 \neq V$. Operiert A nicht treu auf V_0, so folgt aus (i) $[V_0, O^p(G)] = 1$. Operiert A treu auf V_0, so ist $|V_0/C_{V_0}(A)| \leqslant |A|$; und aus $|V_0| < |V|$ folgt wegen der minimalen Wahl, daß $[V_0, [O_{p'}(G), O^p(G)]] = 1$ ist.

Also operiert $[O_{p'}(G), O^p(G)]$ trivial auf jedem Kompositionsfaktor von V, und aus [6, 5.3.2] folgt $[O_{p'}(G), O^p(G)] = 1$, im Widerspruch zur Annahme.

(2) $|A| = p$.

Aus der minimalen Wahl und (1.2) folgt $[V, A, A] = 1$. Wir nehmen nun an $|A| > p$. Sei $H \leqslant A$ mit $|A/H| = p$, dann ist $|V/C_V(H)| > |H|$ wegen der Minimalität von $|G| + |A| + |V|$. Nun ist $C_V(A) \leqslant C_V(H)$ und somit

$C_V(H)=C_V(A)$. Aus [10, 7.22] folgt $O_{p'}(G)=\langle C_{O_{p'}(G)}(H) \mid H \leqslant A, |A/H|=p\rangle$. Somit ist $C_V(A)$ invariant unter $O_{p'}(G)$.

Sei $W=C_V(A)$ oder $V/C_V(A)$. Dann ist $[W, A]=1$ und somit $[W, A, O_{p'}(G)]=1$ und $[W, O_{p'}(G), A]=1$. Aus dem Drei-Untergruppen Lemma [6, 2.2.3] folgt

$$[W, [A, O_{p'}(G)]]=1.$$

Also ist $[V, [A, O_{p'}(G)]]=1$ und $[A, O_{p'}(G)]=1$, aus (i) folgt $[O_{p'}(G), O^p(G)]=1$, im Widerspruch zur Annahme.

(3) $G=\langle A^G\rangle$.

Andernfalls wäre $(\langle A^G\rangle, V, A)$ ein Gegenbeispiel mit

$$|\langle A^G\rangle|+|V|+|A|<|G|+|V|+|A|.$$

Aus (1), (2), (3) folgt: G operiert irreduzibel auf V und wird von Transvektionen erzeugt. Aus [11] folgt:

$$G \simeq SL(n, p), \qquad Sp(2n, p), \qquad \Sigma_n, \qquad O^+(2n, 2) \quad \text{oder } O^-(2n, 2);$$

Wegen (iii) ist $G \not\simeq SL(2, 3)$ und wir erhalten $[0_{p'}(G), O^p(G)]=1$, im Widerspruch zur Annahme.

(1.4) *Sei G eine endliche Gruppe mit $G/\Phi(G) \simeq \Sigma_6$ und $O_2(G)=1$. Dann ist $\Phi(G)=\Phi(O^2(G))$.*

Beweis. Sei $H:=O^2(G)$, wir nehmen an $\Phi(H) \neq \Phi(G)$. Dann ist $H/\Phi(G) \simeq A_6$ und $\Phi(G) \nleqslant \Phi(H)$. Also existiert eine maximale Untergruppe M von H mit $\Phi(G) \nleqslant M$ und $H=\Phi(G)M$. Sei $V:= \Phi(G) \cap M$. Da $\Phi(G)$ nilpotent ist, folgt $H=N_H(V)$, und V ist ein maximaler Normalteiler von H in $\Phi(G)$. Insbesondere ist $\Phi(G)/V$ elementarabelsch.

Ist $V \lhd G$, so folgt aus dem Satz von Gaschütz [8, I.17.4], daß $\Phi(G)/V$ ein Komplement in G/V besitzt. Also ist V kein Normalteiler in G. Sei $\tau \in G \backslash H$ mit $\tau^2=1$. Dann ist $\Phi(G)=VV^\tau$ und $H=MM^\tau$. Es folgt: $|M/M \cap M^\tau|=|MM^\tau/M|=|H/M|=|\Phi(G)/V|$; $|V/V \cap V^\tau|=|VV^\tau/V^\tau|=|\Phi(G)/V|$ und $|\Phi(G)(M \cap M^\tau)/M \cap M^\tau|=|\Phi(G)/\Phi(G) \cap M \cap M^\tau|=|\Phi(G)/V \cap V^\tau|=|\Phi(G)/V|^2=|H/M \cap M^\tau|$.

Also ist $H=\Phi(G)(M \cap M^\tau)$ und $G=\Phi(G)((M \cap M^\tau)\langle\tau\rangle)$, im Widerspruch zur Definition der Frattinigruppe. ∎

(1.5) *Sei G eine endliche Gruppe, $A \leqslant G$ eine nichttriviale elementarabelsche 2-Gruppe und V ein treuer* GF(2)[G]*-Modul. Es gelte:*

(i) $G/\Phi(G) \simeq Sp(4, 2^k)$ *und* $O_2(G)=1$,

(ii) $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$.

Dann ist $\Phi(G)=1$ *oder* $k=1$ *und* $G \simeq \hat{\Sigma}_6$, *wobei* $\hat{\Sigma}_6$ *definiert ist durch* $\Phi(\hat{\Sigma}_0) \simeq C_3$ *und* $\hat{\Sigma}_0/\Phi(\hat{\Sigma}_0) \simeq \Sigma_6$.

Beweis. Wegen (i), (ii), und (1.4) sind offensichtlich die Voraussetzungen von (1.3) für $p=2$ erfüllt. Wegen $O_2(G)=1$ ist $\Phi(G)=O_{2'}(G)$ und somit $[\Phi(G), O^2(G)]=1$.

Falls $k>1$, so ist $O^2(G)=G$ und G ist eine Schursche Erweiterung von $Sp(4, 2^k)$. Nun ist für $k>1$ nach [7, Tafel 4.1] der Schurmultiplikator von $Sp(4, 2^k)$ trivial, also ist $\Phi(G)=1$.

Falls $k=1$, so ist $O^2(G)/\Phi(G) \simeq A_6$. Der Schurmultiplikator von A_6 ist isomorph zu C_6 [7, Tafel 4.1], so daß mit $O_2(G)=1$ folgt: $\Phi(G)=1$ oder $\Phi(G)=C_3$. Im letzteren Fall ist $O^2(G) \simeq \hat{A}_6$ und $G \simeq \hat{\Sigma}_6$. ∎

(1.6) Definition. Sei $G \simeq \Sigma_5$ oder $Sp(4, 2^n)$. Sei V ein treuer GF(2)[G]-Modul und H die von G induzierte Gruppe von linearen Abbildungen. Es existiere ein Körper K, so daß V ein k-dimensionaler Vektorraum über K ist.

(a) Ist $k=2$, $K \simeq \mathrm{GF}(4)$ und $H=\Gamma L(V, K)$, so heißt V natürlicher G-Modul.

(b) Ist $k=4$, $K \simeq \mathrm{GF}(2)$ und existiert eine nichtausgeartete quadratische Form f auf V über K, so daß $H=O(V, K, f)$ ist, so heißt V orthogonaler G-Modul.

(c) Ist $k=4$, $K \simeq \mathrm{GF}(2^n)$ und existiert eine nichtausgeartete symplektische Form s auf V über K, so daß $H=Sp(V, K, s)$ ist, so heißt V natürlicher G-Modul.

(d) Ist $k=5$, $K \simeq \mathrm{GF}(2^n)$ und existiert eine nichtausgeartete quadratische Form f auf V über K, so daß $H=O(V, K, f)$ ist, so heißt V orthogonaler G-Modul.

Bemerkung. Im Fall (a) und (b) ist $G \simeq \Sigma_5$, im Fall (c) und (d) ist $G \simeq Sp(4, 2^n)$. ∎

Ohne Beweis geben wir an (vgl. [9]):

(1.7) (a) *Sei* V *ein irreduzibler* GF(2)[Σ_5]-*Modul, dann ist* V *isomorph zum trivialen, natürlichen oder orthogonalen* Σ_5-*Modul.*

(b) *Sei* V *ein irreduzibler* GF(2)[Σ_6]-*Modul, dann ist* $|V|=2^{16}$, *oder* V *ist isomorph zum trivialen oder einem natürlichen* Σ_6-*Modul.*

(1.8) *Sei* V *ein treuer, direkt unzerlegbarer* GF(2)[Σ_6]-*Modul. Operieren die Transpositionen als Transvektionen, so ist* V *isomorph zu einem der folgenden* Σ_6-*Moduln.*

(i) $V_1 = \langle a_1, a_2, ..., a_6 \rangle$ *mit linear unabhängigen* $a_1, ..., a_6$ *und* $(a_i)^\pi = a_{(i\pi)}$ *für alle* $\pi \in \Sigma_6$, $1 \leqslant i \leqslant 6$.

(ii) $V_2 = V_1/C_{V_1}(\Sigma_6)$.

(iii) $V_3 = [V_1, \Sigma_6]$, V_3 *ist ein orthogonaler* Σ_6*-Modul.*

(iv) $V_4 = V_3/C_{V_3}(\Sigma_6)$, V_4 *ist ein natürlicher* Σ_6*-Modul.*

Beweis. Da sich die Σ_6 von fünf Transpositionen erzeugen läßt, ist $|V/C_V(\Sigma_6)| \leqslant 2^5$, $|[V, \Sigma_6]| \leqslant 2^5$, und $2^4 \leqslant |V| \leqslant 2^6$. Sei $H \simeq \Sigma_5$ und von Transpositionen erzeugt. Aus (1.7)(a) und da H von vier Transpositionen erzeugt wird folgt:

(x) $V = [V, H] \oplus C_V(H)$ und $[V, H]$ ist ein orthogonaler Σ_5-Modul.

Sei nun $|V| = 2^4$, aus (1.7)(b) folgt $V \simeq V_4$. Sei $|V| = 2^5$ und $C_V(\Sigma_6) = 1$. Aus (x) folgt, daß eine Bahn der Länge 6 existiert, also ist $V \simeq V_2$. Sei $|V| = 2^5$, $C_V(\Sigma_6) \neq 1$ und V^* der zu V duale Modul. Aus dem vorangegangenen Schritt folgt $V^* \simeq V_2$, also $V \simeq V_3$. Sei nun $|V| = 2^6$. Da V direkt unzerlegbar und $|[V, \Sigma_6]| \leqslant 2^5$ ist, ist $|C_V(\Sigma_6)| = 2$ und $|[V, \Sigma_6]| = 2^5$.

Aus (x) folgt die Existenz einer Bahn der Länge 6 in $V \backslash [V, \Sigma_6]$, also ist $V \simeq V_1$. ∎

(1.9) *Sei V ein treuer* GF(2)$[\Sigma_6]$*-Modul mit* $|V| \leqslant 2^6$ *und* $C_V(\Sigma_6) = 1$, *dann gilt*:

$|V| = 2^4$ *und V ist ein natürlicher Modul,*

oder

$|V| = 2^5$ *und V ist dual zu einem orthogonalen* Σ_6*-Modul.*

Beweis. Aus (1.7) folgt $|V| \geqslant 2^4$ und V ist ein natürlicher Modul, falls $|V| = 2^4$ ist.

Sei nun $|V| = 2^5$. Wegen $C_V(\Sigma_6) = 1$ und (1.7)(b) ist $|[V, \Sigma_6]| = 2^4$. Die 16 Elemente in $V \backslash [V, \Sigma_6]$ zerfallen in Bahnen der Längen 10 und 6. Also ist V dual zu einem orthogonalen Modul.

Falls $|V| = 2^6$, so ist wegen $C_V(A_6) = 1$, $|[V, A_6]| = 2^4$. Also existieren drei unter A_6 invariante Unterräume U_1, U_2, U_3 der Ordnung 2^5. In jedem U_i existiert nun eine Bahn $\{a_k^i \mid 1 \leqslant k \leqslant 6\}$ der Länge 6. Dabei seien die Bezeichnungen so gewählt, daß $C_{A_6}(a_k^i) = C_{A_6}(a_k^j)$ für $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 6$ ist.

Dann ist $x_k := a_k^1 + a_k^2 + a_k^3 \in [V, A_6]$ und wird von einer A_5 zentralisiert. Da $[V, A_6]$ keine Bahn der Länge 6 enthält, folgt $x_k = 1$. Sei $y^i := a_1^i + a_2^i$. Dann ist $y^i \in [V, A_6]$, und y^i wird von $C_{A_6}(a_1^i) \cap C_{A_6}(a_2^i) \simeq A_4$ zentralisiert. Dadurch ist y^i eindeutig bestimmt, insbesondere ist $y^1 = y^2 = y^3 = y^1 +$

y^2+y^3. Andererseits ist $y^1+y^2+y^3=x_1+x_2=1$. Also kommt der Fall $|V|=2^6$ nicht vor. ∎

(1.10) *Sei $G \simeq Sp(4, q)$, $q=2^k$ und V ein natürlicher G-Modul. Gemäß der Definition eines natürlichen Moduls fassen wir V als symplektischen Raum über $GF(q)$ auf. Dann gilt:*

(i) *Ist $H \leqslant V$ eine Hyperebene, so ist $|C_G(H)|=q$.*

(ii) *Ist $A \leqslant G$ und $|[V, A]|=q$, so gilt $|V/C_V(A)|=q$.*

(iii) *Ist $A \leqslant G$ und $[V, A, A]=1$, so zentralisiert A eine isotrope Ebene in V.*

(iv) *Ist $H \leqslant V$ eine isotrope Ebene, so gilt für $T=C_G(H)$: $|T|=q^3$, T ist elementarabelsch und $H=C_V(T)=[V, T]$.*

(v) *Sei $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $x, y \in S$ mit $[x,y] \neq 1$. Dann ist $[V, [x, y]]$ die von S normalisierte isotrope Ebene.*

(vi) *Sei $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $A \trianglelefteq S$ und $[V, A, A]=1$. Dann zentralisiert A die von S normalisierte isotrope Ebene.*

(vii) *Sei $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Dann ist $|[V, S]|=q^3$, $[V, S, S]$ ist eine isotrope Ebene und $|[V, S, S, S]|=q$.*

Beweis. Alle Aussagen folgen durch leichte Rechnungen aus den Definitionen. ∎

(1.11) *Sei $G \simeq Sp(4, 2^k)$, $A \leqslant G$ eine nichttriviale elementarabelsche 2-Gruppe und V ein treuer* $\mathrm{GF}(2)[G]$*-Modul. Es gelte:*

(i) $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$.

(ii) $V=\langle C_V(S) \mid S \in \mathrm{Syl}_2(G)\rangle$.

Dann ist $V/C_V(G)$ ein natürlicher $Sp(4, 2^k)$-Modul.

Beweis. Aus (i) folgt mit einem Resultat von B. Cooperstein [3], daß jeder nichttriviale Kompositionsfaktor von V ein natürlicher G-Modul ist. Enthält V zwei nichttriviale Kompositionsfaktoren, so folgt $|V/C_V(A)| \geqslant q^2$, also $|A| \geqslant q^2$ und aus (1.10)(i) folgt $|V/C_V(A)| \geqslant q^4$ im Widerspruch dazu, daß A elementarabelsch ist.

Aus (ii) und (1.1) folgt $V=[V, G]C_V(G)$.

Falls $k>1$ ist, so ist $G=O^2(G)$, und $V/C_V(G)$ ist der nichttriviale Kompositionsfaktor von V, also ein natürlicher G-Modul.

Falls $k=1$ ist, so existiert ein Element $d \in G$ mit $|d|=3$ und $|[V, d]|=4$. Nun läßt sich $O^2(G)$ mit Hilfe von drei Konjugierten von d erzeugen, also ist $|[V, O^2(G)]| \leqslant 2^6$. Wegen $[V, G]=[V, G, G]$ ist $[V, G]=[V, O^2(G)]$. (1.9), angewandt auf den zu $[V, G]$ dualen Modul, liefert, daß $[V, G]$ ein natürlicher oder orthogonaler Modul ist. Also ist auch für $k=1$, $V/C_V(G)$ ein natürlicher G-Modul. ▮

(1.12) Sei (V_0, s) ein 4-dimensionaler, nichtausgearteter symplektischer Raum über $GF(q)$ mit $q=2^k$. Sei $G=Sp(V_0, GF(q), s)$ und $V:=GF(2^k)\times V_0$. Für $x, y, \lambda \in GF(q)$, $v, w \in V_0$ und $g \in G$ definieren wir:

$$(y, v)+(x, w) := (x+y+s(v, w), v+w)$$

$$\lambda(y, v) := (\lambda^2 y, \lambda v)$$

$$(y, v)^g := (y, v^g)$$

Weiterhin definieren wir $f\colon V \to GF(q)$ durch

$$f((y, v)) := y.$$

Dann ist (V, f) ein orthogonaler Raum über $GF(q)$, und V ist ein orthogonaler Modul für G.

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus der Definition. ▮

(1.13) Sei $G \simeq Sp(4, 2^k)$ und V ein $GF(2)[G]$-Modul. Ist $\bar{V}=V/C_V(G)$ ein natürlicher G-Modul, so ist $[V, G]$ isomorph zu einem Faktormodul eines orthogonalen G-Moduls.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $V=[V, G]$ ist. Falls $k=1$ ist, so folgt die Behauptung aus (1.9) durch Betrachtung des zu V dualen Moduls. Sei also im folgenden $k>1$.

(1) Sei $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, dann ist $\overline{C_V(S)} = C_{\bar{V}}(S)$.

Sei $P := C_G(C_{\bar{V}}(S))$, wegen $k>1$ ist $O^2(P)=P$. Sei U das Urbild von $C_{\bar{V}}(S)$ in V. Dann ist $[U, P] \leqslant C_V(G)$, also $[U, P, P]=1$ und, wegen $P=O^2(P)$, $[U, P]=1$. Wegen $S \leqslant P$ folgt $U=C_V(S)$ und $\overline{C_V(S)}=C_{\bar{V}}(S)$. Außerdem haben wir gezeigt:

(2) $[C_V(S), P]=1$.

(3) Sei W mit $C_V(G) \leqslant W$ und $\bar{W}$ ist isotrope Ebene in $\bar{V}$. Sei $P_1 = N_G(\bar{W})$. Dann ist $W=C_V(G) \oplus [W, P_1]$.

