JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **139**, 182–195 (1996)
ARTICLE NO. 0082

# Inégalités de Sobolev et résultats d'isolement pour les applications harmoniques

Saïd Ilias

*Université de Tours, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France*

Received December 20, 1994

## Introduction



est très utile dans l'étude de nombreux problèmes géométriques. Le cas des variétés sans bord a été abondamment traité; en revanche, peu de résultats ont été obtenus pour les variétés à bord. Dans le premier paragraphe du présent article, nous étendons au cas des variétés à bord une inégalité de Sobolev que nous avions montré pour les variétés sans bord dans [7]. En effet, (voir théorème 1.1), si $(M, g)$ est une variété riemannienne compacte, à bord convexe, de dimension $m > 2$ et de courbure de Ricci minorée par une constante $k > 0$, alors toute fonction $f \in H_1^2(M)$ vérifié l'inégalité:

$$\|f\|^2_{2m/(m-2)} \leqslant V(M)^{-2/m} \left( \frac{4(m-1)}{m(m-2)k} \|df\|_2^2 + \|f\|_2^2 \right)$$

Dans le second paragraphe, et comme application de cette inégalité, nous montrons un résultat d'isolement pour les applications harmoniques. En effet, il est bien connu (voir [4]) qu'il n'existe aucune application harmonique non constante $\phi\colon (M, g) \to (N, h)$ d'une variété riemannienne compacte $(M, g)$ sans bord, de courbure de Ricci $Ric^M$ strictement positive à valeurs dans une variété $(N, h)$ à courbure sectionnelle $\sigma^N$ négative. H. C. Sealey ([12] et [13]), puis J. Eells et L. Lemaire ([3]) ont montré que si $Ric^M$ est minoré par une constante $k > 0$ et si $\sigma^N$ est majorée par une constante $\sigma > 0$, alors il existe une constante $C(m, k, \sigma) > 0$ telle que, toute application harmonique $\phi\colon(M, g) \to (N, h)$ dont la norme $L_\infty$ de la densité d'énergie vérifie $\|e(\phi)\|_\infty < C(m, k, \sigma)$ est constante.

Par la suite, S. Ilias (cf. [8]) et C. Margerin ([9]) ont déterminé une valeur optimale de la constante $C(m, k, \sigma)$, ainsi qu'une amélioration de cette valeur dans le cas où la variété source $(M, g)$ est Kählérienne. L'objet



0022-1236/96 $18.00

principal du second paragraphe est de montrer un résultat d'isolement optimal portant sur la norme $L_{m/2}$ de la densité d'énergie de $\phi$ (i.e. la $m$-énergie de $\phi$). En effet, en utilisant l'inégalité de Sobolev obtenu au premier paragraphe ainsi qu'une formule à la Reilly (théorème 2.1), nous déterminons une constante optimale $C(m, k, \sigma)$ telle que, si $\phi$ est une application harmonique de $(M, g)$ dans $(N, h)$ (vérifiant la condition de Neumann si $M$ est à bord convexe) dont la $m$-énergie est inférieure à $C(m, k, \sigma)$, alors $\phi$ est constante. On peut signaler, qu'il est toujours possible d'obtenir, via une inégalité de Sobolev et un processus d'itération à la Moser, un résultat d'isolement $L_{m/2}$ à partir d'un résultat d'isolement $L_\infty$; cependant, la constante obtenue par cette méthode ne sera jamais optimale.

## Préliminaires

Soient $(M, g)$ et $(N, h)$ deux variétés riemanniennes, où $M$ est compact et peut avoir un bord.

Pour une application $\phi$: $(M, g) \to (N, h)$, sa densité d'énergie est définie par $e(\phi) = |d\phi|^2$ et son énergie par $E(\phi) = \int_M e(\phi)\, dv_g$, où $|d\phi|$ est la norme d'Hilbert–Schmidt de $d\phi$ et $dv_g$ est l'élément de volume riemmannien de $(M, g)$. L'équation d'Euler–Lagrange de ce problème variationnel est:

$$\Delta\phi := -Tr(Dd\phi) = 0$$

où $d\phi$ est vu comme section de $T^*M \otimes \phi^*TN$ et $D$ est la connexion induite par celles de $(M, g)$ et $(N, h)$.

