JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 13, 417–434 (1973)

Normkonvergenz von Fourierreihen in rearrangement invarianten Banachräumen

F. FEHÉR*, D. GAŞPAR†, UND H. JOHNEN‡

Lehrstuhl für Math A, Technische Hochschule, Aachen, Deutschland

Communicated by J. L. Lions

Received March 27, 1973

This paper studies rearrangement invariant Banach spaces of 2π-periodic functions with respect to norm convergence of Fourier series. The main result is that norm convergence takes place if and only if the space is an interpolation space of $(\mathsf{L}^{p'}(T), \mathsf{L}^{p}(T))$, $1 < p < 2$, $1/p' + 1/p = 1$, and $\mathsf{L}^{p'}(T)$ is dense in it (compare Satz 2.8). Since norm convergence and continuity of the conjugation operator are closely connected (compare Satz 2.2), this is achieved by a careful examination of this operator similar to that of D. W. Boyd for the Hilbert transform on the whole real axis. Finally, there are applications to Orlicz and Lorentz spaces.

1. EINLEITUNG

Bezeichnet $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ den (eindimensionalen) Torus, $\mathsf{L}^1(T)$ den Raum der bezüglich des zu 2π normalisierten Haarmaßes auf T absolut integrierbaren Funktionen, dann ist für $f \in \mathsf{L}^1(T)$, $k \in \mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen), der $k$te Fourierkoeffizient von f definiert durch

$$f^\wedge(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

und die $n$te Teilsumme der Fourierreihe durch

$$\begin{aligned} S_n f(x) &\equiv \sum_{k=-n}^{n} f^\wedge(k)\, e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2}\, dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

* Gefördert durch das Landesamt für Forschung des Landes NRW unter Nr. 6040 68511 105100.

† Gefördert durch die Humboldt-Stiftung.

‡ Gefördert durch die DFG unter Jo 81/1.

In den Räumen $\mathsf{L}^p(T)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ist die starke Konvergenz der Fourierteilsummen S_n verbunden mit der Stetigkeit des Konjugiertenoperators

$$Hf(x) = \text{P.V.} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{dt}{2\operatorname{tg} t/2}, \tag{1.2}$$

denn bekanntlich sind in diesen Räumen folgende Aussagen äquivalent (vergl. Butzer–Nessel [6]): (1) $\lim_{n\to\infty} \| S_n f - f \|_p = 0$ für alle $f \in \mathsf{L}^p(T)$: (2) H ist ein stetiger Operator auf $\mathsf{L}^p(T)$. Da starke Konvergenz der Fourierteilsummen nur dann in den Räumen $\mathsf{L}^p(T)$ stattfindet, wenn $1 < p < \infty$ vorliegt, sind zu diesen beiden Aussagen ferner äquivalent; (3) $\mathsf{L}^p(T)$ ist reflexiv; (4) $\mathsf{L}^p(T)$ ist gleichmäßig konvex. Wir möchten nun solche Aussagen in allgemeineren Funktionenräumen auf T, speziell rearrangement invarianten Räumen untersuchen. In diesem Zusammenhang sei auf einen Satz von Ryan [14] hingewiesen, wonach ein Orlicz Raum L_Φ genau dann reflexiv ist, wenn H ein stetiger Operator auf L_Φ ist—ein Satz, der sich auch durch Konkretisierung der vorliegenden Ergebnisse gewinnen läßt (vergl. Section 3).

Zur Klärung der in Abschnitt 2 und 3 verwandten Begriffe seien zunächst einige Erläuterungen vorausgeschickt.

Es sei $\mathscr{P}$ die Menge der nichtnegativen, meßbaren Funktionen auf T und λ ein Funktional, $\lambda\colon \mathscr{P} \to [0, \infty]$, das eine Auswahl der folgenden Bedingungen erfülle:

(i) $\lambda(f) = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$, f.ü.,

$\lambda(f + g) \leqslant \lambda(f) + \lambda(g)$,

$\lambda(\alpha f) = \alpha\lambda(f) \quad (\alpha > 0)$;

(ii) ist $f(x) \leqslant g(x)$ f.ü., so gilt $\lambda(f) \leqslant \lambda(g)$;

(iii) $\|f\|_1 \leqslant \text{const.}\ \lambda(f)$;

(iv) $\lambda(1) < \infty$;

(v) λ besitzt die Fatoueigenschaft, d.h. ist $f_n \in \mathscr{P}$ eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ f.ü., dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(f_n) = \lambda(f).$$

