JOURNAL OF MULTIVARIATE ANALYSIS 4, 1–21 (1974)

Arithmétique des Lois de Probabilité Définies sur un Espace de Hilbert Séparable

BERNARD ROUSSEAU

Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France

Communicated by E. Lukacs

Un des problèmes fondamentaux de l'arithmétique des lois de probabilité est l'étude de la classe des probabilités n'ayant pas de facteur indécomposable (qui coïncide d'après un théorème de Kintchine avec la classe des probabilités indéfiniment divisibles qui n'ont que des facteurs indéfiniment divisibles). Dans le cas où les probabilités sont définies sur l'ensemble des réels ce problème a fait l'objet de nombreux travaux dont on peut trouver l'exposé dans les livres de Linnik, Lukacs et Ramachandran. Dans le cas d'un espace de dimension finie ces travaux ont été étendus par Cuppens, Ostrovskii, Livsic et Cistyakov. Nous nous interessons ici au cas des probabilités définies sur un espace de Hilbert réel séparable.

1. NOTATIONS

Par la suite E sera un espace de Hilbert réel séparable; $\langle t, x\rangle$, sera le produit scalaire de $t \in E$ et de $x \in E$ et $\| x \|$ la norme de x. Nous appellerons $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des probabilités définies sur les boréliens de E. La convergence dans $\mathscr{P}(E)$ sera toujours la convergence faible c'est-à-dire: une suite $\{P_\alpha\}$ de probabilités converge faiblement vers une probabilité $P(\{P_\alpha\} \Rightarrow P)$ si et seulement si $\int f\, dF_\alpha \to \int f\, dF$ pour toutes fonctions bornées réelles continues définies sur E. $P_1 * P_2$ sera le produit de convolution de P_1 et de P_2.

I sera l'ensemble des fonctions caracteristiques indéfiniment divisibles, I_0 l'ensemble des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles et sans facteur indécomposable. Quand E est de dimension finie on peut préciser les notations en utilisant I^n et $I_0{}^n$.

$$(e_k)_{k=1}^{\infty} \text{ sera une base de } E.$$

Si $E = F_1 \oplus F_2$ est une décomposition de E en somme directe de deux sous-

AMS 1970 subject classifications: Primary 60E20.
Key words and phrases: Infinitely divisible, characteristic functions, indecomposable factors, probabilities on separable Hilbert spaces.

espaces supplémentaires F_1 et F_2 on notera proj_{F_1} la projection de E sur F_1.

Si P appartient à $\mathscr{P}(E)$, la projection de P sur F_1 sera $\mathrm{proj}_{F_1}(P)$ définie par: $(\mathrm{proj}_{F_1}(P))(A) = P(\{x \in E: \mathrm{proj}_{F_1}(x) \in A\}_1)$ pour tout sous-ensemble borélien A de E. Ainsi $\mathrm{proj}_{F_1}(P)$ est une probabilité qui appartient à $\mathscr{P}(E)$ et qui est concentrée sur F_1.

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n, le choix d'une base de E définit un isomorphisme canonique ϕ de F sur $\mathbb{R}^n$. Si $P \in \mathscr{P}(F)$, on peut alors associer à P une probabilité $\Phi(P)$ définie sur R^n suivant la formule:

$$[\Phi(P)](B) = P\{x \in F: \phi(x) \in B\}$$

pour tout sous-ensemble borélien B de $\mathbb{R}^n$.

Φ est alors un isomorphisme du semi-groupe de convolution $\mathscr{P}(F)$ sur le semi-groupe $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. Puisque Φ est un isomorphisme, $P \in I^n$ si et seulement si $\phi(P) \in I^n$. On en déduit facilement que $P \in I_0{}^n$ si et seulement si $\phi(P) \in I_0{}^n$.

2. Un Théorème Limite

Théorème **1.** *Soient F_j une suite infinie de sous-espaces vectoriels de dimensions finies n_j telle que*:

$$F_j \subset F_{j+1} \qquad et \qquad \overline{\bigcup_j F_j} = E$$

et P une probabilité définie sur E. Si les projections de P sur F_j appartiennent à I_0 alors P appartient à I_0.

Démonstration. Puisque E est un espace de Hilbert séparable, on peut supposer que la base $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ est orthogonale et que de plus F_j est engendré par $\{e_k\}_{k=1}^{k=n_j}$.

Soit P la fonction caractéristique de P, $P(t) = \int_E e^{\langle t,x\rangle}\, dP(x)$, $t = \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k$. Si nous notons P_j la projection de P sur F_j, nous avons

$$\hat{P}_j(t) = \int e^{i\langle t,x\rangle}\, dP_j(x) = \int e^{i(\sum_{k=1}^{n_j} t_k x_k)}\, dP_j(x)$$

$$= \int e^{i\langle \mathrm{proj}_{F_j} t,x\rangle}\, dP(x) = \hat{P}(\mathrm{proj}_{F_j}(t))$$

d'où: (1) $\hat{P}_j(t) = \hat{P}(\mathrm{proj}_{F_j}(t))$ pour tout $P \in \mathscr{P}(E)$.

Si Q est un facteur de P (au sens de la convolution), il existe $\hat{R}$ tel que $\hat{P}(t) = \hat{Q}(t)\,\hat{R}(t)$ pour tout t. En particulier pour $t = \sum_{k=1}^{n_j} t_k e_k$,

$$\hat{P}(\mathrm{proj}_{F_j} t) = \hat{Q}(\mathrm{proj}_{F_j} t)\,\hat{R}(\mathrm{proj}_{F_j} t)$$

et, d'après (1), Q_j divise P_j. Puisque $P_j \in I_0$, on en déduit que $Q_j \in I$.

Montrons que Q appartient aussi à I. Q est tendue: $\forall \epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subset E$ tel que $Q(K_\epsilon) \geqslant 1 - \epsilon$. Puisque si L est compact, $L \bigcup_j \mathrm{proj}_{F_j} L$ est compact, on peut supposer que $\mathrm{proj}_{F_j} K_\epsilon \subset K_\epsilon$ et par conséquent:

$$Q_j(K_\epsilon) = Q(\{x \in E\colon \mathrm{proj}_{F_j}(x) \in K_\epsilon\}) \geqslant Q(K_\epsilon) \geqslant 1 - \epsilon.$$

La suite (Q_j) est donc tendue. Or $\lim_{j\to\infty} \hat{Q}_j(t) = \lim_{j\to\infty} \hat{Q}(\mathrm{proj}_{F_j}(t)) = \hat{Q}(t)$ uniformément d'après les hypothèses sur les F_j. La suite tendue $(\hat{Q}_j(t))$ converge uniformément vers $\hat{Q}(t)$. On en déduit alors que la suite (Q_j) converge faiblement vers $Q\colon Q_j \Rightarrow Q$ (cf. Théorème 4-4 de [12]).

