ELSEVIER

J. Math. Pures Appl. 82 (2003) 43–66

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

www.elsevier.com/locate/matpur

Différentes estimations de $\sup u \times \inf u$ pour l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension $n \geqslant 3$

Samy Skander Bahoura *

175, rue du Chevaleret 75013 Paris, France

Reçu le 15 juin 2002 ; reçu en forme révisée le 2 octobre 2002

Résumé

Sur une variété riemannienne (M,g) de dimension n, nous démontrons que sur un compact $K \subset M$, les solutions positives de l'équation de la courbure scalaire prescrite (et de l'équation sous-critique correspondante) sont uniformément bornées sous certaines hypothèses.

Dans le cas positif, lorsque la variété est compacte, nous montrons que $\sup_M u \times \inf_M u \geqslant c > 0$, si $n \geqslant 3$ (respectivement $\sup_M u + \inf_M u \geqslant c$ si $n = 2$).

Abstract

On a Riemannian manifolds (M,g) of dimension n, we prove on compact set $K \subset M$, that the positive solutions of the equation of prescribed scalar curvature (and the equation of subcritical case) are uniformely bounded.

In positive case, when the manifold is compact, we prove that $\sup_M u \times \inf_M u \geqslant c > 0$ if $n \geqslant 3$ (respectively $\sup_M u + \inf_M u \geqslant c$ is $n = 2$).

Mots-clés : Courbure scalaire prescrite ; Yamabe ; Inégalité de Harnack

Keywords: Prescribed scalar curvature; Yamabe; Harnack inequality

Introduction

Nous nous intéressons ici à différents problèmes liés aux estimations du produit $\sup \times \inf$ pour les solutions de l'équation de la courbure scalaire prescrite.

* Auteur correspondant.
Adresse e-mail : bahoura@math.jussieu.fr (S.S. Bahoura).

0021-7824/02/$ – see front matter
doi:10.1016/S0021-7824(02)00003-X

Le premier des problèmes est le suivant :

Problème 1. On considère sur une variété riemannienne $\mathcal{C}^\infty(M,g)$ (pas nécéssairement sans bord) l'équation de la courbure scalaire prescrite :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = Vu^{q-1}, \qquad u > 0 \quad \text{sur } \mathring{M}, \tag{E_1}$$

avec R courbure scalaire de M et $2 < q \leqslant N = 2n/(n-2)$.

D'autre part, on se donne trois réels non nuls a, b, A avec $0 \notin [a,b]$, on suppose que la fonction V vérifie :

$$a \leqslant V(x) \leqslant b \quad \forall x \in M,$$
$$\bigl|V(x) - V(y)\bigr| \leqslant A\bigl[d(x,y)\bigr]^\alpha \quad \forall x, y \in M, \text{ avec } \alpha \in \,]0,1[\,.$$

Existe-t-il, pour chaque compact $K \subset \mathring{M}$, une constante $c > 0$, ne dépendant que de α, a, b, A, K, M, telle que pour toute fonction u solution de (E_1) relativement à une fonction V vérifiant les hypothèses pécédentes, on ait :

$$\sup_K u \times \inf_M u \leqslant c? \tag{1}$$

On s'intéress ici essentielement au cas négatif ($b < 0$). En ce qui concerne le cas positif ($a > 0$), nous traitons dans cet article deux types de problèmes : le premier concerne le cas où l'exposant $q < N$ et le second est lié à la minoration du $\sup \times \inf$.

Lorsque $q = N$ et $a > 0$ dans l'équation (E_1), quelques résultats sont connus :

Le problème a été évoqué sur la sphère lorsque $V = cte$, par T. Aubin [1]. Lié au problème de Yamabe, le $\sup \times \inf$ est alors fixe.

En effet, considérons sur la sphère $\mathcal{S}_n(1)$, $n \geqslant 3$, l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta\phi + n(n-1)\phi = n(n-1)\phi^{(n+2)/(n-2)}.$$

D'après Aubin [1], il existe $\beta > 1$ et $P \in \mathcal{S}_n$ tel que :

$$\phi(Q) = \phi_{\beta,P}(Q) = \left[\frac{\beta^2 - 1}{[\beta - \cos[d(P,Q)]]^2}\right]^{(n-2)/4}.$$

On a alors :

$$\max_{\mathcal{S}_n}\phi = \phi(P) = \left[\frac{\beta^2-1}{[\beta - \cos[d(P,-P)]]^2}\right]^{(n-2)/4} = \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{(n-2)/4},$$

$$\min_{\mathcal{S}_n}\phi = \phi(-P) = \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{(n-2)/4}$$

et donc,

$$\max_{\mathcal{S}_n} \phi \times \min_{\mathcal{S}_n} \phi = 1. \tag{$*_1$}$$

En dimension 2, le même problème se pose sur $\mathcal{S}_2$, on a :

$$\max_{\mathcal{S}_2} \phi + \min_{\mathcal{S}_2} \phi = 0. \tag{$*_2$}$$

Sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, l'équation est différente, il s'agit de l'équation :

$$\Delta u = V \mathrm{e}^u.$$

Les résultats concernant la bornitude de $\max_K u + \min_\Omega u$, où K est un compact de Ω, ont été démontrés par Brézis et al. [3].

Yanyan Li [5] a mis en évidence des conditions suffisantes de régularité sur la fonction V (au moins $\mathcal{C}^{n-2}$ et le gradient contrôle les dérivées successives) pour résoudre le problème sur la sphère $\mathcal{S}_n$. Il utilise par ailleurs, les notions de blow-ups isolés et isolés simples.

Quoiqu'il en soit, pour $n \geqslant 3$, des hypothèses supplémentaires doivent être prises comme le prouve le contre exemple de C.C. Chen et C.-S. Lin [4].

Les égalité $(*_1)$ et $(*_2)$ relatives au cas positif, nous poussent à nous intéresser au problème suivant :

Problème 2. Sur une variété riemannienne compacte de dimension 2, on considère l'équation suivante :

$$\Delta u + R = V \mathrm{e}^u, \tag{E_2}$$

avec $0 < a \leqslant V(x) \leqslant b$ et $|\nabla V(x)| \leqslant A$ pour tout $x \in M$.

A-t-on, pour toute solution u de (E_2) :

$$\sup_M u + \inf_M u \geqslant c = c(a, b, A, M)?$$

Sur une variété riemannienne compacte $\mathcal{C}^\infty(M, g)$ de dimension $n \geqslant 3$ et de courbure scalaire R partout positive, on considère l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = V u^{N-1} \tag{E_3}$$

$u > 0$ et V vérifiant pour deux réels positifs donnés a et b :

$$0 < a \leqslant V(x) \leqslant b \quad \forall x \in M \ (V \text{ n'est pas nécessairement hölderienne}).$$

Existe-t-il une constante positive $c>0$, ne dépendant que de a, b, M, telle que toute fonction u solution de (E_3) relativement à un V satisfaisant les hypothèses précédentes, vérifie :

$$\sup_M u \times \inf_M u \geqslant c? \tag{$**$}$$

Sur la sphère $\mathcal{S}_2$, on peut obtenir, grâce à une inégalité d'Aubin (voir [1]), une minoration du type : $\sup_{\mathcal{S}_2} u + \inf_{\mathcal{S}_2} u \geqslant c(b)$.

Pour le cas où $n \geqslant 3$, on peut supposer que (M, g) appartient au cas positif du problème de Yamabe, par une transformation conforme de la métrique on se ramène à $R>0$ partout.