Ist λ ein Funktional auf $\mathscr{P}$ mit (i), dann ist für jede auf T meßbare Funktion f die Norm $\|f\|_\lambda$ definiert durch $\|f\|_\lambda = \lambda(|f|)$ und

$$\mathsf{L}^\lambda(T) = \{f; f \text{ ist meßbar und } \|f\|_\lambda < \infty\}$$

ist ein linearer, normierter Raum. Erfüllt λ außerdem die Bedingung (ii), so heißt $\| \cdot \|_\lambda$ (oder λ) eine Funktionennorm, und $\mathsf{L}^\lambda(T)$ ist vollständig unter dieser Norm (vergl. Luxemburg [12]); erfüllt λ die Bedingungen (i)–(iv), dann gelten die Inklusionen

$$\mathsf{L}^\infty(T) \subset \mathsf{L}^\lambda(T) \subset \mathsf{L}^1(T),$$

wobei diese als stetige Einbettungen zu verstehen sind.

Der Funktionennorm λ ist die assoziierte Funktionennorm λ' zugeordnet durch

$$\lambda'(f) = \sup \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx;\, g \in \mathscr{P},\, \lambda(g) \leqslant 1 \right\},$$

und jede der Bedingungen (i)–(v) für λ impliziert die entsprechende Bedingung für λ' (vergl. Luxemburg [12]). $\mathsf{L}^{\lambda'}(T)$ heißt der zu $\mathsf{L}^\lambda(T)$ assoziierte Raum. Sind λ, μ zwei Funktionennormen und gilt $\mathsf{L}^\lambda(T) \subset \mathsf{L}^\mu(T)$, so folgt unmittelbar $\mathsf{L}^{\mu'}(T) \subset \mathsf{L}^{\lambda'}(T)$. Erfüllt λ die Bedingungen (i)–(v), so gilt $\mathsf{L}^\lambda(T) = \mathsf{L}^{\lambda''}(T)$ und $\| f \|_\lambda = \| f \|_{\lambda''}$ für alle $f \in \mathsf{L}^\lambda(T)$.

Ein Funktionenraum $\mathsf{L}^\lambda(T)$ heißt rearrangement invariant (r.i. Raum), falls λ die Bedingungen (i)–(v) erfüllt und für je zwei meßbare Funktionen f, g mit $f^* = g^*$ folgt $\| f \|_\lambda = \| g \|_\lambda$. Hierbei ist f^* die Rearrangementfunktion von f, definiert durch

$$f^*(t) = \inf\{y;\, D_f(y) \leqslant t\},$$

wobei die Verteilungsfunktion D_f von f durch

$$D_f(y) = \text{Maß}\{x \in T;\, |f(x)| > y\} \qquad (y \geqslant 0)$$

gegeben ist.

Als Beispiele für rearrangement invariante Funktionenräume werden hier nur die Orlicz- und Lorentz-Räume betrachtet.

Ist φ eine auf $[0, \infty)$ definierte monoton wachsende, von links stetige Funktion mit $\varphi(0) = 0$ und ist ψ die von links stetige Umkehrfunktion zu φ, dann sind durch die Youngschen Funktionen

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt, \qquad \Psi(x) = \int_0^x \psi(t)\, dt$$

die Funktionennormen

$$\lambda_{M\Phi}(f) = \inf \left\{ c > 0;\, M_\Phi\left(\frac{1}{c} f\right) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(t)/c)\, dt \leqslant 1 \right\}, \tag{1.3}$$

$$\lambda_{M\Psi}(f) = \inf \left\{ c > 0;\, M_\Psi\left(\frac{1}{c} f\right) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(f(t)/c)\, dt \leqslant 1 \right\} \tag{1.4}$$

gegeben. Die diesen assoziierten Funktionennormen $\lambda'_{M\Psi} = \lambda_\Phi$ und $\lambda'_{M\Phi} = \lambda_\Psi$ erzeugen die Orliczräume $\mathsf{L}^\Phi(T)$ und $\mathsf{L}^\Psi(T)$ mit ihren Assoziierten $\mathsf{L}^{M\Psi}(T)$ bzw. $\mathsf{L}^{M\Phi}(T)$. Für spätere Zwecke bemerken wir, daß die Räume $\mathsf{L}^{M\Phi}(T)$ und $\mathsf{L}^\Phi(T)$ mengentheoretisch gleich sind und für ihre Normen die Abschätzung gilt (vergl. Luxemburg [13, p. 49])

$$\|f\|_{M\Phi} \leqslant \|f\|_\Phi \leqslant 2\|f\|_{M\Phi}. \tag{1.5}$$

Gleiches gilt für die Räume $\mathsf{L}^{M\Psi}(T)$ und $\mathsf{L}^\Psi(T)$.

