

Flot de champs de vecteurs non Lipschitziens et équations de Navier–Stokes

J.-Y. CHEMIN

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

ET

N. LERNER

*Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Campus de Beaulieu,
Université de Rennes 1, 35042 Rennes cedex, France*

Received July 21, 1993

INTRODUCTION

Dans cet article, nous étudions le problème de l'existence du flot pour les champs de vecteurs solutions du système de Navier–Stokes relatif aux fluides incompressibles d -dimensionnels. Ce système est le suivant

$$(NS) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0, \end{cases}$$

le champ de vecteurs $v(t, x)$ étant ici un champ de vecteurs dépendant du temps sur l'espace \mathbf{R}^d . Par flot d'un champ de vecteurs, on entend une solution de

$$(F) \phi(t, x) = x + \int_0^t v(\tau, \phi(\tau, x)) d\tau.$$

Si le champ de vecteurs v_0 appartient à H^s pour un s strictement supérieur à $d/2 - 1$, il est alors tout à fait classique que

$$v \in L^1_{\text{loc}}([0, T]; H^{s'}) \quad \text{avec} \quad s' > \frac{d}{2} + 1.$$

Par inclusion de Sobolev, ce champ de vecteurs est donc intégrable en temps à valeurs dans l'espace des fonctions lipschitziennes et l'existence d'un flot lipschitzien résulte alors du théorème de Cauchy–Lipschitz.

En ce qui concerne les solutions dites faibles, c'est-à-dire le cas de solutions du système (NS) pour un champ de vecteurs v_0 seulement L^2 en dimension $d=3$, le problème de l'existence du flot a été traité dans [7] (dans cette référence, le problème de l'unicité n'est pas abordé). Pour des résultats d'unicité des trajectoires issues de "presque tout" point, on pourra consulter [5].

Le présent article est donc dévolu au cas critique où le champ de vecteurs v_0 appartient à l'espace de Sobolev $H^{d/2-1}$. On sait que, dans ce cas, il existe un temps T^* maximal et une unique solution maximale v telle que

$$v \in L^2_{\text{loc}}([0, T^*]; H^{d/2}).$$

Ce théorème a été démontré par H. Fujita et T. Kato dans [8]. Nous allons étudier le flot de telles solutions.

THÉORÈME. *Soit v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace $H^{d/2-1}$. On considère l'unique champ de vecteurs v solution de (NS) et appartenant à $L^2_{\text{loc}}([0, T^*]; H^{d/2})$. Il existe alors une unique application continue de $[0, T^*] \times \mathbf{R}^d$ dans \mathbf{R}^d , notée ϕ , solution de (F). De plus, pour tout ε strictement positif,*

$$\phi \in L^\infty_{\text{loc}}([0, T^*]; \text{Id} + C^{1-\varepsilon}).$$

Remarque. Comme on sait que le champ de vecteurs $v(t)$ est indéfiniment différentiable pour tout instant t strictement positif, l'intérêt de ce résultat est donc limité à la description du phénomène près de l'instant initial.

L'article est organisé de la façon suivante. Dans la première section, nous énonçons un théorème de régularité sur les solutions du système de Navier–Stokes (NS), un théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles ordinaires et un théorème de régularité sur le flot. Ces trois théorèmes conduisent immédiatement à l'énoncé ci-dessus.

Dans la seconde section, nous démontrons le résultat de régularité sur les solutions du système de Navier–Stokes (NS).

Dans la troisième section et dernière section, nous démontrons une extension du classique théorème d'Osgood et un théorème d'existence pour les équations différentielles d'une manière ne faisant pas appel à l'hypothèse de dimension finie.

1. ENONCÉ DES RÉSULTATS

Pour énoncer notre résultat de régularité sur les solutions des équations de Navier–Stokes, définissons les espaces suivants.

Dans toute la suite, ω désignera une fonction de \mathbf{R}^+ dans lui-même, nulle en 0, strictement positive ailleurs, croissante et continue.

DÉFINITION 1.1. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On désigne par $\mathcal{C}_\omega(X, Y)$ l'ensemble des u fonctions bornées de X dans Y telles qu'il existe C telle que, pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$,

$$\delta(u(x), u(y)) \leq C\omega(d(x, y)).$$

Remarque. Si (Y, δ) est un espace de Banach (que l'on notera $(E, \|\cdot\|)$), l'espace $\mathcal{C}_\omega(X, E)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_\omega = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{(x, y) \in X \times X, x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\omega(d(x, y))}.$$

Le premier des résultats de cet article est le résultat de régularité que voici.