L'extension canonique de la connexion $D$ aux fibrés $\bigwedge^p T^*M \otimes \phi^*TN$ permit de définir une différentielle $d$ (donnée par l'antisymétrisée de $D$), une co-différentielle $d^*$ qui est l'adjoint formel de $d$ et donc un laplacien de Hodge–de Rham (qu'on notera encore $\Delta$) défini par:

$$\Delta := dd^* + d^*d$$

Ce laplacien (dans le cas des 1-formes à valeurs dans $\phi^*TN$) vérifie la formule de Weitzenbock (voir [4]) suivante:

$$\Delta d\phi = D^*Dd\phi + d\phi \circ Ric^M - Tr_X R^N(d\phi, d\phi(X))\, d\phi(X) \tag{1}$$

où $Ric^M$ est la courbure de Ricci de $(M, g)$ et $R^N$ le tenseur de courbure de $(N, h)$.

## I. Inégalités de Sobolev

Considérons une variété riemannienne $(M^m, g)$ à bord $\partial M$ et de dimension $m$. Notons $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ un repère local orthonormé tel qu'au point $p \in \partial M$, $e_1, ..., e_{m-1}$ soient tangents à $\partial M$ et $e_m = \eta$ soit la normale sortante. $D$ étant la connexion de Lévi–Civita de $(M, g)$, la seconde forme fondamentale du bord $\partial M$ est définie au point $p \in \partial M$, par:

$$II(v, w) = \langle D_v \eta, w \rangle \qquad \text{pour} \quad v, w \in T_p\, \partial M$$

l'application de Weingarten est l'endomorphisme associé à $II$: $II(v, w) = \langle Av, w \rangle$, et la courbure moyenne de $\partial M$ est alors définie par:

$$H := TrII = \sum_{i=1}^{m-1} II(e_i, e_i)$$

Nous noterons dans la suite $H_1^2(M)$, l'espace de Sobolev des fonctions appartenant à $L^2(M)$ ainsi que la norme de leur gradient.

L'objet du présent paragraphe est de prouver l'inégalité de Sobolev suivante:

Théorème 1.1. *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte sans bord ou à bord convexe (i.e. $II \geqslant 0$), de dimension $m$ et telle que $Ric^M \geqslant k > 0$.*

(1) *Si $m > 2$, alors toute fonction $f \in H_1^2(M)$, vérifie:*

$$\|f\|^2_{2m/(m-2)} \leqslant V(M)^{-2/m} \left( \frac{4(m-1)}{m(m-2)k} \|df\|_2^2 + \|f\|_2^2 \right)$$

(2) *Si $m = 2$, alors toute fonction $f \in H_1^2(M)$, vérifie:*

$$\|f\|_4^2 \leqslant V(M)^{-1/2} \left(k^{-1} \|df\|_2^2 + \|f\|_2^2\right)$$

Dans le cas où la variété $M$ est sans bord, la preuve de ce théorème (cf. [7]) découle de la connaissance de l'invariant de Yamabe de $(\mathbf{S}^m, can)$, de l'inégalité isopérimétrique de P. Lévy et M. Gromov et d'un procédé de symétrisation adapté, qui permet de ramener la recherche d'une telle inégalité à l'inégalité analogue sur la sphère. Cependant, dans [1], M. F. Bidaut-Véron et L. Véron montrent un résultat d'unicité de la solution d'une classe d'E.D.P. non linéaires et en déduisent une nouvelle preuve, dans le cas où $M$ est sans bord, de la même inégalité.

Dans ce qui suit, le cas où $M$ est sans bord ayant déjà été traité (cf. [7] et [1]), nous allons nous limiter à la preuve du théorème ci-dessus dans le cas où $M$ est à bord convexe. Pour cela, nous avons besoin de la généralisation suivante du résultat d'unicité sus-cité, dû à M. F. Bidaut-Véron et L. Véron ([1]):

THÉORÈME 1.2. *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte, orientable, à bord $\partial M$ convexe (i.e. $II \geqslant 0$), de dimension $m \geqslant 2$ et à $Ric^M \geqslant k \geqslant 0$. Soient $q > 1$, $\lambda > 0$ et $\varphi$ une solution positive de l'équation:*

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \lambda\varphi &= \varphi^q \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}_{|\partial M} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(1) *Si $m = 2$ et $\lambda \leqslant 2k/(q-1)$, alors $\varphi$ est constante, égale à $\lambda^{1/q-1}$*

(2) *Si $m > 2$, $\lambda \leqslant mk/(m-1)(q-1)$ et $q \leqslant (m+2)/(m-2)$ et que l'une de ces deux dernières inégalités est stricte, alors $\varphi$ est constante. De plus, si $(M, g)$ est à courbure scalaire constante $r$ et non isométrique à l'hémisphère $S^m_+(\sqrt{m(m-1)/r})$, alors les égalités $\lambda = mk/(m-1)(q-1)$ et $q = (m+2)/(m-2)$ entraînent que $\varphi$ est constante.*

