JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 28, 369–376 (1978)

Un Exemple Concernant le Comportement Asymptotique de la Solution du Problème $du/dt + \partial\varphi(\mu) \ni 0$

J. B. BAILLON

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91120 Palaiseau, France

Communicated by J. L. Lions

Received November 1, 1976

Dans un espace de Hilbert H, on considère l'équation

$$\begin{aligned} &du/dt + \partial\varphi(u) \ni 0 \\ &u(0) = u_0 \in \overline{D(\partial\varphi)} \end{aligned} \tag{1}$$

où $\partial\varphi$ est le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. On suppose que $\partial\varphi^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$. Soit $S(t)$ le semi-groupe engendré par $-\partial\varphi$. D'après un résultat dû à Bruck [2], on a

$$\lim_{t\to\infty} \text{faible } S(t)\, u_0 = l \qquad \text{avec} \quad l \in \partial\varphi^{-1}(\{0\}).$$

Le but de cette note est de montrer qu'il n'y a pas nécessairement convergence forte de $S(t)u_0$ quand $t \to \infty$. La possibilité de construire un exemple avait été suggérée par Komura.

PROPOSITION 1. *Dans l'espace de Hilbert l^2, il existe une fonction* s.c.i. φ *telle que $\partial\varphi^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$ et dont le semi-groupe $S(t)$ engendré par $-\partial\varphi$ ait la propriété suivante*:

$\exists a \in \overline{D(\varphi)}$, $D(\varphi)$ domaine de φ, tel que $S(t)a$ ne converge pas fortement vers un point fixe de $S(t)$ quand $t \to \infty$.

DÉFINITION. Soit la fonction $f_\lambda(x, y)$ définie dans $\mathbb{R}^2$ avec $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} f_\lambda(x, y) &= \operatorname{Arc\,tg}(x/y)]^\lambda\, [x^2 + y^2]^{1/2} \qquad \text{si} \quad x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ &= +\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{2}$$

0022-1236/78/0283-0369$02.00/0

On pose par définition Arc $\mathrm{tg}(x/0) = (\pi/2)$ si $x \geqslant 0$. En coordonnées polaires, cette fonction est aussi donnée par:

$$f_\lambda(x, y) = ((\pi/2) - \theta)^\lambda \rho \quad \text{si} \begin{cases} x = \rho \cos\theta \geqslant 0,\ y = \rho \sin\theta \geqslant 0 \\ \text{i.e.: } \rho \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \end{cases} \tag{3}$$

$$= +\infty \quad \text{sinon.}$$

Lemme 1. *La fonction $f_\lambda(x, y)$ est continue dans le fermé $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. De plus f_λ est une fonction convexe si et seulement si $\lambda \geqslant 1$.*

Démonstration. Il est évident que la fonction f_λ est continue dans le fermé $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. La seule difficulté est de montrer l'équivalence. Soit ψ_λ définie par:

$$\psi_\lambda(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{y}\right)^{\lambda - 2} \left[\lambda^2 - \lambda + \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{y}\right)^2\right]$$
$$\text{si} \quad x > 0, y > 0.$$

Alors pour $x > 0$, $y > 0$, on a:

$$\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x^2} = y^2 \psi_\lambda, \qquad \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x\, \partial y} = -xy\psi_\lambda, \qquad \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial y^2} = x^2 \psi_\lambda.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x^2} \cdot \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x\, \partial y} \cdot \eta\xi + \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial y^2} \xi^2 = \psi_\lambda(y\eta - x\xi)^2.$$

De ce fait f_λ est convexe dans l'ouvert $(x > 0, y > 0)$ si et seulement si $\psi_\lambda \geqslant 0$ pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, i.e. si et seulement si $\lambda \geqslant 1$. Donc comme f_λ est continue dans le fermé $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, f_λ est convexe si et seulement si $\lambda \geqslant 1$. D'après la définition de f_λ, f_λ est convexe dans $\mathbb{R}^2$ équivaut à $\lambda \geqslant 1$.

Remarques.

(1°) $f_\lambda(x, y) \geqslant 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0,\ y \geqslant 0\}$.