THÉORÈME 1.1. Soit un champ de vecteurs $v \in L^2_{\text{loc}}([0, T[; H^{d/2})$ et solution du système de Navier–Stokes (NS). Alors on a, pour tout ε strictement positif,

$$v \in L^1_{\text{loc}}([0, T^*[; C_{\omega_\varepsilon}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)) \text{ avec, pour } r \leq 1, \omega_\varepsilon(r) = r(1 - \log r)^{\varepsilon+1/2}.$$

Le deuxième résultat de cet article est une version en dimension infinie d'un résultat classique en dimension finie.

THÉORÈME 1.2. Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E , I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et (t_0, x_0) un élément de $I \times \Omega$. On considère une fonction F appartenant à $L^1_{\text{loc}}(I, \mathcal{C}_\omega(\Omega, E))$. On suppose de plus que

$$\int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty. \quad (1)$$

Alors, il existe un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et tel que l'équation

$$(\text{EDO}) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds$$

admette une et une seule solution continue définie sur l'intervalle J .

Remarque. La partie de ce théorème relative à l'unicité est le théorème d'Osgood; sa généralisation en dimension infinie ne pose aucune difficulté. En revanche, dans toute la littérature classique (voir [6] et ses notes historiques), l'existence dans ce cadre est démontrée à l'aide d'arguments de compacité, qui sont bien sûr strictement réservés au cas où la dimension est finie. Notre démonstration, exposée au paragraphe 3, est simple et repose sur l'examen attentif du schéma de Picard. Notons que l'on ne peut utiliser ici le théorème d'existence de Peano, faux en dimension infinie.

Le troisième résultat de cet article décrit la régularité du flot pour certaines fonctions ω particulières.

THÉORÈME 1.3. *Soient η un réel de l'intervalle $]0, 1[$, et v un champ de vecteurs appartenant à $L^1([0, T]; C_{\omega_\eta}(E; E))$ pour $\omega_\eta(r) = r(-\log r)^{1-\eta}$.*

Posons alors $V_\eta(t) = \int_0^t \|v(\tau)\|_{\omega_\eta} dt$ et $\omega_{\eta,t} = \exp(-((-\log r)^\eta - \eta V_\eta(t))^{1/\eta})$.

Désignons par ϕ le flot du champ de vecteurs v . Celui-ci vérifie alors

$$\phi(t) \in C_{\omega_{\eta,t}} \quad \text{et} \quad \|\phi(t)\|_{\omega_{\eta,t}} \in L^\infty([0, T]).$$

En particulier $\phi \in L^\infty([0, T]; C^{1-\epsilon})$ pour tout ϵ strictement positif.

Des trois théorèmes ci-dessus, résulte immédiatement le corollaire suivant, qui précise le théorème énoncé dans l'introduction.

COROLLAIRE 1.1. *Soit un champ de vecteurs $v \in L^2_{\text{loc}}([0, T]; H^{d/2})$ et solution du système de Navier–Stokes (NS). Alors, en désignant par ϕ le flot de v , on a, pour tout ϵ strictement positif,*

$$\phi(t) \in C_{\omega_{1/2-\epsilon,t}} \quad \text{et} \quad \|\phi(t)\|_{\omega_{1/2-\epsilon,t}} \in L^\infty([0, T]).$$

En particulier $\phi \in L^\infty([0, T]; C^{1-\epsilon})$.

2. UN THÉORÈME DE RÉGULARITÉ

Nous n'allons pas démontrer le théorème 1.1 directement. Nous allons en fait démontrer un théorème de régularité plus précis. Son énoncé nécessite la définition d'un type de régularité basée sur le découpage en couronnes dyadiques de l'espace des fréquences (méthode de Littlewood–Paley). Introduisons les notations suivantes.