Aus (1) folgt $[W, O_2(P_1)]=1$. Nun ist $\bar{P}_1 := P_1/O_2(P_1) \simeq GL(2, 2^k)$ und $[\bar{W}, Z(\bar{P}_1)] = \bar{W}$. Aus dem Satz von Maschke folgt $U=C_V(G) \oplus [U, Z(\bar{P}_1)]$ und damit die Behauptung.

(4) Sei $B := \bigcup_{g \in G} [W, P_1]^g$. Dann existiert eine Bijektion $\varphi\colon \bar{V} \to B$ mit $\varphi(x^g)=\varphi(x)^g$ für alle $x \in \bar{V}$ und $g \in G$. Sei $h(x, y) := \varphi(x+y)+\varphi(x)+\varphi(y)$. Dann ist $h(x, y) \in C_V(G)$. Jedes Element $v \in V$ läßt sich eindeutig schreiben als $v=c+\varphi(x)$ mit $c \in C_V(G)$ und $x \in \bar{V}$.

Aus (2) und (3) folgt nämich $|B| = q^4$ mit $q = 2^k$. Also ist $B \cap C_V(G) = \{1\}$ und $BC_V(G)/C_V(G) = \bar{V}$. Hieraus folgen sofort alle Behauptungen.

(5) Sei s die symplektische Form auf $\bar{V}$, dann ist $h(x, y) = \bar{h}(s(x, y))$ mit einer geeigneten Abbildung

$$\bar{h}\colon \quad \mathrm{GF}(q) \to C_V(G).$$

Aus (3) folgt zunächst $h(x, y) = 0$ falls $s(x, y) = 0$. Seien nun $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \bar{V}$ mit $s(x, y) = s(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$. Dann existiert ein $g \in G$ mit $x^g = \tilde{x}$ und $y^g = \tilde{y}$, und es folgt

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \varphi(x+y) + \varphi(x) + \varphi(y) = [\varphi(x+y) + \varphi(x) + \varphi(y)]^g \\ &= \varphi(\tilde{x} + \tilde{y}) + \varphi(\tilde{x}) + \varphi(\tilde{y}) = h(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Also hängt $h(x, y)$ nur von $s(x, y)$ *ab*.

(6) $\bar{h}(\lambda + \mu) = \bar{h}(\lambda) + \bar{h}(\mu)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathrm{GF}(q)$.

Seien $x, y \in \bar{V}$ mit $s(x, y) = 1$, dann folgt

$$\begin{aligned} \bar{h}(\lambda + \mu) = h(x, (\lambda + \mu)\, y) &= \varphi(x + \lambda y + \mu y) + \varphi(\lambda y + \mu y) + \varphi(x) \\ &= h(x + \lambda y, \mu y) + \varphi(x + \lambda y) + \varphi(\mu y) + \varphi(\lambda y) + \varphi(\mu y) + \varphi(x) \\ &= \bar{h}(\mu) + h(x, \lambda y) + \varphi(x) + \varphi(\lambda y) + \varphi(\lambda y) + \varphi(x) \\ &= \bar{h}(\mu) + \bar{h}(\lambda). \end{aligned}$$

Sei nun $V_1 = \mathrm{GF}(q) \times \bar{V}$ der in (1.12) beschriebene orthogonale G-Modul.

Wir definieren $\Phi\colon V_1 \to V$ durch $\Phi((y, x) := \bar{h}(y) + \varphi(x)$. Dann ist $\Phi((y, x)^g) = \Phi((y, x^g)) = \bar{h}(y) + \varphi(x^g) = (\bar{h}(y) + \varphi(x))^g = (\Phi((y, x)))^g$ und

$$\begin{aligned} \Phi((y, x) + (u, v)) &= \Phi((y + u + s(x, v), x + v) \\ &= \bar{h}(y) + \bar{h}(u) + \bar{h}(s(x, v)) + \varphi(x + v) \\ &= \bar{h}(y) + \bar{h}(u) + h(x, v) + \varphi(x + v) \\ &= \bar{h}(y) + \bar{h}(u) + \varphi(x) + \varphi(v) = \Phi(y, x) + \Phi(u, v). \end{aligned}$$

Also ist Φ mit der Operation von G verträglich und GF(2)-linear. Somit ist $V_1/\mathrm{Kern}\,\Phi \simeq \mathrm{Im}\,\Phi$ als $\mathrm{GF}(2)[G]$-Modul.

Nun ist $\mathrm{Im}\,\Phi$ invariant unter G, also wegen $V = [V, G]$, $\mathrm{Im}\,\Phi = V$, und V ist isomorph zu einem Faktormodul des orthogonalen Moduls V_1. ∎

(1.14) *Sei $G \simeq Sp(4, q)$, $q = 2^k$ und V ein orthogonaler G-Modul. Wir nennen $x \in G$ Transvektion, falls $|V/C_V(x)| = q$ ist. Dann gilt:*

(i) *Sei* $X \subseteq G$, *dann ist* $C_V(X)/C_V(G) = C_{\bar{V}}(X)$ *mit* $\bar{V} = V/C_V(G)$.

(ii) *Sei* $A \leqslant G$ *mit* $[V, A, A] = 1$ *und* $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$, *dann ist* $C_V(G) \leqslant [V, A]$, *oder* $q = 2$ *und* A *wird von ein oder zwei Transvektionen erzeugt.*

(iii) *Wir definieren folgende Typen von quadratisch operierenden Gruppen*:

(Typ I) $|A| = q$ *und* $|V/C_V(A)| = q$.

(Typ II) $|A| = q^2$, A *enthält genau eine Untergruppe* B *vom* (Typ I), *und* B *enthält alle Transvektionen in* A.

(Typ III) $|A| = q^2$ *und* A *enthält genau zwei Untergruppen vom* (Typ I).

(Typ IV) $|A| = q^2$ *und* A *enthält keine Transvektionen.*

(Typ V) $|A| = q^3$.

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Ist* A *vom* (Typ I), *so gilt* $|[V, A]| = q^2$, *falls* $q > 2$, *und* $|[V, A]| = 2$, *falls* $q = 2$.

(2) *Ist* A *vom* (Typ II), *so gilt* $|[V, A]| = q^3$.

(3) *Ist* A *vom* (Typ III), *so gilt* $|[V, A]| = q^3$, *falls* $q > 2$, *und* $|[V, A]| = 4$, *falls* $q = 2$. *Weiterhin liegen alle Transvektionen in* A *in einer der beiden Gruppen vom* (Typ I) *in* A.

(4) *Ist* A *vom* (Typ IV), *so gilt* $|[V, A]| = q^3$,

(5) *Ist* A *vom* (Typ V), *so enthält* A *alle Transvektionen in* $N_G(A)$ *und wird von diesen erzeugt. Weiterhin ist* $|[V, A]| = q^3$.

(iv) *Sei* $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. *Dann enthält* S *genau zwei maximale elementarabelsche Untergruppen* E *und* T. *Dabei ist* T *die eindeutige Gruppe vom* (Typ V) *in* S, *und für* E *gilt*:

(a) E *enthält genau eine Untergruppe* A *vom* (Typ I), *und es gilt* $A \leqslant Z(S)$.

(b) $|[V, E]| = q^4$ *und* $|[C_V(A), E]| = q$.

(v) *Seien* S, T *und* E *wie in* (iv) *und* $A \leqslant S$ *vom* (Typ I).

Ist $A \leqslant E$, *so gilt* $C_S([V, A]) = N_S(C_V(A)) = C_S(A) = S$.
Ist $A \nleqslant E$, *so gilt* $C_S([V, A]) = N_S(C_V(A)) = C_S(A) = T$.

(vi) *Seien* S *und* T *wie in* (iv), *und* $A \leqslant S$ *eine quadratisch operierende Gruppe. Dann ist* $[V, A] \cap C_V(T) \nleqslant C_V(G)$.

Beweis. (i) folgt unmittelbar aus (1.12).

(ii) Sei A mit $[V, A, A] = 1$, $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$ und $C_V(G) \nleqslant [V, A]$. Dann normalisiert A eine zu $C_V(G)$ komplementäre Hyperebene H.

Schränkt man die quadratische Form f auf H ein, so sieht man, daß A in einer der orthogonalen Gruppen $O^{\pm}(4, q)$ liegt. Nach (1.10)(iii), (iv) sind die quadratisch operienden Gruppen diejenigen, die eine isotrope Ebene zentralisieren. Damit rechnet man die Behauptung leicht nach.

(iii) Wegen (ii) bleibt nur noch zu zeigen, daß A alle Transvektionen in $N_G(A)$ enthält, wobei A vom (Typ V) sei. Nun ist $C_{\bar{V}}(A)$ eine isotrope Ebene und $N_G(A) = N_G(C_{\bar{V}}(A))$. Eine Transvektion, die eine isotrope Ebene normalisiert, zentralisiert diese und liegt in A. Die Transvektionen in A sind diejenigen, deren Kommutatorgruppe in $C_V(A)$ liegen. Man überlegt sich leicht, daß A von diesen Transvektionen erzeugt wird.

(iv) Daß S genau zwei maximale elementarabelsche Untergruppen enthält, ist eine wohlbekannte Tatsache. E läßt sich definieren als

$$C_G(X^{\perp}/X), \qquad \text{wobei} \quad X = C_{\bar{V}}(S)$$

ist. Ist also $A \leqslant E$ vom Type I, so folgt $C_{\bar{V}}(A) = X^{\perp}$ und $[\bar{V}, A] = X$. Also ist $A \leqslant Z(S)$. $|[V, E]| = q^4$ und $|[C_V(A), E]| = q$ folgt aus (1.12).

(v) und (vi) prüft man durch leichte Rechnungen nach. ∎

(1.15) *Sei $G \simeq Sp(4, q)$, $q = 2^k$ und V ein natürlicher G-Modul. Dann gilt:*

(i) *Sei $q > 2$, T vom* (Typ I) *und $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ mit $\langle T, S\rangle = G$. Dann ist $\langle T, \Phi(S)\rangle$ der Zentralisator eines Punktes in V, und aus $\Phi(S) \leqslant A \leqslant S$ und $\langle A, T\rangle \neq G$ folgt, daß A die von S normalisierte Ebene zentralisiert. Insbesondere ist $|A| \leqslant q^3$.*

(ii) *Sei $t \in G^{\#}$ mit $t^2 = 1$.*
Dann ist $\langle \Phi(S) | \langle S, t\rangle = G,\ S \in \mathrm{Syl}_2(G)\rangle = 0^2(G)$.

(iii) *Sei t eine Transvektion, $y \in G^{\#}$, $|y| = 2$ und y keine Transvektion. Sei $[t, y] = 1$. Dann existiert eine 2-Sylowgruppe S und ein $T \leqslant S$ vom* (Typ V) *mit $\langle S, t\rangle = G = \langle T, y\rangle$.*

(iv) *Sei $y \in G^{\#}$, $y^2 = 1$, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $y \in S$. Dann existiert ein $t \in G$ mit $t^2 = 1$, $t \in \langle y, y^t\rangle$ und $\langle S, y^t\rangle = G$.*

Beweis. (i) Sei $T_0 \leqslant \Phi(S)$ vom (Typ I). Wegen $\langle T, S\rangle = G$ ist $E = C_V(T_0) \cap C_V(T)$ eine anisotrope Ebene und $\langle T, T_0\rangle = C_G(E) \simeq L_2(q)$. Wegen $C_V(\Phi(S)) \leqslant C_V(T_0)$ ist $U = E \cap C_V(\Phi(S)) \neq 1$ und $\langle \Phi(S), T\rangle = C_G(U)$. Nun ist $UC_V(S)$ die von S normalisierte isotrope Ebene, und aus $\Phi(S) \leqslant A \leqslant S$ und $\langle T, A\rangle \neq G$ folgt $\langle T, A\rangle = C_G(U)$ und $[UC_V(S), A] = 1$.

(ii) Dies prüft man für jede der drei Konjugiertengklassen von Involutionen durch einfaches Rechnen nach.

(iii) Man überlegt sich leicht, daß die maximalen Untergruppen von G die ein T vom (Typ V) enthalten, von der Form $N_G(X)$ mit $X \leqslant C_V(T)$ sind. Man wählt nun $T \leqslant G$ mit $C_V(T) \cap C_V(y) = 1$. Dann folgt $\langle T, y \rangle = G$. Wegen $[y, t] = 1$ ist $[V, t] \leqslant C_V(y) \leqslant C_V(t)$. Man wählt nun $Z \in C_V(T) \setminus C_V(t)$. Dann gilt für $S := C_G(Z) \cap N_G(C_V(T))$, daß $T \leqslant S$ und $\langle S, t \rangle = G$ ist.

(iv) Man wähle eine Diedergruppe der Ordnung $2n$ mit n ungerade, die y enthält, und in keiner der beiden maximalen Untergruppen von G, die S enthalten, liegt. Dann folgt unmittelbar die Behauptung. ∎

(1.16) *Sei P eine endliche Gruppe, $N \lhd P$, $A \leqslant P$, Sei für $X \leqslant P$ $\bar{X} := XN/N$. Existiert ein $\tau \in \bar{P}$ mit $\bar{P} = \langle \bar{A}, \bar{A}^{\tau} \rangle$, so gibt es ein $t \in P$ mit folgenden Eigenschaften*:

(i) $\bar{t} = \tau$,

(ii) $t \in \langle A, A^t \rangle$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion über $|N|$. Falls $|N| = 1$ ist, so ist die Behauptung trivialerweise richtig.

Sei $t_0 \in P$ mit $\bar{t}_0 = \tau$. Sei $P_0 = \langle A, A^{t_0} \rangle$. Falls $P_0 = P$ ist, so folgt sofort (i) und (ii). Sei also $P_0 \neq P$. Wegen $\bar{t}_0 = \tau$ ist $P_0 N = P$ und $P_0/N_0 \simeq \bar{P}$ mit $N_0 = N \cap P_0$. Sei τ_0 das Urbild von τ unter dem kanonischen Isomorphismus von P_0/N_0 nach $\bar{P}$. Nun ist $|N_0| < |N|$ und nach Induktionsannahme existiert ein $t \in P_0$ mit $t \in \langle A^t, A \rangle$ und $tN_0/N_0 = \tau_0$. Dann ist $tN/N = \tau$ und die Behauptungen bewiesen. ∎

(1.17) *Sei $G \simeq \hat{\Sigma}_6$ und U ein treuer* GF(2)[G]*-Modul. U heißt ein natürlicher $\hat{\Sigma}_6$-Modul, falls ein zu* GF(4) *isomorpher Körper K existiert, so daß U ein* 3*-dimensionaler Vektorraum über K ist, G eine Gruppe von semilinearen Abbildungen von U über K induziert und G ein Hyperoval in der zu U gehörigen projektiven Ebene über K normalisiert* (*vgl.* [12, *S.* 7–9 *und* 61–63]).

Sei nun $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $A \leqslant S$ eine elementarabelsche Untergruppe und V ein treuer GF(2)[G]*-Modul. Es gelte*:

(a) $|V/C_V(A)| \leqslant |A|$, $A \neq 1$,

(b) $V = \langle C_V(S) \mid S \in Syl_2(G) \rangle$.

Dann gilt:

(i) *$V = [V, G] \oplus C_V(G)$, und $[V, G]$ ist ein natürlicher $\hat{\Sigma}_6$-Modul für G.*

(ii) *$A \lhd S$, $|A| = 4$ und $A \leqslant H$, wobei $H = O^2(G) \simeq \hat{A}_6$ ist.*

(iii) *$S \leqslant N_G([V, A])$, $C_S([V, A]) = A$, und $|V/C_V(A)| = 4$.*

(iv) *Sei $g \in G$ mit $\langle A^g, S \rangle = G$. Dann ist $[A^g, C_V(S)] \nleqslant C_V(A)$.*

Beweis. Durch Inspektion der elementarabelschen Untergruppen von G überlegt man sich leicht, daß aus (a) $|V/C_V(H)| \leqslant 2^6$ folgt. Nun ist wegen $\Phi(G) \simeq C_3$ $V = [V, \Phi(G)] \oplus C_V(\Phi(G))$. Aus (b) folgt nun $C_V(\Phi(G)) = C_V(G)$ und somit $[V, \Phi(G)] = [V, G]$.

Wegen $[H, \Phi(G)] = 1$ und $L_1(4) \simeq C_3$, $L_2(4) \simeq A_5$ folgt $|V| = 2^6$. $G/\Phi(G) \simeq \Sigma_6$ operiert nun auf den 21-Punkten der projektiven Ebene über GF(4). Es existiert dann eine Bahn der Länge 6, und diese bildet ein Hyperoval. Also gilt (i).

(ii) Da die Elemente aus $\hat{\Sigma}_6 \backslash \hat{A}_6$ nur als semilineare Abbildungen operieren, überlegt man sich leicht, daß aus (a) folgt: $A \leqslant H$. Die elementarabelschen Untergruppen von H liegen nun in einer der beiden Konjugiertenklassen von maximalen elementarabelschen Untergruppen der $L_3(4)$. Es folgt, $|V/C_V(A)| = 4$ bzw. $|V/C_V(A))| = 16$. Also ist A in S eindeutig bestimmt und $A \lhd S$, $|A| = 4$.

(iii) $S \trianglelefteq N_G([V, A])$ folgt aus $A \lhd S$, und $C_S([V, A]) = A$ folgt aus (ii), denn für $B = C_S([V, A])$ gilt ebenfalls $|V/C_V(B)| \leqslant B$.

(iv) Mit $[A^g, C_V(S)] \leqslant C_V(A)$ folgt aus der GF(4)-Linearität, daß $[A^g, C_V(T)] \leqslant C_V(A)$ ist, wobei $T = S \cap H$ sei. Wegen $\langle A^g, S\rangle = G$ folgt $C_V(T)\, C_V(A^g) = V$, also ist $[A^g, C_V(T)] = [A^g, V]$, und es folgt $G = \langle A^g, S\rangle \leqslant N_G(C_V(A))$, im Widerspruch zur Irreduzibilität des natürlichen $\hat{\Sigma}_6$-Moduls. ∎

2. Kapitel

Wir führen nun die grundlegenden Begriffe für die weitere Arbeit ein.