Mais cette hypothèse est capitale. Dans le cas $R=0$, on peut donner le contre-exemple qui suit :

On considére sur la boule unité, les fonctions suivantes :

$$u_\epsilon(x) = \left(\frac{\mu_\epsilon}{{\mu_\epsilon}^2 + |x|^2}\right)^{(n-2)/2},$$

elles vérifient :

$$\Delta u_\epsilon = n(n-2){u_\epsilon}^{(n+2)/(n-2)},$$

$$\max_{B_1(0)} u_\epsilon = u_\epsilon(0) = \frac{1}{{\mu_\epsilon}^{(n-2)/2}}$$

et pour tout $k \in\,]0,1[$,

$$\min_{B_k(0)} u_\epsilon = u_\epsilon(k) = \left(\frac{\mu_\epsilon}{{\mu_\epsilon}^2 + |k|^2}\right)^{(n-2)/2}.$$

On déduit de tout cela que

$$\max_{B_1(0)} u_\epsilon \times \min_{B_k(0)} u_\epsilon = \left(\frac{1}{{\mu_\epsilon}^2 + |k|^2}\right)^{(n-2)/2}.$$

Il suffit de prendre, $\mu_\epsilon \to +\infty$ pour avoir $\max_{B_1(0)} u_\epsilon \times \min_{B_k(0)} u_\epsilon \to 0$.

Le troisième problème qui se pose est l'estimation du $\sup \times \inf$ pour les solutions d'un autre type d'équations.

Problème 3. Sur une variété riemannienne $\mathcal{C}^\infty(M, g)$ (non nécessairement compacte), on considère l'équation suivante :

$$\Delta u + R = V \mathrm{e}^u \quad \text{sur } \mathring{M}. \tag{E_4}$$

V vérifiant pour deux réels donné a et b :

$$a \leqslant V(x) \leqslant b < 0 \quad \forall x \in M \ (V \text{ n'est pas nécessairement hölderienne}),$$

existe-t-il pour chaque compact $K \subset \mathring{M}$, une constante $c > 0$, ne dépendant que de α, a, b, K, M telle que, pour toute fonction u solution de (E_4) relativement à une fonction V vérifiant les hypothèses précédents, on ait :

$$\sup_K u + \inf_M u \leqslant c. \tag{$***$}$$

Pour ce qui concerne le cas négatif, remarquons que sur une variété riemannienne compacte M de courbure scalaire R positive ou nulle, ce problème n'a pas lieu d'être. En effet, considérons, par exemple, sur $\mathcal{S}_n$ l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = Vu^{N-1}, \tag{2}$$

avec $R = n(n-1)$ la courbure scalaire de la sphère.

L'équation (2) ne possède pas de solutions positives. Pour le voir on écrit :

$$R\int_{\mathcal{S}_n} u\, dV_g = \int_{\mathcal{S}_n} Vu^{N-1}\, dV_g \leqslant \sup V \int_{\mathcal{S}_n} u^{N-1}\, dV_g < 0$$

ce qui est contradictoire puisque $R > 0$ et $V < 0$.

Dans le cas où la courbure scalaire d'une variété à bord est négative, l'existence de solutions avec condition de Dirichlet est donnée par Noussair [9], Loewner et Nirenberg [7] et Ni [8].

Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \leqslant 0$, Ni [8] montre que (E_1) ne possède pas de solution positive.

Loewner et Nirenberg [7] et Noussair [9] ont prouvé l'existence dans certains cas.

Noussair [9] nous assure l'existence de solutions de (E_3) dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Pour Loewner et Nirenberg [7], le problème de Dirichlet suivant :

$$-\Delta u = u^{N-1} \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad u \equiv \phi \text{ sur } \partial\Omega$$

a une unique solution dans L^N, $u \in \mathcal{C}^\infty$ et $0 < u < \max \phi$.

En outre, ils montrent qu'il existe une unique solution du problème suivant :

$$-\Delta u = u^{N-1} \text{ dans } \Omega \quad \text{avec} \quad u(x) \to +\infty \text{ si } x \to \partial\Omega;$$

d'où un intérêt pour les estimations des fonctions à l'intérieur du domaine.

Pour Noussair, à l'extérieur de la boule unité B, avec condition de Dirichlet, il y a une solution de :

$$-\Delta u = Vu^{N-1} \text{ dans } \Omega = \mathbb{R}^n - B \quad \text{et} \quad u \equiv \phi \text{ sur } \partial\Omega.$$

Grâce à la transformation de Kelvin, on ramène le problème à la boule unité privée de l'origine.

Dans cet article les solutions sont régulières ($\mathcal{C}^{2,\alpha}$) et on cherche à partir de l'équation, sans avoir de conditions aux bords ni de condition de bornitude uniforme d'énergie, à montrer des résultats de bornitude au sens L^{∞}_{loc}. Les fonctions V_i sont supposées être au plus hölderiennes.

Le but est d'estimer le maximum de la fonction u sur chaque compact par rapport à son minimum sur M.

Résultats principaux

Même si les équations relatives aux problèmes (E_1) et (E_4) sont différentes, ces deux problèmes sont assez similaires. Les résultats principaux s'énoncent de la manière suivante :

Théorème 1. *Considérons deux suites* $\{u_i\}, \{V_i\}$ *de fonctions relatives à l'équation* (E_1) *avec* $\{V_i\}$ *hölderiennes et* $b < 0$ *ou,* $a > 0$ *et* $q < N$*, alors* :

Pour tout compact K *de* $\mathring{M}$ *il existe une constante* $c > 0$ *ne dépendant que de* α, a, b, A, K, M *telle que pour tout entier* i :

$$\sup_K u_i \leqslant c.$$

Théorème 2. *Considérons deux suites* $\{u_i\}, \{V_i\}$ *de fonctions relatives à l'équation* (E_4), $V_i(x) \leqslant b < 0$*, pour tout* $x \in M$ *et tout entier* i*, alors* :

Pour tout compact K *de* $\mathring{M}$*, il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tout* i*, on ait* :

$$\sup_K u_i \leqslant c.$$

Pour les équations (E_2) et (E_3), on a le résultat suivant :

Théorème 3. *Considérons deux suites* $\{u_i\}$ *et* $\{V_i\}$ *de fonctions relatives aux équations* (E_2) *ou* (E_3)*, alors* :

Si $n = 2$*,* $a > 0$ *et* $\{V_i\}$ *uniformément lipschitziennes* :

$$\sup_M u_i + \inf_M u_i \geqslant c = c(a, b, A, M).$$

Si $n \geqslant 3$*,* $a > 0$*,* $R > 0$ *et les fonctions* u_i *positives, on a* :

Il existe une constante $c > 0$*, ne dépendant que* a, b, M*, telle que pour tout entier* i*, on ait* :

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geqslant c = c(a, b, M).$$

On a le résultat suivant en dimension 2 :

Proposition. *Considérons sur la sphère $\mathcal{S}_2$ deux suites de fonctions $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$, telles que*

$$\Delta u_i + 2 = V_i \mathrm{e}^{u_i}.$$

Les fonctions V_i vérifient, $0 \leqslant V_i(x) \leqslant b$ pour tout x et tout i, alors il existe une constante $c = c(b)$, telle que

$$\sup_M u_i + \inf_M u_i \geqslant c.$$

Démonstration du Théorème 1. Pour le cas où $a > 0$ et $q < N$, la preuve est assez semblable à celle du cas $b < 0$. Nous commencerons par traiter ce dernier cas.

Etape 1. *On ramène le problème à un problème sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Les estimations données sont locales, on se place dans des ouverts de cartes.

Soit $y_0 \in \mathring{M}$ et (Ω, ϕ) une carte normale géodésique en y_0, $\overline{\Omega} \subset \mathring{M}$. On note $h = \phi^* g$.