Dans toute la suite de cet article, on désignera par \mathcal{C} la couronne de centre 0, de petit rayon 3/4 et de grand rayon 8/3, φ une fonction indéfiniment différentiable à support compact nulle en dehors de \mathcal{C} et vérifiant:

$$\sum_{q \in \mathbf{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \chi = \sum_{q \leq -1} \varphi(2^{-q}\cdot) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d), \tag{2}$$

$$|p - q| \geq 2 \Rightarrow \text{Supp } \varphi(2^{-q}\cdot) \cap \text{Supp } \varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset, \tag{3}$$

$$q \geq 2 \Rightarrow \text{Supp } \chi \cap \text{Supp } \varphi(2^{-q}\cdot) = \emptyset, \tag{4}$$

si $\tilde{\mathcal{C}} = B(0, 4/3) + \mathcal{C}$, alors $\tilde{\mathcal{C}}$ est une couronne et l'on a

$$|p - q| \geq 5 \Rightarrow 2^p \tilde{\mathcal{C}} \cap 2^q \mathcal{C} = \emptyset, \tag{5}$$

$$\frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{6}$$

Notations. En désignant par \mathcal{F} la transformée de Fourier sur \mathbf{R}^d ,

$$h = \mathcal{F}^{-1}\varphi \quad \text{et} \quad \tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi,$$

$$\text{si } q \geq 0, \Delta_q u = \dot{\Delta}_q u = \varphi(2^{-q}D) u = 2^{qd} \int h(2^q y) u(x - y) dy,$$

$$\Delta_{-1} u = \chi(D) u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi) \hat{u}(\xi)),$$

$$\text{si } q \leq -2, \Delta_q u = 0 \text{ et } \dot{\Delta}_q u = \varphi(2^{-q}D) u,$$

$$S_q u = \sum_{p \leq q-1} \Delta_p u = \sum_{p \leq q-1} \dot{\Delta}_p u.$$

On pourra consulter par exemple [3] ou [4] pour la construction d'une telle partition de l'unité dyadique. Rappelons que, grâce à (6), on a

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \sim \sum_{q \in \mathbf{N}} 2^{2qs} \|\Delta_q u\|_{L^2}^2,$$

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \sim \sum_{q \in \mathbf{Z}} 2^{2qs} \|\dot{\Delta}_q u\|_{L^2}^2.$$

Nous allons maintenant définir l'espace qui va nous être utile dans ce travail.

DÉFINITION 2.1. Etant donné un réel strictement positif T , l'espace $\mathcal{H}_{1,T}^{d/2+1}$ est l'espace des fonctions u , définies sur l'ensemble $[0, T] \times \mathbf{R}^d$, telles que

$$\|u\|_T \stackrel{\text{dét}}{=} \left(\sum_{q \in \mathbf{N}} 2^{q(d+2)} \left(\int_0^T \|\Delta_q u(t)\|_{L^2} dt \right)^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Remarque. Il est évident que $L^1([0, T]; H^{d/2+1}) \subset \mathcal{H}_{1,T}^{d/2+1}$.

L'objet de cette section est la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. *Soit v un champ de vecteurs appartenant à $L^2([0, T]; H^{d/2})$ et solution de (NS). Alors, v appartient à l'espace $\mathcal{H}_{1,T}^{d/2+1}$.*

Démontrons des estimations a priori sur les solutions du système de Navier–Stokes. Soit v une telle solution. On a alors, pour tout $q \in \mathbf{Z}$,

$$\partial_t \dot{\Delta}_q v - \nu \Delta \dot{\Delta}_q v = - \dot{\Delta}_q (v \cdot \nabla v) - \dot{\Delta}_q \nabla p.$$

Il s'agit ici de majorer $\|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2}$. Comme le champ de vecteurs v est de divergence nulle, on a

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \|\dot{\Delta}_q \nabla v(t)\|_{L^2}^2 = -2 \Re(\dot{\Delta}_q (v(t) \cdot \nabla v(t)) \mid \dot{\Delta}_q v(t)).$$

Comme nous sommes localisés en fréquence sur des couronnes de taille 2^q , les dérivations seront comptées comme des multiplications. Plus précisément, posons, pour tout entier q ,

$$f_q(t) = \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2}^2.$$

Il existe alors une constante strictement positive c , ne dépendant que de la fonction φ et de la viscosité ν , telle que

$$f'_q(t) + c2^{2q}f_q(t) \leq 2 |(\dot{\Delta}_q (v(t) \cdot \nabla v(t)) \mid \dot{\Delta}_q v(t))|.$$