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant qui n'est qu'une légère modification d'une formule de Reilly (cf. [11]):

LEMME 1.3. *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte, orientable, de bord $\partial M$. Si $u$ et $v$ sont deux fonctions de $C^3(M)$, alors:*

$$\int_M \left\{ v(|Ddu|^2 - (\Delta u)^2) + \Delta u \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \Delta v + vRic^M(\nabla u, \nabla u) \right\} dv_g$$

$$= \int_{\partial M} \left\{ -\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \left\langle \bar{\nabla} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \bar{\nabla} u \right\rangle v \right.$$

$$\left. - II(\bar{\nabla} u, \bar{\nabla} u) v + \bar{\Delta} u \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) v - Hv \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right\} dv_{g|\partial M}$$

*$\nabla$ désigne le gradient dans $(M, g)$ et $\bar{\nabla}$ celui dans $\partial M \cdot \bar{\Delta}$ est le laplacien de $\partial M$, $II$ sa seconde forme fondamentale et $H$ sa courbure moyenne.*

*Preuve du Lemme* 1.3. Dans le calcul qui va suivre, nous choisissons en un point $x \in \partial M$ (où le calcul sera fait), un repère local orthonormé $\{e_1, ..., e_m\}$ de $M$ tel que $e_1, ..., e_{m-1}$ soient tangents à $\partial M$ et que $e_m = \eta$ soit la normale sortante unitaire. La formule de Bochner, nous donne:

$$v\langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle = v\, |Ddu|^2 + \tfrac{1}{2}(\Delta\, |\nabla u|^2) v + vRic^M(\nabla u, \nabla u)$$

et, après intégrations par parties, on obtient

$$\int_M v(|Ddu|^2-(\Delta u)^2)=\int_{\partial M}\left((\Delta u)v\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2}v\frac{\partial\,|\nabla u|^2}{\partial\eta}-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)$$
$$-\int_M\left(\Delta u\langle\nabla u,\nabla v\rangle+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\,\Delta v+vRic^M(\nabla u,\nabla u)\right)$$

or, au point $x$

$$v\,\Delta u\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2}v\frac{\partial\,|\nabla u|^2}{\partial\eta}=\sum_{i=1}^{m=1}v(Ddu(e_m,e_i)\,e_i(u)-Ddu(e_i,e_i)\,e_m(u))$$

mais,

$$\sum_{i=1}^{m-1}Ddu(e_m,e_i)\,e_i(u)=\left\langle\bar\nabla\frac{\partial u}{\partial\eta},\bar\nabla u\right\rangle-II(\bar\nabla u,\bar\nabla u)$$

et

$$\sum_{i=1}^{m-1}Ddu(e_i,e_i)\,e_m(u)=-\bar\Delta u\frac{\partial u}{\partial\eta}+H\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2$$

ce qui permet de conclure.

*Preuve du Théorème* 1.2. Soit $\varphi$ une solution positive de l'équation (2). Posons: $u=\varphi^\alpha$ et $v=u^\beta$, où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels non nuls qu'on déterminera par la suite.

Compte tenu de (2), on a:

$$\Delta u=\alpha u^{1+(q-1)/\alpha}-\alpha\lambda u-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\frac{|\nabla u|^2}{u}\quad\text{dans } M$$

et (3)

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\qquad\text{sur }\partial M.$$

en appliquant le lemme 1.3 aux fonctions $u$ et $v$ qu'on vient de définir, on obtient:

$$-\frac{m-1}{m}\int_M u^\beta(\Delta u)^2+\int_M\Delta u\langle\nabla u,\nabla u^\beta\rangle+\frac{1}{2}\int_M|\nabla u|^2\,(\Delta u^\beta)$$
$$+\int_M u^\beta Ric^M(\nabla u,\nabla u)+\int_{\partial M}II(\bar\nabla u,\bar\nabla u)\,u^\beta=-J. \tag{4}$$

où

$$J:=\int_M\left(|Ddu|^2-\frac{1}{m}(\Delta u)^2\right)u^\beta\geqslant 0.$$

vu que $u$ est solution de (3) et après intégration par parties on obtient:

$$
\begin{aligned}
A &:= -\left(\frac{m-1}{m}\right)\int_M u^\beta(\Delta u)^2 \\
&= -\left(\frac{m-1}{m}\right)(\alpha\beta+q)\int_M u^{\beta+(q-1)/\alpha}\,|\nabla u|^2 \\
&\quad +\lambda\left(\frac{m-1}{m}\right)(\alpha\beta+1)\int_M u^\beta\,|\nabla u|^2-\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2\int_M |\nabla u|^4\,u^{\beta-2}
\end{aligned}
$$