(2°) Si $\lambda \geqslant 1$, $f_\lambda(x, y)$ est une fonction convexe s.c.i., donc f_λ admet un sous-différentiel ∂f_λ. On peut donc résoudre l'équation:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + \partial f_\lambda(u) \ni 0 \\ &u(0) = u_0 \qquad \text{avec} \quad u_0 \in (\mathbb{R}_+)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

(3°) Dans toute la suite, λ sera toujours supérieur ou égal à 1.

LEMME 2. *La solution u de l'équation* (4) *a pour trajectoire, i.e. l'ensemble* $\{u(t), t \geqslant 0\}$, *la courbe d'équation en coordonnées polaires*:

$$\rho = |u_0| \exp\left[-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2\right] \tag{5}$$

avec $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $(|u_0|, \theta_0)$ les coordonnées polaires de u_0.

Démonstration. D'après (3), les courbes de niveau de $f_\lambda(x, y)$ sont données par:

$$f_\lambda(x, y) = \mu = \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^\lambda \rho \qquad \text{ou} \quad \rho = \mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{-\lambda}. \tag{6}$$

On sait que la trajectoire de u, solution de (4), est orthogonale aux courbes de niveau donnée par (6).

Pour simplifier les calculs, on identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$. Soit $v(\theta)$ le vecteur parcourant les courbes de niveau:

$$v(\theta) = \mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{-\lambda} e^{i\theta}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = \mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{-\lambda-1} e^{i\theta}\left[\lambda + i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right].$$

Or on sait que la trajectoire $w(\theta)$ de u est de la forme

$$w(\theta) = \mu(\theta)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{-\lambda} e^{i\theta}$$

$$\frac{dw}{d\theta} = \left[\mu(\theta)\left(\lambda + i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) + \mu'(\theta)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{-\lambda-1} e^{i\theta}.$$

Comme $dv/d\theta$ est orthogonal à $dw/d\theta$, alors on a:

$$\lambda\left[\lambda\mu(\theta) + \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\mu'(\theta)\right] + \left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\mu(\theta)\right] = 0.$$

D'où

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-\lambda}{\pi/2-\theta} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

Donc $\mu(\theta) = \text{Const}((\pi/2)-\theta)^\lambda e^{1/2\lambda(\pi/2-\theta)^2}$. De ce fait la trajectoire est de la forme:

$$w(\theta) = \text{Const}\; e^{1/2\lambda(\pi/2-\theta)^2} e^{i\theta}.$$

Or $u(t) \to_{t\to\infty} l$, l point qui minimise la fonction f_λ. De ce fait l est sur l'axe des y positifs. De plus $u(0) = u_0 = |u_0| e^{i\theta_0}$. Donc d'après ce qui précède, θ variera de θ_0 à $\pi/2$. On obtient donc (5).

Remarque. La solution de l'équation (7):

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + \alpha\, \partial f_\lambda(u) \ni 0 \qquad \alpha > 0 \\ &u(0) = u_0 \qquad \text{avec} \quad u_0 \in (\mathbb{R}_+)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

a même trajectoire que la solution de l'équation (4).

LEMME 3. *On a l'estimation suivante:*

$$|\partial f_\lambda(x, y)| = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{\lambda-1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2 + \lambda^2\right]^{1/2} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda-1} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \lambda^2\right]^{1/2} \tag{8}$$

et ceci $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ *avec* $x = \rho \cos \theta$ *et* $y = \rho \sin \theta$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\lambda}{dx}(x, y) &= \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{\lambda-1} \frac{1}{\rho} \left[\lambda y + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) x\right] \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial y}(x, y) &= \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{\lambda-1} \frac{1}{\rho} \left[-\lambda x + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) y\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$|\partial f_\lambda(x, y)| = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{\lambda-1} \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2 + \lambda^2\right]^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Or θ varie de 0 à $\pi/2$, on a donc l'estimation (8).

Notation. Dans toute la suite de l'exposé, on se place dans l'espace de Hilbert l^2.