Le point important est la majoration de $|2(\dot{\Delta}_q (v(t) \cdot \nabla v(t)) \mid \dot{\Delta}_q v(t))|$. Elle est décrite par le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Il existe une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs de divergence nulle v , il existe une suite $(c_q)_{q \in \mathbf{Z}}$ dont la somme des carrés vaut 1 et telle que*

$$|2(\dot{\Delta}_q (v \cdot \nabla v) \mid \dot{\Delta}_q v)| \leq C2^{-q(d/2-1)}c_q \|v\|_{d/2}^2 \|\dot{\Delta}_q v\|_{L^2}.$$

Admettons ce lemme un instant. On en déduit immédiatement que

$$f'_q(t) + c2^{2q}f_q(t) \leq C2^{-q(d/2-1)}c_q \|v(t)\|_{d/2}^2 \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2}. \tag{7}$$

Posons alors $g_q(t) = f_q^{1/2}(t) = \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2}$. Le lemme 2.1 ci-dessus assure par une intégration immédiate que

$$g_q(t) \leq g_q(0) \exp(-c2^{2q}t) + 2^{-q(d/2-1)} \times \int_0^t \exp(-c2^{2q}(t-\tau)) c_q(\tau) \|v(\tau)\|_{d/2}^2 d\tau, \tag{8}$$

la somme des carrées de la suite $(c_q(t))_{q \in \mathbf{Z}}$ valant 1 pour tout temps t .

Considérons l'inégalité (8). Par une inégalité de convolution, il vient (C désignant une constante générique ne dépendant que de la fonction φ),

$$\|g_q\|_{L^1([0, T])} \leq C 2^{-2q} g_q(0) + C 2^{-q(1+d/2)} \int_0^T c_q(t) \|v(t)\|_{d/2}^2 dt.$$

Par élévation au carré, il vient

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T c_q(t) \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2} dt \right)^2 &\leq C 2^{-4q} \|\dot{\Delta}_q v_0\|_{L^2}^2 \\ &+ C 2^{-2q(d/2+1)} \left(\int_0^T c_q(t) \|v(t)\|_{d/2}^2 dt \right)^2. \end{aligned}$$

En multipliant par $2^{2q(d/2+1)}$ et en sommant, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathbf{Z}} 2^{2q(d/2+1)} \left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2} dt \right)^2 &\leq C \|v_0\|_{d/2-1}^2 \\ &+ C \sum_{q \in \mathbf{Z}} \left(\int_0^T c_q(t) \|v(t)\|_{d/2}^2 dt \right)^2. \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_0^T c_q(t) \|v(t)\|_{d/2}^2 dt \leq \left(\int_0^T c_q^2(t) \|v(t)\|_{d/2}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{d/2}^2 dt \right)^{1/2}.$$

D'où l'on tire

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathbf{Z}} 2^{2q(d/2+1)} \left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2} dt \right)^2 &\leq C \|v_0\|_{d/2-1}^2 \\ &+ C \left(\int_0^T \|v(t)\|_{d/2}^2 dt \right)^2. \end{aligned}$$

Or, on sait que $\|v(t)\|_{L^2} \leq \|v_0\|_{L^2}$. Il résulte donc de l'inégalité ci-dessus que

$$\sum_{q \in \mathbf{N}} 2^{2q(d/2+1)} \left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_q v(t)\|_{L^2} dt \right)^2 \leq CT \|v_0\|_{d/2-1}^2 + \|v\|_{L^2([0, T]; H^{d/2})}^4.$$

D'où le théorème, vu que la limite d'une suite bornée dans l'espace $\mathcal{H}_{1, T}^{d/2+1}$ qui est de Cauchy dans l'espace $L^2([0, T]; H^{d/2})$ appartient à $\mathcal{H}_{1, T}^{d/2+1}$.