Sei $S \in \mathrm{Syl}_2(M)$, $H = S \cdot \mathrm{Aut}(S)$ das semidirekte Produkt von S mit $\mathrm{Aut}(S)$ und $G = H *_S M$ das freie amalgamierte Produkt von H und M über S.

Sei $\Gamma = \Gamma(G, H, M)$ der rechte Nebenklassengraph von G bezüglich der Untergruppen H und M.

Eine genaue Erläuterung dieser Begriffe findet sich in [5].

(2.1) (i) *G operiert kanten-, aber nicht eckentransitiv auf Γ.*

(ii) *Γ ist ein Baum.*

(iii) *Γ ist bipartit, $\Gamma = H^G \cup M^G$.*

(iv) *Für $\lambda \in V(\Gamma)$ gilt $G_\lambda \simeq H$ oder M.*

(v) *G_λ operiert transitiv auf $\Delta(\lambda)$ für alle $\lambda \in V(\Gamma)$.*

(vi) *Sind α und β benachbarte Ecken, so enthält $G_\beta \cap G_\alpha$ keinen nichttrivialen Normalteiler von G.*

(vii) *G operiert treu auf Γ.*

Beweis. Die Aussagen (i)–(v) finden sich in [5]. Zum Beweis von (vi) können wir annehmen $\alpha = M$ und $\beta = H$, dann ist $G_\alpha \cap G_\beta = S$, und ein Normalteiler von G in S ist eine charakteristische Untergruppe von S, die normal in M ist.

(vii) Folgt aus (vi), denn G_Γ liegt in $G_\alpha \cap G_\beta$. ▮

Im folgenden bezeichne α immer eine zu M konjugierte Ecke und β eine zu H konjugierte Ecke.

Sei d die übliche Abstandmetrik auf Γ.

$$\Delta^i(\lambda) := \{\delta \in \Gamma \mid d(\lambda, \delta) = i\}, \qquad \lambda \in V(\Gamma).$$

Für $\lambda, \delta \in V(\Gamma)$ sei $\gamma(\lambda, \delta)$ der eindeutig bestimmte Weg von λ nach δ.

$$\begin{aligned}
&G_\lambda^{(i)} := \bigcap_{\delta \in \Delta^i(\lambda)} G_\delta,\\
&Q_\alpha := G_\alpha^{(1)}, \qquad S_\beta := G_\beta^{(1)}, \qquad H_\alpha := O^2(G_\alpha)\, Q_a\\
&Z_\alpha := \langle \Omega_1(Z(S)) \mid S \in \mathrm{Syl}_2(G_\alpha)\rangle,\\
&X_\alpha := \Omega_1(Z(Q_\alpha)),\\
&V_\alpha := \langle Z_\delta \mid \delta \in \Delta^2(\alpha)\rangle,\\
&V_\beta := \langle Z_\delta \mid \delta \in \Delta(\beta)\rangle,\\
&b := \min\{d(\alpha, \alpha') \mid Z_\alpha \nleq G_{\alpha'}^{(1)}, \alpha' \in V(\Gamma)\}.
\end{aligned}$$

Wir nennen (α, α') kritisch, falls $d(\alpha, \alpha') = b$ und $Z_\alpha \nleq G_{\alpha'}^{(1)}$ ist. Sei

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha, \alpha') &= (\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+b-1, \alpha+b)\\
&= (\alpha'-b, \alpha'-b+1, \ldots, \alpha'-1, \alpha').
\end{aligned}$$

(2.2) (i) $S_\beta = G_\beta \cap G_\alpha \in \mathrm{Syl}_2(G_\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \Delta(\beta)$.

(ii) $Q_\alpha = O_2(G_\alpha) = G_\alpha^{(2)}$.

(iii) $[Q_\alpha, Z_\alpha] = 1$.

(iv) b *ist gerade*, $\alpha \sim \alpha'$.

(v) $[Z_\alpha, O^2(G_\alpha)] \neq 1$.

(vi) $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \neq 1$, $Z_\alpha \leqslant G_{\alpha'}$, $Z_{\alpha'} \leqslant G_\alpha$.

(vii) $Z_\alpha \leqslant X_\alpha$, *falls* $b > 0$ *ist, insbesondere ist* Z_α *elementarabelsch.*

(viii) $X_\alpha \leqslant G_\lambda^{(1)}$ *für alle* $\lambda \in V(\Gamma)$ *mit* $d(\lambda, \alpha) < b$.

(ix) (α', α) *ist ein kritisches Paar.*

Beweis. (i) Sei o.B.d.A. $\beta = H$ und $\alpha = M$, dann ist $G_\beta \cap G_\alpha = S \lhd H = G_\beta$. Also ist $G_\beta \cap G_\alpha = G_\beta \cap G_\delta = G_\beta^{(1)}$ für alle $\delta \in \Delta(\beta)$ und $G_\beta \cap G_\alpha \in \mathrm{Syl}_2(G_\alpha)$.

(ii) $Q_\alpha = \bigcap_{\beta \in \Delta(\alpha)} G_\beta \cap G_\alpha = \bigcap_{g \in G_\alpha} S^g = O_2(G_\alpha)$ und $Q_\alpha \leqslant G_\beta \cap G_\alpha = S_\beta \leqslant G_\delta$ für alle $\delta \in \Delta(\beta)$, $\beta \in \Delta(\alpha)$, also ist $Q_\alpha \leqslant G_\alpha^{(2)} \leqslant G_\alpha^{(1)} = Q_\alpha$.

(iii) folgt sofort aus $Q_\alpha = O_2(G_\alpha)$ und der Definition von Z_α.

(iv) Nehmen wir an b ist ungerade, also $\alpha' \sim \beta$. Dann folgt $Z_\alpha \nleqslant G_{\alpha'}^{(1)} = S_{\alpha'}$. Also ist wegen $Q_{\alpha'-1} \leqslant S_{\alpha'}$, $Z_\alpha \nleqslant Q_{\alpha'-1} = G_{\alpha'-1}^{(1)}$, im Widerspruch zur Minimalität von b.

(v) Aus $[Z_\alpha, O^2(G_\alpha)] = 1$ folgt $\Omega_1(Z(S_\beta)) \lhd \langle G_\beta, G_\alpha \rangle = G$ für $\beta \in \Delta(\alpha)$, im Widerspruch zu (2.1)(vi).

(vi) Aus der Minimalität von b folgt $Z_\alpha \leqslant G_{\alpha'}$ und $Z_{\alpha'} \leqslant G_\alpha$. Aus $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = 1$ folgt wegen $Z_\alpha \nleqslant G_{\alpha'}^{(1)} = Q_{\alpha'}$ und der Struktur von $G_{\alpha'} \simeq M$, daß $[Z_{\alpha'}, O^2(G_{\alpha'})] = 1$ ist, im Widerspruch zu (v).

(vii) Aus $b > 0$ folgt $Z_\alpha \leqslant Q_\alpha$ und $\Omega_1(Z(S)) \leqslant X_\alpha = \Omega_1(Z(Q_\alpha))$ für alle $S \in \mathrm{Syl}_2(G_\alpha)$, also ist $Z_\alpha \leqslant X_\alpha$.

(viii) Nehmen wir an $X_\alpha \nleqslant G_\lambda^{(1)}$ für ein $\lambda \in V(\Gamma)$ mit $d(\lambda, \alpha) < b$. Sei zusätzlich λ mit $d(\lambda, \alpha)$ minimal bezüglich $X_\alpha \nleqslant G_\lambda^{(1)}$. Analog wie in (iv) gilt $\lambda \sim \alpha$. Aus $[X_\alpha, Z_\lambda] = 1$ folgt wie in (vi) $[Z_\lambda, O^2(G_\lambda)] = 1$, im Widerspruch zu (v), also ist $[X_\alpha, Z_\lambda] \neq 1$ und $Z_\lambda \nleqslant Q_\alpha = G_\alpha^{(1)}$, im Widerspruch zur Minimalität von b.

(ix) Wegen $[Z_{\alpha'}, Z_\alpha] \neq 1$ und $[Z_\alpha, Q_\alpha] = 1$ ist $Z_{\alpha'} \nleqslant Q_\alpha$, also ist (α', α) kritisch. ▮

(2.3) *Sei $b > 0$ und (α, α') kritisch, dann gilt:*

(i) *$G_\alpha / C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \simeq Sp(4, q)$, oder $q = 2$ und $G_\alpha / C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \simeq \hat{\Sigma}_6$.*

(ii) *$Z_\alpha / Z_\alpha \cap Z(G_\alpha)$ is ein natürlicher $G_\alpha / C_{G_\alpha}(Z_\alpha)$-Modul.*

(iii) *$[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$ und $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}, Z_{\alpha'}] = 1$.*

(iv) *$|Z_\alpha Q_{\alpha'} / Q_{\alpha'}| = |Z_{\alpha'} Q_\alpha / Q_\alpha| \in \{q, q^2\}$.*

(v) *$Z_\alpha \cap Q_{\alpha'} = C_{Z_\alpha}(Z_{\alpha'})$.*

Beweis. (iii) folgt unmittelbar aus (2.2)(v) und (2.2)(vi). (v) folgt aus (2.2)(ix) und der Struktur von G_α.

Zum Beweis von (i) nehmen wir o.B.d.A. an, daß $|Z_\alpha / C_{Z_\alpha}(Z_{\alpha'})| \leqslant |Z_{\alpha'} / C_{Z_{\alpha'}}(Z_\alpha)|$ ist. Dann folgt die Behauptung aus (1.5).

(ii) folgt wegen $Z_\alpha = \langle C_{Z_\alpha}(S) \mid S \in \mathrm{Syl}_2(G_\alpha) \rangle$ aus (1.11) und (1.17).

(iv) folgt aus (iii), (v), (1.13), (1.14)(i) und (1.10)(i), (iii) bzw. (1.17). ▮

Den Fall $G_\alpha / C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \simeq \hat{\Sigma}_6$ behandeln wir im 6. Kapitel. Wir nehmen deshalb bis dahin an, daß $G_\alpha / C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \simeq Sp(4, q)$ ist. Außerdem sei im folgenden immer $b > 0$.

(2.4) *Sei* $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}|=q$. *Dann ist* $X_\alpha = Z_\alpha$, *oder* $q=2$ *und* $X_\alpha = U \oplus C$ *mit* $C \leqslant Z(G_\alpha)$, *wobei* U *isomorph zu einem der in* (1.8) *angegebenen Moduln ist.*

Beweis. Aus $[Z_\alpha \cap Q_{\alpha'}, X_\alpha]=1$ folgt mit (1.10)(i):

$$q=|X_{\alpha'}Q_\alpha/Q_\alpha| = |X_{\alpha'}/C_{X_{\alpha'}}(Z_\alpha)|.$$

Falls $q>2$ ist, so wird $G_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ von vier Konjugierten von $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ erzeugt, also ist $|X_{\alpha'}/X_{\alpha'} \cap Z(G_\alpha)| \leqslant q^4$, und wegen $|Z_{\alpha'}/Z_{\alpha'} \cap Z(G_\alpha)| = q^4$ folgt $X_{\alpha'} = Z_{\alpha'}$.

Falls $q=2$ ist, so induziert Z_α Transvektionen auf $X_{\alpha'}$, und die Behauptung folgt aus (1.8). ∎

(2.5) *Sei* (α, α') *kritisch. Dann definieren wir*:

$$\tilde{Z}_{\alpha'} := \begin{cases} Z_{\alpha'} & \text{falls } q>2, \text{ oder } Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'} \text{ nicht vom (Typ III) ist,} \\ C_{Z_{\alpha'}}(\tau) & \text{falls } q=2, \text{ und } Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'} \text{ vom (Typ III) ist.} \end{cases}$$

Dabei sei $\tau \in S_{\alpha'-1}$ *so gewählt, daß* τ *als Transvektion auf* $Z_{\alpha'}$ *operiert, d.h.* $|Z_{\alpha'}/C_{Z_{\alpha'}}(\tau)|=q$, *und* $Z_\alpha\langle\tau\rangle Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ *vom* (Typ V) *ist.*

(2.6) *Sei* (α, α') *kritisch. Dann gilt*:

(i) $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ *ist vom* (Typ I), (Typ II), (Typ III) *oder* (Typ IV).

(ii) $Z_{\alpha'}Q_\alpha/Q_\alpha$ *ist vom gleichen* Typ *wie* $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$.

(iii) *Falls* $q=2$ *und* $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ *vom* (Typ III) *ist, so ist* $\tilde{Z}_{\alpha'} = Z_{\alpha'} \cap H_\alpha$.

(iv) *Ist* $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2$ *und* $T := C_{G_{\alpha'}}([Z_\alpha, Z_{\alpha'}])$ *dann ist* $[T, \tilde{Z}_{\alpha'}] = [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (i) und (ii). Falls $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}|=q$ ist, so folgt aus (1.10)(i), daß $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ und $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ vom (Typ I) sind.

Sei also $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2 = |Z_{\alpha'}Q_\alpha/Q_\alpha|$. Existiert ein $\tau \in Z_\alpha$, das als Transvektion auf $Z_{\alpha'}$ operiert, so gilt für $Y := C_{Z_{\alpha'}}(\tau)$, daß $|YQ_\alpha/Q_\alpha| = q$ und $[Y, \langle\tau\rangle(Z_\alpha \cap Q_{\alpha'})]=1$ ist, also ist YQ_α/Q_α vom(Typ I). Ebenso ist dann $C_{Z_\alpha}(Y)\, Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ vom (Typ I).

Enthält $Z_{\alpha'} \setminus YQ_\alpha$ keine Transvektionen, so sind $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ und $Z_{\alpha'}Q_\alpha/Q_\alpha$ vom (Type II).

Enthält $Z_{\alpha'} \setminus YQ_\alpha$ Transvektionen, so sind $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ und $Z_{\alpha'}Q_\alpha/Q_\alpha$ vom (Typ III).

Enthält Z_α keine Transvektionen, so sind $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ und $Z_{\alpha'}Q_\alpha/Q_\alpha$ vom (Typ IV).

Wir zeigen nun (iii) und (iv).

Falls $q \neq 2$ oder $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ nicht vom (Typ III) sind, so folgt (iv) aus (1.10) und (1.14)(iii).

Sei $q = 2$ und $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ vom (Typ III). Dann ist $Z_\alpha Q_{\alpha'} = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle Q_{\alpha'}$, wobei τ_1 und τ_2 als Transvektionen auf $Z_{\alpha'}$ operieren. Sei τ wie in der Definition von $\tilde{Z}_{\alpha'}$. Dann ist $T = \langle \tau_1, \tau_2, \tau \rangle Q_{\alpha'}$ und $[\tau_i, C_{Z_{\alpha'}}(\tau)] \neq 1$, also $[\tau_i, \tilde{Z}_{\alpha'}] = [\tau_i, Z_{\alpha'}]$. Also ist $[T, \tilde{Z}_{\alpha'}] = [\langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \tilde{Z}_{\alpha'}] = [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]$ und $|[Z_\alpha, \tilde{Z}_{\alpha'}]| = 4$. Da wegen (ii) auch $Z_{\alpha'} Q_\alpha/Q_\alpha$ vom (Typ III) ist, folgt $\tilde{Z}_{\alpha'} = Z_{\alpha'} \cap H_\alpha$. ∎

3. Kapitel

In diesem Kapitel zeigen wir, daß $b \leqslant 4$ ist.

Wir definieren zunächst noch:

$$T^\alpha_\beta := C_{S_\beta}([Z_\alpha, S_\beta, S_\beta]) \qquad \text{für} \quad \alpha \in \Delta(\beta).$$

Dann ist T^α_β/Q_α vom (Typ V), und wird von den Elementen in S_β erzeugt, die als Transvektionen auf Z_α operieren.

(3.1) *Sei $b > 2$, (α, α') kritisch, $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$ und $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha - 1)$ mit $Z_{\alpha-2} Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$.*

Ist $(\alpha - 2, \alpha' - 2)$ nicht kritisch, so gilt:

(i) $q = 2$.

(ii) $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = 2$.

(iii) $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z(G_\alpha)$, $|[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha]| = 2$.

(iv) $Q_\alpha \nleqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$ *und* $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}| = 8$, *oder* $|Q_\alpha Q_{\alpha-2}/Q_{\alpha-2}| = 2 = |Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}|$.

(v) $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}] Z_\alpha \trianglelefteq G_\alpha$.

(vi) *Es gibt einen Weg (δ, β, γ) mit $[Z_\delta, S_\beta] Z_\gamma \ntrianglelefteq G_\gamma$.*

(vii) $X_\alpha = Z_\alpha$.

Beweis. (1) $[Z_{\alpha-2}, \tilde{Z}_{\alpha'}] \nleqslant Z_\alpha Z_{\alpha-2}$.

Andernfalls folgt $Z_{\alpha-2} Z_\alpha \trianglelefteq \langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

(2) $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q$.

Aus $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2$ folgt mit $[Z_{\alpha-2}, [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]] = 1$ und (2.6)(iv), daß $[Z_{\alpha-2}, \tilde{Z}_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$ ist, im Widerspruch zu (1).

(3) $X_\alpha = Z_\alpha$.

Falls $q > 2$, so folgt $X_\alpha = Z_\alpha$ aus (2) und (2.4). Falls $q = 2$ ist, so erhält man falls $X_\alpha \neq Z_\alpha$ ist, aus (2.4) die Struktur von X_α. Man erhält durch leichte Rechnung:

$$[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'}] \leqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}][Z_{\alpha-2}, X_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z_\alpha Z_{\alpha-2},$$

im Widerspruch zu (1).

Sei nun $X := Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha$.

(4) $[Z_{\alpha-2}, X] \neq 1$.

Andernfalls folgt aus (1.10)(i), daß $Z_{\alpha-2} \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$ ist, im Widerspruch zu (1).

Wegen $\Omega_1(Z(S_{\alpha-1})) \leqslant Z_{\alpha-2}$ und $\langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$ ist $Z_\alpha \leqslant Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'}$. Nun ist $|Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'}/Z_\alpha Q_{\alpha'}| = |Z_{\alpha-2}/C_{Z_{\alpha-2}}(X)|$, also gilt

(5) $|Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| \in \{q^2, q^3\}$.