On note

$$\begin{aligned} C &= \{x/x = (x_i)_{i\geqslant 1},\, x \in l^2,\, x_i \geqslant 0\} \\ \mathbb{R}_{+,n} &= (\mathbb{R}_+)^n \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \cdots \\ \mathbb{R}_{n,n+1} &= \{x/x = (x_i)_{i\geqslant 1},\, x_i = 0 \text{ pour tout } i \neq n, n+1\}. \end{aligned}$$

On considère:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_i)_{i\geqslant 1} \qquad \alpha_i > 0 \\ \lambda &= (\lambda_i)_{i\geqslant 1} \qquad \lambda_i \geqslant 0 \\ \varphi_\alpha(x) &= \alpha_1 f_{\lambda_1}(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_n f_{\lambda_n}(x_n, x_{n+1}) + \cdots \\ \varphi_{\alpha,n}(x) &= \alpha_1 f_{\lambda_1}(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_n f_{\lambda_n}(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

LEMME 4. *On considère l'équation d'évolution associée à* $\varphi_{\alpha,n}$:

$$\begin{aligned} &(du_n/dt) + \partial\varphi_{\alpha,n}(u_n) \ni 0 \\ &u_n(0) = u_0 \qquad \text{avec} \quad u_0 \in \mathbb{R}_{+,n+1}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Alors $u_n(t) \in \mathbb{R}_{+,n+1}$ $\forall t \geqslant 0$.

En effet,

Ceci est évident si on se réfère à la définition de $\varphi_{\alpha,n}$.

LEMME 5. *On considère l'équation d'évolution associée à* φ_α:

$$\begin{aligned} &(du_\alpha/dt) + \partial\varphi_\alpha(u_\alpha) \ni 0 \\ &u_\alpha(0) = u_0\,, \qquad u_0 \in \overline{D(\varphi_\alpha)} = C. \end{aligned} \tag{10}$$

Soit u_n *la solution de* (9), *alors si* $u_\alpha(0) = u_n(0) = u_0 \in \mathbb{R}_{+,n+1}$, *on a pour tout* $t \in [0, T]$

$$| u_\alpha(t) - u_n(t)|_{l^2} \leqslant \alpha_{n+1}\{(\pi/2)^{\lambda_{n+1}-1}\, [(\pi/2)^2 + \lambda_{n+1}^2]^{1/2}\}T. \tag{11}$$

Démonstration. D'après le lemme 4, on a

$$u_n(t) = (u_{n,1}(t),\dots, u_{n,n}(t), u_{n,n+1}(t), 0,\dots, 0,\dots).$$

Comme $\mathbb{R}_{+,i} \subset D(\varphi_\alpha)$ $\forall i \geqslant 1$, alors:

$$C = \overline{D(\varphi_\alpha)}.$$

De plus $u_\alpha(t) = (u_{\alpha,1}(t),\dots, u_{\alpha,m}(t),\dots)$. De ce fait, on a:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(d/dt)\, |(u_n - u_\alpha)(t)|^2 + (\partial\varphi_{\alpha,n}(u_n) - \partial\varphi_{\alpha,n}(u_\alpha), u_n - u_\alpha) \\ &\qquad + \alpha_{n+2}(\partial f_{\lambda_{n+2}}(u_{n,n+2}\,, u_{n,n+3}) - \partial f_{\lambda_{n+2}}(u_{\alpha,n+2}\,, u_{\alpha,n+3}), u_n - u_\alpha) + \cdots \\ &\quad = \alpha_{n+1}(\partial f_{\lambda_{n+1}}(u_{\alpha,n+1}\,, u_{\alpha,n+2}), u_n - u_\alpha). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\partial\varphi_{\alpha,n}$ et ∂f_{λ_k} sont monotones, on a:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(d/dt)\, | u_n - u_\alpha |^2 &= | u_n - u_\alpha |\, (d/dt)\, | u_n - u_\alpha | \\ &\leqslant \alpha_{n+1}\, | \partial f_{\lambda_{n+1}}(u_{\alpha,n+1}\,, u_{\alpha,n+2})| \cdot | u_n - u_\alpha |. \end{aligned}$$

D'après l'estimation (8) on obtient donc:

$$(d/dt)\, | u_n - u_\alpha | \leqslant \alpha_{n+1}\{(\pi/2)^{\lambda_{n+1}-1}\, [(\pi/2)^2 + \lambda_{n+1}^2]^{1/2}\}.$$

En utilisant le fait que $u_n(0) = u_\alpha(0)$, on obtient ainsi (11).