Ist φ eine auf $(0, 2\pi)$ definierte monoton fallende, nicht negative Funktion mit

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt < \infty \qquad (0 < x \leqslant 2\pi),$$

dann erzeugt das Funktional $\lambda_{\varphi,p}$, gegeben durch

$$\lambda_{\varphi,p}(f) = \left(\int_0^{2\pi} [f^*(t)]^p\,\varphi(t)\,dt\right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{1.6}$$

den Lorentzraum $\Lambda(\varphi, p) = \mathsf{L}^{\lambda_{\varphi,p}}(T)$. Im folgenden werden insbesondere die Räume $\Lambda(\alpha)$ von Bedeutung sein, die durch das Funktional

$$\lambda_\alpha(f) = \int_0^{2\pi} f^*(t)\,t^{\alpha-1}\,dt$$

erklärt sind. Für diese Räume gelten folgende (stetige) Inklusionen (vergl. Lorentz [11, p. 66])

$$\mathsf{L}^{(1/\alpha)+\epsilon}(T) \subset \Lambda(\alpha) \subset \mathsf{L}^{1/\alpha}(T) \qquad (\epsilon > 0). \tag{1.7}$$

Ein linear Operator A von $\Lambda(\alpha)$ in den Raum der meßbaren Funktionen heißt vom schwachen Typ $(1/\alpha, 1/\beta)$ wenn $(Af)^*(t) \leqslant ct^{-\beta}\,\|f\|_{\lambda_\alpha}$ für alle $f \in \Lambda(\alpha)$. Ist A linearer stetiger Operator von $\mathsf{L}^p(T)$ in $\mathsf{L}^q(T)$, so heißt A vom starken Typ (p, q). Schließlich nennen wir für ein Tripel $(\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z})$ von Banachräumen mit stetigen Einbettungen $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y} \subset \mathsf{Z}$ den Raum Y einen Interpolationsraum von (X, Z), falls die Restriktionen auf Y aller stetigen, linearen Operatoren von Z in Z, deren Restriktionen auf X stetige Operatoren von X in X sind, den Raum Y stetig in sich abbilden.

2. Konvergenzkriterien für Fourierreihen in $\mathsf{L}^\lambda(T)$

Um die Fourierreihe einer Funktion f berechnen zu können, muß $f \in \mathsf{L}^1(T)$ vorausgesetzt sein. Deshalb können im folgenden nur solche

Räume $L^\lambda(T)$ betrachtet werden, die mengentheoretisch Unterräume von $L^1(T)$ sind. Es gilt nun

LEMMA 2.1. *Sind* $\|\cdot\|_\lambda$, $\|\cdot\|_\mu$ *Funktionennormen* (*d.h. erfüllen* λ *und* μ *die Bedingungen* (i) *und* (ii)), *und ist* $L^\lambda(T)$ *eine Teilmenge von* $L^\mu(T)$, *dann gibt es eine Konstante* $c > 0$, *so daß für alle* $f \in L^\lambda(T)$

$$\|f\|_\mu \leqslant c\|f\|_\lambda .$$

Beweis. Jede in $L^\lambda(T)$ gegen ein f konvergierende Folge f_n konvergiert im Maß gegen f, und das gleiche gilt auch für jede gegen g in $L^\mu(T)$ konvergierende Folge g_n (vergl. Luxemburg [13, p. 5]). Die Inklusion $L^\lambda(T) \subsetneq L^\mu(T)$ ist demnach ein abgeschlossener linearer Operator und somit nach dem Satz von abgeschlossenen Graphen stetig.

Daher bedeutet es für unsere Zwecke keine zusätzliche Einschränkung für λ, wenn wir neben (i) und (ii) auch die Bedingung (iii) voraussetzen. Als Analogon des Ergebnisses für $L^p(T)$-Räume erhält man dann Satz 2.2.