Démontrons maintenant le lemme 2.1 qui est très proche du lemme 2.1 de [2]. On utilise pour cela la décomposition de Bony en paraproduit et

reste (voir [1]), au détail près que nous travaillons ici dans des espaces de type homogène. Posons

$$T_a b = \sum_q S_{q-1} a \dot{\Delta}_q b \quad \text{et} \quad R(a, b) = \sum_{|p-q| \leq 1} \dot{\Delta}_p a \dot{\Delta}_q b.$$

Comme le support de la transformée de Fourier de $S_{q-1} a \dot{\Delta}_q b$ est inclus dans une couronne de type $2^q \mathcal{C}'$, on a

$$\dot{\Delta}_q (T_a b) = \sum_{|q-q'| \leq 4} \dot{\Delta}_q (S_{q'-1} a \dot{\Delta}_{q'} b).$$

Les majorations qui suivent sont immédiates

$$\begin{aligned} \|S_{q'-1} a\|_{L^x} &\leq \sum_{p=-\infty}^{q'-2} \|\dot{\Delta}_p a\|_{L^x} \\ &\leq \sum_{p=-\infty}^{q'-2} 2^{pd/2} \|\dot{\Delta}_p a\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{p=-\infty}^{q'-2} 2^p 2^{p(d/2-1)} \|\dot{\Delta}_p a\|_{L^2} \\ &\leq C 2^{q'} \|a\|_{d/2-1}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|T_a b\|_{\sigma-1} \leq C \|a\|_{d/2-1} \|b\|_{\sigma}. \tag{9}$$

Appliquons donc ceci avec $a = \partial_j v$ et $b = v^j$. Il vient

$$\begin{aligned} \|T_{\partial_j v} v^j\|_{d/2-1} &\leq C \|\nabla v\|_{d/2-1} \|v\|_{d/2} \\ &\leq C \|v\|_{d/2}^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Quant au terme de type reste, il s'écrit

$$\dot{\Delta}_q \partial_j R(v^j, v) = \partial_j \dot{\Delta}_q \left(\sum_{\substack{q' \geq q-N \\ |q'-q| \leq 1}} \dot{\Delta}_{q'-v} v^j \dot{\Delta}_{q'} v \right).$$

Par localisation spectrale, on a

$$\|\dot{\Delta}_q \partial_j R(v^j, v)\|_{L^2} \leq C 2^{q(1+d/2)} \sum_{\substack{q' \geq q-N \\ |q'-q| \leq 1}} \|\dot{\Delta}_{q'-v} v^j \dot{\Delta}_{q'} v\|_{L^1}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} 2^{q(d/2-1)} \|\dot{\Delta}_q \partial_j R(v^j, v)\|_{L^2} &\leq C \sum_{q' \geq q-N} 2^{(q-q')d} \\ &\times \sum_{|v| \leq 1} c_{q'} c_{q'-v} 2^{(q'-v)d/2} \\ &\times \|\dot{\Delta}_{q'-v} v^j\|_{L^2} 2^{q'd/2} \|\dot{\Delta}_q v^j\|_{L^2}. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs v , il existe une suite $(c_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\|\dot{\Delta}_q (T_{\partial_j v} v + \partial_j R(v^j, v))\|_{L^2} \leq C c_q 2^{-q(d/2-1)} \|v\|_{d/2}.$$

C'est sur le terme $(\dot{\Delta}_q (T_v \cdot \nabla v) | \dot{\Delta}_q v)$ qu'il faut utiliser une méthode de type énergie pour éviter le cas limite $H^{d/2}$. Les calculs suivants sont standards.

$$\begin{aligned} I_q &\stackrel{\text{dér}}{=} (\dot{\Delta}_q (T_v \cdot \nabla v) | \dot{\Delta}_q v) \\ &= \sum_{j, k, q'} \int \dot{\Delta}_q (S_{q'-1} v^j \partial_j \dot{\Delta}_q v^k)(x) \dot{\Delta}_q v^k(x) dx \\ &= \sum_{j, k, q'} \int [\dot{\Delta}_q, S_{q'-1} v^j] \partial_j \dot{\Delta}_q v^k(x) \dot{\Delta}_q v^k(x) dx \\ &\quad - \sum_{j, k, q'} \int S_{q'-1} v^j(x) \dot{\Delta}_q \dot{\Delta}_q v^k(x) \partial_j \dot{\Delta}_q v^k(x) dx \\ &= \sum_{j, k, q'} \int [\dot{\Delta}_q, S_{q'-1} v^j] \partial_j \dot{\Delta}_q v^k(x) \dot{\Delta}_q v^k(x) dx \\ &\quad + \sum_{j, k, q', q''} \int (S_{q''-1} v^j(x) - S_{q'-1} v^j(x)) \dot{\Delta}_q \dot{\Delta}_q v^k(x) \partial_j \dot{\Delta}_q \dot{\Delta}_{q''} v^k(x) dx \\ &\quad - \sum_{j, k, q'} \int \dot{\Delta}_q v^k(x) [S_{q''-1} v^j, \dot{\Delta}_q] \partial_j \dot{\Delta}_{q''} v^k(x) dx \\ &\quad - (\dot{\Delta}_q v | \dot{\Delta}_q (T_v \cdot \nabla v)). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} I_q &= \sum_{j, k, q'} \int [\dot{\Delta}_q, S_{q'-1} v^j] \partial_j \dot{\Delta}_q v^k(x) \dot{\Delta}_q v^k(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j, k, q', q''} \int (S_{q''-1} v^j(x) - S_{q'-1} v^j(x)) \dot{\Delta}_q \dot{\Delta}_q v^k(x) \partial_j \dot{\Delta}_q \dot{\Delta}_{q''} v^k(x) dx. \end{aligned}$$