De plus la classe des probabilités indéfiniment divisibles étant un sous semi groupe fermé pour la convergence faible de $\mathscr{P}(E)$ et les Q_j étant indéfiniment divisibles, alors $Q \in I$.

P est donc une probabilité indéfiniment divisible dont tous les facteurs sont aussi indéfiniment divisibles et $P \in I_0$.

3. Premières Applications

Avec le théorème précédent et la remarque de la première section on pourra étendre à $\mathscr{P}(E)$ des résultats relatifs à la caractérisation de I_0, établis dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$.

Une probabilité $P \in \mathscr{P}(E)$ est indéfiniment divisible si et seulement si sa fonction caractéristique $\hat{P}$ admet la représentation

$$\hat{P}(t) = \mathrm{ex}\ \left[i(x_0, t) - \tfrac{1}{2}\langle St, t\rangle + \int_E \left[e^{i(x,t)} - 1 - \frac{i(x,t)}{1 + \|x\|^2}\right] dM(x)\right]$$

où:

(a) x_0 est un élément fixe de E;

(b) S est un S-opérateur;

(c) M est une mesure σ-finie ayant une masse finie à l'extérieur de tout voisinage de l'origine et telle que

$$\int_{\|x\|<1} \|x\|^2\, dM(x) < \infty.$$

De plus cette représentation (dite représentation de Lévy–Kintchine) est unique.

Comme dans Linnik [9] nous appellerons facteur gaussien de $\hat{F}$ l'expression $\exp[i(x_0, t) - (1/2)\langle St, t\rangle]$ et spectre de Poisson de $\hat{P}$ le support de la mesure M. Dans le cas où le spectre de Poisson est borné (c'est à dire où la mesure M est à support compact) on montre alors facilement que $\hat{P}(t)$ admet aussi la représentation unique

$$\hat{P}(t) = \exp\left\{i(x_0, t) - \tfrac{1}{2}\langle St, t\rangle + \int_E (e^{i(t,x)} - 1)\, dM(x)\right\}.$$

Théorème 2. *Soit $P \in \mathscr{P}(E)$ une probabilité définie par la représentation de Lévy–Kintchine*:

$$\hat{P}(t) = \exp\left[i(x_0, t) - \tfrac{1}{2}(St, t) + \int_E \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + \| x \|^2}\right) M(dx)\right].$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées:

(a) *il existe un $K > 0$ tel que*

$$M(\{x: \| x \| > y\}) = O(e^{-Ky^2}) \qquad \textit{quand} \qquad y \to +\infty;$$

(b) *M est concentrée dans $\{x \in E: x = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k a_{j,k} e_k$, pour tout $j = 1, 2,\ldots)$ où $\epsilon_k = 0$ ou 1 et les $a_{j,k}$ sont des constantes réelles telles que pour $j' > j a'_{j,k}/a_{j,k}$ est soit négatif, soit un entier plus grand que 1, alors $P \in I_0$.*

Démonstration. Soit F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les n premiers vecteurs de $\{e_k\}$ et notons P_n la projection de P sur F_n. Le transformé de P_n par l'isomorphisme Φ défini dans la première section par le choix de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une probabilité à n variables vérifiant les conditions du Théorème 6-3 p. 130 de [1]. De ce théorème on déduit que $P_n \in I_0{}^n$ et d'après le Théorème 1 il s'en suit que $P \in I_0$.

Théorème 3. *Soit $P \in \mathscr{P}(E)$ une probabilité définie par le représentation de Lévy–Kintchine*

$$\hat{P}(t) = \exp\left[i(x_0, t) - \tfrac{1}{2}(St, t) + \int \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + \| x \|^2}\right) M(dx)\right].$$

Si les conditions suivantes sont réalisées

(a) $S = 0$,

(b) $M(\{x: \| x \| > y\}) = o(e^{-2y\log y})$ quand $y \to +\infty$,

(c) *M est concentrée dans* $\{x \in E\colon x = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k a_{j,k} e_k$ *pour* $j = 1, 2, \ldots\}$ *où* $\epsilon_k = 0$ *ou* 1 *et les* $a_{j,k}$ *sont des entiers relatifs tels que pour* $j' > j$ $a_{j',k}/a_{j,k}$ *est soit négatif soit un entier plus grand que* 1, *alors* $P \in I_0$.

On montre comme précédemment que $P_n \in I_0{}^n$ d'après le Théorème 4-1 p. 148 de [3].

THÉORÈME 4. *Soit* $P \in \mathscr{P}(E)$ *une probabilité, définie par la représentation de Lévy-Kintchine*

$$\hat{P}(t) = \exp\left[i(x_0, t) - \tfrac{1}{2}(St, t) + \int \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + \| x \|^2}\right) M(dx)\right].$$

Si les conditions suivantes sont réalisées:

(a) *il existe un* $K > 0$ *telle que* $M[\{x\colon \| x \| > y\}] = O(e^{-Ky^2})$ *quand* $y \to +\infty$,

(b) *M est concentrée dans* $\{x \in E\colon x = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k a_{j,k} e_k$, *pour* $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *où* $\epsilon_k = 0$ *ou* 1 *et les* $a_{j,k}$ *sont des réels positifs tels que pour* $j' > j$, $a_{j',k}/a_{j,k}$ *est un entier plus grand que* 1, *alors* $P \in I_0$.

On montre comme précédemment que $P_n \in I_0{}^n$ d'après le Théorème 2 p. 68 de [2].

THÉORÈME 5. *Soit* $P \in \mathscr{P}(E)$ *une probabilité définie par la représentation de Lévy-Kintchine*:

$$\hat{P}(t) = \exp\left[i(x_0, t) - \tfrac{1}{2}(St, t) + \int \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + \| x \|^2}\right) M(dx)\right].$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées:

(a) $S = 0$,

(b) *M est une mesure bornée concentrée dans un ensemble* $A \subset E$ *dont la projection sur un sous-espace de dimension finie de E est un ensemble rationellement indépendant, alors* $P \in I_0$.

On montre que les P_n appartiennent à $I_0{}^n$ d'après le Théorème 1, p. 240 de [5].

THÉORÈME 6. *Soit* $P \in \mathscr{P}(E)$ *une probabilité définie par la représentation de Lévy-Kintchine*:

$$\hat{P}(t) = \exp\left[i(x_0, t) - \tfrac{1}{2}(St, t) + \int \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + \| x \|^2}\right) M(dx)\right].$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées:

(a) $S = 0$,

(b) *M est une mesure concentrée dans un ensemble ouvert convexe A vérifiant $A \cap (2)A = \varnothing$[1] alors f appartient à I_0.*

Démonstration. Soit F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les n premiers vecteurs de $\{e_k\}$ et p_n la projection sur F_n, supposons que $p_n(A) \neq \varnothing$.