SATZ 2.2. λ *erfülle die Bedingungen* (i)–(iv). *Die Folge der Fourierteilsummen* S_n, $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert genau dann auf* $L^\lambda(T)$ *stark gegen die Identität, wenn* H *ein stetiger Operator auf* $L^\lambda(T)$ *ist und die stetigen Funktionen dicht ein* $L^\lambda(T)$ *liegen.*

Beweis. Wenn die Fourierteilsummen $S_n f$ für jedes $f \in L^\lambda(T)$ gegen f konvergieren, ist natürlich sogar $C^\infty(T)$ dicht in $L^\lambda(T)$ und für alle $f \in C^\infty(T)$ gilt mit $D_m = (\sin(2m+1)t/2)/(2\sin t/2)$

$$\begin{aligned} H_{2m}f(x) &= \sum_{k=-2m}^{2m} i(-\operatorname{sign} k) f^\wedge(k)\, e^{ikx} \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\, D_m(x-t)\,dt \cos mx \\ &\quad + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, D_m(x-t)\,dt \sin mx \qquad (m \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

also wegen (1.1)

$$\|H_{2m}f\|_\lambda \leqslant 2\|S_m\|(\|f(\cdot)\sin(m\,\cdot)\|_\lambda + \|f(\cdot)\cos(m\,\cdot)\|_\lambda) \leqslant 4\|S_m\|\,\|f\|_\lambda .$$

Für $f \in C^\infty(T)$ konvergiert jedoch $H_{2m}f$ gleichmäßig gegen Hf, so daß

$$\|Hf\|_\lambda \leqslant \liminf_{m\to\infty} \|H_{2m}f\|_\lambda \leqslant 4 \liminf_{m\to\infty} \|S_m\|\,\|f\|_\lambda .$$

Aus der Dichtheit von $C^\infty(T)$ in $\mathsf{L}^\lambda(T)$ folgt nun

$$\| H \| \leqslant 4 \liminf_{m\to\infty} \| S_m \|$$

und somit die Stetigkeit von H auf $\mathsf{L}^\lambda(T)$. Umgekehrt schließt man aus $f \in \mathsf{L}^\lambda(T)$ und der Stetigkeit von H auf

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= H(f(\cdot)\cos(n\,\cdot))(x)\sin nx - H(f(\cdot)\sin(n\,\cdot))(x)\cos nx \\ &\quad + \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\Big)\cos nx + \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\Big)\sin nx, \end{aligned}$$

woraus mit den Bedingungen (i)–(iv) die Abschätzung

$$\| S_n \| \leqslant 2(\| H \| + c\lambda(1))$$

folgt; hier ist c die Konstante aus Bedingung (iii). Da $C(T)$ und deshalb nach (iv) auch $C^\infty(T)$ dicht in $\mathsf{L}^\lambda(T)$ ist, erhält man mit dem Satz von Banach–Steinhaus die Konvergenz von S_n gegen die Identität.

Als nächstes wollen wir uns speziell den rearrangement invarianten Banachräumen zuwenden. Satz 2.2 zeigt, daß die Stetigkeit des Konjugiertenoperators H auf diesen Räumen eine notwendige Voraussetzung für die starke Konvergenz der Fourierreihe ist. Die r.i. Banachräume mit stetigem Konjugiertenoperator werden charakterisiert durch Satz 2.3.

SATZ 2.3. *Der in* (1.2) *definierte Operator H ist genau dann auf dem r.i. Banachraum $\mathsf{L}^\lambda(T)$ stetig, wenn es eine Zahl p mit $1 < p < 2$ gibt, so daß $\mathsf{L}^\lambda(T)$ ein Interpolationsraum von* $(\mathsf{L}^{p'}(T), \mathsf{L}^p(T))$, $1/p + 1/p' = 1$, *ist.*

Man beachte, daß nach Lemma 2.1 Inklusionen für r.i. Banachräume gleichzeitig stetige Einbettungen sind. Die eine Richtung des Satzes ist nach Definition eines Interpolationsraumes trivial. Hinreichende Kriterien für die Eigenschaft von $\mathsf{L}^\lambda(T)$, Interpolationsraum zu sein, findet man z.B. in den Arbeiten von Boyd [3, 4], Butzer–Berens [5], Calderón [7], Lorentz [11], Lorentz–Shimogaki [12], und Zippin [15].

Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir einige Hilfssätze.