Notations. On notera $S_{\alpha,n}(t)$ le semi-groupe engendré par $-\partial\varphi_{\alpha,n}$ et $S_\alpha(t)$ le semi-groupe engendré par $-\partial\varphi_\alpha$.

Définition de la Suite (a_n). On définit par récurrence la suite (a_n):

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 0, \ldots) \\ a_{n+1} &= \lim_{t\to\infty} S_{\alpha,n}(t)\, a_n . \end{aligned} \tag{12}$$

Ceci revient à étudier dans l'espace $\mathbb{R}_{n,n+1}$ une équation du type (7) dont on connaît explicitement la courbe de la trajectoire de la solution. On remarquera que la suite (a_n) ainsi définie est indépendante des nombres (α_i). On a donc:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 0, \ldots) \\ a_2 &= \left(0, \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_1}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right), 0, \ldots\right) \\ &\ldots \\ a_n &= \left(0, \ldots, 0, \exp\left[-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right)\right], 0, \ldots\right) \end{aligned} \tag{13}$$

avec

$$|\, a_n \,| = \exp\left[-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right)\right].$$

Pour que cette suite a_n ne converge pas fortement vers 0, il faut et il suffit que la série positive $1/\lambda_i$ soit convergente. On prendra donc:

$$\lambda_i = \frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot b^i \qquad \text{avec} \quad b > 1.$$

De ce fait

$$\lim_{n\to\infty} |\, a_n \,| = \exp - 1/b > 0$$

avec lim faible$_{n\to\infty}\, a_n = 0$.

Remarque. On a ainsi déterminé les $(\lambda_i)_{i\geqslant 1}$; il reste donc à déterminer les α_n qui seront trouvés grâce à l'estimation (11).

LEMME 6. $\forall\epsilon > 0$, *il existe*

$$T_1 > 1, \ldots, T_n > n, \ldots$$

et

$$\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots > 0$$

tel que $\forall n \geqslant 1$, $\forall \alpha = (\alpha_i)_{i \geqslant 1}$ *avec* $\alpha_i = \beta_i$ *pour* $i = 1$ *à* $n + 1$, *on ait*

$$| S_\alpha(T_i)a_i - a_{i+1} | \leqslant \epsilon + \cdots + \epsilon^i \qquad \textit{pour tout } i = 1 \textit{ à } n. \tag{14}$$

Démonstration. (1°) Soit $\alpha_1 = 1$, alors $\forall \alpha$ avec $\alpha_1 = 1$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists T_1 > 1$ tel que:

$$| S_{\alpha,1}(T_1)a_1 - a_2 | \leqslant \epsilon/2 \text{ d'après (12).}$$

Or d'après l'estimation (11), $\exists \beta_2 > 0$ tel que $\forall t \in [0, T_1]$, $\forall \alpha$ avec $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \beta_2$ tel que:

$$| S_\alpha(t)\, a_1 - S_{\alpha,1}(t)\, a_1 | \leqslant \alpha_2\{(\pi/2)^{\lambda_2 - 1} [(\pi/2)^2 + \lambda_2^2]^{1/2}\}\, T_1 \leqslant \epsilon/2.$$

De ce fait on a

$$| S_\alpha(T_1)a_1 - a_2 | \leqslant \epsilon \qquad \text{pour tout } \alpha \text{ avec } \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \beta_2 .$$

(2°) On suppose avoir trouvé

$$\begin{aligned} &T_1, \dots, T_n \text{ avec } T_i > i \text{ pour } i = 1 \text{ à } n \text{ et } \beta_1, \dots, \beta_{n+1} > 0 \\ &\text{tel que } \forall \alpha = (\alpha_i)_i \text{ avec } \alpha_i = \beta_i \text{ pour } i = 1 \text{ à } n + 1, \text{ on ait} \\ &| S_\alpha(T_i)a_1 - a_{i+1} | \leqslant \epsilon + \cdots + \epsilon^i \text{ pour tout } i = 1 \text{ à } n. \end{aligned} \tag{15}$$