Les opérateurs \dot{A}_q sont des opérateurs de convolution. D'où il vient que

$$[S_{q'-1} v^j, \dot{A}_{q'}] a(x) = 2^{qd} \int (S_{q'-1} v^j(x) - S_{q'-1} v^j(y)) h(2^{q'}(x-y)) a(y) dy.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\begin{aligned} |[S_{q'-1} v^j, \dot{A}_{q'}] a(x)| &\leq C 2^{-q'} \|\nabla S_{q'-1} v\|_{L^r} \\ &\quad \times \int 2^{q'} |x-y| \times |h(2^{q'}(x-y))| \times |a(y)| dy \\ &\leq C \|v\|_{d/2} \|a\|_{L^2}. \end{aligned}$$

D'où le lemme.

Le théorème 1.1 va résulter du théorème 2.1 grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. *Pour tout ε et tout T strictement positifs,*

$$\mathcal{H}_{1,T}^{d/2+1} \subset L^1([0, T]; \mathcal{C}_{\omega_\varepsilon}) \quad \text{avec} \quad \omega_\varepsilon(r) = r(1 - \log r)^{\varepsilon+1/2} \quad \text{for} \quad r \leq 1.$$

Pour démontrer cette proposition, nous allons étudier, pour $|x-y| \leq 1$, les différences

$$A(x, y) = |v(t, x) - v(t, y)|.$$

De manière assez standard, on écrit

$$v(t) = \sum_q A_q v(t).$$

Nous allons découper les fréquences suivant leur taille; l'entier N étant à déterminer, on écrit

$$\begin{aligned} A(x, y) &\leq |x-y| \sum_{q \leq N} \|\nabla A_q v(t)\|_{L^r} + 2 \sum_{q > N} \|A_q v(t)\|_{L^r} \\ &\leq |x-y| (2+N)^{\varepsilon+1/2} \sum_{q \leq N} \frac{\|\nabla A_q v(t)\|_{L^r}}{(2+q)^{\varepsilon+1/2}} \\ &\quad + 2 \sum_{q > N} 2^{-(2+q)} (2+q)^{\varepsilon+1/2} \times \frac{2^{2+q} \|A_q v(t)\|_{L^r}}{(2+q)^{\varepsilon+1/2}}. \end{aligned}$$

Choisissons alors $N = [1 - \log |x - y|] - 2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) \leq C \left(\sum_{q \leq N} \frac{\|\nabla \Delta_q v(t)\|_{L^x}}{(2+q)^{\varepsilon+1/2}} + C \sum_{q > N} \frac{2^{2+q} \|\Delta_q v(t)\|_{L^x}}{(2+q)^{\varepsilon+1/2}} \right) \\ \times |x - y| (1 - \log |x - y|)^{\varepsilon+1/2}. \end{aligned}$$

D'après la localisation spectrale des $\Delta_q v(t)$, on sait que

$$\|\nabla \Delta_q v(t)\|_{L^x} \leq C 2^{2+q} \|\Delta_q v(t)\|_{L^x}$$

Il en résulte que l'on a

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) \leq C \alpha_\varepsilon(t) |x - y| (1 - \log |x - y|)^{\varepsilon+1/2} \\ \text{avec } \alpha_\varepsilon(t) = \sum_q \frac{2^{2+q} \|\Delta_q v(t)\|_{L^x}}{(2+q)^{\varepsilon+1/2}}. \end{aligned}$$