de la même manière, on a:

$$
\begin{aligned}
B &:= \int_M \Delta u\langle \nabla u, \nabla u^\beta\rangle \\
&= \alpha\beta\int_M |\nabla u|^2\,u^{\beta+(q+1)/\alpha}-\alpha\beta\lambda\int_M u^\beta\,|\nabla u|^2-\beta\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\int_M |\nabla u|^4\,u^{\beta-2}
\end{aligned}
$$

et

$$
C := \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2\,\Delta(u^\beta)=\frac{1}{2}\,B-\frac{\beta(\beta-1)}{2}\int_M |\nabla u|^4\,u^{\beta-2}
$$

en remplaçant $A$, $B$, et $C$ par leurs expressions successives dans (4), on obtient:

$$
\begin{aligned}
-J &= \frac{1}{m}\left(\left(\frac{m+2}{2}\right)\alpha\beta-(m-1)q\right)\int_M u^{\beta+(q-1)/\alpha}\,|\nabla u|^2 \\
&\quad -\frac{\lambda}{m}\left(\alpha\beta\left(\frac{m+2}{2}\right)-(m-1)\right)\int_M u^\beta\,|\nabla u|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\beta^2+\beta\left(2-\frac{3}{\alpha}\right)+2\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2\right)\int_M |\nabla u|^4\,u^\beta \\
&\quad +\int_M u^\beta Ric^M(\nabla u, \nabla u)+\int_{\partial M} II(\bar\nabla u, \bar\nabla u)\,u^\beta
\end{aligned}
$$

Vu que $J\geqslant 0$, que la seconde forme fondamentale du bord $II\geqslant 0$ et que $Ric^M(\nabla u, \nabla u)\geqslant k\,|\nabla u|^2$, on a:

$$
0\geqslant -J\geqslant a\int_M u^{\beta+(q-1)/\alpha}\,|\nabla u|^2+b\int_M u^\beta\,|\nabla u|^2+c\int_M |\nabla u|^4\,u^{\beta-2} \tag{5}
$$

où

$$a = \frac{1}{m}\left(\left(\frac{m+2}{2}\right)\alpha\beta - (m-1)q\right)$$

$$b = k - \frac{\lambda}{m}\left(\alpha\beta\left(\frac{m+2}{2}\right) - m + 1\right)$$

et

$$c = -\frac{1}{2}\left(\beta^2 + \beta\left(2 - \frac{3}{\alpha}\right) + 2\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2\right)$$

si l'on parvient à trouver $\alpha$ et $\beta$ tels que $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$ et que l'une de ces constantes soit strictement positive, on déduira de (5) que $u$ (et donc $\varphi$) est constante.

Pour cela, posons $y = 1 - \alpha$ et $\delta = \alpha\beta$, on a:

$$a = \frac{1}{m}\left(\frac{m+2}{2}\delta - (m-1)q\right)$$

$$b = k - \frac{\lambda}{m}\left(\frac{m+2}{2}\delta - 1\right)$$

$$c = -\frac{1}{2\alpha^2}\left(2\frac{m-1}{m}y^2 - 2\delta y + \delta^2 - \delta\right)$$

Pour trouver $y \neq 1$ tel que $c \geqslant 0$, il suffit que:

$$\Delta' = \frac{\delta}{m}(2(m-1) - (m-2)\delta) \geqslant 0$$

pour $m \geqslant 3$, ceci est équivalent à $\delta \leqslant 2(m-1)/(m-2)$. Pour $m = 2$ on a $\Delta' > 0$ et l'on peut trouver $y \neq 1$ tel que $c > 0$ (ceci permet de conclure pour $m = 2$, car pour $\lambda \leqslant mk/(m-1)(q-1)$ on peut choisir $\delta$ tel que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$).

Si $\lambda < mk/(m-1)(q-1)$ (i.e. $q < mk/\lambda(m-1)+1$) et si $q \leqslant (m+2)/(m-2)$, alors on peut choisir $\delta$ tel que $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ *et* $a > 0$ ou $b > 0$ ou $c > 0$.