LEMMA 2.4. *Ist H stetig auf $\mathsf{L}^\lambda(T)$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß für $0 < \eta \leqslant \epsilon$ die durch*

$$L_\eta f(x) = \begin{cases} (2\operatorname{tg} x/2)^{\eta-1} \int_0^x (2\operatorname{tg} s/2)^{-\eta} f(s)\,ds & (0 < x < \pi), \\ 0 & (\pi \leqslant x \leqslant 2\pi), \end{cases} \tag{2.1}$$

bzw.

$$L_\eta' f(x) = \begin{cases} (2\mathrm{tg}\, x/2)^{-\eta} \int_x^\pi (2\mathrm{tg}\, s/2)^{\eta-1} f(s)\, ds & (0 < x < \pi), \\ 0 & (\pi \leqslant x \leqslant 2\pi), \end{cases} \tag{2.2}$$

definierten Operatoren L_η und L_η' stetig auf $\mathsf{L}^\lambda(T)$ sind.

Beweis. Die Transformationsgruppe ϕ_r, $-1 < r < 1$, , von T werde durch (vergl. Bennett [1 und 8])

$$\phi_r(s) = 2 \operatorname{arc\,tg}(1+r)/(1-r)\, \mathrm{tg}\, s/2 \qquad (s \in T) \tag{2.3}$$

definiert und die Operatoren Ψ_r, $-1 < r < 1$, auf $\mathsf{L}^\lambda(T)$ mittels

$$\Psi_r f(x) = (1 + \cos \phi_r(x)) f(\phi_r(x)). \tag{2.4}$$

Bezeichnet $\rho(r; \mathsf{L}^\lambda(T))$ die Norm von Ψ_r in $\mathsf{L}^\lambda(T)$, dann folgt aus der Stetigkeit von H die Existenz eines $\epsilon \in (0, 1)$ (vergl. [8]), so daß

$$\int_0^1 \frac{\rho(-r; \mathsf{L}^\lambda(T))}{(1-r)^\epsilon}\, dr < \infty \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{\rho(r; \mathsf{L}^\lambda(T))}{(1-r)^{1+\epsilon}}\, dr < \infty. \tag{I}$$

Andererseits liefern die Substitutionen $s = \phi_{-r}(x)$ bzw. $s = \phi_r(x)$ für $f \in \mathsf{L}^\lambda(T)$

$$L_\eta f(x) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{\Psi_{-r} f(x)}{(1-r)^\eta} \frac{dr}{(1+r)^{2-\eta}} & (0 < x < \pi), \\ 0 & (\pi \leqslant x \leqslant 2\pi), \end{cases}$$

bzw.

$$L_\eta' f(x) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{\Psi_r f(x)}{(1-r)^{1+\eta}} \frac{dr}{(1+r)^{1-\eta}} & (0 < x < \pi), \\ 0 & (\pi \leqslant x \leqslant 2\pi), \end{cases}$$

und damit die gewünschten Abschätzungen

$$\| L_\eta \| \leqslant \int_0^1 \frac{\rho(-r; \mathsf{L}^\lambda(T))}{(1-r)^\eta} \frac{dr}{(1+r)^{2-\eta}} < \infty,$$

$$\| L_\eta' \| \leqslant \int_0^1 \frac{\rho(r; \mathsf{L}^\lambda(T))}{(1-r)^{1+\eta}} \frac{dr}{(1+r)^{1-\eta}} < \infty.$$

LEMMA 2.5. *Sind die gemäß* (2.1), (2.2) *definierten Operatoren L_ϵ, L_η', $0 < \eta \leqslant \epsilon$, stetig auf dem r.i. Banachraum $\mathsf{L}^\lambda(T)$, so gilt*

$$\mathsf{L}^\lambda(T) \subset \mathsf{L}^{1/(1-\epsilon)}(T).$$

Beweis. Da nach (1.7) $\Lambda(1-\epsilon) \subset \mathsf{L}^{1/(1-\epsilon)}(T)$, genügt es,

$$\mathsf{L}^{\lambda}(T) \subset \Lambda(1-\epsilon)$$

zu zeigen. Wir beachten nun, daß für $0 < x \leqslant \pi/2$ und $f \in \mathsf{L}^{\lambda}(T)$

$$\int_0^{\pi/2} s^{-\epsilon} f^*(s)\,ds \leqslant c_1 \Big[\int_0^{\pi/2} (s^{-\epsilon} - (2\mathrm{tg}\, s/2)^{-\epsilon}) f^*(s)\,ds + \frac{1}{(2\mathrm{tg}\, x/2)^{1-\epsilon}} \int_0^x (2\mathrm{tg}\, s/2)^{-\epsilon} f^*(s)\,ds + \frac{1}{(2\mathrm{tg}\, x/2)^{\eta}} \int_x^{\pi/2} (2\mathrm{tg}\, s/2)^{\eta-1} f^*(s)\,ds\Big].$$