Alors d'après (12), $\exists t_{n+1} > 1$ tel que:

$$| S_{\alpha,n+1}(t_{n+1})a_{n+1} - a_{n+2} | \leqslant \epsilon^{n+1}/2.$$

Soit $T_{n+1} = T_n + t_{n+1}$, $T_{n+1} > n + 1$.

D'après l'estimation (11), il existe β_{n+2} tel que:

$$| S_\alpha(t)a_1 - S_{\alpha,n+1}(t)a_1 | \leqslant \epsilon^{n+1}/2$$

pour tout $t \in [0, T_{n+1}]$ et pour tout $\alpha = (\alpha_i)_i$ avec $\alpha_i = \beta_i$ pour $i = 1$ à $n + 2$. Donc

$$\begin{aligned} | S_\alpha(T_{n+1})a_1 - a_{n+2} | \leqslant{} & | S_\alpha(T_{n+1})a_1 - S_{\alpha,n+1}(T_{n+1})a_1 | \\ & + | S_{\alpha,n+1}(T_{n+1})a_1 - S_{\alpha,n+1}(t_{n+1})a_{n+1} | \\ & + | S_{\alpha,n+1}(t_{n+1})a_{n+1} - a_{n+2} |. \end{aligned}$$

Comme $S_{\alpha,n+1}(t)$ est un semi-groupe de contraction, on a:

$$| S_{\alpha,n+1}(T_{n+1})a_1 - S_{\alpha,n+1}(t_{n+1})a_{n+1} | \leqslant | S_{\alpha,n+1}(T_n)a_1 - a_{n+1} |.$$

D'où en utilisant (15), on obtient:

$$| S_\alpha(T_{n+1})a_1 - a_{n+2} | \leqslant (\epsilon^{n+1}/2) + (\epsilon + \cdots + \epsilon^n) + (\epsilon^{n+1}/2)$$

et ceci $\forall \alpha$ avec $\alpha_i = \beta_i$ pour $i = 1$ à $n + 2$. On a donc le lemme 6.

Démonstration de la Proposition 1. Le lemme 6 permet de construire une fonction φ_α telle que $\exists T_i > 0$:

$$| S_\alpha(T_i)a_1 - a_{i+1} | \leqslant \epsilon + \cdots + \epsilon^i \qquad \text{pour tout } i \geqslant 1.$$

Donc $| S_\alpha(T_i)a_1 - a_{i+1} | \leqslant \epsilon/(1 - \epsilon)$ si $\epsilon < 1$. De plus 0 est le seul point fixe de $S_\alpha(t)$ car:

$$\varphi_\alpha(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in l^2$$

$$\varphi_\alpha(x) = 0 \Rightarrow f_{\lambda_i}(x_i, x_{i+1}) = 0 \Rightarrow x_i = 0$$

de ce fait $\varphi_\alpha(x) \Leftrightarrow x = 0$.

Donc $\lim_{n\to\infty} | S_\alpha(T_n)a_1 | = \lim_{t\to\infty} | S_\alpha(t)a_1 | \geqslant \exp(-1/b) - \epsilon/(1 - \epsilon)$. On peut prendre $\epsilon = \frac{1}{4}$ et $b = 1/\mathrm{Log}\, 2$. Alors $\lim_{t\to\infty} | S_\alpha(t)a_1 | \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Donc $S_\alpha(t)a_1$ ne convergera pas fortement vers le seul point fixe de $S_\alpha(t)$ qui est 0.

Bibliographie

1. H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones*, Lecture Notes No. 5, North-Holland, Amsterdam, 1975.
2. R. E. Bruck, Jr., Asymptotic convergence of nonlinear contraction semi-groupes in Hilbert space, *J. Funct. Analysis* 18 (1975), 15–26.