(6) $Z_{\alpha-2}$ operiert quadratisch auf $Z_{\alpha'}$.

Andernfalls ist $|Z_{\alpha'}/C_{Z_{\alpha'}}(Z_{\alpha-2})| = q^3$, denn die 2-Sylowgruppen des Zentralisators einer anisotropen oder isotropen Ebene operieren quadratisch auf dem natürlichen Modul. Also ist $|XQ_{\alpha-2}/Q_{\alpha-2}| = |X/C_X(Z_{\alpha-2})| \geqslant q^2$ und $|[Z_{\alpha-2}, X]| \geqslant q^2$. Andererseits folgt aus (1.14)(iv), daß $|[Z_{\alpha-2}, X]| = q$ ist.

(7) $XQ_{\alpha-2}/Q_{\alpha-2}$ ist vom (Typ I).

Falls $|Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^3$ ist, folgt aus (6), daß $Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$ vom (Type V) ist und von Gruppen vom (Typ I) erzeugt wird, also ist $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'}] \leqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}][Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha]$ im Widerspruch zu (1). Also ist

$$|Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2 \qquad \text{und} \qquad |Z_{\alpha-2}/C_{Z_{\alpha-2}}(X)| = q.$$

Sei $R := [Z_{\alpha-2}, X]$, $T = C_{S_{\alpha-1}}(R)$, und $Y = C_{Z_{\alpha-2}}(X)$. Wegen (1.14)(iii) ist $T = S_{\alpha-1}$ oder $T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$. In jedem Fall ist $Y \lhd T$ und $Y \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$. Also ist $[Y, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$, $YZ_\alpha \lhd \langle T, Z_{\alpha'} \rangle =: L$ und $[R, L] = 1$.

(8) Ist $Q_\alpha \leqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$, so ist $|Q_\alpha Q_{\alpha-2}/Q_{\alpha-2}| = q$ und $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}| = q$.

Sei $R_0 := R[Y, Q_\alpha]$, dann ist $R_0 \lhd L$. Wegen $Q_\alpha \leqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$ ist $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}| \in \{q, q^2\}$. Nehmen wir an $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}| = q^2$. Man überlegt sich leicht wegen $Q_\alpha \lhd S_{\alpha-1}$, daß $R_0 \lhd S_{\alpha-1}$ ist, und $[Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha, S_{\alpha-1}] \leqslant R_0$ gilt. Also ist $R_0 \lhd \langle S_{\alpha-1}, L \rangle = G_\alpha$ und $R_0 \leqslant Z_\alpha$. Also ist $R_0 \leqslant Z(G_\alpha)$ und $[Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha, S_{\alpha-1}] \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zu (1.14)(i) und $Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha \nleqslant Z(S_{\alpha-1})$.

Also ist $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}| = q$ und $|Q_\alpha Q_{\alpha-2}/Q_{\alpha-2}| = q$ nach (1.10)(i).

(9) Ist $Q_\alpha \leqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$, so ist $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z(G_\alpha)$.

Aus (8) folgt $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z(S_{\alpha-1})$ und somit

$$[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z(\langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle) = Z(G_\alpha).$$

(10) Ist $Q_\alpha \nleqslant T_{\alpha-1}^{\alpha-2}$, so ist $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}]\, Z_\alpha \lhd G_\alpha$, $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}| = q^3$ und $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z(G_\alpha)$.

Aus $Q_\alpha \nleqslant T_{\alpha-1}^{\alpha-2}$ folgt $|S_{\alpha-1}/Q_\alpha T_{\alpha-1}^{\alpha-2}| < q$, so daß wegen $\Phi(S_{\alpha-1}) \leqslant T_{\alpha-1}^{\alpha-2}$ und (1.15)(i) folgt: $LQ_\alpha = G_\alpha$. Nun ist $Q_{\alpha-2} \leqslant L$, un somit $\langle Q_{\alpha-2}^{G_\alpha}\rangle = \langle Q_{\alpha-2}^{L}\rangle \leqslant L$, also ist $O^2(G_\alpha) \leqslant L$.

Aus $YZ_\alpha \lhd L$ folgt $[Y, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$. Ist $Y \ntrianglelefteq S_{\alpha-1}$ so folgt $[Z_{\alpha-2}, O^2(G_\alpha)] = [\langle Y^{S_{\alpha-1}}\rangle, O^2(G_\alpha)\rangle] \leqslant Z_\alpha$, also ist $Z_{\alpha-2} Z_\alpha \lhd G_\alpha$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Also ist $Y \lhd S_{\alpha-1}$ und $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}]Z_\alpha = YZ_\alpha \lhd G_\alpha$. Dann ist $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z(S_{\alpha-1})$, also $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \leqslant Z(G_\alpha)$.

(11) $q = 2$.

Nehmen wir an $q > 2$. Falls $[X, Z_{\alpha-2}] \nleqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]$, so folgt aus (6) und (1.14)(iii), daß $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'}] \leqslant [X, Z_{\alpha-2}][Z_\alpha, Z_{\alpha'}]$ gilt, im Widerspruch zu (1).

Also ist $[X, Z_{\alpha-2}] \leqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]$. Nun operiert X als Gruppe vom (Typ I) auf $Z_{\alpha-2}$ und Z_α als Gruppe vom (Typ I) auf $Z_{\alpha'}$, also ist $|[X, Z_{\alpha-2}]| = |[Z_\alpha, Z_{\alpha'}]|$ und

$$[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = [X, Z_{\alpha-2}] \leqslant Z(G_\alpha).$$

Wir können nun (3.1) beweisen. (i) und (ii) folgen aus (11) und (2), (iii), (iv), und (v) folgen aus (8), (9), und (10) (beachte dabei, daß $|Z_{\alpha-2}/Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha| = 2$, $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}] \leqslant Z_\alpha$ und somit $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}]\, Z_\alpha \lhd G_\alpha$ impliziert). (vii) folgt aus (3).

Es bleibt noch (vi) zu beweisen. Nehmen wir an $[Z_\delta, S_\beta]\, Z_\gamma \lhd G_\gamma$ für jeden Weg (δ, β, γ). Dann folgt $[Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]\, Z_{\alpha'-2} = [Z_\mu, S_{\alpha'-3}]\, Z_{\alpha'-2}$ für ein $\mu \in \Delta(\alpha'-3)$. Also gilt $[[Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}], Z_\alpha] = 1$ und $X = [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]\, \Omega_1(Z(G_{\alpha'}))$. Weiterhin gilt $[Z_\mu, S_{\alpha'-3}]Z_{\alpha'-4} = [Z_\lambda, S_{\alpha'-5}]Z_{\alpha'-4}$ mit $\lambda \in \Delta(\alpha'-5)$, also $[[Z_\mu, S_{\alpha'-3}], Z_{\alpha-2}] = 1$ und, da $[Z_{\alpha'-2}, Z_{\alpha-2}] = 1$ nach Voraussetzung, $[[Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}], Z_{\alpha-2}] = 1$ und $[X, Z_{\alpha-2}] = 1$, im Widerspruch zu (4). ∎

(3.2) *Sei $b > 2$ und (α, α') kritisch. Dann gilt:*

(i) $Z_\alpha Z_{\alpha+2} \ntrianglelefteq G_{\alpha+2}$ *und* $Z_\alpha Z_{\alpha+2} \ntrianglelefteq G_\alpha$.

(ii) *Sei $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'}\rangle = G_\alpha$, dann ist $V_{\alpha-1} \nleqslant Q_{\alpha'-2}$.*

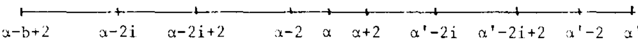
Beweis. (1) $Z_\alpha Z_{\alpha+2} \ntrianglelefteq G_{\alpha+2}$.

Aus $Z_\alpha Z_{\alpha+2} \lhd G_{\alpha+2}$ folgt $Z_\alpha Z_{\alpha+2} = Z_\mu Z_{\alpha+2}$ für ein $\mu \in \Delta(\alpha+3)$, also ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant [Z_\mu Z_{\alpha+2}, Z_{\alpha'}] = 1$, im Widerspruch zu (2.2)(v).

Wir zeigen nun (ii): Wir nehmen an $V_{\alpha-1} \leqslant Q_{\alpha'-2}$. Aus (1) folgt die Existenz eines $\delta \in \Delta(\alpha-1)$ mit $Z_\delta Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$. Aus (3.1)(vi) folgt die Existenz eines $\alpha-2 \in \Delta(\alpha-1)$ mit $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}]\; Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$. Dann ist auch

$Z_{\alpha-2}Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$, und aus (3.1)(v) folgt $(\alpha-2, \alpha'-2)$ ist kritisch, im Widerspruch zur Annahme.

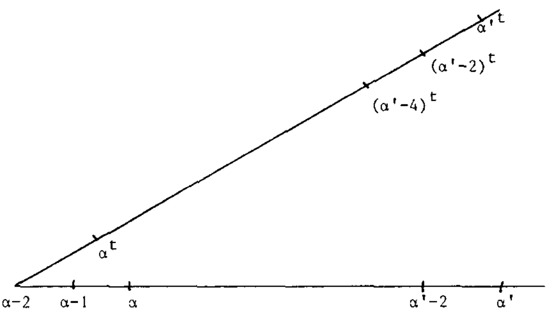
Aus (ii) folgt nun induktiv die Existenz eines $\alpha-2i \in \Delta^2(\alpha-2i+2)$ mit $(\alpha-2i, \alpha'-2i)$ kritisch.



Insbesondere existiert ein $\alpha-b+2$ mit $(\alpha-b+2, \alpha+2)$ kritisch und $\alpha \in \gamma(\alpha-b+2, \alpha+2)$. Aussage (1), angewandt auf $(\alpha+2, \alpha-b+2)$, liefert $Z_{\alpha+2}Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$. ∎

(3.3) *Sei $b>2$ und $\gamma(\alpha-2, \alpha') = (\alpha-2, \alpha-1, \alpha, \alpha+1, ..., \alpha'-1, \alpha')$ ein Weg der Länge $b+2$ mit $(\alpha-2, \alpha'-2)$ kritisch, (α, α') kritisch und $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'}\rangle = G_\alpha$. Sei $t \in G_{\alpha-2}$ mit $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}^t_{\alpha'-2}\rangle = G_{\alpha-2}$. Dann ist $(\alpha, (\alpha'-4)^t)$ kritisch.*

Beweis. Wegen (3.2)(i) ist $Z_\alpha Z_{\alpha-2} \ntrianglelefteq G_{\alpha-2}$. Wir haben folgende Situation vor uns:



Ist nun $(\alpha, (\alpha'-4)^t)$ nicht kritisch, so folgt aus (3.1)(iii) angewandt auf das kritische Paar $(\alpha-2, (\alpha'-2)^t)$, daß $1 \neq R := [Z^t_{\alpha'-2} \cap Q_{\alpha-2}, Z_\alpha] \leqslant Z(G_{\alpha-2})$ und $R \leqslant Z^t_{\alpha'-2}$ ist. Wegen $b>2$ ist $[R, Z^t_{\alpha'}] = 1$, also auch $[R, Z_{\alpha'}] = 1$, $[R, \langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'}\rangle] = 1$ und $R \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zu (1.14)(i). ∎

(3.4) *Sei $b>2$ und $\gamma(\alpha-2, \alpha')$ wie in* (3.3). *Dann gilt eine der folgenden Aussagen*:

(i) $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'-2}] \leqslant Z(G_\alpha)$.

(ii) $|V_\alpha Q_{\alpha'-2}/Q_{\alpha'-2}| \geqslant q^2$.

(iii) $|(V_\alpha \cap Q_{\alpha'-2})Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| \geqslant q^2$ $Q_\alpha \nleqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$, *und* $[Z_{\alpha-2} \cap Q_{\alpha'-2}, Z_{\alpha'}] \nleqslant Z_\alpha$.

Beweis. Wir nehmen an, keine der drei Aussagen ist richtig. Es folgt:

(1) $|Z_{\alpha-2}Q_{\alpha'-2}/Q_{\alpha'-2}| = q$ und $V_\alpha Q_{\alpha'-2} = Z_{\alpha-2}Q_{\alpha'-2}$.

Sei $R := [Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'-2}] = [V_\alpha, Z_{\alpha'-2}]$.

(2) $R \nleqslant Z(S_{\alpha-1})$.

Aus $R \leqslant Z(S_{\alpha-1})$ folgt $[R, \langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'}\rangle] = 1$ und $R \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zur Annahme.

Sei nun $Q_\alpha \leqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$. Zu $\beta \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_\beta, \tilde{Z}_{\alpha'}\rangle = G_\alpha$ existiert nach (3.2)(ii) ein $\delta(\beta) \in \Delta(\beta)$ mit $Z_{\delta(\beta)} \nleqslant Q_{\alpha'-2}$, also ist $R = [Z_{\delta(\beta)}, Z_{\alpha'-2}]$ und

$$[R, \langle T^{\delta(\beta)}_\beta \mid \langle S_\beta, \tilde{Z}_{\alpha'}\rangle = G_\alpha > Q_\alpha] = 1.$$

Aus (1.15)(ii) folgt $R \leqslant Z(H_\alpha)$, also mit (2.4), $R \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zu (2).

Also ist $Q_\alpha \nleqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$. Sei $Y = Z_{\alpha-2} \cap Q_{\alpha'-2}$ und $L = \langle T^{\alpha-2}_{\alpha-1}, Z_{\alpha'}\rangle$ Da (iii) nach Voraussetzung nicht gilt, ist $[Y, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$, denn sonst ist $[Y, Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha] \neq 1$ und $|Y/C_Y(Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha)| \geqslant q$, also $|YZ_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| \geqslant q^2$.

Nach (1.15)(i) ist $LQ_\alpha = G_\alpha$ und, wie früher, $O^2(G_\alpha) \leqslant L$. Nun ist $[Y, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$, $YZ_\alpha \lhd L$ und $[Y, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$. Wegen (1) und (2) ist $Y \ntriangleleft S_{\alpha-1}$ und $[Z_{\alpha-2}, O^2(G_\alpha)] = [\langle Y^{S_{\alpha-1}}\rangle, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$. Also ist $Z_\alpha Z_{\alpha-2} \lhd G_\alpha$, im Widerspruch zu (3.2)(i). ∎

(3.5) *Sei (α, α') kritisch. Ist $|V_{\alpha'-2}Q_\alpha/Q_\alpha| \geqslant q^2$, so ist $b \leqslant 4$. Ist $|(V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+2})Q_\alpha/Q_\alpha| \geqslant q^2$, so ist $b \leqslant 6$.*

Beweis. Sei $Y := V_{\alpha'-2}$ bzw. $V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+2}$. Wir nehmen an $b > 4$ bzw. $b > 6$. Sei $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'}\rangle = G_\alpha$ und $\langle T^\alpha_{\alpha-1}, Y\rangle = G_\alpha$. Ein derartiges $\alpha - 1$ existiert nach (1.15)(iii).

Sei $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha - 1)$ mit $(\alpha - 2, \alpha' - 2)$ kritisch.

(*) Sei $t \in G_{\alpha-2}$ mit $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}^t_{\alpha'-2}\rangle = G_{\alpha-2}$, $t \in \langle \tilde{Z}_{\alpha'-2}, \tilde{Z}^t_{\alpha'-2}\rangle$ und $t^2 \in Q_{\alpha-2}$.

Ein solches t existiert nach (1.15)(iv) und (1.16). Aus (3.3) folgt nun $(\alpha, \alpha'^t - 4)$ ist kritisch. Sei $R := [Z_\alpha, Z^t_{\alpha'-4}]$. Wegen $b > 4$ ist $[R, \langle Z^t_{\alpha'-2}, Z_{\alpha'-2}\rangle] = 1$ und $R^t = R$. Wegen $b > 4$ bzw. $b > 6$ ist $[R, Y^t] = 1$. Somit ergibt sich $[R, Y] = 1$ und $C_R(T^\alpha_{\alpha-1}) \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zu (1.14)(vi). ∎

(3.6) *Es gilt $b \leqslant 4$.*

Beweis. Wir nehmen an $b > 4$. Sei $\gamma(\alpha - 2, \alpha')$ wie in (3.3) und $t \in G_{\alpha-2}$ wie in (3.5)(*). Also ist $(\alpha, (\alpha' - 4)^t)$ kritisch und $R = R^t$ für $R = [Z_\alpha, Z^t_{\alpha'-4}]$. Aus (3.5) folgt $|Z_\delta Q_{\delta'}/Q_{\delta'}| = q$ für jedes kritische Paar (δ, δ'), denn andernfalls ist $b \leqslant 4$.

(1) $R \nleq Z(S_{\alpha-1})$.

Andernfalls folgt wegen $[R, Z^t_{\alpha'}]=1$, daß $[R, Z_{\alpha'}]=1$ und $R \leqslant Z(G_\alpha)$ ist.

(2) $b=6$, $Q_{\alpha-2} \nleq T_{\alpha-1}$ und $[Z_\alpha \cap Q^t_{\alpha'-4}, Z^t_{\alpha'-2}] \nleq Z_{\alpha-2}$.

Dies ist eine unmittelbare Folge von (1), (3.4) und (3.5).

Sei $L=\langle Z^t_{\alpha'-2}, T^\alpha_{\alpha-1}\rangle$. Dann ist mit (1.15)(i)

$$LQ_{\alpha-2}=G_{\alpha-2} \qquad \text{und} \qquad O^2(G_{\alpha-2}) \leqslant L.$$

Sei $Y=Z_\alpha \cap Q^t_{\alpha'-4}$, $X=Z^t_{\alpha'-2} \cap Q_\alpha$. Dann ist wegen (2) und (1.10)(i) $[X, Y] \neq 1$.

(3) $XZ^t_{\alpha'-4} \leqslant T^\alpha_{\alpha-1}$.

Wegen $b>2$ ist $XZ^t_{\alpha'-4}$ elementarabelsch. Aus (1) und (1.14)(v) folgt dann die Behauptung. Sei $R_1:=[X, Y][Z^t_{\alpha'-4}, Z_\alpha]$, $L_1:=\langle T^\alpha_{\alpha-1}, Z_{\alpha'}\rangle$.