Les suites de fonctions $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ vérifient :

$$\Delta u_i + R u_i = V_i {u_i}^{q-1},$$

$$a \leqslant V_i(y) \leqslant b < 0 \quad \forall\, y \in M,$$

$$\bigl|V_i(y) - V_i(z)\bigr| \leqslant A\bigl[d(y,z)\bigr]^\alpha, \quad \forall\, y, z \in M,\ \alpha, A > 0.$$

On pose :

$$w_i(x) = u_i \circ \phi^{-1}(x), \quad W_i(x) = V_i \circ \phi^{-1}(x) \quad \text{et} \quad T(x) = R \circ \phi^{-1}(x),$$

alors $w_i(x)$ vérifie :

$$\Delta_h w_i(x) + T w_i(x) = W_i(x)\bigl[w_i(x)\bigr]^{q-1}, \quad x \in \widetilde{\Omega} = \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions $x \mapsto h_{ij}(x)$ sont continues, il existe $m, M > 0$, tels que pour tout $(x, X) \in \phi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ on ait, $m\|X\|^2 \leqslant h_{jk}(x) X^j X^k \leqslant M\|X\|^2$. On obtient, pour un ouvert O relativement compact de $\widetilde{\Omega}$:

$$\exists\, A' > 0,\ \forall\, x, x' \in O, \quad \bigl|W_i(x) - W_i(x')\bigr| \leqslant A'\|x - x'\|^\alpha.$$

De plus nous avons :

$$a \leqslant W_i(x) \leqslant b < 0 \quad \forall\, x \in O$$

et en $x_0 = \phi(y_0) \in O$, $h_{jk}(x_0) = \delta_{jk}$.

Etape 2. *On commence par prouver le résultat local suivant* :

Il existe $c(x_0, \alpha, a, b, A, q) > 0$ et $R > 0$ tels que pour tout élément x de $B_R(x_0)$ et tout entier i, on ait :

$$w_i(x) \leqslant \frac{c}{R^{2/(q-2)}}.$$

En fait, le problème consiste à mettre en évidence une sous-suite qui converge uniformément dans $L^{\propto}_{\text{loc}}$ en faisant en sorte que les points blow-up restent à l'intérieur du domaine. L'absence de conditions au bord est à l'origine de cette démarche.

Supposons le contraire :

$$\text{pour tout } c \text{ et } R > 0, \text{ il existe } j \in \mathbb{N}, \quad \Big(\max_{B_R(x_0)} w_j\Big) R^{2/(q-2)} \geqslant c. \tag{H}$$

Soit alors, une suite de rayons $R_i \to 0$ telle que : $(\max_{B_i} w_i) {R_i}^{2/(q-2)} \to +\infty$, B_i est noté pour $B_{R_i}(x_0)$.

Posons : $s_i(x) = w_i(x)(R_i - |x - x_i|)^{2/(q-2)}$, avec $w_i(x_i) = \max_{B_i(x_0)} w_i$,

$$|x_i - x_0| \leqslant R_i \to 0.$$

Soit a_i tel que ; $s_i(a_i) = \max_{B_i(x_i)} s_i$, on a alors :

$$w_i(a_i)\big(R_i - |a_i - x_i|\big)^{2/(q-2)} = s_i(a_i) \geqslant s_i(x_i) = w_i(x_i){R_i}^{2/(q-2)} \to +\infty.$$

Posons alors : $l_i = (R_i - |a_i - x_i|)$ et $L_i = (l_i/2)[w_i(a_i)]^{(q-2)/2} \to +\infty$ et comme $0 < l_i \leqslant R_i \to 0$, $a_i \to x_0$ et $w_i(a_i) \to +\infty$.

On voit bien que tout se concentre au point x_0 et le fait que $L_i \to +\infty$ est nécessaire pour appliquer la technique blow-up.

Posons :

$$v_i(z) = \frac{1}{w_i(a_i)} w_i\big\{z\big[w_i(a_i)^{(2-q)/2}\big] + a_i\big\} \quad \text{pour } |z| \leqslant L_i.$$

Vérifions que v_i existe bien, c'est-à-dire que si $|z| \leqslant L_i$ alors $x = z[w_i(a_i)^{(2-q)/2}] + a_i \in B_{R_i}(x_i)$. On a :

$$\begin{aligned} R_i - |x - x_i| &= R_i - \big|a_i - x_i + [w_i(a_i)]^{(2-q)/2} y\big| \\ &\geqslant R_i - |a_i - x_i| - \big|[w_i(a_i)]^{(2-q)/2} z\big|, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité triangulaire, d'où,

$$R_i - |x - x_i| \geqslant l_i - \frac{l_i}{2} = \frac{l_i}{2},$$

on en déduit que $|x - x_i| \leqslant R_i - l_i/2 < R_i$ et ainsi v_i est bien définie.

D'autre part les dérivées partielles successives de v_i vérifient :

$$\partial_l v_i = \partial_l w_i \frac{w_i(a_i)^{(2-q)/2}}{w_i(a_i)} = \frac{\partial_l w_i}{[w_i(a_i)]^{q/2}},$$

$$\partial_{jk} v_i = \frac{\partial_{jk} w_i}{[w_i(a_i)]^{q-1}}.$$

On pose :

$$\alpha_i^{jk}(z) = h^{jk}\big[a_i + z\big[w_i(a_i)\big]^{(2-q)/2}\big],$$

$$S_i(z) = T\big[a_i + z\big[w_i(a_i)\big]^{(2-q)/2}\big],$$

$$Z_i(z) = W_i\big[a_i + z\big[w_i(a_i)\big]^{(2-q)/2}\big].$$

v_i vérifie :

$$\Delta_{\alpha_i} v_i = -\alpha_i^{jk}(z)\partial_{jk} v_i + \frac{\beta_i^l(z)}{[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}}\partial_l v_i = -\frac{S_i}{[w_i(a_i)]^{q-1}} v_i + Z_i {v_i}^{q-1},$$

avec la condition $v_i(0) = 1$.

Les fonctions β_i^l s'expriment à l'aide des symboles de Christoffel et des composantes de la métrique dans la carte locale considérée.

La suite v_i est bornée dans L_∞. En effet,

$$v_i(z) = \frac{s_i(x)}{s_i(a_i)} \frac{(R_i - |a_i - x_i|)^{2/(q-2)}}{(R_i - |x - x_i|)^{2/(q-2)}},$$

or pour $|z| \leqslant (l_i/2)[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}$, $R_i - |x - x_i| \geqslant l_i/2$. En conséquence :

$$0 < v_i(z) \leqslant 2^{2/(q-2)}.$$

Etudions la suite $\{Z_i\}$:

$$\big|Z_i(z) - Z_i(z')\big| = \big|W_i\big[a_i + z\big[w_i(a_i)\big]^{(2-q)/2}\big] - W_i\big[a_i + z'\big[w_i(a_i)\big]^{(2-q)/2}\big]\big|.$$

D'où

$$\big|Z_i(z) - Z_i(z')\big| \leqslant A' \frac{\|z - z'\|^\alpha}{[w_i(a_i)]^{\alpha(q-2)/2]}} \to 0 \quad \text{lorsque } i \to +\infty.$$

La suite (Z_i) est équicontinue et bornée $(q > 2)$, on peut grâce au théorème d'Ascoli en extraire une sous-suite qui converge vers une fonction constante notée W. On peut supposer que cette sous-suite est la suite elle-même.

D'après l'inégalité précédente :

$$\big|W(z) - W(z')\big| \leqslant \big|W(z) - Z_i(z)\big| + \big|Z_i(z) - Z_i(z')\big| + \big|Z_i(z') - W(z')\big| \to 0,$$

d'où $W \equiv W(x_0) = \lim_{i\to\infty} Z_i(0) = \lim_{i\to\infty} W_i(a_i)$.