Dans le cas où $\lambda = mk/(m-1)(q-1)$, on choisit $\delta = 2q((m-1)/(m+2))$ et on a donc $a = b = 0$. La condition $q < (m+2)/(m-2)$ implique que $\Delta' > 0$ ce qui permet de trouver $y \neq 1$ tel que $c > 0$. Si $m > 2$, $\lambda = mk/(m-1)(q-1)$ et $q = (m+2)/(m-2)$ on ne peut choisir $\delta$ et $y \neq 1$ que tels que $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$. L'inégalité (5) entraîne que $J = 0$, c'est-à-dire:

$$Ddu + \frac{1}{m}\Delta u\, g = 0 \tag{6}$$

supposons alors que $u$ n'est pas constante et que la courbure scalaire $r$ de $(M, g)$ est constante. Considérons le champ $X = \nabla u$. D'une part ce champ est conforme, car l'équation (6) signifie que $L_X g = (2/m)\,\rho g$ où $\rho = \mathit{div}\, X = -\Delta u$. D'autre part, $X$ étant conforme, on a (cf. [15]):

$$0 = X(r) = \frac{2(m-1)}{m}\,\Delta\rho - \frac{2}{m}\,\rho r$$

c'est-à-dire:

$$\Delta\rho = \frac{r}{m-1}\cdot\rho$$

et donc:

$$\Delta\left(\Delta u - \frac{r}{(m-1)}\,u\right) = 0 \tag{7}$$

de plus $\partial u/\partial\eta|_{\partial M} = \partial/\partial\eta|_{\partial M}\,(\Delta u) = 0$, car par (3), on a:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\,(\Delta u) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(a u^{1+(q-1)/\alpha} - \alpha\lambda u - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\frac{|\nabla u|^2}{u}\right) \qquad \text{et par (6) :}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\,|\nabla u|^2 = 2\sum_i Ddu(\eta, e_i)\, D_{e_i}u = -2\,\frac{\Delta u}{m}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

On déduit donc de (7) que $\Delta u - r/(m-1)\,u = \text{constante}$; et en dérivant deux fois on obtient:

$$\begin{cases} Dd\rho + \dfrac{r}{m(m-1)}\,\rho g = 0 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial\eta}_{|\partial M} = 0 \end{cases}$$

mais $u$ n'étant pas constante, $\rho$ n'est pas identiquement nulle. Le théorème 4.2 d'Escobar [5] (qui est l'équivalent du théorème d'Obata pour les variétés à bord) permet de conclure que $(M, g)$ est isométrique à l'hémisphère $(\mathbf{S}^n_+, m(m-1)/r\; can)$. ∎

De ce théorème, nous allons déduire l'inégalité de Sobolev recherchée:

*Preuve du Théorème* 1.1. (1) Considérons la famille de fonctionnelles:

$$I_q(\phi) = \|\nabla\phi\|_2^2 + \frac{mk}{(q-1)(m-1)}\,\|\phi\|_2^2 \qquad \text{où} \qquad 1 < q < \frac{m+2}{m-2}$$

et posons $\mu_q = Inf\{I_q(\phi),\ \phi \in H_1^2(M)$ et $\|\phi\|_{q+1} = 1\}$. La compacité des inclusions $H_1^2(M) \subset L_2(M)$ et $H_1^2(M) \subset L_q(M)$ montre que $\mu_q$ est atteint par une fonction $\phi_q > 0$ (et donc $\mu_q > 0$) qui vérifie faiblement l'équation:

$$\begin{cases} \Delta\phi_q + \dfrac{mk}{(q-1)(m-1)}\,\phi_q = \mu_q \phi_q^q & \text{dans } M \\ \dfrac{\partial \phi_q}{\partial \eta}_{|\partial M} = 0 \end{cases}$$

un résultat de régularité dû à P. Cherrier (cf. [2]) montre qu'en fait $\phi_q \in C^\infty(M)$. En appliquant le théorème 1.2 on déduit que

$$\phi_q = V(M)^{-1/(q+1)} \qquad \text{et} \qquad \mu_q = \frac{mk}{(q-1)(m-1)}\, V(M)^{(q-1)/(q+1)}.$$

On a donc pour toute fonction $f \in H_1^2(M)$:

$$\|f\|_{q+1}^2 \leqslant V(M)^{-((q-1)/(q+1))} \left(\frac{(q-1)(m-1)}{mk}\right) \|\nabla f\|_2^2$$

$$+\, V(M)^{-((q-1)/(q+1))}\, \|f\|_2^2$$

en faisant tendre $q \to (m+2)/(m-2)$, on obtient l'inégalité souhaitée.