(4) $[R_1, L_1]=1$ und $[R_1, L]=1$.

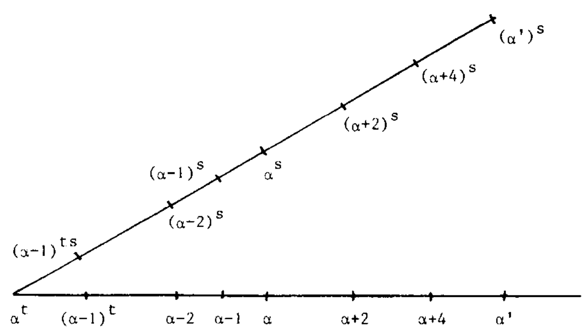
Aus $R_1 \leqslant Z^t_{\alpha'-2} Z^t_{\alpha'-4}$ und $b>4$ folgt $[R_1, \langle Z^t_{\alpha'-2}, Z_{\alpha'-2}\rangle]=1$, also $R_1=R_1^t$. $[R_1, Z^t_{\alpha'}]=1$ und $[R_1, Z_{\alpha'}]=1$. Aus (3) folgt dann die Behauptung.

(5) $[Z_\alpha, T^\alpha_{\alpha-1}] \lhd G_{\alpha-2}$.

Aus (4) folgt $[R_1, O^2(G_{\alpha-2})]=1$ und $R_1 \ntrianglelefteq S_{\alpha-1}$, denn aus $R_1 \lhd S_{\alpha-1}$ folgt $R_1 \lhd G_\alpha$ und $R_1 \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zu (1). Nun ist $[\langle R_1^{S_{\alpha-1}}\rangle, O^2(G_{\alpha-2})]=1$ und $\langle R_1^{S_{\alpha-1}}\rangle \lhd G_{\alpha-2}$. Man überlegt sich nun leicht, aus der Definition von R_1, daß $\langle R_1^{S_{\alpha-1}}\rangle=[Z_\alpha, T^\alpha_{\alpha-1}]$ gilt.

Wegen $t^2 \in Q_{\alpha-2}$ folgt aus $\langle S_{\alpha-1}, Z^t_{\alpha'-2}\rangle=G_{\alpha-2}$, daß $\langle S^t_{\alpha-1}, Z_{\alpha'-2}\rangle=G_{\alpha-2}$ ist.

Aus (3.3) folgt $(\alpha', \alpha'-4)$ ist kritisch. Sei $s \in G^t_\alpha$ mit $s \in \langle Z^s_{\alpha'-4}, Z_{\alpha'-4}\rangle$ und $\langle S^t_{\alpha-1}, Z^s_{\alpha'}\rangle=G_{\alpha'}$



Sei $R_0:=[Z_{\alpha-2}, Z^s_\alpha]$. Analog zu (1) gilt:

(6) $R_0 \nleq Z(S^t_{\alpha-1})$.

Aus $Q_{\alpha-2} \nleq T_{\alpha-1}$ folgt $Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha = \Omega_1(Z(S_{\alpha-1}))$, also gilt auch $Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha^t \leqslant Z(S_{\alpha-1}^t)$. Nun ist wegen $|Z_{\alpha-2} Q_\alpha^s / Q_\alpha^s| = q$, $R_0 \leqslant [T_{(\alpha-1)^s}^{\alpha^s}, Z_\alpha^s] = [T_{\alpha-1}^\alpha, Z_\alpha]^s$. Aus (5) folgt $[Z_\alpha, T_{\alpha-1}^\alpha] = [Z_\alpha^t, (T_{\alpha-1}^\alpha)^t] \leqslant Z_{\alpha'}$, also ist $R_0 \leqslant (Z_{\alpha'})^s = Z_{\alpha'}$ und $R_0 \leqslant Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha-2} \leqslant Z(S_{\alpha-1}^t)$, im Widerspruch zu (6). ∎

4. Kapitel

In diesem Kapitel führen wir den Fall $b=4$ zum Widerspruch. Wir nehmen im ganzen Kapitel an, daß $b=4$ ist.

(4.1) *$\Phi(V_\alpha) = V_\alpha' \leqslant Z(V_\alpha)$ und $V_\alpha \leqslant T_\beta^\delta$ für jeden Weg (δ, β, α).*

Beweis. Wir nehmen an $V_\alpha' \nleq Z(V_\alpha)$, dann existieren Wege $(\alpha, \beta_i, \delta_i)$ $i = 1, 2, 3$ mit $R := [[Z_{\delta_1}, Z_{\delta_2}], Z_{\delta_3}] \neq 1$. Wegen $b=4$ ist $Z_{\delta_i} \leqslant G_{\delta_j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, und $R \leqslant Z_{\delta_1} \cap Z_{\delta_2} \cap Z_{\delta_3}$. Also gilt:

(1) $[R, \langle Z_{\delta_1}, Z_{\delta_2} \rangle] = 1$;

aus $R \neq 1$ folgt

(2) $[Z_{\delta_1}, Z_{\delta_2}] \nleq Q_{\delta_3}$.

Aus (1) und (1.10)(v) folgt $\langle Z_{\delta_1}, Z_{\delta_2} \rangle \leqslant T_{\beta_3}^{\delta_3}$, im Widerspruch zu (2).

Also ist $V_\alpha' \leqslant Z(V_\alpha)$. Da V_α von elementarabelschen Gruppen erzeugt wird, ist $V_\alpha' = \Phi(V_\alpha)$. Aus $V_\alpha' \leqslant Z(V_\alpha)$ folgt nun, daß V_α quadratisch auf Z_δ operiert. Wegen $V_\alpha \lhd S_\beta$ folgt aus (1.10)(vi), daß $V_\alpha \leqslant T_\beta^\delta$ ist. ∎

Wir nehmen zunächst an, daß ein kritisches Paar (α, α') mit $|Z_\alpha Q_{\alpha'} / Q_{\alpha'}| = q^2$ existiert.

(4.2) *Sei $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$ und $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha - 1)$ mit $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}] Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$. Dann ist $|Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'-2} / Q_{\alpha'-2}| = q^2$.*

Beweis. Aus $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}] Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$ folgt $Z_\alpha Z_{\alpha-2} \ntrianglelefteq G_\alpha$, so daß aus (3.1) folgt: $(\alpha - 2, \alpha' - 2)$ ist kritisch.

Nehmen wir an $|Z_{\alpha-2} Q_{\alpha'-2} / Q_{\alpha'-2}| = q$. Sei $Y := Z_{\alpha-2} \cap Q_{\alpha'-2}$. Aus $[Y, [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]] = 1$ und (2.6)(iv) folgt $[Y, \tilde{Z}_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$. Sei $T := N_{S_{\alpha-1}}(Y)$ und $L = \langle T, \tilde{Z}_{\alpha'} \rangle$. Also ist $YZ_\alpha \lhd L$. Aus $T = S_{\alpha-1}$ folgt $L = G_\alpha$ und $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}] Z_\alpha = YZ_\alpha \lhd G_\alpha$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist mit (1.14)(v) $T = T_{\alpha-1}^{\alpha-2}$. Aus $Q_\alpha \nleq T$ folgt mit (1.15)(i) $G_\alpha = LQ_\alpha$ und $O^2(G_\alpha) \leqslant L$. Also ist $[Y, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$ und $[Z_{\alpha-2}, O^2(G_\alpha)] = [\langle Y^{S_{\alpha-1}} \rangle, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$, und somit $Z_{\alpha-2} Z_\alpha \lhd G_\alpha$, im Widerspruch zu (3.2)(i).

Also ist $Q_\alpha \leqslant T$. Sei $R = [Z_{\alpha'-2}, Z_{\alpha-2}][Y, Q_\alpha]$. Man überlegt sich leicht, daß $R \lhd S_{\alpha-1}$ ist und $R \nleq Z(S_{\alpha-1})$ ist. Nun ist $R \lhd \langle S_{\alpha-1}, L \rangle = G_\alpha$ und $R \leqslant X_\alpha$, also ist $R \leqslant Z(H_\alpha)$. Nach (2.4) ist $Z(H_\alpha) = Z(G_\alpha)$, also $R \leqslant Z(S_{\alpha-1})$, im Widerspruch zu $R \nleq Z(S_{\alpha-1})$. ∎

(4.3) *V_α/Z_α enthält genau einen nicht zentralen Kompositionsfaktor.*

Beweis. Wegen $Z_\alpha Z_{\alpha+2} \ntrianglelefteq G_\alpha$ enthält V_α mindestens einen nichtzentralen Kompositionsfaktor.

Nehmen wir an, es existieren zwei verschiedene Kompositionsfaktoren M_1 und M_2 von V_α/Z_α. Nun ist $[V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}, [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]] = 1$. Also gilt nach (2.6)(iv) $[(V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}) Z_\alpha/Z_\alpha, \tilde{Z}_{\alpha'}] = 1$.

Wegen (4.1) ist $|V_\alpha/V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}| \leqslant q^3$. Also gilt für mindestens ein $i \in \{1, 2\}$, daß $|M_i/C_{M_i}(\tilde{Z}_{\alpha'})| < q^2$. Also folgt aus (1.5), (1.11), und (1.17), daß M_i ein natürlicher $Sp(4. q)$-Modul ist. Falls $q > 2$ ist, so ist $\tilde{Z}_{\alpha'} = Z_{\alpha'}$ und $|Z_{\alpha'} Q_\alpha/Q_\alpha| = q^2$. Falls $q = 2$, so ist $|\tilde{Z}_{\alpha'} Q_\alpha/Q_\alpha| = 4$ oder $\tilde{Z}_{\alpha'} \leqslant H_\alpha$. In jedem Fall erhalten wir einen Widerspruch zu (1.10)(i). ∎

(4.4) $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant Z(V_\alpha)$ *und* $\Phi(V_\alpha) \leqslant X_\alpha$.

Beweis. Nach (4.3) ist $[V_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant [V_\alpha, Q_\alpha] Z_\alpha$ oder $[[V_\alpha, Q_\alpha], O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$.

Im ersten Fall ist $V_\alpha = V_{\alpha+1}[V_\alpha, Q_\alpha]$. Nun ist wegen $b > 2$, $V_{\alpha+1} \leqslant Q_{\alpha+2}$, also ist

$$[V_\alpha, Q_\alpha]\, Q_{\alpha+2} = V_\alpha Q_{\alpha+2},\ [V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant Q_{\alpha+2} \text{ und } [[V_\alpha, Q_\alpha], \tilde{Z}_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha.$$

Also ist $[V_\alpha, Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$ und $[V_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$, ein Widerspruch zu (4.3).

Also ist $[[V_\alpha, Q_\alpha], O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$ und somit

$$[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant [V_\alpha, Q_\alpha]\, Z_\alpha = [V_{\alpha+1}, Q_\alpha] Z_\alpha \leqslant V_{\alpha+1}.$$

Es folgt $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant \bigcap_{\beta \in \Delta(\alpha)} V_\beta \leqslant Z(V_\alpha)$, denn es gilt $V_\alpha = \langle V_\beta \mid \beta \in \Delta(\alpha) \rangle$ und $V'_\beta = 1$. Nun folgt $[V_\alpha, Q_\alpha, V_\alpha] = 1$ und $[Q_\alpha, V_\alpha, V_\alpha] = 1$, also ergibt sich mit Hilfe des "Drei-Untergruppen Lemma" [6, 2.2.3] $[V_\alpha, V_\alpha, Q_\alpha] = 1$. Somit ist $\Phi(V_\alpha) = V'_\alpha \leqslant X_\alpha$. ∎

(4.5) $q = 2$, $\Phi(V_\alpha) \leqslant Z(H_\alpha)$, $Q_{\alpha+2} \leqslant H_\alpha \cap H_{\alpha'}$ *und* $Z(H_\alpha) \neq Z(G_\alpha)$.

Beweis. (1) $\langle S_{\alpha+1}, S_{\alpha'-1} \rangle = G_{\alpha+2}$.

Andernfalls ist $|V_\alpha/V_\alpha \cap S_{\alpha'-1}| \leqslant q$. Wegen $[V_\alpha \cap S_{\alpha'-1}, \tilde{Z}_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$ erhalten wir einen Widerspruch zu (1.5) und (1.11) bzw. (1.17).

(2) $q = 2$.

Wegen (4.4) ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}]\, \Omega_1(Z(G_\alpha)) = C_{Z_\alpha}(Q_{\alpha+2}) \lhd S_{\alpha+1}$. Aus $q > 2$ und (1.14)(ii) folgt $[Z_\alpha, G_\alpha] \cap Z(G_\alpha) \leqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]$ und somit $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \lhd S_{\alpha+1}$. Ebenso ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \lhd S_{\alpha'-1}$, und wir erhalten $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \lhd \langle S_{\alpha+1}, S_{\alpha'-1} \rangle = G_{\alpha+2}$. Dies impliziert $[[Z_\alpha, Z_{\alpha'}], O^2(G_{\alpha+2})] = 1$, und aus (4.4) folgt $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z(G_{\alpha+2})$, im Widerspruch zu $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \nleqslant Z(S_{\alpha+1})$.

Wir wählen nun $\alpha-1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$ und $\langle T^\alpha_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$. Dies ist möglich nach (1.15)(iii). Sei $\alpha-2 \in \Delta(\alpha-1)$ mit $(\alpha-2, \alpha-1, \alpha) \sim (\alpha', \alpha'-1, \alpha+2)$. Nach (4.2) ist $|Z_{\alpha-2}Q_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}| = 4$.

Sei $R := [Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha+2}]$. Falls $R \ntrianglelefteq S_{\alpha-1}$ ist, folgt $Z_{\alpha+2}Q_{\alpha-2} \neq Q_\alpha Q_{\alpha-2}$, und wegen $Q_\alpha \leqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$ gilt $Q_\alpha Q_{\alpha-2} = T^{\alpha-2}_{\alpha-1} = T^\alpha_{\alpha-1}$. Also ist $[R, \langle T^\alpha_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle] = 1$ und $R \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zu $R \nleqslant Z(S_{\alpha-1})$.

Also ist $R \trianglelefteq S_{\alpha-1}$ und $R \trianglelefteq \langle S_{\alpha-1}, \tilde{Z}_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$. Also $[R, O^2(G_\alpha)] = 1$ und $R \leqslant Z(H_\alpha)$. Wegen $R \nleqslant Z(S_{\alpha-1})$ folgt $Z(H_\alpha) \neq Z(G_\alpha)$, $Q_{\alpha-2} \leqslant H_\alpha$ und $Q_{\alpha+2} \leqslant H_\alpha$. Aus Symmetriegründen gilt auch $Q_{\alpha+2} \leqslant H_{\alpha'}$. Also ist $|Q_{\alpha+2}Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = |Q_{\alpha+2}Q_\alpha/Q_\alpha| = 4$, $Q_{\alpha+2}Q_{\alpha'} = Z_\alpha Q_{\alpha'}$, und $Q_{\alpha+2}Q_\alpha = Z_{\alpha'}Q_\alpha$.

Also ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \trianglelefteq \langle S_{\alpha-1}, S_{\alpha'-1} \rangle = G_\alpha$, $[[Z_\alpha, Z_{\alpha'}], O^2(G_{\alpha+2})] = 1$ und $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z(H_{\alpha+2})$.

Wegen $Z(H_\alpha) \neq Z(G_\alpha)$ und (2.4) gilt nun $|Z_\delta Q_{\delta'}/Q_{\delta'}| = 4$ für jedes kritische Paar (δ, δ'), also ist

$$V'_\alpha = \Phi(V_\alpha) \leqslant Z(H_\alpha). \quad \blacksquare$$

(4.6) *Sei* $t \in [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}] \setminus [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}, S_{\alpha'-1}]\, Z(G_{\alpha'})$. *Dann ist* $[V_\alpha, t, t] = 1$.

Beweis. Wegen $t^2 = 1$ ist $[V_\alpha, t, t] \leqslant \Phi(V_\alpha) \leqslant Z(H_\alpha)$. Andererseits ist $[V_\alpha, t] \leqslant Q_{\alpha+2} \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$. Also ist $[V_\alpha, t, t] = [Z, t]$ mit $Z \leqslant Z_\alpha$. Somit folgt $[Z, t] \leqslant Z(H_\alpha) \cap Z_\alpha \leqslant Z(G_\alpha)$ und aus (1.14)(i) folgt $[Z, t] = 1$. $\blacksquare$

(4.7) *Sei t wie in* (4.6) *und* $V := \langle t^{G_{\alpha+2}} \rangle Z_{\alpha+2}$. *Sei* $B \leqslant V$ *definiert durch* $Z_{\alpha+2} \leqslant B$ *und* $B/Z_{\alpha+2} = C_{V/Z_{\alpha+2}}(O^2(G_{\alpha+2}))$. *Dann ist* $\bar{V} = V/B$ *ein natürlicher* Σ_6- *oder* $\hat{\Sigma}_6$-*Modul für* $G_{\alpha+2}$, $|\bar{V}/\overline{V \cap Q_{\alpha'}}| = 4$ *und* $[\overline{V \cap Q_{\alpha'}}, V_{\alpha'}] = 1$.

Beweis. Wegen $[t, S_{\alpha'-1}] \leqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z(H_{\alpha+2})$ ist $[\bar{t}, S_{\alpha'-1}] = 1$ und $[\bar{V}, Q_{\alpha+2}] = 1$.

Also gilt:

(1) $[\bar{V}, Q_{\alpha+2}] = 1$ und $\bar{V} = \langle C_{\bar{V}}(S) \mid S \in \mathrm{Syl}_2(G_{\alpha+2}) \rangle$.

Sei nun $\alpha'+2 \in \Delta^2(\alpha')$, so daß $(\alpha'+2, \alpha+2)$ kritisch ist. Es folgt $[V \cap Q_{\alpha'}, Z_{\alpha'+2}] \leqslant [Z_{\alpha'+2}, Z_{\alpha+2}] \leqslant Z_{\alpha+2}$. Nun ist $|V/V \cap Q_{\alpha'}| \leqslant 4$, also gilt

(2) $|\bar{V}/C_{\bar{V}}(Z_{\alpha'+2})| \leqslant 4$ und $|Z_{\alpha'+2}Q_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}| = 4$.