La suite $\{\alpha_i^{jk}\}$ tend vers δ_j^k : en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1 en x_0 pour h^{jk}, on obtient :

$$h^{jk}(z) = h^{jk}(x_0) + D_{x_0} h^{jk}(z - x_0) + \mathrm{o}\big(|z - x_0|\big),$$

d'où d'après la définition de α_i^{jk} et de z :

$$\begin{aligned}\left|\alpha_i^{jk}(z)-h^{jk}(x_0)\right| &= \left|h^{jk}\left[a_i+x\left[w_i(a_i)\right]^{(2-q)/2}\right]-h^{jk}(x_0)\right|\\ &\leqslant C\left|a_i-x_0+x\left[w_i(a_i)\right]^{(2-q)/2}\right]\right|\\ &\leqslant C\left(|x_0-a_i|+|x|\left[w_i(a_i)\right]^{(2-q)/2}\right]\right),\end{aligned}$$

avec C ne dépendant que de $\|Dh^{jk}\|_\infty$.

Comme $|z|\leqslant(l_i/2)[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}]$, on a :

$$\left|\alpha_i^{jk}(z)-h^{jk}(x_0)\right|\leqslant C\left(|x_0-a_i|+\frac{l_i}{2}\right)\to 0 \quad \text{uniformément en } x.$$

Quant aux β_i^l :

$$\begin{aligned}\left|\beta_i^l(z)\right| &= \left|\left[h^{jk}\left[a_i+x\left[w_i(a_i)\right]^{(2-q)/2}\right]\right]\overline{\Pi}_{jk}^l\left[a_i+x\left[w_i(a_i)\right]^{(2-q)/2}\right]\right|\\ &\leqslant C\left(\left\|h^{jk}\right\|_\infty,\left\|\Pi_{jk}^l\right\|_\infty\right),\end{aligned}$$

où $\Pi_{jk}^l=\Gamma_{jk}^l\circ\phi^{-1}$ avec Γ_{jk}^l symboles de Christoffel.

Donc, si $q>2$ et $|z|\leqslant(l_i/2)[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}$, $\beta_i^l/[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}$, tend uniformément vers 0 quand i tend vers l'infini.

La suite (v_i) est uniformément bornée, $v_i(0)=1$ pour tout i et de plus chaque élément de la suite vérifie l'équation suivante :

$$-\alpha_i^{jk}(z)\partial_{jk}v_i+\frac{\beta_i^l(z)}{[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}}\partial_l v_i(z)+\frac{S_{0i}}{[w_i(a_i)]^{q-1}}v_i=Z_i v_i{}^{q-1}.$$

Comme les coefficients satisfont les hypothèses du théorème de Ladyzenskaya, par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite notée encore (v_i) qui converge localement uniformément vers une fonction $v\geqslant 0$ définie sur $\mathbb{R}^n$ et qui vérifie :

$$-h^{jk}(x_0)\partial_{jk}v=W(x_0)v^{q-1}\quad \text{sur } \mathbb{R}^n \text{ et } v(0)=1.$$

Comme en $y_0=\phi_0^{-1}(x_0)$, on a choisi des coordonnées géodésiques normales, $h_{jk}(x_0)=\delta_{jk}$, où δ_{jk} sont les symboles de Kronecker.

L'inégalité $v\leqslant 2^{2/(q-2)}$ se conserve, grâce à la convergence L^∞_{loc} des v_i, et d'après les théorèmes de régularité, v est au moins $\mathcal{C}^{3,\alpha}$.

On a vu qu'en raisonnant par l'absurde on obtenait une fonction v (définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier) vérifant :

$$\Delta v=W(x_0)v^{q-1}\quad \text{sur } \mathbb{R}^n.$$

Posons

$$\bar{v}(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{\partial B_r} v(\sigma_r)\,\mathrm{d}\sigma_r = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathcal{S}_{n-1}} v(r\sigma)\,\mathrm{d}\sigma;$$

il est clair que, par dérivation sous le signe somme, $\bar{v}$ est deux fois dérivable.

$$\bar{v}'(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathcal{S}_{n-1}} \partial_\nu v(r\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{\partial B_r} \partial_\nu v\,\mathrm{d}\sigma_r = \frac{1}{r^{n-1}\omega_{n-1}} \int\limits_{B_r} -\Delta v\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi :

$$\left(r^{n-1}\bar{v}'\right) = \frac{-W(x_0)}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B_r} v^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{-W(x_0)}{\omega_{n-1}} \int\limits_{[0,r]} \int\limits_{\partial B_s} \left[v^{q-1}(\sigma_s)\,\mathrm{d}\sigma_s\right] \mathrm{d}s,$$

donc :

$$\left(\omega_{n-1} r^{n-1} \bar{v}'\right)'(r) = -W(x_0) \int\limits_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r)\,\mathrm{d}\sigma_r.$$

D'où

$$\bar{v}''(r) + \frac{(n-1)}{r}\bar{v}'(r) = -W(x_0)\frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r)\,\mathrm{d}\sigma_r, \quad \text{pour } r > 0.$$

De cette dernière égalité, on déduit que, $\bar{v}'(0) = 0$, puisque le terme de droite et v'' sont bornés lorsque $r \to 0$.

Par l'inégalité de Hölder :

$$\int\limits_{\partial B_r} v\,\mathrm{d}\sigma_r \leqslant \left(|\partial B_r|\right)^{(q-2)/(q-1)} \left(\int\limits_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r)\,\mathrm{d}\sigma_r \right)^{1/(q-1)}$$

qui s'écrit encore,

$$\int\limits_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r)\,\mathrm{d}\sigma_r \geqslant \left(\frac{1}{|\partial B_r|}\right)^{q-2} \left(\int\limits_{\partial B_r} v\,\mathrm{d}\sigma_r \right)^{q-1}.$$

On a ainsi :

$$\int\limits_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r)\,\mathrm{d}\sigma_r \geqslant \left(\frac{1}{r^{n-1}\omega_{n-1}}\right)^{q-2} \left(\left(r^{n-1}\omega_{n-1}\bar{v}\right)\right)^{q-1} \geqslant 0$$

et finalement, on obtient :

$$\int_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r)\,\mathrm{d}\sigma_r \geqslant \big(r^{n-1}\omega_{n-1}\big)\bar{v}^{q-1}.$$

D'oú $\bar{v}$ satisfait l'inéquation suivante :

$$-\Delta\bar{v} = \frac{(\omega_{n-1}r^{n-1}\bar{v}')'}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \geqslant -W(x_0)\bar{v}^{q-1}.$$

Comme $W(x_0) < 0$, $\bar{v}' > 0$ puisque $\bar{v}'(0) = 0$, d'où $\bar{v}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Utilisant la formule de Stokes on a :

$$\int_{B_r} -\Delta\bar{v} = \int_{\partial B_r} \partial_\nu\bar{v}\,\mathrm{d}\sigma_r = \omega_{n-1}r^{n-1}\bar{v}'(r),$$

puisque $\bar{v}$ est radiale.

En utilisant l'inéquation vérifiée par $\bar{v}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{B_r} -\Delta\bar{v}\,\mathrm{d}x &\geqslant -W(x_0)\int_{B_r} \bar{v}^{q-1}\,\mathrm{d}x = -\omega_{n-1}W(x_0)\int_0^r r^{n-1}\big[\bar{v}(r)\big]^{q-1}\,\mathrm{d}r\\ &\geqslant \frac{-\omega_{n-1}W(x_0)}{n}r^n,\end{aligned}$$

car $\bar{v}$ est radiale, croissante et $\bar{v}(0) = v(0) = 1$. De la on déduit :

$$\bar{v}'(r) \geqslant \frac{-W(x_0)}{n}r.$$

En integrant $\bar{v}'$ on déduit que $\bar{v}(r) \to +\infty$ lorsque $r \to +\infty$.