LEMME 1. *Si A est convexe alors $p_n(A)$ est convexe.*

LEMME 2.

$$P_n((2)A) = (2)\, p_n(A).$$

LEMME 3. *Si A est convexe alors $2(A)$ est convexe.*

Ces trois lemmes sont presque évidents et la démonstration en est laissée au lecteur.

LEMME 4 (Corollaire du théorème de Hahn-Banach). *Si E est un espace vectoriel topologique et A et B deux sous-ensembles ouverts, convexes, non vides tels que $A \cap B \neq \varnothing$, alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement A et B.*

Des hypothèses et des Lemmes 3 et 4 on déduit que A et $(2)A$ peuvent être séparés strictement par un hyperplan affine H: il existe une constante réelle λ et une forme linéaire f telles que

$$H = \{x \in E: f(x) = \lambda\}, \qquad A \subset \{x \in E: f(x) > \lambda\}, \qquad (2)A \subset \{x \in E: f(x) > \lambda\}.$$

Soient F le sous-espace vectoriel associé à la variété affine H:

$$F = \{x \in E: f(x) = 0\}$$

et F' le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de $F: F \oplus F' = E$. Puisque F est un sous-espace vectoriel associé à un hyperplan, $\dim F' = 1$ et on peut construire une base orthogonale de $E \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que e_1 engendre F' et $\{e_k\}_{k=2}^{\infty}$ engendre F.

[1] Rappelons les notations:

$$(2)A = A + A = \{z = x + y / x \in A \text{ et } y \in A\}$$
$$(p)A = (p-1)A + A; \qquad (\infty)A = N(A) = \bigcup_{p \geqslant 1} (p)A; \qquad Z(A) = \bigcup_{p \in Z} (A).$$

Z étant l'ensemble des entiers relatifs.

Soit F_n le sous-espace de E engendré par $\{e_k\}_{k=1}^n$ ($n \geqslant 1$); (d'après la définition de p_n on peut toujours trouver n tel que $p_n(A) \neq \varnothing$ et d'après le Lemme 1, $p_n(A)$ est convexe). On montre facilement que $p_n(A) \cap p_n(2)A = \varnothing$.

Si P_n est la projection de P sur F_n, le transformé de P_n par l'isomorphisme Φ défini dans la première section par la base $\{e_1, ..., e_n\}$ est une probabilité à n variables vérifiant les conditions du Théorème 1, p. 124 de (4). De ce théorème on déduit que P_n appartient à I_0^n et le Théorème 1 implique que P appartient à I_0.

4. Extension d'un Résultat d'Ostrovskiĭ

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étendre au cas d'une probabilité définie sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ le résultat d'Ostrovskiĭ suivant relatif au cas d'une probabilité définie sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Ce résultat est une condition suffisante d'appartenance à I_0^n.

Théorème 1 (Ostrovskiĭ). *Soit $P \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ la probabilité définie par:*

$$\hat{P}(t) = \exp\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k(e^{i\mu_k t} - 1) + i\alpha t\right).$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées;

(a) $\alpha \in \mathbb{R}$,

(b) *les ρ_k sont des constantes positives ou nulles telles que*

$$\rho_k = O[\exp(-K\mu_k^2)]$$

pour un $K > 0$ lorsque $k \to +\infty$ et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k < +\infty;$$

(c) *les μ_k sont des constantes réelles telles que pour $k' > k$ $\mu_{k'}/\mu_k$ est soit négatif, soit un entier plus grand que* 1, *alors $P \in I_0^1$.*

Pour la démonstration, voir Lukacs [(10, p. 266]). Nous aurons besoin des résultats suivants:

Lemme 1 [11]. *Une probabilité $P \in \mathscr{P}(R^n)$, vérifie les conditions suivantes*

(a) *P est discrète,*

(b) *$\hat{P}$ est holomorphe et sans zéro dans un tube $\| \mathrm{Im}\, t \| < \rho$ si et seulement si $\hat{P}$ admet pour $\| \mathrm{Im}\, t \| < \rho$ la représentation*

$$\hat{P}(t) = \exp\left(i(\alpha, t) + \int (e^{i(t,x)} - 1)\, dM(x)\right)$$

où $\alpha \in R^n$ et M est une mesure signée discrète finie vérifiant

$$\int e^{-(r,u)}\, d\,|\,M(u)| < +\infty$$

pour tout r vérifiant $\| r \| < \rho$. De plus, si P est concentrée dans A, alors M est concentrée dans $Z(A)$ et, si M est concentrée dans A', alors P est concentrée dans $N(A') + \alpha$.

La démonstration de ce lemme sera donnée à la fin de ce chapitre.

Or, si une probabilité P est discrète et a pour support $D(P)$, tout facteur P_1 de P est une probabilité discrète et il existe un $a \in R^n$ tel que $D(P_1)$ est inclus dans $D(P) + a$. En combinant le Lemme 1 et ce résultat, on obtient:

LEMME 2. *Soit $P(t)$ une fonction caractéristique définie par:*

$$\hat{P}(t) = \exp\left(\int (e^{i(t,x)} - 1)\, dM(x)\right)$$

où M est une mesure signée discontinue. Si $\hat{P}(z)$ est holomorphe et sans zéro dans un tube $\| \mathrm{Im}(z) \| < \rho$ et si $\hat{P}_1(t)$ est une fonction caractéristique divisant $\hat{P}(t)$, alors:

$$\hat{P}_1(t) = \exp\left(i\alpha t + \int (e^{i(t,x)} - 1)\, dN(x)\right)$$

où N est une mesure ayant les propriétés suivantes:

(a) *N est une mesure à variation bornée,*

(b) *$\int e^{-rx}\, d\,|\,N(x)| < +\infty$ pour tout r vérifiant $\| r \| < \rho$. De plus il existe $\alpha \in R^n$ tel que $D(N) \subset Z(D)(M)) - \alpha$.*

Nous utiliserons aussi le théorème suivant de Plancherel et Pólya:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure signée à variation bornée M soit à support compact est que sa transformée de Fourier–Stieltjes ($f(t) = \int e^{itx}\, dM(x)$) se prolonge en une fonction entière de type exponentiel. On a:

$$\mathrm{ext}_g\, M = \limsup_{r \to \infty} \left(\frac{\log |f(ir)|}{-r}\right),^{2}$$

$$\mathrm{ext}_d\, M = \limsup_{r \to \infty} \left(\frac{\log |f(-ir)|}{r}\right).$$

[2] Rappelons la définition: $-\mathrm{ext}_g\, M$ = borne inférieure du support de M, $-\mathrm{ext}_d\, M$ = borne supérieure du support de M.