Dies ergibt für $0 < x \leqslant \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} s^{-\epsilon} f^*(s)\,ds \leqslant c_2(L_\epsilon f^*(x) + L_\eta' f^*(x) + \|f\|_1),$$

wobei c_2 eine von ϵ abhängige, positive Konstante ist. Andererseits gilt jedoch mit einer weiteren (von ϵ, η abhängigen) Konstante c_3

$$\int_0^{2\pi} s^{-\epsilon} f^*(s)\,ds \leqslant \int_0^{\pi/2} s^{-\epsilon} f^*(s)\,ds + c_3 \|f\|_1 < \infty.$$

Durch ein Dualitätsargument erhält man daraus Korollar 2.6.

KOROLLAR 2.6. *Wenn die Operatoren L_ϵ und L_η', $0 < \eta \leqslant \epsilon < 1/2$, stetig auf $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ sind, gilt $\mathsf{L}^{1/\eta}(T) \subset \mathsf{L}^{\lambda}(T)$.*

Beweis. Definiert man den assoziierten Operator A' eines Operators A auf $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ durch

$$\int_0^{2\pi} [Af](x)\, g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)[A'g](x)\,dx \qquad (f \in \mathsf{L}^{\lambda}(T), g \in \mathsf{L}^{\lambda'}(T)),$$

so sieht man sofort, daß A genau dann stetig auf $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ ist, wenn A' es auf $\mathsf{L}^{\lambda'}(T)$ ist. Der assoziierte Operator zu L_ϵ ist jedoch offensichtlich durch L_ϵ', der assoziierte zu L_η' durch L_η gegeben. Wie im vorausgehenden Lemma impliziert die Stetigkeit von L_ϵ' und L_η auf $\mathsf{L}^{\lambda'}(T)$ die Inklusion $\mathsf{L}^{\lambda'}(T) \subset \mathsf{L}^{1/(1-\eta)}(T)$. Berücksichtigen wir, daß

$$(\mathsf{L}^{1/(1-\eta)}(T))' = \mathsf{L}^{1/\eta}(T),$$

so ist Korollar 2.6 bewiesen.

LEMMA 2.7. *Sind L_ϵ, L_ϵ', und L_η' stetig auf $\mathsf{L}^\lambda(T)$, dann bildet jeder Operator A, der gleichzeitig vom schwachen Typ $(1/(1-\epsilon), 1/(1-\epsilon))$ und $(1/\eta, 1/\eta)$ ist $(0 < \eta < \epsilon)$, den r.i. Raum $\mathsf{L}^\lambda(T)$ stetig in sich ab.*

Beweis. Für Operatoren obigen Typs und beliebiges $f \in \Lambda(1-\epsilon)$ gilt (siehe Calderón [7])

$$(Af)^*(t) \leqslant c\left[t^{\epsilon-1}\int_0^t s^{-\epsilon}f^*(s)\,ds + t^{-\eta}\int_t^{2\pi} s^{\eta-1}f^*(s)\,ds\right].$$

Wenn $0 < t \leqslant \pi/2$, läßt sich dies abschätzen durch (vgl. Boyd [4] und Bennett [1])

$$(Af)^*(t) \leqslant c_1[L_\epsilon f^*(t) + L_\eta' f^*(t) + t^{-\eta}\|f\|_\lambda],$$

wenn $\pi/2 < t \leqslant 2\pi$, durch

$$(Af)^*(t) \leqslant c_2\left[\int_0^{2\pi} s^{-\epsilon}f^*(s)\,ds + \|f\|_\lambda\right].$$

Nun ist L_ϵ, L_η' auf $\mathsf{L}^\lambda(T)$ stetig. Somit ergibt sich der Beweis, falls gezeigt werden kann, daß die Funktion g, definiert durch $g(t) = t^{-\eta}$ für $0 < t \leqslant \pi/2$ und $g(t) = 0$ für $\pi/2 < t \leqslant 2\pi$, zu $\mathsf{L}^\lambda(T)$ gehört. Nach Korollar 2.6 gilt jedoch

$$\|g\|_\lambda \leqslant c_3\left(\int_0^{\pi/2} t^{-\eta/\epsilon}\,dt\right)^\epsilon < \infty.$$