Or, $0 \leqslant v \leqslant 2^{(n-2)/2} \Rightarrow 0 \leqslant \bar{v} \leqslant 2^{(n-2)/2}$, d'où la contradiction, l'hypothèse (H) est absurde.

Fin de la démonstration du cas $b < 0$ du Théorème 1.

On a vu que pour tout $y_0 \in \mathring{M}$ et toute carte locale (Ω,ϕ) géodésique normale en y_0, il existe deux constantes positives, $c = c(\phi(y_0), a, b, A, M) > 0$, $R > 0$ telles que :

$$B_R\big(\phi(x_0)\big) \subset O \Subset \phi(\Omega),$$

$$\sup_{B_R(\phi(x_0))} u_i\circ\phi^{-1} \leqslant \frac{c}{R^{2/(q-2)}}. \tag{$**$}$$

Soit K un compact de $\mathring{M}$; pour chaque $y \in K$, on considère une carte normale géodésique (Ω_y,ϕ_y). Pour chaque ϕ_y, on détermine un rayon $R_y > 0$ et une constante c_y pour lesquels $(**)$ est vraie.

La réunion $\bigcup_{y\in K}\phi_y^{-1}(B_{R_y(\phi_y(y))})$ est un recouvrement compact de K, on peut en extaire un recouvrement fini. Comme sur chaque ouvert on a une estimation uniforme, cette estimation se conserve pour K. □

Etude du cas $a > 0$, $q < N$ du Théorème 1. On se place sur une variété riemannienne M non nécessairement compacte, et on considère deux suites de fonctions $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ vérifiant :

$$\Delta_g u_i + \widetilde{R}u_i = V_i {u_i}^{q-1}, \qquad u_i > 0 \quad \text{sur } M,$$

$$\widetilde{R} = \frac{n-2}{4(n-1)}R, \quad 0 < a \leqslant V_i(x) \leqslant b\ \forall x \in M$$

et

$$\big|V_i(y) - V_i(z)\big| \leqslant A\big[d(y,z)\big]^\alpha \quad \forall y, z \in M,\ \alpha \in]0,1[;$$

Δ_g s'écrit localement : $-g^{jk}\nabla_j\nabla_k = -g^{jk}\partial_{jk} + g^{jk}\Gamma_{jk}^l\partial_l$.

Le principe est le même que celui du cas $b < 0$ du Théorème 1. On prend un point x_0 de $\mathring{M}$, on choisit une carte normale géodésique (Ω_0, ϕ_0) en x_0 pour nous ramener à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On obtient, comme dans l'étape 1 du cas $b < 0$ du Théorème 1 :

$$-h^{jk}\partial_{jk}w_i + h^{jk}\Pi_{jk}^l\partial_l w_i + T_0 w_i = W_i w_i^q \quad \text{sur } O \Subset \phi_0(\Omega) \subset \mathbb{R}^n,$$

où on a noté :

$$h^{jk} = g^{jk}\circ\phi_0^{-1}, \quad \Pi_{jk}^l = \Gamma_{jk}^l\circ\phi_0^{-1}, \quad T_0 = \widetilde{R}o\phi_0^{-1},$$

et

$$w_i = u_i\circ\phi_0^{-1}\ W_i = V_i\circ\phi_0^{-1}.$$

Par hypothèse, $w_i > 0$ et W_i vérifient :

$$0 < a \leqslant W_i(x) \leqslant b \quad \forall x \in O$$

et

$$\big|W_i(x) - W_i(x')\big| \leqslant A'\|y - z\|^\alpha \quad \forall x, x' \in O,\ \text{avec } \alpha \in]0,1]$$

où A' ne dépend que de A et de M.

Comme nos estimations sont locales, on commence par prouver l'inégalité suivante :

$$\exists c, R > 0, \quad w_i(x) \leqslant \frac{c}{R^{(q-2)/2}}, \quad \forall x \in B_R(x_0).$$

En supposant le contraire et en utilisant la technique blow-up, on arrive à exhiber, comme dans la preuve du cas négatif, une suite de fonctions (v_i) qui converge sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ vers une fonction v vérifiant :

$$\Delta_{\mathcal{E}} v = W(x_0) v^{q-1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^n,$$

$$v(0) = 1 \quad \text{et} \quad v \geqslant 0.$$

La technique blow-up, le phénomène de concentration en un point et le choix de coordonnées géodésiques normales en ce point, expliquent la notation $\Delta_{\mathcal{E}}$, qui fait référence au laplacien euclidien.

Par le principe du maximum, $v > 0$ sur tout $\mathbb{R}^n$.

Or d'après un résultat de Gidas et Spruck [5], de telles fonctions n'existent pas pour l'exposant critique, d'où la contradiction.

Pour conclure, on considère un recouvrement du compact K par des boules définies comme pour l'estimation locale précédente.

Démonstration du Théorème 2. On considère deux suites de fonctions $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ sur M vérifiant :

$$\Delta u_i + R = V_i \mathrm{e}^{u_i} \quad \text{dans } \mathring{M},$$

$$a \leqslant V_i(y) \leqslant b < 0 \quad \text{pour tout } y \in M.$$

Posons $z_i = \mathrm{e}^{u_i}$, alors on a :

$$\nabla_j z_i = \nabla_j u_i \, z_i \quad \text{et} \quad \Delta z_i = -\nabla^j (\nabla_j z_i) = \Delta u_i \, z_i - |\nabla u_i|^2 z_i,$$

ainsi, la fonction z_i vérifie l' équation suivante :

$$\Delta z_i + R z_i = V_i z_i^2 - |\nabla u_i|^2 z_i. \tag{$*$}$$

Considérons un compact K de M, et η une fonction sur M telle que :

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in M \quad \text{et} \quad \eta \equiv 1 \quad \text{sur } K.$$

On multiplie $(*)$ par η^4 et on intègre par parties :

$$\int_M z_i \Delta(\eta^4) \, \mathrm{d}V_g = \int_M \Delta z_i \eta^4 \, \mathrm{d}V_g = \int_M V_i z_i^2 \eta^4 \, \mathrm{d}V_g - \int_M |\nabla u_i|^2 z_i \eta^4 \, \mathrm{d}V_g - \int_M R z_i \eta^4 \, \mathrm{d}V_g,$$

ce qui peut s'ecrire :

$$\int_M |\nabla u_i|^2 z_i \eta^4 \,\mathrm{d}V_g + \int_M (-V_i) z_i^2 \eta^4 \,\mathrm{d}V_g$$
$$= 12 \int_M z_i \eta^2 |\nabla \eta|^2 \,\mathrm{d}V_g - 4 \int_M z_i \eta^3 \Delta\eta \,\mathrm{d}V_g - \int_M R z_i \eta^4 \,\mathrm{d}V_g,$$

on en déduit, puisque $z_i > 0$ et $-V_i \geqslant -b > 0$:

$$(-b) \int_M z_i^2 \eta^4 \,\mathrm{d}V_g \leqslant \int_M z_i \eta^2 \big(12|\nabla\eta|^2 + 4\eta|\Delta\eta| + |R|\eta^2\big) \,\mathrm{d}V_g.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz au second membre de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sqrt{\int_M z_i^2 \eta^4 \,\mathrm{d}V_g} \leqslant \frac{\sqrt{(12|\nabla\eta|^2 + 4\eta|\Delta\eta| + |R|\eta^2)^2 \,\mathrm{d}V_g}}{-b}.$$

Comme $\eta \equiv 1$ sur K, on peut écrire :

$$\|z_i\|_{L^2(K)} \leqslant c(b, K, M).$$

Ainsi, les fonctions positives z_i sont localement uniformément bornées dans L^2. D'autre part, considérant dans une carte locale (Ω, ϕ), on peut se ramener à une équation sur une ouvert de $\mathbb{R}^n$, où $\{z_i \circ \phi^{-1}\}$ est sur-harmonique et localement uniformément bornée dans L^2. On conclut, grâce à l'inégalité de Harnack (voir [1]), que $\{z_i \circ \phi^{-1}\}$ est localement uniformément bornée, par conséquent $\{z_i\}$ est uniformément localement bornée. □

Démonstration du Théorème 3.