Pour une démonstration, voir Ramachandran ([13, p. 198]).

THÉORÈME 7. *Soit $P \in \mathscr{P}(R^n)$ la probabilité définie par:*

$$\log \hat{P}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\epsilon} \lambda_{k,\epsilon} \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \mu_{j,k} t_j\right) - 1\right] \tag{2}$$

avec $= (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ *et* $\epsilon_j = 0$ *ou* 1, $\sum_\epsilon$ *indiquant la sommation sur les* $2^n - 1$ *valeurs non nulles de* ϵ. *Si les conditions suivantes sont vérifiées:*

(a) *les $\mu_{j,k}$ sont des rationnels tels que si $k' > k$ $\mu_{j,k'}/\mu_{j,k}$ est soit négatif soit un entier plus grand que* 1,

(b) *les $\lambda_{k,\epsilon}$ sont des constantes positives ou nulles telles que*

$$\lambda_{k,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = 0 \left[\exp\left(-K \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \mu_{j,k}^2\right)\right]$$

pour un $K > 0$ lorsque $k \to +\infty$ et

$$\sum_k \sum_\epsilon \lambda_{k,\epsilon} < +\infty,$$

alors $P \in I_0^n$.

Le théorème étant démontré dans le cas $n = 1$ nous allons procéder par récurrence et supposer que si une probabilité $P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^{n-1})$ a une fonction caractéristique qui admet la représentation précédente alors $P \in I_0^{n-1}$.

On peut écrire (2) sous la forme

$$\log \hat{P}(t) = \int (e^{i(t,x)} - 1)\, dM(x)$$

où M est une mesure signée discontinue et, comme $\log \hat{P}(z)$ est une fonction entière, $\hat{P}(z)$ est holomorphe et sans zéro. D'après le Lemme (2) $\hat{P}(t)$ sera à un facteur de translation près de la forme:

$$\log \hat{P}_1(t) = \int (e^{i(t,x)} - 1)\, dN(x) \tag{3}$$

ou N est une mesure bornée discontinue vérifiant $D(N) \subset (Z)\, D(M)$. De plus

$$\int e^{-(r,x)}\, d\,|N(x)| < +\infty \tag{4}$$

pour tout r. (3) peut donc s'écrire

$$\log \hat{P}_1(t) = \sum_{q \in Q^n} l_q \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} q_j t_j\right) - 1\right] \qquad \text{où} \qquad l_q \in R. \tag{5}$$

Dans (2) et (5) fixons $(n - 1)$ variables $t_j = it_{0,j}$ imaginaires pures. Par exemple $t_j = it_{0,j}$ pour $j = 2, 3, \ldots, n$. De (2) on déduit que

$$\log \hat{P}_{(t_1, it_{0,2}, \ldots, it_{0,n})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k(t_{0,2}, \ldots, t_{0,n}) \times \left[\exp\left(- \sum_{j=2}^{n} \epsilon_j \mu_{j,k} t_{0,j}\right) - 1\right] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(t_{0,2}, \ldots, t_{0,n})[\exp(i_{1,k} t_1) - 1]$$

avec

$$A_k = \sum_{(\epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)} \lambda_{k,1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n} \exp\left(- \sum_{j=2}^{n} \epsilon_j \mu_j t_{0,j}\right)$$

et

$$B_k = \sum_{(\epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) \neq 0} \lambda_{k,0,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n} .$$

De même de (5), on déduit que

$$\log \hat{P}_1(t_1, it_{0,2}, \ldots, it_{0,n}) = \sum_{(q_2, \ldots, q_n)} l_{0,q_2,\ldots,q_n} \left[\exp\left(- \sum_{j=2}^{n} q_j t_{0,j}\right) - 1\right] + \sum_{q_1 \neq 0} \left[\sum_{(q_2, \ldots, q_n)} l_{q_1,\ldots,q_n} \exp\left(- \sum_{j=2}^{n} q_j t_{0,j}\right)\left(e^{iq_1 t_1} - 1\right)\right].$$

On vérifie facilement que

$$\log \frac{\hat{P}(t_1, it_{0,2}, \ldots, it_{0,n})}{\hat{P}(0, it_{0,2}, \ldots, it_{0,n})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(e^{i\mu_{1,k} t_1} - 1)$$

est le logarithme d'une fonction caractéristique de la variable t_1 qui satisfait aux conditions du théorème I d'Ostrovskiĭ, et d'après ce résultat

$$\hat{P}(t_1, it_{0,2}, \ldots, it_{0,n})[\hat{P}(0, it_{0,2}, \ldots, it_{0,n})]^{-1}$$

est la fonction caractéristique d'une probabilité appartenant à I_0^1 ce qui implique que tous les facteurs sont de la même forme. De l'unicité de la représentation de Lévy–Kintchine, on déduit que

$$\sum_{(q_2,\ldots,q_n)} l_q \exp\left(-\sum_{j=2}^{n} q_j t_{0,j}\right) = 0 \tag{6}$$

pour tout $t_{0,j} \in R$ si $q_1 \notin \{\mu_{1,k}\}$. De (4), on déduit aisément que le premier membre de (6) est une fonction entière qui est donc identiquement nulle. Ceci entraîne que

$$l_q = 0$$

si $q_1 \notin \{\mu_{1,k}\}$. En fixant les autres variables, on obtient de même

$$l_q = 0$$

si $q_j \notin \{\mu_{j,k}\}$ $(j = 1,\ldots, n)$.

On en déduit facilement qu'avec de nouvelles notations:

$$\log \hat{P}_1(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} l_{k_1,\ldots,k_n}(e^{i\Sigma_{j=1}^{n}\mu_{j,k}t_j} - 1) \tag{7}$$

en posant par convention $\mu_{j,0} = 0$.