Or, par interversion de la somme et de l'intégration, il vient

$$\int_0^T \alpha_\varepsilon(t) dt = \sum_q \frac{2^{2+q}}{(2+q)^{\varepsilon+1/2}} \int_0^T \|\Delta_q v(t)\|_{L^x} dt$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \int_0^T \alpha(t) dt \leq \|v\|_{\mathcal{N}_{1,T}^{d/2+1}} \left(\sum_{q=-1}^{\infty} \frac{1}{(2+q)^{1+2\varepsilon}} \right)^{1/2} \\ \leq \frac{C}{\varepsilon^{1/2}} \|v\|_{\mathcal{N}_{1,T}^{d/2+1}}. \end{aligned}$$

La proposition 2.1 est alors démontrée.

3. AUTOUR DU THÉORÈME D'OSGOOD

Commençons donc par démontrer l'unicité des trajectoires sous les hypothèses du théorème 1.2.. Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de (EDO) définie sur un voisinage \tilde{J} de t_0 avec la même donnée initiale x_0 . On pose

$$\rho(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|.$$

On déduit immédiatement de l'appartenance de F à $L^1_{\text{loc}}(I; C_\omega(\Omega, E))$ que

$$0 \leq \rho(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s) \omega(\rho(s)) ds \quad \text{avec } \alpha \in L^1_{\text{loc}}(I) \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0. \quad (11)$$

Les démonstrations des théorèmes 1.2 et 1.3 reposent sur le lemme suivant:

LEMME 3.1. *Soient ρ une fonction mesurable et positive, α une fonction positive localement intégrable et ω une fonction qui, comme au début du paragraphe 1, vérifie (1). On suppose que, pour un réel positif a , la fonction ρ vérifie*

$$\rho(t) \leq a + \int_{t_0}^t \alpha(s) \omega(\rho(s)) ds. \quad (12)$$

Si a est nul, la fonction ρ l'est aussi. Si a est non nul, alors on a

$$-\Omega(\rho(t)) + \Omega(a) \leq \int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau \quad \text{avec} \quad \Omega(x) = \int_x^{1/2} \frac{dr}{\omega(r)}. \quad (13)$$

Pour démontrer ce lemme, posons tout d'abord

$$R_a(t) = a + \int_{t_0}^t \alpha(s) \omega(\rho(s)) ds.$$

La fonction R_a est une fonction continue et croissante. Il résulte alors de la croissance de ω que

$$\dot{R}_a(t) = \alpha(t) \omega(\rho(t)) \leq \alpha(t) \omega(R_a(t)). \quad (14)$$

Supposons que a soit strictement positif. La fonction R_a est alors strictement positive. Comme la fonction Ω est continûment différentiable sur l'ensemble des réels strictement positifs, il résulte de (14) que

$$-\frac{d}{dt} \Omega(R_a(t)) = \frac{\dot{R}_a(t)}{\omega(R_a(t))} \leq \alpha(t).$$

En intégrant cette inégalité, on obtient l'inégalité (13) en se souvenant que la fonction $-\Omega$ est croissante et que $\rho \leq R_a$.

Supposons maintenant a nul et ρ non identiquement nulle près de t_0 . La croissance de ω autorise à remplacer ρ par la fonction (que l'on persistera à noter ρ) $\sup_{s \in [t_0, t]} \rho(s)$. Il existe alors un réel t_1 , strictement supérieur à t_0 , tel que l'on ait

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau) \omega(\rho(\tau)) d\tau \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \delta > 0.$$

Vu que la fonction ρ satisfait (12), l'inégalité (13) implique que, pour tout a' strictement positif, on ait

$$\Omega(a') \leq \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau) d\tau + \Omega(a' + \delta).$$

Comme la fonction Ω est décroissante, on a, pour tout a' strictement positif,

$$\Omega(a') \leq \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau) d\tau + \Omega(\delta).$$

Ceci est contradictoire avec l'hypothèse faite sur la divergence en 0 de l'intégrale de l'inverse de ω ; la démonstration du lemme alors alors achevée.