Etude du cas $n = 2$. Considérons sur une variété riemannienne compacte (M, g) de courbure scalaire R, une suite de fonctions $\{u_i\}$ solutions de :

$$\Delta u_i + R = V_i \mathrm{e}^{u_i}, \tag{$*$}$$

$0 < a \leqslant V_i(P) \leqslant b$ et $|\nabla V_i(P)| \leqslant A$ pour tout $P \in M$ et tout i.

Supposons par l'absurde que :

$$\sup_M u_i + \inf_M u_i \to -\infty, \tag{H}$$

on en déduit que :

$$\sup_M |u_i| \to +\infty. \tag{$**$}$$

En intégrant l'équation $(*)$, on obtient pour tout i :

$$\int_M V_i e^{u_i}\,dV_g = \int_M R\,dV_g.$$

Posons $v_i = u_i - \log \int_M V_i e^{u_i}\,dV_g$. La fonction v_i vérifie :

$$\Delta v_i = \lambda_i\big(V_i e^{v_i} - W_i\big) \quad \text{avec}$$
$$\lambda_i = \int_M V_i e^{u_i}\,dV_g = \int_M R\,dV_g \text{ et } W_i = \frac{R}{\lambda_i} \in \mathcal{C}^2(M).$$

La suite $\{v_i\}$ vérifie les hypothèses du Théorème 0.2 de Y.-Y. Li (voir [6]), celui-ci entraine l'existence d'une suite de points $\{x_i\}$ de M telle que :

$$\bar{v}_i + v_i(x_i) \geqslant c = c(a,b,A,M) \quad \text{avec } \bar{v}_i = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M v_i\,dV_g.$$

Soit $G(x,y)$ la fonction de Green du laplacien, pour tout $x \in M$:

$$u_i(x) = \bar{u}_i - \int_M G(x,y)R(y)\,dV_g(y) + \int_M G(x,y)V_i(y)e^{u_i(y)}\,dV_g.$$

On peut choisir G vérifiant : $G \geqslant 0$ et $\int_M G(x,y)\,dV_g = c$ pour tout $x \in M$. On en déduit que :

$$\inf_M u_i \geqslant \bar{u}_i - \int_M G(x,y)R(y)\,dV_g(y),$$

en intégrant cette dernière inégalité, on obtient :

$$\inf_M u_i \geqslant \bar{u}_i - \bar{c},\ \ \bar{c} = \bar{c}(M,R) > 0.$$

Ainsi :

$$\inf_M u_i + \sup_M u_i = \inf_M v_i + \sup_M v_i + 2\lambda \geqslant \bar{v}_i + v_i(x_i) \geqslant \tilde{c} = \tilde{c}(a,b,A,M).$$

Ceci contredit l'hypothèse (H).

Etude du cas $n \geqslant 3$. Soit M une variété riemannienne compacte de courbure scalaire R, partout positive.

Nous considérons une suite de fonctions positives (u_i) vérifiant sur M l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u_i + Ru_i = V_i {u_i}^{N-1}.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une sous-suite de (u_i) notée encore (u_i) telle que :

$$\lim_{i\to\infty}\Bigl(\sup_M u_i \inf_M u_i\Bigr) = 0. \tag{$*$}$$

La fonction R est partout positive, l'opérateur $L = -\Delta - (n-2)R/(4(n-1))$ est inversible. La fonction de Green associée à cet opérateur, notée G_L, vérifie les propriétés suivantes :

$$0 < m \leqslant G_L(x,y) \leqslant \frac{c}{d_g(x,y)^{n-2}}, \tag{1}$$

$$u_i(x) = \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M G_L(x,y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)\,\mathrm{d}V_g, \tag{2}$$

où m, c sont deux constantes ne dépendant que de (M,g) et R, g étant la métrique de la variété M. Nous avons :

$$\|u_i\|_N^N = \int_M {u_i}^N\,\mathrm{d}V_g \leqslant \max_M u_i \int_M {u_i}^{N-1}\,\mathrm{d}V_g.$$

Comme M est une variété compacte, la fonction u_i atteint son minimum en un point noté y_i. On peut écrire d'après (2) :

$$\min_M u_i = u_i(y_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M G_L(y_i,y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)\,\mathrm{d}V_g.$$

Puisque $V_i(y) \geqslant a$ pour tout $y \in M$ et grâce à (1) on a :

$$\int_M G_L(y_i,y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)\,\mathrm{d}V_g \geqslant am\int_M {u_i}^{N-1}(y)\,\mathrm{d}V_g.$$

Ainsi

$$\|u_i\|_{L^N}^N \leqslant \frac{4(n-1)}{a\,m\,(n-2)}\max_M u_i \times \min_M u_i.$$

On conclut, d'après $(*)$ que :

$$\lim_{i\to+\infty}\|u_i\|_N^N = 0. \tag{$**$}$$

Nous allons utiliser la technique d'itération de Moser pour montrer que $(**)$ nous permet d'avoir la convergence uniforme localement pour une sous-suite de (u_i).

Posons $\widetilde{R} = \frac{n-1}{4(n-2)}R$, $\tilde{a} = a\frac{n-2}{4(n-1)}$, $\tilde{b} = b\frac{n-2}{4(n-1)}$ et $\widetilde{V}_i = \frac{n-1}{4(n-2)}V_i$. La fonction u_i vérifie :

$$\Delta u_i + \widetilde{R}u_i = \widetilde{V}_i {u_i}^{N-1}.$$

Multiplions les deux membres par ${u_i}^{2k-1}$, où $k > 1$:

$$\int_M {u_i}^{2k-1}\big(\Delta u_i + \widetilde{R}u_i\big) = \int_M \widetilde{V}_i {u_i}^{N+2k-2}.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$(2k-1)\int_M {u_i}^{2k-2}|\nabla u_i|^2 + \int_M \widetilde{R}{u_i}^{2k} = \int_M \widetilde{V}_i {u_i}^{N+2k-2}.$$

D'autre part,

$$\int_M \big|\nabla\big(u_i^k\big)\big|^2 = k^2\int_M {u_i}^{2k-2}|\nabla u_i|^2.$$

Ainsi on obtient

$$\int_M {u_i}^{2k-2}|\nabla u_i|^2 = \frac{k^2}{2k-1}\int_M \big(-\widetilde{R}{u_i}^{2k} + \widetilde{V}_i {u_i}^{N+2k-2}\big).$$

Comme $\widetilde{R}$ est partout positive et $0 < \tilde{a} \leqslant \widetilde{V}_i(y) \leqslant \tilde{b}$ pour tout $y \in M$, on déduit que :

$$\int_M \big|\nabla\big(u_i^k\big)\big|^2 \leqslant \frac{k^2}{2k-1}\int_M \widetilde{V}_i {u_i}^N {u_i}^{2k-2} \leqslant \frac{\tilde{b}k^2}{2k-1}\int_M {u_i}^N {u_i}^{2k-2}. \tag{3}$$

Le dernier membre de (3) peut s'écrire :

$$\int_M {u_i}^N {u_i}^{2k-2} = \int_M {u_i}^{N-2}\,{u_i}^{2k}.$$

Comme $N > 2$, on peut appliquer l'inégalité de Hölder à ${u_i}^{N-2}$ et ${u_i}^{2k}$, avec l'exposant $p = N/(N-2)$:

$$\int_M {u_i}^{N-2}\,{u_i}^{2k} \leqslant \bigg(\int_M {u_i}^N\bigg)^{(1-2/N)} g\bigg(\int_M {u_i}^{kN}\bigg)^{2/N}.$$