Fixons maintenant dans ces deux expressions une variable $t_j = it_{0,j}$ (imaginaire pure), par exemple $t_n = it_{0,n}$; il vient de (2)

$$\log \hat{P}(t_1,\ldots, t_{n-1}, it_{0,n}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k(t_{0,n}) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\epsilon'} \alpha_{k,\epsilon'}(t_{0,n})[e^{i\Sigma_{j=1}^{n-1}\epsilon_j \mu_{j,k}t_j} - 1]$$

où

$$\beta_k(t_{0,n}) = [e^{-\mu_{n,k}t_{0,n}} - 1]\left[\sum_{(\epsilon:\epsilon_n=1)} \lambda_{k,\epsilon}\right]$$

et

$$\alpha_{k,\epsilon'}(t_{0,n}) = \lambda_{k,(\epsilon',0)} + \lambda_{k,(\epsilon',1)}e^{-\mu_{n,k}t_{0,n}}$$

pour $\epsilon' = (\epsilon_1,\ldots, \epsilon_{n-1})$ non nul. De même de [7]

$$\log \hat{P}_1(t_1,\ldots, t_{n-1}, it_{0,n}) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_{n-1}=-\infty}^{+\infty} \Big\{ \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} l_k(e^{-\mu_{n,k_n}t_{0,n}} - 1)$$

$$+ \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} l_k e^{-\mu_{n,k_n}t_{0,n}}[e^{i\Sigma_{j=1}^{n-1}\mu_{j,k}t_j} - 1]\Big\} \tag{8}$$

or:

$$\log \frac{\hat{P}(t_1, \ldots, t_{n-1}, it_{0,n})}{\hat{P}(0, \ldots, 0, it_{0,n})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\epsilon'} \alpha_{k,\epsilon'}(t_{0,n})[e^{i\Sigma_{j=1}^{n-1}\epsilon_j\mu_{j,k}t_j} - 1]$$

est le logarithme d'une fonction caractéristique d'une variable $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ qui satisfait à l'hypothèse de récurrence. Elle appartient donc à I_0^{n-1} et ses facteurs sont du même type. En particulier pour k, fixé, egal à p le paramètre d'énergie de $\hat{P}(t)$ au point $(\epsilon_1\mu_{1,p}, \epsilon_2\mu_{2,p}, \ldots, \epsilon_{n-1}\mu_{n-1,p})$ est $\alpha_{p,\epsilon'}$.

D'après (8) et l'unicité de la représentation de Lévy-Kintchine le paramètre d'énergie d'un facteur de P sera

$$\sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} l_{\epsilon_1 p, \epsilon_2 p, \ldots, \epsilon_{n-1} p, k_n} \exp(-\mu_{n,k_n} t_{0,n})$$

et on a donc

$$0 \leqslant \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} l_{\epsilon_1 p, \ldots, \epsilon_{n-1} p, k_n} \exp(-\mu_{n,k_n} t_{0,n})\, \alpha_{p,\epsilon'},$$

soit

$$0 \leqslant \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} l_{\epsilon_1 p, \ldots, \epsilon_{n-1} p, k_n} \exp(-\mu_{n,k_n} t_{0,n}) < \lambda_{p,(\epsilon',0)} + \lambda_{p,(\epsilon',1)} \exp(-\mu_{n,p} t_{0,n}) \tag{9}$$

pour tout $t_{0,n} \in R$.

Soit $\phi_{p,\epsilon'}$ la fonction définie par

$$\phi_{p,\epsilon'}(z) = \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} l_{\epsilon_1 p, \ldots, \epsilon_{n-1} p, k_n} \exp(i\mu_{n,k_n} z); \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Les coefficients $l_{\epsilon_1 p, \ldots,} l_{\epsilon_{n-1} p, k_n}$ étant les sauts aux points $(\epsilon_1\mu_{1,p}, \ldots, \epsilon_{n-1}\mu_{n-1,p}, \mu_{n,k_n})$ de la mesure à variation bornée $N(5)$, $\phi_{p,\epsilon'}(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$ est la transformée de Fourier d'une mesure $N_{p,\epsilon'}$ à variation bornée qui d'après (4) et (9) se prolonge dans le plan complexe en une fonction entière de type exponentiel. D'après le théorème de Plancherel et Polya $N_{p,\epsilon'}$ est concentrée dans l'intervalle $[-h'_{p,\epsilon'}, h_{p,\epsilon'}]$ avec

$$h'_{p,\epsilon'} = \lim_{r\to+\infty} \sup \left[\frac{\log \phi_{p,\epsilon'}(ir)}{r}\right] \tag{10}$$

$$h_{p,\epsilon'} = \lim_{r\to+\infty} \sup \left[\frac{\log \phi_{p,\epsilon'}(-ir)}{r}\right] \tag{11}$$

Si $\mu_{n,p} > 0$ (resp. $\mu_{n,p} < 0$), on a $h_{p,\epsilon'} \leqslant \mu_{n,p}$ et $-h'_{p,\epsilon} \geqslant 0$ (resp. $h_{p,\epsilon'} \leqslant 0$

et $-h'_{p,\epsilon'} \geqslant \mu_{n,p}$) et par conséquent $l_{\epsilon_1 p,\ldots,\epsilon_{n-n}p,k_n} = 0$ si k_n n'est pas compris entre 0 et p. Nous pouvons faire un raisonnement analogue en fixant une variable quelconque $t_j = it_{0,j}$; $j = 1, 2,\ldots, n$ et compte tenu de la définition des $\mu_{j,k}$ les seuls coefficients l non nuls sont ceux de la forme $l_{k,\epsilon}$ en posant $k, \epsilon = (k\epsilon_1 ,\ldots, k\epsilon_j ,\ldots, k\epsilon_n)$; $k \in Z$.

Montrons que ces coefficients sont positifs. De (9), on obtient

$$0 \leqslant l_{\epsilon_1 p,\ldots,\epsilon_{n-1}p,0} + l_{\epsilon_1 p+\ldots+\epsilon_{n-1}p,pe}e^{\mu_{n,p}x} \leqslant \lambda_{p,(\epsilon',0)} + \lambda_{p,(\epsilon',1)}e^{\mu_{n,p}x}$$

pour tout $x \in R$. Si $(\operatorname{sgn} \mu_{n,p})x \to -\infty$ on obtient,

$$0 \leqslant l_{\epsilon_1 p,\ldots,\epsilon_{n-1}p,0} \leqslant \lambda_{p,(\epsilon',0)} ,$$

et si $(\operatorname{sgn} \mu_{n,p})x \to +\infty$ on obtient

$$0 \leqslant l_{\epsilon_1 p,\ldots,\epsilon_{n-1}p,p} \leqslant \lambda_{p,(\epsilon',1)}$$

ce qui entraîne

$$0 \leqslant l_{k,\epsilon} \leqslant l_{k,\epsilon} .$$

Tous les facteurs de P sont indéfiniment divisibles et P appartient donc à $I_0{}^n$.