(2) Pour $m = 2$, le minimum $Min_{f \in H_1^2(M)}((\|\nabla f\|_2^2 + k\, \|f\|_2^2)/\|f\|_4^2)$ est atteint par les constantes. En effet, par le théorème 1.2, pour $\lambda \leqslant k$, toute fonction positive $f$ vérifiant $\Delta f + \lambda f = f^3$ est constante. D'où l'inégalité cherchée.

## II. Une estimation optimale de la $m$-energie d'une application harmonique

Nous allons commencer par étendre une formule de Reilly ([11]) connue pour les fonctions à valeurs dans **R**, aux applications entre variétés:

Théorème 2.1. *Soient $(M, g)$ une variété riemannienne compacte, orientable, de dimension m et $\phi$: $(M, g) \to (N, h)$ une application $C^\infty$ quelconque. On a:*

$$\int_M (|Dd\phi|^2 - |\Delta\phi|^2 + \mathbf{R}_{M,N}(d\phi))\,dv_g$$

$$= \int_{\partial M} (Tr\langle D(d\phi(\eta)), d\phi\rangle - Tr\langle d\phi \circ A, d\phi\rangle$$

$$+ \langle \Delta^{\partial M}\phi, d\phi(\eta)\rangle - H\,|d\phi(\eta)|^2)\,dv_{g|_{\partial M}}$$

*où $\eta$ et $A$ désignent, respectivement, la normale sortante unitaire et l'application de Weingarten de $\partial M$. De plus, si $(e_i)_i$ (resp. $(f_j)_j$) est une base orthonormée de $T_x M$ (resp. $T_y\,\partial M$):*

$$\mathbf{R}_{M,N}(d\phi)_{|x} = \sum_i \langle d\phi(Ric^M(e_i)), d\phi(e_i)\rangle$$

$$- \sum_{i,k} R^N(d\phi(e_i), d\phi(e_k), d\phi(e_i), d\phi(e_k))$$

$$Tr\langle d\phi \circ A, d\phi\rangle_{|y} = \sum_j \langle D_{f_j}(d\phi(\eta)), d\phi(f_j)\rangle$$

et

$$Tr\langle d\phi \circ A, d\phi\rangle_{|y} = \sum_j \langle d\phi(Af_j), d\phi(f_j)\rangle$$

*Preuve.* En utilisant la formule de Weitzenbock (1) et après une intégration par parties, on obtient:

$$\int_M |\Delta\phi|^2 + \int_{\partial M} \langle d\phi(\eta), \Delta\phi\rangle + \int_{\partial M} \langle D_\eta\, d\phi, d\phi\rangle = \int_M |Dd\phi|^2 + \int_M \mathbf{R}_{M,N}(d\phi)$$

Choisissons en un point $p \in \partial M$, où on fait le calcul, un repère orthonormé $(f_j)_{j=1,\dots,m}$ tel que $f_m = \eta$. On a alors:

$$\langle D_\eta d\phi, d\phi\rangle + \langle d\phi(\eta), \Delta\phi\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \langle (D_\eta d\phi)(f_j), d\phi(f_j)\rangle - \sum_{j=1}^{m-1} \langle (D_{f_j} d\phi)(f_j), d\phi(\eta)\rangle$$

or

$$\sum_{j=1}^{m-1} \langle (D_\eta d\phi)(f_j), d\phi(f_j)\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} (\langle D_{f_j}(d\phi(\eta)), d\phi(f_j)\rangle) - \langle d\phi(Af_j), d\phi(f_j)\rangle$$

et de même:

$$-\sum_{j=1}^{m-1} \langle (D_{f_j} d\phi)(f_j), d\phi(\eta)\rangle = \langle \Delta^{\partial M}\phi, d\phi(\eta)\rangle - H\,|d\phi(\eta)|^2$$

d'où le résultat. ∎

A partir du théorème 2.1 on peut déduire immédiatement les résultats suivants, dus à Sealey (cf. [12] et comparer à sa preuve):

(1) Soient $(M, g)$ une variété riemannienne compacte orientable à bord convexe (i.e., $\Pi \geqslant 0$) et $\phi\colon (M, g) \to (N, h)$ une application harmonique satisfaisant à la condition de Neumann $d\phi(\eta) = 0$ sur $\partial M$. Si $Ric^M \geqslant 0$ et $\sigma^N \leqslant 0$ alors $\phi$ est totalement géodésique. Si en plus $Ric^M > 0$ ou $\partial M$ est strictement convexe (i.e., $\Pi > 0$) en au moins un point alors $\phi$ est constante.