Der restliche Beweis von Satz 2.3 ergibt sich nun wie folgt: Ist H stetig auf $\mathsf{L}^\lambda(T)$, dann gibt es nach Lemma 2.4 $0 < \eta < \epsilon$, so daß die Operatoren L_ϵ, L_ϵ', und L_η' dort stetig sind. Nach Lemma 2.7 bilden alle Operatoren, die gleichzeitig vom schwachen Typ $(1/(1-\epsilon), 1/(1-\epsilon))$ und $(1/\eta, 1/\eta)$ sind, also a fortiori alle Operatoren simultan vom starken Typ $(1/(1-\eta), 1/(1-\eta))$ und $(1/\eta, 1/\eta)$, den Raum $\mathsf{L}^\lambda(T)$ stetig in sich ab.

Für die Normkonvergenz von Fourierreihen erhalten wir nun Satz 2.8.

SATZ 2.8. *Es sei $\mathsf{L}^\lambda(T)$ ein r.i. Banachraum und $S_n f$ die* nte *Fourierteilsumme von $f \in \mathsf{L}^\lambda(T)$ gemäß* (1.1). *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

(a) *Für alle $f \in \mathsf{L}^\lambda(T)$ gilt* $\lim_{n\to\infty}\|S_n f - f\|_\lambda = 0$.

(b) *Es existiert eine Zahl p $(1 < p < 2)$, so daß für $1/p + 1/p' = 1$ $\mathsf{L}^\lambda(T)$ Interpolationsraum von $(\mathsf{L}^{p'}(T), \mathsf{L}^p(T))$ und $\mathsf{L}^{p'}(T)$ dicht in $\mathsf{L}^\lambda(T)$ ist.*

(c) *Der Konjugiertenoperator* H (vergl. (1.2)) *ist auf* $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ *stetig, und die Funktionennorm* $\|\cdot\|_{\lambda}$ *ist absolut stetig.*

Zur Erläuterung sei erinnert an die Definition.

DEFINITION. Die Funktionennorm $\|\cdot\|_{\lambda}$ heißst *absolut stetig*, wenn für jede Funktion $f \in \mathsf{L}^{\lambda}(T)$ und jede Folge E_n von Teilmengen von T mit Maß$(E_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, daß $\|f\chi_{E_n}\|_{\lambda} \to 0$.

Luxemburg [13, Theorem 7] entnehmen wir folgenden Satz 2.9.

SATZ 2.9. *Wenn der r.i. Raum* $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ *separabel ist, dann ist die Funktionennorm* $\|\cdot\|_{\lambda}$ *absolut stetig. Wenn* $\|\cdot\|_{\lambda}$ *absolut stetig ist, dann sind die einfachen Funktionen dicht in* $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$.

Der *Beweis* ergibt sich durch den Ringschluß (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a): Aus (a) folgt mit Satz 2.2 die Stetigkeit von H auf $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ und mit Satz 2.9 die absolute Stetigkeit von $\|\cdot\|_{\lambda}$. Aus (c) erhält man mit Satz 2.3 die Interpolationsaussage (b) wegen der Stetigkeit von H. Die absolute Stetigkeit von $\|\cdot\|_{\lambda}$ sichert, wiederum nach Satz 2.9, daß $\mathsf{L}^{p'}(T)$ dicht in $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ ist. Endlich schließt man aus (b) mit der Definition des Interpolationsraumes, daß H stetig auf $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ ist. Da ferner $\mathsf{L}^{p'}(T)$ dicht in $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ liegt, gilt das gleiche für $C(T)$, und (a) folgt mit Satz 2.2.

3. KONVERGENZ VON FOURIERREIHEN IN SPEZIELLEN RÄUMEN

Wir wollen nun die Resultate aus Abschnitt 2 und [8] benutzen, um Charakterisierungen von speziellen Funktionenräumen, in denen die Fourierreihen konvergieren, zu erhalten.

ORLICZ RÄUME. Eine Satz 3.5 entsprechende Aussage wurde von Ryan [14] bewiesen, der allerdings zwei Abschätzungen von Lozinski über die Norm des Dirichletskerns in diesen Räumen benutzt.

Im folgenden werden die die Orlicz Räume definierenden Funktionen Φ und Ψ in Zusammenhang mit einer einschränkenden Bedingung Δ_2 betrachtet.