Dans l'énoncé du Théorème 7, nous avons supposé que les constantes $\mu_{j,k}$ $(j = 1, 2,\ldots, n)$, $k = (0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$; étaient des nombres rationnels, or dans le théorème d'Ostrovskiĭ les $\mu_{j,k}$ étaient des constantes réelles. En utilisant un isomorphisme convenable, on peut montrer que cette condition supplémentaire est superflue et démontrer le

THÉORÈME 8. *Soit P, $P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ une probabilité définie par*:

$$\log \hat{P}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\epsilon} \lambda_{k,\epsilon} \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \mu_{j,k} t_j\right) - 1\right]$$

si les conditions suivantes sont vérifiées:

(a) $\epsilon = (\epsilon_1 ,\ldots, \epsilon_j ,\ldots, \epsilon_n)$ *avec* $\epsilon_j = 0$ *ou* 1 *et* $\sum_\epsilon$ *indique la sommation sur les* $2^n - 1$ *valeurs non nulles de* ϵ;

(b) *les* $\lambda_{k,\epsilon}$ *sont des constantes positives ou nulles telles que* $\sum_k \lambda_{k,\epsilon} < +\infty$ *et il existe un* $C > 0$ *pour lequel*

$$\lambda_{k,\epsilon} = O[e^{-C\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\mu_{j,k}^2}] \text{ quand } k \to +\infty;$$

(c) *les* $\mu_{j,k}$ *sont des constantes réelles telles que si* $k' > k$: $\mu_{j,k'}/\mu_{j,k}$ *est soit négatif soit un entier plus grand que* 1, *alors* $P \in I_0{}^n$.

Nous démontrons le Lemme 1 et commençons par le cas $n = 1$. Dans ce cas, la démonstration est dûe à Ostrovskiĭ [11], mais comme elle est parue en russe, nous pensons bien faire en donnant une version. Les propriétés utilisées des fonctions presque périodiques peuvent être trouvées dans Favard [6].

Si $\hat{P}$ à la représentation

$$\log \hat{P}(t) = i\alpha t + \int (e^{itx} - 1)\mu(dx)$$

alors

$$P = \exp(-\mu(R))[\delta_\alpha * \exp \mu]$$

où δ_α est la probabilité dégénérée au point α et

$$\exp \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu^{*k}.$$

On en déduit que si μ est discrète, P est discrète et si μ est concentrée dans A, P est concentrée dans $\mathbb{N}(A) + \alpha$.

De plus si $\int e^{-ru} \mid \mu(du)| < +\infty$ pour $| r | < \rho$ alors

$$\int e^{-ru}\mu^+(du) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int e^{-ru}\mu^-(du) < +\infty \qquad \text{pour} \quad | r | < \rho$$

du théorème de Raikov on déduit que $\int e^{itu}\mu^+(du)$ et $\int e^{itu}\,\mu^-(du)$ sont des fonctions analytiques dans la bande $\{-\rho < \mathrm{Im}(t) < \rho\}$ et $\int e^{itu}\,\mu(du)$ est analytique dans la même bande, ce qui entraîne que $\hat{P}$ est une fonction caractéristique analytique, régulière et sans zéro dans la bande $\{-\rho < \mathrm{Im}(t) < \rho\}$.

Réciproquement si P est discrète et de support A, alors

$$\hat{P}(t) = \int e^{itx}\,dP(x) = \sum_{\lambda \in A} p_\lambda e^{i\lambda t},$$

$\hat{P}(t)$ étant une fonction caractéristique est uniformément convergente et est une fonction presque périodique avec

$$\mathcal{M}_{\hat{P}} = Z(A).$$

$\mathcal{M}_{\hat{P}}$ étant le spectre de $\hat{P}$.

Soit $\tilde{P}$, $\tilde{P} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ définie par $\tilde{P}(B) = P(-B)$ pour tout borélien B, alors:

$$| \hat{P}(t)|^2 = \int e^{itx}(P * \tilde{P})(dx).$$

Puisque P est discrète et concentrée dans A, $P * \tilde{P}$ est discrète et concentrée dans $A + (-A) \subset Z(A)$ d'où:

$$|\,P(t)|^2 = \sum_{\lambda \in Z(A)} q_\lambda' e^{i\lambda t}.$$

Si $z = x + iy$ x et y réels

$$|\,P(x+iy)|^2 = \sum_{\lambda \in Z(A)} q_\lambda(y)\, e^{i\lambda x}.$$

De plus, puisque par hypothèse $\hat{P}$ est analytique régulière et sans zéro dans la bande $\{-\rho < \operatorname{Im}(t) < \rho\}$, $|\,\hat{P}(x+iy)|^2$ est analytique, régulière et sans zéro dans la bande $\{|\,y\,| < \rho\}$. On en déduit que $|\,\hat{P}(x+iy)|^2$ est une fonction presque périodique analytique et sans zéro dans la bande $\{|\,y\,| < \rho\}$ et développable en série de Fourier absolument convergente. On a de plus

$$\inf_{-\rho<y<\rho} |\,\hat{P}(x+iy)|^2 > 0$$

et par conséquent le logarithme est régulier sur la fermeture de l'ensemble des valeurs de $|\,\hat{P}(z)|^2$.

On en déduit que $\phi(x,y) = \log |\,\hat{P}(x+iy)|^2$ est une fonction presque périodique développable en série de Fourier absolument convergente dans la bande $\{-\rho < y < \rho\}$. Puisque

$$\mathscr{M}_{\log(|\hat{P}|^2)} \subset \mathscr{M}_{|\hat{P}|^2}$$

il vient

$$\phi(x,y) = \sum_{\lambda \in Z(A)} r_\lambda(y)\, e^{i\lambda x};\ |\,y\,| < \rho.$$

Soit $u(x,y) = \log |\,\hat{P}(x+iy)| = (1/2)\,\phi(x,y)$. C'est une fonction harmonique, presque périodique (par rapport à x), et par conséquent

$$u(x,y) = -\alpha y + \beta + \sum_{\lambda \in Z(A)} (a_\lambda e^{-\lambda y} \cos \lambda x + b_\lambda e^{-\lambda y} \sin \lambda x) \qquad |\,y\,| < \rho$$

où α, β, a et b sont des constantes réelles, ce développement étant uniformément convergent pour $|\,y\,| < \rho$. De plus puisque $\hat{P}(-t) = \hat{P}(t)$ il s'en suit que $u(-x,y) = u(x,y)$ ce qui implique que les b_λ sont nuls d'où

$$u(x,y) = -\alpha y + \beta + \sum_{\lambda \in Z(A)} a_\lambda e^{-\lambda y} \cos \lambda x,$$

et

$$\sum_{\lambda \in Z(A)} |a_\lambda| e^{-\lambda y} < +\infty \qquad \text{pour} \quad |y| < \rho.$$

Si g est défini par

$$g(t) = i\alpha t + \beta t + \sum_{\lambda \in Z(A)} a_\lambda e^{i\lambda t}, \qquad t = x + iy;$$

on en déduit que $g(t)$ est holomorphe dans la bande $\{|\operatorname{Im}(t)| < \rho\}$ et que $\operatorname{Re}[g(t)] = u(x, y)$, c'est à dire $\operatorname{Re}[g(t)] = \log |\hat{P}(t)|$.