(2) Soient $(M, g)$ une variété riemannienne compacte orientable à bord et $\phi\colon (M, g) \to (N, h)$ une application harmonique telle que $\phi_{|\partial M} =$ constante. Si $Ric^M \geqslant 0$, $\sigma^N \leqslant 0$ et $H \geqslant 0$, alors $\phi$ est totalement géodésique. De plus, si $\partial M$ n'est pas minimale ou si $Ric^M > 0$ en au moins un point, alors $\phi$ est constante.

Ces résultats généralisent au cas à bord un résultat classique de Eells–Sampson (cf. [3]).

Nous allons maintenant déduire du théorème 2.1 et de l'inégalité de Sobolev du premier paragraphe le:

THÉORÈME 2.2. *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte, orientable, de dimension $m \geqslant 2$, sans bord ou à bord convexe et telle que $Ric^M \geqslant k > 0$. Soient $(N, h)$ une variété riemannienne à courbure sectionnelle majorée par une constante $\sigma > 0$ et $\phi\colon (M, g) \to (N, h)$ une application harmonique, vérifiant la condition de Neumann $d\phi(\eta) = 0$ sur $\partial M$ (si $\partial M \neq \phi$).*

*Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, alors $\phi$ est constante:*

(1) $m = 2$ *et* $V(M)^{-1/2}\,\|e(\phi)\|_2 < \dfrac{2k}{\sigma}$.

(2) $m = 3$ *ou* 4 *et* $V(M)^{-2/m}\,\|e(\phi)\|_{m/2} < \dfrac{m^3(m-2)}{4(m-1)^3\,\sigma}$

(3) $m \geqslant 5$ *et* $V(M)^{-2/m}\,\|e(\phi)\|_{m/2} < \dfrac{mk}{(m-1)\sigma}$.

*Preuve.* Tout d'abord, les hypothèses sur les courbures permettent d'obtenir:

$$\mathbf{R}_{M,N}(d\phi) := \sum_i \langle d\phi(Ric^M(e_i)), d\phi(ei)\rangle$$
$$- \sum_{i,k} R^N(d\phi(e_i), d\phi(e_k), d\phi(e_i), d\phi(e_k))$$
$$\geqslant k\, |d\phi|^2 - \sigma(|d\phi|^4 - |\phi^* h|^2) \tag{8}$$

et par l'inégalité de Cauchy–Schwartz, on a:

$$|\phi^* h|^2 = \sum_{i,j} \langle d\phi(e_i), d\phi(e_j)\rangle^2 \geqslant \sum_i |d\phi(e_i)|^4 \geqslant \frac{1}{m}\, |d\phi|^4 \tag{9}$$

On déduit alors, du théorème 2.1, de (8) et (9):

$$\|Dd\phi\|_2^2 + k\, \|e(\phi)\|_1 - \left(\frac{m-1}{m}\right) \sigma\, \|e(\phi)\|_2^2 \leqslant 0 \tag{10}$$

une amélioration de l'inégalité de Kato pour les applications harmoniques (cf. [10] et [14]) permet de voir que:

$$\sqrt{e(\phi)} = |d\phi| \in H_1^2(M) \qquad \text{et} \qquad |d\, |d\phi|\, |^2 \leqslant \frac{m-1}{m}\, |Dd\phi|^2$$

ce qui permet de déduire de (10):

$$\frac{m}{m-1}\, \|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 + k\, \|e(\phi)\|_1 - \left(\frac{m-1}{m}\right) \sigma\, \|e(\phi)\|_2^2 \leqslant 0 \tag{11}$$

Pour $\underline{m > 2}$, l'inégalité de Hölder et (11) nous donnent:

$$\frac{m}{m-1}\, \|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 + k\, \|e(\phi)^{1/2}\|_2^2 \leqslant \left(\frac{m-1}{m}\right) \sigma\, \|e(\phi)^{1/2}\|_{2m/(m-2)}^2\, \|e(\phi)\|_{m/2}$$

et en utilisant l'inégalité de Sobolev du théorème 1.1:

$$\left(\frac{m}{m-1}\right) \|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 + k\, \|e(\phi)^{1/2}\|_2^2$$
$$\leqslant \left(\frac{m-1}{m}\right) V(M)^{-2/m}\, \sigma \left(\frac{4(m-1)}{m(m-2)k}\, \|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 + \|e(\phi)^{1/2}\|_2^2\right) \|e(\phi)\|_{m/2}$$

d'où

$$\|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 \left(\frac{4(m-1)^2\sigma}{m^2(m-2)k}\, V(M)^{-2/m}\, \|e(\phi)\|_{m/2} - \frac{m}{m-1}\right)$$
$$+ \|e(\phi)^{1/2}\|_2^2 \left(\left(\frac{m-1}{m}\right) \sigma V(M)^{-2/m}\, \|e(\phi)\|_{m/2} - k\right) \geqslant 0 \tag{12}$$

si

$$\|e(\phi)\|^{m/2} < \frac{mk\ V(M)^{2/m}}{(m-1)\sigma}\, min\left(\frac{m^2(m-2)}{4(m-1)^2}, 1\right),$$

alors on déduit de (12) que $\phi$ est constante. D'où le résultat du théorème pour $m>2$.