(3) $[\bar{V}, O^2(G_{\alpha+2})] \neq 1$.

Andernfalls folgt $[Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]\, Z_{\alpha+2} \trianglelefteq G_{\alpha+1}$ und $[[Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}], Z_\alpha] = 1$, im Widerspruch zu (1.10)(i).

Aus (1.5), (1.11), und (1.17) folgt nun, daß $\bar{V}$ ein natürlicher Σ_6- oder $\hat{\Sigma}_6$-Modul ist.

Aus (2), (1.10)(i) und (1.17) folgt nun $|\bar{V}/C_{\bar{V}}(Z_{\alpha'+2})| = 4$ und $|\bar{V}/\overline{V \cap Q_{\alpha'}}| = 4$. Nun ist $V_{\alpha'}Q_{\alpha+2} = Z_{\alpha'+2}Q_{\alpha+2}$, also $[\overline{V \cap Q_{\alpha'}}, V_\alpha] = 1$. ∎

(4.8) *Ist* (α, α') *kritisch, so gilt* $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q$.

Beweis. Nehmen wir an $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2$. Wegen (4.5) ist $q = 2$ und $|Z_\delta Q_{\delta'}/Q_{\delta'}| = 4$ für jedes kritische Paar (δ, δ'). Wegen (3.2)(ii) und (1.15)(iii) können wir daher o.B.d.A. annehmen, daß

$$\langle T^{\alpha+2}_{\alpha+1}, T^{\alpha+2}_{\alpha'-1} \rangle = G_{\alpha+2} \text{ ist.}$$

Seien V und t wie in (4.7). Wegen $[V_\alpha, t, t] = 1$, $Q_{\alpha+2} \leqslant H_{\alpha'}$ und (1.10)(i) ist $[V_\alpha, t] \leqslant V \cap Q_{\alpha'}$. Nun ist $|\bar{V}/\overline{V \cap Q_{\alpha'}}| = 4$ und $V \cap Q_{\alpha'} \lhd S_{\alpha'-1}$. Falls $\bar{V}$ ein natürlicher Σ_6-Modul ist, folgt $[\overline{V \cap Q_{\alpha'}}, T^{\alpha+2}_{\alpha'-1}] = 1$ und $[[V_\alpha, \bar{t}], T^{\alpha+2}_{\alpha+1}] = 1$, also ist $[V_\alpha, \bar{t}] = 1$. Wegen $[\bar{t}, S_{\alpha'-1}] = 1$, folgt $\bar{t} = 1$ und $\bar{V} = 1$.

Also ist $\bar{V}$ ein natürlicher $\hat{\Sigma}_6$-Modul. Wegen $[\overline{V \cap Q_\alpha}, V_{\alpha'}] = 1$ erhalten wir einen Widerspruch zu (1.17)(iv). ∎

(4.9) $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant Z(V_\alpha)$ *und* $\Phi(V_\alpha) \leqslant X_\alpha$.

Beweis. Nehmen wir an $[V_\alpha, Q_\alpha] \nleqslant Z(V_\alpha)$. Dann existieren $\delta_1, \delta_2 \in \Delta^2(\alpha)$ mit $[[Z_{\delta_1}, Q_\alpha], Z_{\delta_2}] \neq 1$. Nun ist $[Z_{\delta_1}, Q_\alpha] \leqslant Z_{\delta_1}$, und wir erhalten einen Widerspruch zu (4.8) und (1.10)(v).

Aus $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant Z(V_\alpha)$ folgt $[V_\alpha, V_\alpha, Q_\alpha] = 1$ mittels des "Drei-Untergruppen Lemma".

(4.10) *Sei* (γ, β, δ) *ein Weg der Länge zwei mit* $Q_\delta \leqslant T^\gamma_\beta$ *und* $Z_\gamma Z_\delta \ntrianglelefteq G_\delta$. *Dann ist* $|Q_\delta Q_\gamma/Q_\delta| = q$.

Beweis. Wir nehmen an (4.10) ist falsch. Aufgrund von (3.3) und (1.15)(iv) existiert ein kritisches Paar (α, α') mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\alpha'' = \alpha$ für ein $t \in \langle Q_\alpha, Q_{\alpha'} \rangle$.

(2) $(\alpha, \alpha+1, \alpha+2) \sim (\gamma, \beta, \delta)$.

Sei $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$ und $\langle T^\alpha_{\alpha-1}, T^\alpha_{\alpha+1} \rangle = G_\alpha$. Ein solches $\alpha - 1$ existiert nach (1.15)(iii).

Sei $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha - 1)$ mit $(\alpha-2, \alpha-1, \alpha) \sim (\gamma, \beta, \delta)$. Dann ist $(\alpha-2, \alpha+2)$ kritisch aufgrund von (3.1)(iv). Sei $X := Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha$, $Y := Z_{\alpha-2} \cap Q_{\alpha+2}$ und $R := [X, Y]$.

Sei zunächst $R=1$. Dann ist wegen (1.10)(i) $Y \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$ und $[Y, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$. Sei $T := N_{S_{\alpha-1}}(Y)$, $L := \langle T, Z_{\alpha'} \rangle$. Dann ist $YZ_\alpha \lhd L$, $[Y, Q_\alpha] \lhd L$ und $[[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha+2}], L] = 1$.

Sei $R_1 = [Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha+2}][Y, Q_\alpha]$. Dann ist $R_1 \lhd L$. Man überlegt sich nun leicht, daß $R_1 \lhd S_{\alpha+1}$ ist. Also ist $R_1 \lhd G_\alpha$. Aus der Definition von R_1 folgt wegen $|Q_\alpha Q_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}| > q$, daß $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}, 3] \leqslant R_1$ ist.

Nun gilt $[Z_{\alpha-2} \cap X_\alpha, S_{\alpha-1}] = [C_{Z_{\alpha-2}}(Q_\alpha), S_{\alpha-1}] = [Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}, 3] \leqslant R_1$. Wegen $R_1 \lhd G_\alpha$ folgt $[Z_{\alpha-2} \cap X_\alpha, S_{\alpha-1}] \leqslant Z(G_\alpha)$, und (2.4) impliziert $Z_{\alpha-2} \cap X_\alpha \leqslant Z(S_{\alpha-1})$, im Widerspruch zu $Q_\alpha \leqslant T^{\alpha-2}_{\alpha-1}$.

Also ist $R \neq 1$. Falls $R \leqslant Z(S_{\alpha-1})$ ist, folgt, wegen $[R, Z_{\alpha'}] = 1$, $R \leqslant Z(G_\alpha)$. Wegen (1) folgt $R \leqslant Z(G_{\alpha'})$, im Widerspruch zu (1.14)(i).

Also ist $R \nleqslant Z(S_{\alpha-1})$. Andererseits ist wegen $Q_\delta \leqslant T^{\gamma}_{\beta}$,

$$R \leqslant Z_{\alpha-2} \cap X_\alpha \cap X_{\alpha+2} \cap Z_{\alpha'} \qquad \text{und} \qquad R^t = R,$$

also $R \leqslant Z_\alpha$ und $R \leqslant Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}$. Somit ist $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha-2}| = q^2$ und wegen (2) $|Z_{\alpha'}/Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha+2}| = q^2$. Nun ist $R \leqslant [Z_{\alpha'}, Q_{\alpha+2}]$, also

$$R \leqslant Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha \cap Z_{\alpha+2} \cap Z_{\alpha'}.$$

Aus $\langle T^\alpha_{\alpha+1}, T^\alpha_{\alpha-1} \rangle = G_\alpha$ folgt $R \leqslant Z(G_\alpha)$, im Widerspruch zu $R \nleqslant Z(S_{\alpha-1})$. ∎

(4.11) *$\Phi(V_\alpha) \leqslant Z(G_\alpha)$ und $|V_\alpha Q_\delta / Q_\delta| \leqslant q$ für alle $\delta \in \Delta^2(\alpha)$.*

Beweis. Sei (α, α') kritisch. Falls $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \nleqslant Z(S_{\alpha+1})$ ist, so folgt $Q_{\alpha+2} \leqslant T^\alpha_{\alpha+1}$. Aus (4.10) folgt $|Q_\alpha Q_{\alpha+2}/Q_\alpha| = q$, und somit $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant [Q_{\alpha+2}, Z_\alpha] \leqslant Z(S_{\alpha+1})$.

Also ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z(S_{\alpha+1})$ und $V_{\alpha+2} Q_{\alpha'} = Z_\alpha Q_{\alpha'}$. Wir wählen $\beta \in \Delta(\alpha+2)$ mit $\langle S_\beta, S_{\alpha'-1} \rangle = G_{\alpha+2}$ und $\delta \in \Delta(\beta)$ mit (δ, α') kritisch. Dann ist

$$[Z_\delta, Z_{\alpha'}] = [Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \qquad \text{und} \qquad [[Z_\delta, Z_{\alpha'}], \langle S_\beta, S_{\alpha'-1} \rangle] = 1.$$

Also ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z(G_{\alpha+2})$ und $V'_{\alpha+2} = \Phi(V_{\alpha+2}) \leqslant Z(G_{\alpha+2})$. ∎

(4.12) *$[Z_\delta, S_\beta]\, Z_\alpha \lhd G_\alpha$ für jeden Weg (δ, β, α).*

Beweis. Sei (α, α') ein kritisches Paar mit:

(1) $\alpha' = \alpha'$ für ein $t \in \langle V_\alpha, V_\alpha^t \rangle = \langle V_\alpha, V_{\alpha'} \rangle$.

Ein solches kritisches Paar existiert wegen (3.3), (1.15)(iv), und (1.16).

Sei $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$ und $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha - 1)$ mit $(\alpha-2, \alpha-1, \alpha) \sim (\delta, \beta, \alpha)$.

Wir nehmen an, daß $[Z_\delta, S_\beta]\, Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$ ist. Dann ist auch $Z_\delta Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$ und aus (3.1)(iv) folgt: $(\alpha-2, \alpha+2)$ ist kritisch.

Sei $X := Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha$, $Y := Z_{\alpha-2} \cap Q_{\alpha+2}$, und $R := [X, Y]$.

(2) $R \nleqslant Z(S_{\alpha-1})$.

Andernfalls folgt wegen $[R, Z_{\alpha'}]=1$, daß $R \leqslant Z(G_\alpha)$, $R = R'$ und $R \leqslant Z(G_{\alpha'})$ ist. Also ist nach (1.14)(i) $R=1$ und nach (1.10)(i) $Y \leqslant Z_\alpha O_{\alpha'}$. Es folgt $[Z_{\alpha-2}, S_{\alpha-1}]\, Z_\alpha = Y Z_\alpha \lhd \langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'}\rangle = G_\alpha$, im Widerspruch zur Annahme.

Nun ist wegen (4.11), $[Y, V_\alpha]=1$, also auch $[R, V_\alpha]=1$. Wegen $R \leqslant Z_{\alpha'}$ ist $[R, V_{\alpha'}]=1$, so daß aus (1) folgt: $R' = R$ und $R \leqslant Z_\alpha$. Aus (2) folgt $|Z_{\alpha-2}/Z_{\alpha-2} \cap Z_\alpha| \leqslant q^2$. Also ist $Q_\alpha \leqslant T^\alpha_{\alpha-1}$. Wegen (4.10) gilt $|Q_\alpha Q_{\alpha-2}/Q_{\alpha-2}| = q$, und $[Y, X] \leqslant [Y, Q_\alpha] = 1$, im Widerspruch zu (2).

(4.13) *Sei (α, α') kritisch. Dann gilt:*

(i) $[V_\alpha, [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]] \leqslant \Phi(V_\alpha) \leqslant Z(G_\alpha)$.

(ii) $[V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}, [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]] = 1$, $V_\alpha \cap Q_{\alpha+2} \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$.

(iii) *Sei B_α definiert durch $Z_\alpha \leqslant B_\alpha \leqslant V_\alpha$ und $V_\alpha/B_\alpha = C_{V_\alpha/Z_\alpha}(O^2(G_\alpha))$. Dann ist $\bar V_\alpha = V_\alpha/B_\alpha \simeq Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z(G_\alpha)$ als G_α-Modul.*

Beweis. Sei $X = V_\alpha$ oder $V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}$. Dann gilt:

$[X, [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]] \leqslant [X, [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]\, Z_{\alpha+2}] =: D$. Aufgrund von (4.12) ist $D = [X, [Z_\mu, S_{\alpha+1}]\, Z_{\alpha+2}]$ für ein $\mu \in \Delta(\alpha+1)$. Wegen $X \leqslant V_\alpha$ und (4.11) gilt $D = [X, Z_{\alpha+2}]$. Also ist $[V_\alpha, [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]] \leqslant [V_\alpha, Z_{\alpha+2}] \leqslant \Phi(V_\alpha) \leqslant Z(G_\alpha)$ und $[V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}, [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]] = 1$, und aus (1.10)(i) folgt $V_\alpha \cap Q_{\alpha+2} \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$.

Es folgt $[V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$ und

(1) $|\bar V_\alpha / C_{\bar V_\alpha}(Z_{\alpha'})| \leqslant q$.

Nun ist $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}$, $[\bar V_\alpha, Q_\alpha, Z_{\alpha'}] = 1$ und somit

(2) $[\bar V_\alpha, Q_\alpha] = 1$.

Wegen (4.12) folgt:

(3) $\bar V_\alpha = \langle C_{\bar V_\alpha}(S) \mid S \in Syl_2(G_\alpha)\rangle$.

Damit folgt (iii) aus (1.5), (1.11), und (1.17). ▮

(4.14) *Sei $t \in Z_{\alpha'} \setminus [Z_{\alpha'}, S_{\alpha'-1}]\, Z(G_{\alpha'})$. Dann ist $[V_\alpha, t, t] = 1$.*

Beweis. Wegen $t^2 = 1$, ist $[V_\alpha, t, t] \leqslant \Phi(V_\alpha) \leqslant Z(G_\alpha)$. Nun ist $[V_\alpha, t] \leqslant V_\alpha \cap Q_{\alpha+2}$, und aus (4.13)(ii) folgt $[V_\alpha, t, t] = [Z, t]$ für ein $Z \leqslant Z_\alpha$.

Also ist $[Z, t] \leqslant Z(G_\alpha)$, und aus (1.14)(i) folgt $[Z, t] = 1$, also $[V_\alpha, t, t] = 1$. ▮

(4.15) $b \neq 4$.

Beweis. Sei (α, α') ein kritisches Paar mit

(1) $\langle V_\alpha, S_{\alpha'-1} \rangle = G_{\alpha+2}$.

Sei t wie in (4.14). Dann ist $t \in V_{\alpha+2}$. Sei $\bar{t} := tB_{\alpha+2}/B_{\alpha+2}$. Wegen (4.12) ist $[t, S_{\alpha'-1}] \leqslant B_{\alpha+2}$, also $[\bar{t}, S_{\alpha'-1}] = 1$. Aus $[V_\alpha, t, t] = 1$ und $V_\alpha \cap Q_{\alpha+2} \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$ folgt $[V_\alpha, t] \leqslant Q_\alpha$.

Aus (4.13)(iii) und (1) folgt $[V_\alpha, \bar{t}] = [V_\alpha, \bar{V}_{\alpha+2}] \leqslant \overline{V_{\alpha+2} \cap Q_{\alpha'}}$, also ist $\overline{V_{\alpha+2} \cap Q_{\alpha'}} \lhd \langle V_\alpha, S_{\alpha'-1} \rangle = G_{\alpha+2}$, im Widerspruch zu

$$|V_{\alpha+2}/V_{\alpha+2} \cap Q_{\alpha'}| = q \qquad \text{und} \qquad \text{(4.13)(iii)}. \quad \blacksquare$$

5. Kapitel

Wir zeigen in diesem Kapitel, daß, im Falle $b=2$, $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$ gilt. Wir nehmen im ganzen Kapitel an, daß $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \nleqslant Z_\alpha$ ist.

Sei (α, α') ein kritisches Paar, $\beta := \alpha + 1$ und $T := T_\beta^{\alpha'}$.

(5.1) $Z_\alpha \cap Z_{\alpha'} \leqslant Z(S_\beta)$, $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q$ *und* $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z(S_\beta)$.

Beweis. Aus $|Z_{\alpha'}/Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}| \leqslant q^2$ folgt wegen $[Z_\alpha, Q_\alpha] = 1$, daß $Q_\alpha \leqslant T$ ist. Also ist $[Q_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$ und $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$, im Widerspruch zur Annahme.

Also ist $Z_\alpha \cap Z_{\alpha'} \leqslant Z(S_\beta)$. Wegen $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \geqslant Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$ folgen die beiden anderen Behauptungen unmittelbar. $\blacksquare$

Sei nun $t \in G_\alpha$ mit $\langle S_\beta^t, Z_{\alpha'} \rangle = \langle Z_{\alpha'}^t, S_\beta \rangle = G_\alpha$. Ein solches t existiert nach (1.15)(iv). Sei $N \leqslant S_\beta$ definiert durch $N \neq T$ und $N/Q_{\alpha'}$ ist elementarabelsch der Ordnung q^3. Also sind $N/Q_{\alpha'}$ und $T/Q_{\alpha'}$ die maximalen elementarabelschen Untergruppen von $S_\beta/Q_{\alpha'}$.

Sei $Y = [Z_{\alpha'}, S_\beta] \;\; \Omega_1(Z(G_{\alpha'})) = Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha$, $X := [Y, S_\beta] \, \Omega_1(Z(G_{\alpha'})) = C_{Z_{\alpha'}}(T)$, $Y_1 := Y^t$, und $X_1 := X^t$.

(5.2) $XZ_\alpha \ntriangleleft G_\alpha$, $\quad [X, Y_1] \neq 1$, $\quad Y_1 \leqslant N$, $\quad Y_1 T = S_\beta$ *und* $|X_1 Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2$.

Beweis. Aus $XZ_\alpha \lhd G_\alpha$ folgt $XZ_\alpha = X_1 Z_\alpha$ und $[X, Y_1] = 1$. Also ist $Y_1 \leqslant T$ und $[Y_1, Z_{\alpha'}] \leqslant X$. Es folgt $Y_1 Z_\alpha = Y_1 X Z_\alpha \lhd \langle S_\beta^t, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$. Aus $[Q_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Y_1$ folgt nun $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_{\alpha'}$ im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Aus $[X, Y_1] = 1$ folgt wegen (1.10)(i) $X \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}^t$ und $[X, Z_{\alpha'}^t] \leqslant Z_\alpha$, also ist $XZ_\alpha \lhd \langle S_\beta . Z_{\alpha'}^t \rangle = G_\alpha$.