Or $\log |\hat{P}(t)| = \operatorname{Re}[\log \hat{P}(t)]$ d'où

$$\operatorname{Re}[g(t)] = \operatorname{Re}[\log \hat{P}(t)]$$

$g(t)$ et $\log \hat{P}(t)$ étant deux fonctions holomorphes dans la bande $\{|\operatorname{Im}(t)| < \rho\}$ ayant même partie réelle, elles diffèrent d'une constante imaginaire pure:

$$\log \hat{P}(t) = g(t) + i\gamma \ (\gamma \in \mathbb{R}).$$

Or pour $t = 0$, $\hat{P}(t) = 1$ d'où:

$$\gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = -\sum_{\lambda \in Z(A)} a_\lambda .$$

Finalement,

$$\log \hat{P}(t) = i\alpha t + \sum_{\lambda \in Z(A)} (e^{i\lambda t} - 1).$$

Ce qui montre que

$$\log \hat{P}(t) = i\alpha t + \int (e^{itx} - 1)\, \mu(dx),$$

μ est une mesure signée, discrète, finie, concentrée dans $Z(A)$ et vérifiant

$$\int e^{-ru} |\mu(du)| < +\infty \qquad \text{si} \quad |r| < \rho.$$

Nous passons au cas $n > 1$.

Dans le sens direct la démonstration est la même que dans le cas $n = 1$, elle sera donc omise.

Réciproquement, puisque P est discrète et concentrée dans A, A est une ensemble dénombrable. Soit B un ensemble dénombrable indépendant par rapport aux rationnels tel que:

$A \subset Q(B)$ ($Q(B)$: réunion de toutes les combinaisons linéaires à coefficients rationnels des éléments de B); ce qui implique que $Z(P) \subset Q(B)$. On peut prendre comme ensemble B un sous-ensemble de A.

Si θ est un élément donné de $\mathbb{R}^n$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\theta \neq 0$, on peut définir la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par θ, cette projection sera notée pr_θ.

Comme B est dénombrable et indépendant, l'ensemble des vecteurs θ tels que $pr_\theta(B)$ n'est pas indépendant est dénombrable. Soit donc maintenant θ tel que $pr_\theta(B)$ est un ensemble indépendant.

Dans ce cas pr_θ est une application bijective de B sur $pr_\theta(B)$, de même pr_θ est une application bijective de $Q(B)$ sur $pr_\theta[Q(B)]$ et donc de A sur $pr_\theta(A)$.

On définit $pr_\theta P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ par $pr_\theta P(X) = P[\{x \in \mathbb{R}^n : pr_\theta x \in X\}$ pour tout borélien X de $\mathbb{R}^n$; $pr_\theta P$ est donc une probabilité discrète concentrée sur $pr_\theta A$.

De plus $\hat{P}(t)$ est analytique dans la bande Γ: $\{\| \operatorname{Im}(t)\| < \rho\}$ si et seulement si $\widehat{pr_\theta P}(t)$ est analytique dans la bande $\{-j(-\theta) < \| \operatorname{Im}(t)\| < j(\theta)\}$ où j est la jauge de Γ; si $\| \theta \| = 1$ on en déduit que $\widehat{pr_\theta P}(t)$ est analytique dans la bande

$$\{-\rho < \| pr_\theta \operatorname{Im}(t)\| < \rho\}.$$

Il s'en suit que $pr_\theta P$ vérifie les conditions du lemme dans le cas $n = 1$, de plus

$$\widehat{pr_\theta P}(t) = \hat{P}(pr_\theta t).$$

D'où

$$\log \widehat{pr_\theta P}(t) = i(\gamma, pr_\theta t) + \int (e^{i(pr_\theta t, x)} - 1)\, \mu'(dx)$$

et μ' est une mesure signée, discrète, finie, concentrée dans $Z(pr_\theta A) \subset pr_\theta Q(B)$; et $\gamma \in pr_\theta A$. De plus

$$\int e^{-(pr_\theta r, x)} \mid \mu'(dx)| < +\infty \qquad \text{si} \quad \| pr_\theta r \| < \rho.$$

Du fait que pr_θ est une application bijective de $Q(B)$ sur $pr_\theta(Q(B))$ on déduit alors que

$$\log \hat{P}(t) = i(\alpha, t) + \int (e^{i(t,x)} - 1)\, \mu(dx)$$

avec $\alpha \in Q(B)$ tel que $pr_\theta \alpha = \gamma$, μ est une mesure unique, signée, discrète, finie, concentrée dans $Z(A)$ inclus dans $Q(B)$ telle que

$$\int e^{-(r,u)} \mid \mu(du)| < +\infty \text{ pour tout } r \text{ tel que } \| r \| < \rho.$$

Du Théorème 8 on en déduit comme précédemment le

THÉORÈME 9. *Soit $P \in \mathscr{P}(E)$ une probabilité, définie par*

$$\hat{P}(t) = \exp\left[i(x_0, t) + \int (e^{i(t,x)} - 1)\, M(dx)\right].$$

Si les conditions suivantes sont réalisées:

(a) *il existe un $K > 0$ tel que $M[\{x: \| x \| > y\}] = O(e^{-Ky^2})$ quand $y \to +\infty$.*

(b) *M est une mesure concentrée dans $\{xE: x = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k a_{j,k} e_k$, pour $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ où $\epsilon_k = 0$ ou 1 et les $a_{j,k}$ sont des constantes réelles telles que $j' > j$ $a_{j',k}/a_{j,k}$ est soit négatif soit un entier plus grand que 1, alors $P \in I_0$.*

5. ISOMORPHISME ET APPLICATIONS

Nous utilisons ici une méthode due à R. Cuppens [5]. Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$), M l'un des ensembles $\mathbb{N}$, Z, Q^+, Q et $M(A)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\sum_{j=1}^{\infty} h_j a_j$ où $a_j \in A$ et $h_j \in M$, tous les h_j étant nuls sauf un nombre fini. Nous notons $\mathscr{P}_{M(A)}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des probabilités définies sur $\mathbb{R}^n$ et concentrées sur $M(A)$: si $P \in \mathscr{P}_{M(A)}(\mathbb{R}^n)$ et si Q et S sont deux probabilités telles que $P = Q * S$ alors on peut toujours trouver deux probabilités: $Q' = \delta_\alpha * Q$ et $S' = \delta_{-\alpha} * S$ (δ_α désignant la probabilité dégénérée au point α) qui appartiennent à $\mathscr{P}_{M(A)}(\mathbb{R}^n)$; de plus

$$P = Q' * S'.$$

Les probabilités Q' et S' sont donc respectivement équivalentes (pour la convolution) aux probabilités Q et S. Nous pouvons traduire ceci en disant que $\mathscr{P}_{M(A)}(\mathbb{R}^n)$ est fermé pour les décompositions en facteurs. De même si A est un sous-ensemble de E, espace de Hilbert réel séparable, alors $\mathscr{P}_{M(A)}(E)$ est fermé pour les décompositions en facteurs.