Finalement, on a l'inégalité suivante :

$$\int_M \left|\nabla\left(u_i^k\right)\right|^2 \leqslant \frac{\tilde{b}k^2}{2k-1}\left(\int_M {u_i}^N\right)^{(1-2/N)}\left(\int_M {u_i}^{kN}\right)^{2/N};$$

ce qui revient à écrire :

$$\left\|\nabla\left(u_i^k\right)\right\|_2^2 \leqslant \frac{\tilde{b}k^2}{2k-1}\|u_i\|_N^{N-2}\|u_i^k\|_N^2.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Sobolev (voir Aubin [1]) appliquée à u_i^k :

$$\left\|u_i^k\right\|_N^2 \leqslant C\left\|\nabla\left(u_i^k\right)\right\|_2^2 + A\left\|u_i^k\right\|_2^2.$$

La constante C ne dépend que de n. On peut écrire alors :

$$\left\|u_i^k\right\|_N^2\left(1-\frac{\tilde{b}Ck^2}{2k-1}\|u_i\|_N^{N-2}\right) \leqslant A\left\|u_i^k\right\|_2^2.$$

Comme (u_i) vérifie $(**)$, la quantité $(1-\tilde{b}Ck^2/(2k-1)\|u_i\|_N^{N-2})$ est positive à partir d'un certain rang i_0 ne dépendant que de b, C, k. Ce qui nous permet d'écrire :

$$\left(1-\frac{\tilde{b}Ck^2}{2k-1}\|u_i\|_N^{N-2}\right) \geqslant \delta > 0 \quad \text{pour } i \geqslant i_0.$$

Finalement, on obtient l'inégalité suivante :

$$\left\|u_i^k\right\|_N^2 \leqslant \frac{A}{\delta}\|u_i^k\|_2^2.$$

En prenant $k = N/2$, on voit que $\|u_i\|_{L^{(N^2/2)}} \to 0$, avec $N^2/2 > N$. En recommençant avec $k = (N/2)^l$, $l = 2, \ldots,$ on voit de proche en proche, que, la suite (u_i) converge uniformément vers 0 dans tous les espaces L^p, $p > 1$.

En utilisant la représentation intégrale par la formule de Green et l'inégalité de Hölder de maniere adéquate, on prouve que u_i converge uniformément vers 0.

L'hypothèse $(*)$ entraine donc :

$$\sup_M u_i \to 0. \tag{$***$}$$

Maintenant, si on revient à l'écriture de u_i grâce à la fonction de Green, on obtient :

$$\sup_M u_i = u_i(x_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M G_L(x_i, y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)\,\mathrm{d}V_g(y).$$

De (1) on déduit :

$$0 < m \times \mathrm{Vol}(M) \leqslant \int_M G_L(x, y)\, \mathrm{d}V_g = m' = m'(M, g).$$

On peut écrire alors :

$$u_i(x_i) \leqslant \tilde{b}\left(\max_M u_i\right)^{N-1} \int_M G_L(x_i, y)\, \mathrm{d}V_g(y) = \tilde{b}\, m' \left(\max_M u_i\right)^{N-1}.$$

D'où,

$$\sup_M u_i \geqslant (\tilde{b}\, m')^{(2-n)/4};$$

ceci contredit $(***)$. □

Démonstration de la Proposition. Soit $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ deux suites telles que :

$$\Delta u_i + 2 = V_i \mathrm{e}^{u_i} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant V_i(x) \leqslant b.$$

D'après une inégalité de Aubin (voir [1]), il existe une constante positive C, telle que pour tout i :

$$\log \int_{\mathcal{S}_2} \mathrm{e}^{u_i} \leqslant \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i + \log C. \tag{1}$$

En multipliant l'équation vérifiée par u_i et en intégrant sur $\mathcal{S}_2$, on obtient :

$$\int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 + 2 \int_{\mathcal{S}_2} u_i = \int_{\mathcal{S}_2} V_i \mathrm{e}^{u_i} u_i.$$

Puisque $\int_{\mathcal{S}_2} V_i \mathrm{e}^{u_i} = 8\pi$, on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 + 2 \int_{\mathcal{S}_2} u_i \leqslant 8\pi \sup_{\mathcal{S}_2} u_i. \tag{2}$$

Soit $G(x, y)$ la fonction de Green du laplacien :

$$u_i(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i - \int_{\mathcal{S}_2} G(x, y) R(y)\, \mathrm{d}V_g(y) + \int_{\mathcal{S}_2} G(x, y) V_i(y) \mathrm{e}^{u_i(y)}\, \mathrm{d}V_g.$$

La fonction G peut être choisie positive et son intégrale en y est constante indépendamment de x, il existe une constante c indépendante de i telle que :

$$\inf_{\mathcal{S}_2} u_i \geqslant \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i - c. \tag{3}$$

En combinant (1), (2) et (3), on obtient :

$$\sup_{\mathcal{S}_2} u_i + \inf_{\mathcal{S}_2} u_i \geqslant 2\left[\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 - (c/2)\right] \geqslant 2\left[\log \int_{\mathcal{S}_2} \mathrm{e}^{u_i} - (c/2) - \log C\right].$$

Or, $0 \leqslant V_i(x) \leqslant b$ et $\int_{\mathcal{S}_2} V_i \mathrm{e}^{u_i} = 8\pi$ et on en déduit que : $\int_{\mathcal{S}_2} \mathrm{e}^{u_i} \geqslant 8\pi/b$.

Finalement il :

$$\sup_{\mathcal{S}_2} u_i + \inf_{\mathcal{S}_2} u_i \geqslant 2 \log \frac{8\pi}{bC} - c = -2(\log b - \bar{c}). \qquad \square$$

Appendice

Ceci concerne le 2ème cas du Théorème 1.

Sur certaines variétés riemanniennes compactes sans bord et dans le cas où $p < n/(n-2)$, on peut utiliser un autre résultat que celui de Caffarelli–Gidas–Spruck, pour obtenir notre estimation $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}$.

Enonçons un théorème dû à Brézis [2] qui nous permettera de prouver notre résultat dans certains cas :

Théorème. *Considérons une suite de fonctions* $\{V_i\}$, $\{v_i\}$ *définies sur un ouvert borné* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *et telles que* :

$$\Delta v_i = V_i {v_i}^p, \quad v_i \geqslant 0 \text{ et } 1 + \frac{2}{n} < p \leqslant \frac{n}{n-2},$$

$$0 \leqslant V_i(x) \leqslant A \quad \textit{pour tout } x \in \Omega \textit{ et tout } i \in \mathbb{N}.$$

On suppose que $\|v_i\|_{L_\beta} \leqslant B$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *avec* $\beta = n(p-1)/2$.

Alors, pour tout compact K *de* Ω, *il existe une constante positive* c *ne dépendant que de* p, A, B, K *telle que pour tout entier* i, *on ait* :

$$\sup_K v_i \leqslant c.$$

Par exemple, pour le cas de la sphère unité $\mathcal{S}_n$, si on considère l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u_i + Ru_i = V_i {u_i}^p \quad \text{avec } 1 + \frac{2}{n} \leqslant p \leqslant \frac{n}{n-2} \tag{$*$}$$

et $0 < a \leqslant V_i(P) \leqslant b$ pour tout $P \in \mathcal{S}_n$ $(R = n(n-1))$.

Alors :

$$\sup_{\mathcal{S}_n} u_i \leqslant c = c(a, b).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier les hypothèses du Théorème.