Grâce à l'inégalité (11), l'unicité des courbes intégrales passant par un point donné est une conséquence immédiate du lemme 3.1. Démontrons l'existence. On considère le classique schéma de Picard

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, x_k(\tau)) d\tau.$$

Nous omettons la vérification du fait que, pour J assez petit, on reste dans le domaine de définition de la fonction F et que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty(J)$. Nous allons démontrer que la suite ainsi définie est une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions continues de l'intervalle J (choisi suffisamment petit) dans E . Pour cela, posons

$$\rho_{k+1, n}(t) = \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|.$$

Il vient

$$0 \leq \rho_{k+1, n}(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(\tau) \omega(\rho_{k, n}(\tau)) d\tau.$$

En posant $\rho_k(t) = \sup_n \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|$, on déduit de la croissance de ω que

$$0 \leq \rho_{k+1}(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(\tau) \omega(\rho_k(\tau)) d\tau.$$

Grâce au lemme de Fatou et à la croissance de ω , on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$\tilde{\rho}(t) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \rho_k(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(\tau) \omega(\tilde{\rho}(\tau)) d\tau.$$

En appliquant à nouveau le lemme 3.1, on trouve que $\tilde{\rho}(t)$ est identiquement nulle au voisinage de t_0 , ce qui conclut la démonstration du théorème 1.2.

Démontrons maintenant le théorème 1.3. Pour cela, considérons deux courbes intégrales de v , notées γ_1 et γ_2 , issues respectivement de deux points distincts x_1 et x_2 tels que $\|x_1 - x_2\| < 1$. Les inégalités écrites ci-après sont valables seulement si $\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| < 1$.

Par définition de l'espace $C_{\omega_\eta, t}$, il vient

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|v(\tau, \gamma_1(\tau)) - v(\tau, \gamma_2(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|v(\tau)\|_{\omega_\eta} \times \omega_\eta(\|\gamma_1(\tau) - \gamma_2(\tau)\|) d\tau \end{aligned}$$

Appliquons alors le lemme 3.1 avec $\rho(t) = \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$, $\omega = \omega_\eta$, $a = \|x_1 - x_2\|$ et $\alpha(t) = \|v(t)\|_{\omega_\eta}$. Comme dans ce cas $\Omega_{-1(r)} = \eta^{-1}(-\log r)^\eta$, il vient

$$(-\log \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|)^\eta \geq (-\log \|x_1 - x_2\|)^\eta - \eta V_\eta(t). \tag{15}$$

Supposons que $\eta V_\eta(t) \leq (-\log \|x_1 - x_2\|)^\eta$, c'est-à-dire que

$$\|x_1 - x_2\| \leq \exp(-(\eta V_\eta(t))^{1/2}). \tag{16}$$

On déduit alors de l'inégalité (15) que

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \leq \exp(-((-\log \|x_1 - x_2\|)^\eta - \eta V_\eta(t))^{1/\eta});$$

ce qui se traduit par l'implication suivante:

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &\leq \exp(-(\eta V_\eta(t))^{1/\eta}) \\ \Rightarrow \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| &\leq \exp(-((-\log \|x_1 - x_2\|)^\eta - \eta V_\eta(t))^{1/\eta}). \end{aligned}$$

La démonstration du théorème 1.3 est ainsi achevée.

BIBLIOGRAPHIE

1. J.-M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Ecole Norm. Sup.* **14** (1981), 209-246.
2. J.-Y. CHEMIN, Remarques sur l'existence pour le système de Navier-Stokes incompressible, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 20-28.
3. J.-Y. CHEMIN, Une facette mathématique de la mécanique des fluides I, Prépublication de l'Ecole Polytechnique no. 1055, 1993.
4. R. COIFMAN ET Y. MEYER, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque* **57**, 1978.

5. R. DI PERNA ET P.-L. LIONS, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* **98**, No. 3 (1989), 511–549.
6. T. M. FLETT, "Differential Analysis," Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1980.
7. C. FOIAS, C. GUILLOPÉ, ET R. TÉMAM, Lagrangian representation of a flow, *J. Differential Equations* **57** (1985), 440–449.
8. H. FUJITA ET T. KATO, On the Navier–Stokes initial value problem I, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **16** (1964), 269–315.
9. P.-L. LIONS, Equations différentielles ordinaires et équations de transport avec des coefficients irréguliers, "Séminaire Equations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique," 1988–1989.