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $A' \subset E$ deux ensembles rationnellement indépendants ayant même cardinal, il existe donc une bijection ϕ de A sur A'. On peut étendre ϕ à une application bijective de $M(A)$ sur $M(A')$ (cette extension sera encore notée ϕ) par la formule

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} h_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \phi(a_j)$$

où $a_j \in A$ et $h_j \in M$, tous les h_j étant nuls sauf un nombre fini.

A toute probabilité $P \in \mathscr{P}_{M(A)}(\mathbb{R}^n)$ on peut faire alors correspondre une probabilité $\tilde{P} \in \mathscr{P}_{M(A')}(E)$ par l'application ϕ définie par:

$$\tilde{P}(B') = \phi(P)(B') = P(\phi^{-1}\{(B') \cap M(A)\})$$

pour tout sous-ensemble borélien B' de E. ϕ étant une bijection de $M(A)$ sur $M(A')$ il s'en suit que ϕ est un isomorphisme du semi-groupe de convolution $\mathscr{P}_{M(A)}(\mathbb{R}^n)$ sur le semi-groupe de convolution $\mathscr{P}_{M(A')}(E)$. En particulier P appartient à $I_0{}^n$ si et seulement si $\tilde{P}$ appartient à I_0.

Si la fonction caractéristique $\tilde{P}$ de $P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ est définie par la représentation simplifiée de Lévy–Kintchine (dite de De Finetti):

$$\hat{P}(t) = \exp\left(\int (e^{i(t,x)} - 1)\, \mu(dx)\right); \qquad t \in \mathbb{R}^n;$$

μ étant une mesure à variation bornée, de la formule

$$P = \exp \mu / \exp \mu(\mathbb{R}^n)$$

on déduit que μ est concentrée sur $\mathbb{N}[M(A)] = M(A)$. Alors la fonction caractéristique $\hat{\tilde{P}}$ de $\tilde{P} = \phi(P)$ est définie par

$$\hat{\tilde{P}}(\sigma) = \exp\left(\int (e^{i(\sigma,u)} - 1) \mu'(du)\right)$$

où μ' est une mesure à variation bornée concentrée sur $M(A')$ et définie par

$$\mu'(B') = \mu(\phi^{-1}\{(B') \cap M(A)\})$$

pour tout sous-ensemble borélien B' de E.

En appliquant la méthode précédente aux Théorèmes 9 et 3 du chapitre précédent on déduit respectivement les résultats suivants:

THÉORÈME 10. *Soit $P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ une probabilité définie par:*

$$\hat{P}(t) = \exp\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\epsilon} \lambda_{k,\epsilon} \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j a_{m,j}(\sigma_j, t)\right) - 1\right]\right\}$$

où

(a) $\epsilon_j = 0$ *ou* 1 *et* $\sum_\epsilon$ *indique la sommation sur les suites* $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$, *tous les* ϵ_j *étant nuls saufs un nombre fini*;

(b) $A = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ *est un ensemble rationellement indépendant*;

(c) *les* $a_{m,j}$ *sont des rationnels positifs ou négatifs tels que pour* $m' > m$ $a_{m',j}/a_{m,j}$ *est soit négatif soit un entier plus grand que* 1;

(d) *les* $\lambda_{m,\epsilon}$ *sont des constantes positives ou nulles vérifiant les deux conditions suivantes*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\epsilon} \lambda_{m,\epsilon} < +\infty$$

et il existe une constante positive K telle que

$$\lambda_{m,\epsilon} = O[e^{-K\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j a_{m,j}^2}](m \to +\infty)$$

alors P appartient à $I_0{}^n$.

THÉORÈME 11. *Soit* $P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ *une probabilité définie par*

$$\hat{P}(t) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\epsilon} \lambda_{m,\epsilon} \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j a_{m,j}(\sigma_j\,, t)\right) - 1\right]\right\},$$

où les conditions a, b, c du théorème précédent sont vérifiées et de plus $\lambda_{m,\epsilon}$ *sont des constantes positives ou nulles vérifiant*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\epsilon} \lambda_{m,\epsilon} < +\infty,$$

$$\lambda_{m,\epsilon} = 0\left[\exp\left(-2 \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j \mid a_{m,j} \mid\right) \log(\mid a_{m,j} \mid)\right] (m \to \infty)$$

alors P appartient à $I_0{}^n$.

Ces deux résultats sont des extensions des Théorèmes 2 et 3 pp. 149 et 150 de [3]. En appliquant la méthode précédente au Théorème 1 p. 148 de [3] on déduit également un résultat nouveau pour la caractérisation de I_0.

THÉORÈME 12. *Si* $P \in \mathscr{P}(E)$ *(E espace de Hilbert séparable) est une probabilité définie par*

$$\hat{P}(t) = \exp\left(\int (e^{i(t,x)} - 1)\right) \mu(dx)$$

où μ *est une mesure positive ou nulle concentrée dans un sous-ensemble de E rationnellement indépendant alors P appartient à* I_0.

Bibliographie

[1] Cuppens, R. (1967). Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **16** 63–153.

[2] Cuppens, R. (1969). On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions of several variables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* **12** 59–72.

[3] Cuppens, R. (1972). Isomorphismes et arithmétique des semi-groupes de lois de probabilité. *Z. Wahrscheinlichkeitsthéorie Verw. Gebiete* **21** 147–153.

[4] Cuppens, R. (1969). Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles de plusieurs variables à spectre de Poisson continu. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B* **5** 123–133.

[5] Cuppens, R. (1972). Independent sets and factorization of probability laws. *J. Multivariate Analysis* **2** 239–248.

[6] Favard, M. J. (1933). *Leçons sur les Fonctions Presque Périodiques.* Gauthier–Villars, Paris.

[7] Gelfand, I. M., Raikov, D. A., et Chilov, G. E. (1964). *Les Anneaux Normés Commutatifs.* Gauthier–Villars, Paris.

[8] Grenander, V. (1963). *Probabilities on Algebraic Structures.* John Wiley & Sons; New York.

[9] Linnik, Y. V. (1962). *Decomposition des Lois de Probabilité.* Gauthier–Villars, Paris.

[10] Lukacs, E. (1970). *Characteristic Functions.* 2nd ed., Griffin, London.

[11] Ostrovskiĭ, I. V. (1970). On some classes of infinitely divisible laws (in Russian). *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.* **34** 923–944.

[12] Parthasarathy, K. R. (1967). *Probability Measures on Metric Spaces.* Academic Press, New York.

[13] Ramachandran, B. (1967). *Advanced Theory of Characteristic Functions.* Statistical Publishing Society, Calcutta.