Considérons une suite de fonctions (u_i) solutions de $(*)$. Comme $\mathcal{S}_n$ est compacte u_i atteint son maximum en un point noté P_i.

Soit ϕ_i la projection stéréographique de pôle Q_i point diamétralement opposé à P_i. Si on note v_i la fonction $\pi_i u_i \circ \phi_i^{-1}$ avec $\pi_i = (2/(1+|y|^2))^{(n-2)/2}$, alors cette fonction vérifie :

$$\Delta_\delta v_i = \overline{V}_i {v_i}^p \quad \text{sur } \mathbb{R}^n,$$

où δ est la métrique euclidienne donnée par la formule suivante $g = {\pi_i}^{4/(n-2)}\delta$, g la métrique de la sphére, Δ_δ désigne le laplacien pour la métrique δ et $\overline{V}_i = V_i \circ \phi_i^{-1} {\pi_i}^{N-p}$.

Par définition de la projection stéréographique, $\phi_i(P_i) = 0$ et comme P_i réalise le maximum de u_i, le point 0 est encore un maximum pour v_i.

En effet, $v_i(y) = \pi_i(y) u_i \circ \phi_i^{-1}(y)$ et $\pi_i(y) \leqslant 2^{(n-2)/2}$ entrainent :

$$v_i(y) \leqslant 2^{(n-2)/2} u_i \circ \phi_i^{-1}(y) \leqslant 2^{(n-2)/2} u_i(P_i) = v_i(0).$$

Plaçons nous dans la boule unité et vérifions les hypothèses du théorème. Nous remarquons que seule la bornitude uniforme de $\int_{B_1(0)} v_i^\beta$ est nécessaire pour conclure.

Pour borner uniformément $\int_{B_1(0)} v_i^\beta \,\mathrm{d}y$, il suffit de borner uniformément $\int_{\mathcal{S}_n} u_i^\beta \,\mathrm{d}V_g$. Pour le voir, on utilise le fait que l'élément de volume sur la sphère est donné en fonction de l'élément euclidien par la formule, $\mathrm{d}V_g = (2/(1+|y|^2))^n \,\mathrm{d}y$.

Comme $\pi_i \geqslant 1$ pour $|y| \leqslant 1$ il vient :

$$\int_{\mathcal{S}_n} u_i^\beta \,\mathrm{d}V_g = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v_i^\beta}{\pi_i^\beta} \pi_i^{2n/(n-2)} \,\mathrm{d}y \geqslant \int_{B_1(0)} v_i^\beta \,\mathrm{d}y.$$

Montrons maintenant que la suite $\int_{\mathcal{S}_n} u_i^\beta \,\mathrm{d}V_g$ est uniformément bornée.

Intégrons l'équation $(*)$ vérifiée par u_i :

$$n(n-1)\int_{\mathcal{S}_n} u_i = \int_{\mathcal{S}_n} V_i {u_i}^p \geqslant a \int_{\mathcal{S}_n} u_i^p.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\mathcal{S}_n} u_i \leqslant |\mathcal{S}_n|^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathcal{S}_n} u_i^p\right)^{1/p},$$

d'où

$$\left(\int_{\mathcal{S}_n} u_i^p\right)^{(p-1)/p} \leqslant \frac{n(n-1)|\mathcal{S}_n|^{(p-1)/p}}{a},$$

ainsi

$$\|u_i\|_{L^p} \leqslant |\mathcal{S}_n|^{1/p}\left(\frac{n(n-1)}{a}\right)^{1/(p-1)}.$$

Comme

$$\beta = \frac{n}{2}(p-1) \quad \Rightarrow \quad \beta - p = \frac{np-n-2p}{2} = \frac{p(n-2)-n}{2} \leqslant 0,$$

on peut utiliser l'inégalité de Hölder :

$$\|u_i\|_{L^\beta} \leqslant |\mathcal{S}_n|^{(1/\beta)-(1/p)}\|u_i\|_{L^p} \leqslant |\mathcal{S}_n|^{1/\beta}\left(\frac{n(n-1)}{a}\right)^{1/(p-1)}.$$

Les hypothèses du théorème sont vérifiées. D'où, pour $r \in]0,1[$:

$$\sup_{B_r(0)} v_i = v_i(0) = u_i(P_i) = \max_{\mathcal{S}_n} u_i \leqslant c(a,b). \qquad \square$$

Remarque. On peut améliorer une hypothèse dans le théorème de Brézis lorsque $V \geqslant a > 0$:

D'après ce théorème, il suffit de supposer $\|v_i\|_{L_\beta} \leqslant C_2$ pour tout i avec $\beta = \frac{n}{2}(p-1)$ et $p > 1 + 2/n$. Ceci entraîne que $\alpha > 1$. Mais pour nous, il suffit de supposer $\|v_i\|_1 \leqslant C_2$ pour tout i.

En effet, d'après la formule de Stokes, pour toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^2(\overline{B}_r)$:

$$\int_{B_r} -v_i\Delta\eta + \eta V_i {v_i}^p = \int_{\partial B_r} v_i\partial_\nu\eta - \eta\partial_\nu v_i.$$

Prenons $\eta = |x|^2$. Comme

$$\int_{\partial B_r} \partial_\nu v_i = \int_{B_r} -\Delta v_i = -\int_{B_r} V_i {v_i}^p,$$

$$\int_{B_r} \left(r^2 - |x|^2\right) V_i {v_i}^p + 2r\int_{\partial B_r} v_i = 2n\int_{B_r} v_i,$$

on obtient, pour $\mu < r$:

$$\left(r^2 - \mu^2\right) \inf_{B_\mu} V_i \int_{B_\mu} {v_i}^p \leqslant 2n \|v_i\|_{L^1(B_r)}$$

et finalement,

$$\|v_i\|_{L^p(B_\mu)} \leqslant \left[\frac{2n}{a(r^2 - \mu^2)}\right]^{1/p} \left[\|v_i\|_{L^1(B_r)}\right]^{1/p}.$$

Références

[1] T. Aubin, Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry, Springer-Verlag, 1998.
[2] H. Brezis, Uniform estimates for solutions of $-\Delta u = V u^p$, in: Partial differential equations and related subjects, Trento, 1990, in: Pitman Res. Notes Math., Vol. 269, Longman, Harlow, 1992, pp. 38–52.
[3] H. Brezis, Y.-Y. Li, I. Shafrir, A sup + inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities, J. Funct. Anal. 115 (1993) 344–358.
[4] C.-C. Chen, C.-S. Lin, Blowing up with infinite energy of conformal metrics on $\mathcal{S}_n$, Comm. Partial Differential Equations 24 (5–6) (1999) 785–799.
[5] B. Gidas, J. Spruck, Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981) 525–598.
[6] Y.-Y. Li, Harnack type inequality: the method of moving planes, Comm. Math. Phys. 200 (1999) 421–444.
[7] Ch. Loewner, L. Nirenberg, Partial differential equations invariant under conformal projective transformations, Contrib. Anal. (1974) 245–272.
[8] W.M. Ni, On the elliptic equations $\Delta u + k(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, its generalizations and applications in geometry, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982) 493–529.
[9] E.-S. Noussair, On the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, Differential Equations 34 (1979) 482–495.

Littérature supplémentaire

W. Ding, J. Jost, J. Li, G. Wang, The differential equation $\Delta u = 8\pi - 8\pi h e^u$ on a compact Riemann surface, Asian J. Math. 1 (1997) 230–248.
Y.-Y. Li, Prescribing scalar curvature on $\mathcal{S}_n$ and related problems, C. R. Acad. Sci. Paris 317 (1993) 159–164; Part I, J. Differential Equations 120 (1995) 319–410; Part II, Existence and compactness, Comm. Pure Appl. Math. 49 (1996) 541–597.