Pour $\underline{m=2}$, l'inégalité (11) s'écrit

$$2\,\|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 + k\,\|e(\phi)\|_1 \leqslant \frac{\sigma}{2}\,\|e(\phi)\|_2^2 = \frac{\sigma}{2}\,\|e(\phi)^{1/2}\|_4^2\,\|e(\phi)\|_2$$

l'inégalité de Sobolev 2) du théorème 1.1 permet de déduire:

$$2\,\|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 + k\,\|e(\phi)\|_1 \leqslant \frac{\sigma V(M)^{-1/2}}{2}\,\|e(\phi)\|_2\,(k^{-1}\,\|de(\phi)^{1/2}\|_2^2 + \|e(\phi)^{1/2}\|_2^2\Big)$$

d'où

$$\|de(\phi)^{1/2}\|_2^2\left(\frac{\sigma}{2k}\,V(M)^{-1/2}\,\|e(\phi)\|_2 - 2\right)$$
$$+ \|e(\phi)^{1/2}\|_2^2\left(\frac{\sigma}{2}\,V(M)^{-1/2}\,\|e(\phi)\|_2 - k\right) \geqslant 0 \qquad (13)$$

si $\|e(\phi)\|_2 < (2kV(M)^{-1/2})/\sigma$, alors on déduit de (13) que $\phi$ est constante.

*Remarques.*

— Le théorème 2.2 est optimal (sauf pour les dimensions 3 et 4) comme on peut s'en convaincre, par exemple en considérant le plongement canonique d'une sphère (ou d'un hémisphère) dans une autre sphère. Il améliore les résultats obtenus dans [8] et [9].

— Un résultat similaire peut être obtenus pour les applications holomorphes entre variétés Kahlériennes sous une hypothèse sur la courbure bisectionnelle (au lieu de la courbure sectionnelle) de la variété but.

## Bibliographie

1. M. F. Bidaut-Veron et L. Veron, Nonlinear elliptic equations on compact riemannian manifolds and asymptotic of Emden equations, *Invent. Math.* **106** (1991), 489–539.
2. P. Cherrier, Problèmes de Neumann non linéaires sur les variétés riemanniennes, *J. Funct. Anal.* **57** (1984), 154–206.
3. J. Eells et L. Lemaire, A report on harmonic maps, *Bull. London Math. Soc.* **10** (1978), 1–68.

4. J. Eells et L. Lemaire, "Selected Topics in Harmonic Maps," Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 50, AMS, Providence, RI, 1983.
5. J. F. Escobar, Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate, *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1990), 857–883.
6. R. S. Hamilton, "Harmonic Maps of Manifolds with Boundary," Lecture Notes in Math., Vol. 471, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1975.
7. S. Ilias, Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes, *Ann. Inst. Fourier* **33** (1983), 151–165.
8. S. Ilias, Quelques résultats d'isolement pour les applications harmoniques, *in* "Publications du Laboratoire de Mathématiques, Université de Tours," Vol. 46, 1992.
9. C. Margerin, Un résultat d'isolement "à la Bochner" pour les applications harmoniques en géométrie riemannienne. Prépublication de l'Ecole Polytechnique.
10. T. Okayasu, Regularity of minimizing harmonic maps into $\mathbf{S}^4$, $\mathbf{S}^5$, and symmetric spaces, *Math. Ann.* **298** (1994), 193–205.
11. R. Reilly, Applications of the hessian operator in a riemannian manifold, *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 459–472.
12. H. C. Sealey, "Some Properties of Harmonic Maps," Thesis, Univ. of Warwick, 1980.
13. H. C. Sealey, Harmonic maps of small energy, *Bull. London Math. Soc.* **13** (1981), 405–408.
14. Y. Wang, The stability of domain and the pinching of energy about harmonic maps, *Acta Mat. Sinica* **6** (1990), 57–64.
15. K. Yano et M. Obata, Conformal changes of riemannien metrics, *J. Differential Geom.* **4** (1970), 53–92.