Aus $[X, Y_1] \neq 1$ folgt $|Y_1/C_{Y_1}(X)| \geqslant q$, also $|Y_1 T/T| \geqslant q$ und $Y_1 T = S_\beta$.

Da Y_1 elementarabelsch ist, folgt $Y_1 \leqslant N$. Nun ist auch $[X_1, Y] \neq 1$ und $|X_1/C_{X_1}(Y)| \geqslant q$. Also ist $|X_1 Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2$. ▮

Sei nun $L := \langle Y^{G_\alpha} \rangle$ und $K := \langle X^{G_\alpha} \rangle$.

(5.3) $LQ_{\alpha'} = N$, $[K, Q_\alpha] = \Phi(L) = [Y, Y_1] \leqslant Z(G_\alpha)$ *und* $\Phi(L) \cap Z(G_{\alpha'}) = 1$.

Beweis. (1) $L = \langle Y_1^{S_\beta} \rangle$.

Sei $L_0 = \langle Y_1^{S_\beta} \rangle$. Dann ist für $g \in S_\beta$,

$$[L_0, Z_{\alpha'}^{tg}] \leqslant [S_\beta^{tg}, Z_{\alpha'}^{tg}] \leqslant Y_1^g \leqslant L_0.$$

Aus $\langle Z_{\alpha'}^t, S_\beta \rangle = G_\alpha$ und der Struktur von G_α folgt nun

$$\langle (Z_{\alpha'}^t)^{S_\beta} \rangle Q_\alpha = G_\alpha.$$

Also ist $L_0 \lhd G_\alpha$ und $L_0 = L$.

(2) $[Y_1, Y] \leqslant Z(S_\beta)$, $[Y_1, Y] \cap Z(G_{\alpha'}) = 1$ und $[X, Q_\alpha] = [Y_1, Y]$.

Wegen $Y_1 \leqslant N$ ist $[Y_1, Y] \leqslant [N, Y]$. Nun ist $[X, S_\beta] = [X, TN] = [X, N] \leqslant [N, Y]$. Wegen (1.14)(iv) ist $|[N, Y]| = q$, insbesondere $[N, Y] \cap Z(G_{\alpha'}) = 1$. Da $[X, Y_1] \neq 1$ ist, folgt $[X, Y_1] = [N, Y] = [Y_1, Y] = [X, Q_\alpha]$ und damit die Behauptungen. Analog zu $[Y, Y_1] \leqslant Z(S_\beta)$ gilt $[Y, Y_1] \leqslant Z(S_\beta^t)$, also ist $[Y, Y_1] \leqslant Z(G_\alpha)$.

Wegen (1) ist $[Y, Y_1] = [L, Y]$ und somit $\Phi(L) = [Y, Y_1]$.

Wegen $[X, Q_\alpha] = [Y_1, Y]$ folgt $[K, Q_\alpha] = [Y_1, Y]$. Aus $Y_1 \leqslant N$ und (1) folgt $L \leqslant N$. Aus $Z_\alpha \leqslant L$, $L \lhd S_\beta$ und $LT = S_\beta$ folgt $LQ_{\alpha'} = N$. ▮

(5.4) $L = K$ *und* K/Z_α *ist isomorph zu einem Faktormodul eines orthogonalen* $Sp(4, q)$*-Moduls für* G_α.

Beweis. Sei $K_1 = \langle [Z_\alpha, S_\beta, S_\beta]^{G_{\alpha'}} \rangle Z_{\alpha'}$. Dann gelten die entsprechenden Aussagen über K auch für K_1. Insbesondere nach (5.2) und (5.3):

(1) $[Q_{\alpha'}, K_1] \leqslant \Omega_1(Z(G_{\alpha'})) \leqslant Z_\alpha$ und $|K_1 Q_\alpha/Q_\alpha| \geqslant q^2$.

(2) Sei $\bar{L} = L/Z_\alpha$. Dann ist $|\bar{L}/C_{\bar{L}}(K_1)| \leqslant q^2$.

$$[L \cap (Z_\alpha Q_{\alpha'}), K_1] \leqslant [Z_\alpha, K_1][Q_{\alpha'}, K_1] \leqslant Z_\alpha \text{ und } |L/L \cap (Z_\alpha Q_{\alpha'})| = q^2.$$

(3) $L = K$.

Wegen (2) enthält $\bar{L}$ genau einen nichtzentralen Kompositionsfaktor. Aus (5.2) folgt $[\bar{K}, O^2(G_\alpha)] \neq 1$. Also ist $[\bar{L}, O^2(G_\alpha)] \leqslant \bar{K}$ und $L = YK$. Nun folgt wegen $Y = [L, Z_{\alpha'}] Z(G_{\alpha'})$ und

$$[L, Z_{\alpha'}] = [YK, Z_{\alpha'}] = [K, Z_{\alpha'}] \leqslant K, \quad \text{daß } Y \leqslant K, \text{ und } L = K \text{ gilt.}$$

(4) $\bar{K} = \langle C_{\bar{K}}(S) \mid S \in \mathrm{Syl}_2(G) \rangle$, $[\bar{K}, Q_\alpha] = 1$, und $\bar{K} = [\bar{K}, G_\alpha]$.

Wegen $[X, S_\beta] \leqslant \Omega_1(Z(S_\beta)) \leqslant Z_\alpha$ gilt die erste und damit auch die zweite Aussage.

Nun ist $[\bar{Y}, S_\beta] = \bar{X}$, also $\bar{X} \leqslant [\bar{K}, G_\alpha]$, und $\bar{K} = [\bar{K}, G_\alpha]$.

Aus (2) und (4) folgt mit Hilfe von (1.5), (1.11), (1.13), und (1.17), daß $\bar{K}$ isomorph zu einem Faktormodul des orthogonalen Moduls ist. ∎

(5.5) *Sei B definiert durch $Z_\alpha \leqslant B$ und $B/Z_\alpha = C_{\bar{K}}(G_\alpha)$. Dann ist $B \leqslant Z(K)$ und $\Phi(B) = 1$.*

Beweis. (1) $L \leqslant Z(K)$.

Zunächst ist $B \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$, denn sonst folgt wegen $B \lhd S_\beta$, $X \leqslant [B, Z_{\alpha'}]\, Z(G_{\alpha'}) \leqslant B$. Also ist $[B, X] = 1$ und $B \leqslant Z(K)$.

(2) $\Phi([K, K_1]) = 1$.

Auf Grund von (5.3) gilt: $\Phi([K, K_1]) \leqslant \Phi(K \cap K_1) \leqslant \Phi(K) \cap \Phi(K_1) \leqslant \Phi(K) \cap Z(G_{\alpha'}) = 1$.

(3) $B \leqslant Z_\alpha [K, K_1]$.

Wegen $[K, K_1, K_1] \leqslant [Q_{\alpha'}, K_1] \leqslant Z(G_{\alpha'}) \leqslant Z_\alpha$ ist $[\bar{K}, K_1, K_1] = 1$. Nun ist $|K_1 Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^3$, so daß die Behauptung aus (1.14)(iii) folgt.

Aus (1), (2), und (3) folgt nun $\Phi(B) = 1$. ∎

(5.6) $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] = [Z_\alpha, G_\alpha]$ *falls $b = 2$ gilt.*

Beweis. Aus (5.4) folgt, daß G_α transitiv auf K/B operiert. Da in $K \backslash B$ Involutionen existieren, folgt aus (5.5), daß $\Phi(K) = 1$ ist, im Widerspruch zu $\Phi(K) = \Phi(L) \neq 1$. ∎

6. Kapitel

In diesem Kapitel zeigen wir, daß aus $G_\alpha / C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \simeq \hat{\Sigma}_6$ folgt: $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] = [Z_\alpha, G_\alpha]$.

(6.1) *Sei $b > 2$, (α, α') ein kritisches Paar und $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$. Sei $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha - 1)$ mit $Z_\alpha Z_{\alpha-2} \ntrianglelefteq G_\alpha$. Dann ist $Z_{\alpha-2} \nleqslant G_{\alpha'}$, und $(\alpha - 2, \alpha' - 2)$ ist ein kritisches Paar.*

Beweis. Nehmen wir an $Z_{\alpha-2} \leqslant G_{\alpha'}$, dann folgt aus $[Z_{\alpha-2}, [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]] = 1$ und (1.17), daß $[Z_{\alpha-2}, Z_{\alpha'}] \leqslant [Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$ ist. Also folgt $Z_{\alpha-2} Z_\alpha \lhd \langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Aus $Z_{\alpha-2} \nleqslant G_{\alpha'}$ folgt $Z_{\alpha-2} \nleqslant Q_{\alpha'-2}$, also ist $(\alpha - 2, \alpha' - 2)$ kritisch. ∎

(6.2) *Sei* (α,α') *kritisch und* $b>2$. *Dann gilt*:

$$Z_\alpha Z_{\alpha+2} \ntrianglelefteq G_{\alpha+2} \qquad und \qquad Z_\alpha Z_{\alpha+2} \ntrianglelefteq G_\alpha.$$

Beweis. Aus $Z_\alpha Z_{\alpha+2} \lhd G_{\alpha+2}$ folgt $Z_\alpha Z_{\alpha+2} = Z_\mu Z_{\alpha+2}$ mit $\mu \in \Delta(\alpha+3)$, also ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant [Z_\mu Z_{\alpha+2}, Z_{\alpha'}] = 1$, im Widerspruch zu (2.2)(v).

Aus (6.1) folgt nun induktiv die Existenz eines kritischen Paares $(\alpha+2-b,\ \alpha+2)$ mit $\alpha \in \gamma(\alpha+2-b,\ \alpha+2)$. Dann gilt aufgrund der schon bewiesenen Aussage

$$Z_{\alpha+2} Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha. \quad \blacksquare$$

(6.3) $b \leqslant 4$.

Beweis. Wir nehmen an, $b>4$. Sei $\alpha-1 \in \Delta(\alpha)$ mit $\langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$ und $\alpha-2 \in \Delta(\alpha-1)$ mit $(\alpha-2, \alpha'-2)$ kritisch. Sei $t \in G_{\alpha-2}$ mit $\langle S_{\alpha-1}, Z^t_{\alpha'-2} \rangle = G_{\alpha-2}$. Aus (6.2) folgt $Z_{\alpha-2} Z_\alpha \ntrianglelefteq G_\alpha$. Also gilt wegen (6.1), daß $(\alpha, (\alpha'-4)^t)$ kritisch ist. Sei $R := [Z_\alpha, Z^t_{\alpha'-4}]$. Wegen (1.17) ist $R \lhd S_{\alpha-1}$. Wegen $b>2$ ist $[R, Z^t_{\alpha'-2}] = 1$. Also ist $R \lhd \langle S_{\alpha-1}, Z^t_{\alpha'-2} \rangle = G_{\alpha-2}$. Wegen $b>4$ ist $[R, Z^t_{\alpha'}] = 1$. Also auch $[R, Z_{\alpha'}] = 1$ und $R \lhd \langle S_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$. $\blacksquare$

(6.4) $b \neq 4$.

Beweis. Sei (α, α') kritisch. Aus (6.1), (6.2), und (1.17) folgt:

(1) $|V_\alpha Q_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}| = 4$.

(2) $[V_\alpha \cap G_{\alpha'}, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_\alpha$.

Denn: $[V_\alpha \cap G_{\alpha'}, [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]] = 1$ und $V_\alpha \cap G_{\alpha'} \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$ nach (1.17).

(3) $\langle V_\alpha, S_{\alpha'-1} \rangle = G_{\alpha+2}$.

Andernfalls ist $|V_\alpha / V_\alpha \cap S_{\alpha'-1}| \leqslant 2$ und $Z_{\alpha'}$ zentralisiert eine Hyperebene in V_α/Z_α, im Widerspruch zu (1.5), (1.11), und (1.17).

(4) $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant Z(V_\alpha)$ und $V'_\alpha \leqslant X_\alpha$.

Aus (1) und (2) folgt, daß V_α/Z_α genau einen nichtzentralen Kompositionsfaktor besitzt. Also ist $[V_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant [V_\alpha, Q_\alpha]\, Z_\alpha$ oder $[[V_\alpha, Q_\alpha], O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$.

Im ersten Fall folgt $V_\alpha = V_{\alpha+1}[V_\alpha, Q_\alpha]$ und $V_\alpha Q_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2} = [V_{\alpha'} Q_\alpha]\, Q_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}$. Dies impliziert $V_\alpha \leqslant Q_{\alpha+2}$, im Widerspruch zu (1).

Also ist $[[V_\alpha, Q_\alpha],\ O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$ und $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant [V_{\alpha+1}, Q_\alpha]\, Z_\alpha$. Somit ist $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant V_{\alpha+1}$ und $[V_\alpha, Q_\alpha] \leqslant \bigcap_{\beta \in \Delta(\alpha)} V_\beta \leqslant Z(V_\alpha)$

Aus dem "Drei-Untergruppen Lemma" folgt $[V_\alpha, V_\alpha, Q_\alpha] = 1$, also $V'_\alpha \leqslant X_\alpha$.

(5) $[[Z_\alpha, Z_{\alpha'}], H_{\alpha+2}] = 1$.

Wegen (3) und (1.17) gilt $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \lhd \langle S_{\alpha+1}, S_{\alpha'-1}\rangle = G_{\alpha+2}$. Also gilt $[[Z_\alpha, Z_{\alpha'}], O^2(G_{\alpha+2})] = 1$. Wegen (4) ist $[[Z_\alpha, Z_{\alpha'}], Q_\alpha] = 1$ und $[[Z_\alpha, Z_{\alpha'}], H_{\alpha+2}] = 1$.

Aus (5) folgt nun $|S_{\alpha+1}/C_{S_{\alpha+1}}([Z_\alpha, Z_{\alpha'}])| \leqslant 2$, im Widerspruch zu (1.17). ▮

(6.5) *Sei $b = 2$. Dann ist $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$.*

Beweis. Sei (α, α') kritisch. Aus $[Q_\alpha, [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]] = 1$ folgt mit (1.17) $Q_\alpha \leqslant Z_\alpha Q_{\alpha'}$. Also ist $[Q_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Z_{\alpha'}$ und somit gilt $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$. ▮

7. Kapitel

Wir zeigen in diesem Kapitel, daß $b = 2$ nur für $q \leqslant 4$ möglich ist. Wir nehmen dazu an, daß $q > 2$ ist. Wegen (5.6) sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Phi(G_\alpha/Q_\alpha) = 1$.

Sei (α, β, α') ein Weg der Länge zwei mit (α,α') kritisch. Wir definieren $\tilde{S}_\beta := S_\beta \cap O^2(G_\alpha)$, $D_\alpha := C_{Q_\alpha}(O^2(G_\alpha))$, und $A_\alpha := [Z_\alpha, G_\alpha] \cap Z(G_\alpha)$.

(7.1) $O_2(O^2(G_\alpha)) = [Z_\alpha, G_\alpha]$.

Wegen $[Z_\alpha, G_\alpha] = [Z_\alpha, O^2(G_\alpha)]$ ist $[Z_\alpha, G_\alpha] \leqslant O_2(O^2(G_\alpha))$. Somit ist $H := O^2(G_\alpha)/[Z_\alpha, G_\alpha]$ eine Schursche Erweiterung der $Sp(4, q)$. Nach [7, Tafel 4.1] ist der Schur Multiplikator von $Sp(4, q)$ für $q = 2^k$ und $k > 1$ trivial. Also folgt $O_2(H) = 1$ und $O_2(O^2(G_\alpha)) = [Z_\alpha, G_\alpha]$.

(7.2) $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q$ *und* $[Z_{\alpha'}, S_\beta] \leqslant Q_\alpha$.

Nach (2.3)(iv) ist $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| \in \{q, q^2\}$. Nehmen wir an $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^2$, dann ist $[Z_\alpha, S_\beta] \nleqslant Q_{\alpha'}$ und $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'} \cdot Z(S_\beta/Q_{\alpha'}) = T_\beta^{\alpha'}/Q_{\alpha'}$. Wegen $q > 2$ ist $Z(S_\beta/Q_{\alpha'}) = [T_\beta^{\alpha'}/Q_{\alpha'}, S_\beta]$. Nun ist $Z_\alpha \lhd S_\beta$, also folgt $Z_\alpha Q_{\alpha'} = T_\beta^{\alpha'}$, und wir erhalten den Widerspruch $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = q^3$.

Ebenso gilt $|Z_{\alpha'} Q_\alpha/Q_\alpha| = q$ und wegen $Z_{\alpha'} \lhd S_\beta$ folgt $[Z_{\alpha'}, S_\beta] \leqslant Q_\alpha$.

(7.3) $|Z_\alpha/Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}| = q$, $|Q_\alpha Q_{\alpha'}/Q_\alpha| = q$ *und* $[Z_\alpha, S_\beta] = [Z_{\alpha'}, \tilde{S}_\beta] = [Z_{\alpha'}, S_\beta]$.

Wegen (7.1) und (7.2) ist $[Z_{\alpha'}, \tilde{S}_\beta] \leqslant Q_\alpha \cap O^2(G_\alpha) \cap Q_{\alpha'} = [Z_\alpha, S_\beta]$. Aufgrund von (1.10) genügtes also, $[Z_{\alpha'}, \tilde{S}_\beta] = [Z_{\alpha'}, S_\beta]$ zu zeigen. Andernfalls folgt wegen $\tilde{S}_\beta \lhd S_\beta$, daß $\tilde{S}_\beta \leqslant T_\beta^{\alpha'}$ und $\tilde{S}'_\beta \leqslant Q_{\alpha'}$ gilt.

Nun ist $\tilde{S}_\beta Q_\alpha = S_\beta$, $S'_\beta = \tilde{S}'_\beta[\tilde{S}_\beta, Q_\alpha]\, Q'_\alpha$ und $[\tilde{S}_\beta, Q_\alpha] \leqslant Z_\alpha$. Die Struktur von $S_\beta/Q_{\alpha'}$ impliziert $Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'} \cap \{[x, y] \mid x, y \in S_\beta/Q_{\alpha'}\} = 1$. Also ist $[\tilde{S}_\beta, Q_\alpha] \leqslant Q_{\alpha'}$ und $S'_\beta Q_{\alpha'} = Q'_\alpha Q_{\alpha'}$. Andererseits ist $Z_\alpha \leqslant S'_\beta Q_{\alpha'}$ und somit $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant [Q'_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant Q'_\alpha$. Aus (5.6) und dem Drei-Untergruppen Lemma folgt $Q'_\alpha \leqslant D_\alpha$, und wir erhalten den Widerspruch $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leqslant D_\alpha$.

(7.4) $|Q_\alpha/D_\alpha| = q^4$, $[\tilde{S}_\beta, D_{\alpha'}] = 1$ *und* $\tilde{S}_\beta \cap D_{\alpha'} = \tilde{S}_\beta \cap D_\alpha = A_\alpha = A_{\alpha'}$.

Da G_α/Q_α von vier Konjugierten von $Z_{\alpha'}Q_\alpha/Q_\alpha$ erzeugt wird, folgt $|Q_\alpha/D_\alpha| = q^4$ sofort aus (7.3). Wegen (7.2) ist $A_\alpha = \tilde{S}_\beta \cap D_\alpha$.

Aus (1.12) folgt $A_\alpha = Z(S_\beta) \cap ([Z_\alpha, S_\beta] \setminus \{[x, y] \mid x \in [Z_\alpha, S_\beta], y \in S_\beta, [x, y] \neq 1\})$ und (7.3) impliziert $A_\alpha = A_{\alpha'}$. Mit (7.3) erhalten wir weiter $D_{\alpha'} \leqslant Q_\alpha$, also $\tilde{S}_\beta \cap D_{\alpha'} = [Z_\alpha, G_\alpha] \cap D_{\alpha'} = [Z_\alpha, S_\beta] \cap D_{\alpha'} = [Z_{\alpha'}, S_\beta] \cap D_{\alpha'} = A_{\alpha'}$.

Sei $Z \leqslant [Z_\alpha, G_\alpha]$ mit $D_{\alpha'}D_\alpha = ZD_\alpha$. Dann ist $[\tilde{S}_\beta, D_{\alpha'}] = [\tilde{S}_\beta, Z]$. Andererseits ist $[\tilde{S}_\beta, D_{\alpha'}] \leqslant \tilde{S}_\beta \cap D_{\alpha'} = A_{\alpha'} = A_\alpha$ und (1.14)(i) impliziert $[\tilde{S}_\beta, D_{\alpha'}] = [\tilde{S}_\beta, Z] = 1$.

(7.5) G_α/D_α *erfüllt die Voraussetzung* (P) *des Satzes.*

Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_\beta)$ mit $\alpha^\varphi = \alpha'$. Dann ist $(\alpha^{\varphi^{-1}}, \alpha) = (\alpha, \alpha')^{\varphi^{-1}}$ ein kritisches Paar. Für $\bar{S}_\beta := S_\beta/A_\alpha$ gilt nach (7.4): $\bar{S}_\beta = \bar{\tilde{S}}_\beta \times \bar{D}_\alpha = \bar{\tilde{S}}_\beta \times \overline{D_\alpha^{\varphi^{-1}}}$.

Also existiert ein Automorphismus Ψ von $\bar{S}_\beta$ mit $\Psi | \bar{\tilde{S}}_\beta = \mathrm{id}$ und $\Psi | \bar{D}_\alpha = \varphi^{-1} | \bar{D}_\alpha$. Sei $\varphi_0 = \Psi \circ \varphi$, dann folgt $\overline{[Z_\alpha, G_\alpha]}^{\varphi_0} = \overline{[Z_\alpha, G_\alpha]}^\varphi = \overline{[Z_{\alpha'}, G_{\alpha'}]}$ und $\bar{D}_\alpha^{\varphi_0} = (\bar{D}_\alpha^{\varphi^{-1}})^\varphi = \bar{D}_\alpha$. Wir erhalten also einen Automorphismus $\bar{\varphi}_0 \colon S_\beta/D_\alpha \to S_\beta/D_\alpha$ mit $(Q_\alpha/D_\alpha)^{\overline{\varphi_0}} \neq Q_\alpha/D_\alpha$. *Da* Q_α/D_α der einzige nichttriviale Normalteiler von G_α/D_α in S_β/D_α ist, folgt die Behauptung.

(7.6) $q = 4$.

Wir nehmen an: $q > 4$. Wegen (7.5) sei o.B.d.A. $D_\alpha = 1$. Dann ist $Q_\alpha = Z_\alpha = [Z_\alpha, G_\alpha]$. Sei $Q := C_{G_\alpha}(Z(S_\beta))$ und $N = O_2(Q)$. Es folgt $\Phi(N) = Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$, $\bar{N} := N/Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$ ist elementarabelsch, und $N/Z_\alpha Z_{\alpha'}$ ist ein natürlicher $L_2(q)$-Modul für Q. Da Z_α und $Z_{\alpha'}$ die einzigen maximalen elementarabelschen Untergruppen in $Z_\alpha Z_{\alpha'}$ sind, ist $Z_{\alpha'} \lhd Q$ und $[Z_\alpha Z_{\alpha'}, Q] \leqslant Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$. Wie in (1.13) zeigt man: $[\bar{N}, Q]$ ist ein natürlicher $O(3, q)$-Modul für Q. Insbesondere ist $|[\bar{N}, S_\beta] \cap \overline{Z_\alpha Z_{\alpha'}}| = q$. Sei $B := N_{G_\alpha}(S_\beta)$. Dann operiert B irreduzible auf $\bar{Z}_\alpha$ und $Z_{\alpha'}Z_\alpha/Z_\alpha$. Wegen $q > 4$ ist $\bar{Z}_\alpha$ nicht isomorph zu $Z_{\alpha'}Z_\alpha/Z_\alpha$ als $\mathrm{GF}(2)$ B-Modul. Somit existieren genau zwei unter B invariante Unterräume der Ordnung q in $\overline{Z_\alpha Z_{\alpha'}}$. Da Z_α und $Z_{\alpha'}$ unter B invariant sind, folgt $[N, S_\beta] \cap Z_\alpha Z_{\alpha'} = Z_{\alpha'}$.

Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_\beta)$ mit $\alpha^\varphi = \alpha'$. Dann folgt $(Z_\alpha \cap Z_{\alpha'})^\varphi = Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$, $(Z_\alpha Z_{\alpha'})^\varphi = (C_{S_\beta}(Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}))^\varphi = Z_\alpha Z_{\alpha'}$ und $N^\varphi = (C_{S_\beta}(Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}/Z(S_\beta))^\varphi = N$. Also gilt $Z_{\alpha'}^\varphi = ([N, S_\beta] \cap Z_\alpha Z_{\alpha'})^\varphi = Z_{\alpha'}$, und wir erhalten den Widerspruch $Z_\alpha = Z_{\alpha'}$.

(7.7) G_α/D_α *ist eine nichtzerfallende Eerweiterung der* $Sp(4, 4)$ *um einen natürlichen Modul.*

Sei o.B.d.A. $D_\alpha = 1$. Wir nehmen an es existiert ein Komplement K zu Z_α in S_β. Sei $K_0 := Z_\alpha Z_{\alpha'} \cap K$. Dann ist K_0 elementarabelsch und somit $K_0 \leqslant Z_{\alpha'}$. Nun ist $[K_0, K] = 1$, und $KZ_{\alpha'}/Z_{\alpha'}$ ist nicht elementarabelsch. Andererseits zentralisiert K die anisotrope Ebene $K_0 Z(S_\beta)$ in $Z_{\alpha'}$, im Widerspruch zu den Eigenschaften eines natürlichen Moduls.

8. Kapitel

In diesem Kapitel beweisen wir den Satz. Nach (2.2)(iv), (4.15), (6.3), (6.4), und (7.6) ist entweder $b = 0$, oder es gilt $b = 2$ und $q \in \{2, 4\}$.

(8.1) *Sei $b = 0$. Dann gilt Aussage* (i) *des Satzes.*

Beweis. Wegen $Z_\alpha \nleqslant Q_\alpha$ und $[Z_\alpha, Q_\alpha] = 1$ ist $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] = 1$. Somit ist $O^2(G_\alpha) \simeq Sp(4, q)'$ oder $SL(2, 9)$. Im letzteren Fall wäre für eine 2-Sylowgruppe S von G_α, $\mho^2(S)$ eine charakteristische Untergruppe von S normal in G_α, im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Sei nun $b = 2$. Nach (5.6) und (6.5) ist $[Q_\alpha, O^2(G_\alpha)] \leqslant Z_\alpha$. Sei (α, β, α') ein Weg der Länge zwei mit (α, α') kritisch, $\varphi \in C_\beta$ mit $\alpha^\varphi = \alpha'$. $A = [Z_\alpha, G_\alpha] \cap Z(G_\alpha)$, $B = [Z_\alpha, C_{S_\beta}([Z_\alpha, S_\beta])]$, $D_\alpha = C_{Q_\alpha}(O^2(G_\alpha))$, $\tilde{S}_\beta = S_\beta \cap O^2(G_\alpha)$, C definiert durch $C/D_\alpha = C_{Q_\alpha/D_\alpha}(C_{S_\beta}([Z_\alpha, S_\beta]))$ und $T^\alpha_\beta = C_{S_\beta}([Z_\alpha, S_\beta, 2])$.

(8.2) *Sei $b = 2$, $q = 2$ und $G_\alpha/C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \simeq \Sigma_6$. Dann gilt Aussage* (ii) *des Satzes.*

Beweis. Wir nehmen an, Aussage (ii) des Satzes ist falsch. Dann ist $H_\alpha/Z_\alpha D_\alpha \simeq SL(2, 9)$ oder $O^2(G_\alpha)$ enthält eine zu $SL(2, 9)$ isomorphe Untergruppe.

Sei zunächst $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = 4$. Dann ist $T^\alpha_\beta = C_{S_\beta}([Z_\alpha, Z_{\alpha'}]) = T^{\alpha'}_\beta$, $\tilde{S}_\beta \nleqslant T^{\alpha'}_\beta$, und $[\tilde{S}_\beta, Z_{\alpha'}] \leqslant O^2(G_\alpha)$ und $[\tilde{S}_\beta\, Z_{\alpha'}] \nleqslant Q_\alpha$. Da $Z_{\alpha'}$ elementarabelsch ist, erhalten wir einen Widerspruch zur Struktur der $SL(2, 9)$.

Sei nun $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = 2$ und $x \in Z_{\alpha'} \backslash Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha$. Dann existiert ein $y \in \tilde{S}_\beta \langle x \rangle$, so daß $[x, y] \neq 1$ und entweder $[x, y] \notin C$ oder $[x, y] \in Z(G_\alpha)$ gilt. Im ersten Fall erhalten wir einen Widerspruch zu $[x, y] \in [Z_{\alpha'}, S_\beta] \leqslant C$, im zweiten Fall folgt $[x, y] \in [Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \cap Z(G_\alpha) = 1$.

(8.3) *Sei $b = 2$, $q = 2$ und $G_\alpha/C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \simeq \hat{\Sigma}_6$. Dann gilt Aussage* (iii) *des Satzes.*

Beweis. Dies beweist man wie im ersten Abschnitt von (8.2).

(8.4) *Sei $b=2$ und $q=4$. Dann gilt Aussage* (iv) *des Satzes.*

Beweis. Wegen (7.7) müssen wir nur noch $A=1$ zeigen. Wir nehmen $A \neq 1$ an. Wegen $A \leqslant Z(G_\alpha)$ existiert ein $\psi \in G_\beta$ mit $A^\psi \nleqslant D_\alpha$. Aus (7.4) folgt, daß (α, δ) für $\delta = \alpha^\psi$ nicht kritisch ist. Wegen $S_\beta = \tilde{S}_\beta D_\alpha$ und $[\tilde{S}_\beta, D_\alpha] = 1$ ist $\tilde{S}_\beta Q_\delta = S_\beta$ oder $D_\alpha Q_\delta = S_\beta$. Im zweiten Fall ist $A^\psi \leqslant [D_\alpha, Z_\delta] \leqslant D_\alpha$. Also ist $[\tilde{S}_\beta, Z_{\alpha'}] = [S_\beta, Z_{\alpha'}] = [S_\beta, Z_\alpha]$. Es folgt $[Z_\alpha, G_\alpha] \cap D_\delta = A^\psi$, $|[Z_\alpha, G_\alpha] \cap D_\delta| = |[Z_\alpha, G_\alpha] \cap D_\alpha|$ und $Q_\delta = Z_\alpha D_\delta$. Somit ist $[Q_\alpha, Q_\delta] \leqslant D_\delta$, $[Q_\alpha, Z_\delta] = 1$, $Q_\alpha = Q_\delta$ und $Z_\alpha = \Omega_1(Z(Q_\alpha)) = Z_\delta$. Es folgt

$$A^{\#} = [Z_\alpha, S_\beta] \cap Z(S_\beta) \backslash \{[x, y] \mid x \in Z_\alpha, y \in S_\beta\} = (A^{\#})^\psi$$

im Widerspruch zur Annahme.

(8.5) *$|\varphi|$ ist gerade, d.h. es gilt die zweite Behauptung des Satzes.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $|\varphi|$ ungerade ist.

Sei zunächst $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = 4$. Dann ist wegen (2.6)(ii) $Z_\alpha^{\varphi^{-1}} Q_\alpha = Z_{\alpha'} Q_\alpha$. Es folgt, daß $Z_{\alpha'} D_\alpha / D_\alpha$ und $Z_\alpha^{\varphi^{-1}} D_\alpha / D_\alpha$ in der selben maximalen elementarabelschen Untergruppe von $Z_{\alpha'} Q_\alpha / D_\alpha$ liegen. Wegen $T_\beta^\alpha = C_{S_\beta}([Z_\alpha, Z_{\alpha'}]) = T_\beta^{\alpha'}$ folgt $\tilde{S}_\beta \nleqslant T_\beta^{\alpha'}$ und $\tilde{S}_\beta \nleqslant T_\beta^{\alpha^{\varphi^{-1}}}$. Die Struktur von G_α / D_α liefert:

$$[Z_\alpha^{\varphi^{-1}}, S_\beta]\, Z(S_\beta) = [Z_{\alpha'}, S_\beta]\, Z(S_\beta).$$

Da $|\varphi|$ ungerade ist, erhalten wir den Widerspruch

$$[Z_\alpha, S_\beta] Z(S_\beta) = [Z_{\alpha'}, S_\beta]\, Z(S_\beta).$$

Also gilt $|Z_\alpha Q_{\alpha'}/Q_{\alpha'}| = 2$ und

(1) $|Z_\alpha Q_\alpha^{\varphi^n}/Q_\alpha^{\varphi^n}| \leqslant 2$ und $[Z_\alpha, C^{\varphi^n}] \leqslant D_\alpha^{\varphi^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Weiterhin gilt, da $Z_{\alpha'}$ elementarabelsch ist, $Z_{\alpha'} \leqslant C Z_\alpha^{\varphi^{-1}}$ und somit

(2) $Z_\alpha^{\varphi^n} \leqslant C^{\varphi^{n-1}} Z_\alpha^{\varphi^{n-2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen nun durch Induktion über n, daß $Z_\alpha^{\varphi^{2n}} \leqslant Q_\alpha$ gilt. Für $n=0$ ist dies trivialerweise richtig. Aus (1), (2), und der Induktionsannahme folgt

(3) $[Z_\alpha^{\varphi^{2n}}, Z_\alpha] \leqslant [C^{\varphi^{2n-1}}, Z_\alpha][Z_\alpha^{\varphi^{2n-2}}, Z_\alpha] \leqslant D_\alpha^{\varphi^{2n-1}}$.

Ist $Z_\alpha^{\varphi^{2n}} \nleqslant Q_\alpha$, so folgt wegen (1) $[Z_\alpha^{\varphi^{2n}}, Z_\alpha] = B$. Wegen $B = [Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = B^\varphi$ und (3) erhalten wir den Widerspruch $B \leqslant D_\alpha$.

Also gilt $Z_\alpha^{\varphi^{2n}} \leqslant Q_\alpha$ für alle n und da $|\varphi|$ ungerade ist, folgt $Z_\alpha^\varphi = Z_{\alpha'} \leqslant Q_\alpha$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

LITERATUR

1. B. BAUMANN, Über endliche Gruppen mit einer zu $L_2(2^n)$ isomorphen Faktorgruppe, *Proc. Amer. Soc.* **74** (1979), 215-222.
2. R. W. CARTER, "Simple Groups of Lie Type," Wiley, New York, 1972.
3. B. COOPERSTEIN, An enemies list for factorization theorems, *Comm. Algebra* **6** (1978), 1239–1288.
4. G. GLAUBERMAN AND R. NILES, A pair of characteristic subgroups for pushing-up in finite groups, *Proc. London Math. Soc.* (3), **46** (1983), 411–453.
5. D. GOLDSCHMIDT, Automorphisms of trivalent graphs, *Ann. of Math.* **111** (1980), 377–406.
6. D. GORENSTEIN, "Finite Groups," Chelsea, New York, 1980.
7. D. GORENSTEIN, "Finite Simple Groups," Plenum, New York/London, 1982.
8. B. HUPPERT, "Endliche Gruppen I," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1983.
9. D. JAMES, "Representation Theory of Symmetric Groups," Springer–Verlag, Berlin/New York, 1983.
10. H. KURZWEIL, "Endliche Gruppen," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1977.
11. J. MCLAUGHLIN, Some Subgroups of $SL_n(F_2)$, *Illinois J. Math.* **13** (1969), 108 115. Some groups generated by transvections, *Arch. Math.* **XVIII** (1967), 364–368.
12. H. LÜNEBURG, "Transitive Erweiterungen endlicher Permutationsgruppen," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1969.
13. R. NILES, Pushing-up in finite groups, *J. Algebra* **57** (1979), 26–63.
14. B. STELLMACHER, "Pushing Up," *Arch. Math.* **46** (1986), 8–17.