DEFINITION 3.1. Die Youngsche Funktion Φ erfüllt die Bedingung Δ_2, wenn es ein t_0 und eine Konstante $K > 0$ gibt, so daß für alle $t \geqslant t_0$ gilt

$$\Phi(2t) \leqslant K\Phi(t).$$

Äquivalent hierzu ist (vergl. Krasnosel'skii–Ruticki [10]), daß es zu $s > 1$ eine Konstante $K(s) > 0$ und ein t_s gibt mit

$$\Phi(st) \leqslant K(s)\,\Phi(t) \qquad (t \geqslant t_s). \tag{3.1}$$

SATZ 3.2. *Die Youngsche Funktion Φ erfüllt genau dann die Bedingung Δ_2, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß*

$$\int_0^1 \frac{\rho(r;\, \mathsf{L}^{M\Phi})}{(1-r)^{1+\epsilon}}\, dr < \infty. \tag{3.2}$$

$\rho(r;\, \mathsf{L}^{M\Phi})$ bezeichnet dabei die Norm des in (2.4) *definierten Operators Ψ_r auf $\mathsf{L}^{M\Phi}$.*

Dem Beweis dieses Satzes seien zwei Lemmata vorausgeschickt (vergl. Boyd [4, p. 319]).

LEMMA 3.3. *Für die Funktion*

$$g(s) = \sup\{\Phi^{-1}(t)/\Phi^{-1}(st);\, t \geqslant 1\} \qquad (s > 1)$$

gilt die Abschätzung

$$\rho(r;\, \mathsf{L}^{M\Phi}) \leqslant 2g\left(\frac{2}{5\pi}\,\frac{1+r}{1-r}\right) \qquad \left(\frac{5\pi-2}{5\pi+2} < r < 1\right).$$

Beweis. Ist $f \in \mathsf{L}^1(T)$ und $-1 < r < 1$, so gilt für das Peetresche K-Funktional (vergl. [8])

$$K(t, \Psi_r f;\, \mathsf{L}^1(T), \mathsf{L}^\infty(T)) \leqslant 2\,\frac{1-r}{1+r}\, K\left(\frac{1+r}{1-r}\, t, f;\, \mathsf{L}^1(T), \mathsf{L}^\infty(T)\right), \tag{3.3}$$

woraus sich unmittelbar (vergl. Butzer–Berens [5, p. 184])

$$\int_0^t (\Psi_r f)^*(s)\, ds \leqslant \int_0^t 2f^*\left(\frac{1+r}{1-r}\, s\right) ds$$

ergibt, und daraus (siehe Lorentz–Shimogaki [12, p. 34])

$$\|\Psi_r f\|_{M\Phi} \leqslant 2\left\|f^*\left(\frac{1+r}{1-r}\,\cdot\right)\right\|_{M\Phi}.$$

Es genügt demnach zu zeigen, daß

$$M_\Phi\left[f^*\left(\frac{1+r}{1-r}\,\cdot\right)\Big/ g\left(\frac{2}{5\pi}\,\frac{1+r}{1-r}\right)\right] \leqslant 1$$

ist für alle r mit $(5\pi-2)/(5\pi+2) < r < 1$ und f mit $M_\Phi(f) \leqslant 1$.

Aus der Definition der Funktion g ergibt sich für $t \geqslant \Phi^{-1}(1)$, daß

$$\Phi\left(\frac{1}{g(s)}\, t\right) \leqslant s\Phi(t).$$

Ist nun $\alpha = \sup\{t; f^*(t) \geqslant \Phi^{-1}(1)\}$, so folgt (vergl. Boyd [4])

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \Phi\left[f^*\left(\frac{1+r}{1-r}\, t\right)\Big/ g\Big(\frac{2}{5\pi}\,\frac{1+r}{1-r}\Big)\right] dt \\
&\quad = \frac{1-r}{1+r}\int_0^{2\pi} \Phi\left[f^*(t)\Big/ g\Big(\frac{2}{5\pi}\,\frac{1+r}{1-r}\Big)\right] dt \\
&\quad \leqslant \frac{2}{5\pi}\int_0^{\alpha} \Phi(f^*(t))\, dt + \frac{1-r}{1+r}\int_\alpha^{2\pi} \Phi\left[\Phi^{-1}(1)\Big/ g\Big(\frac{2}{5\pi}\,\frac{1+r}{1-r}\Big)\right] dt \\
&\quad \leqslant \frac{2}{5\pi} + \frac{2}{5\pi}(2\pi - \alpha) \leqslant 1
\end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen.

Lemma 3.4. *Für alle $t \in (0, \pi)$ und $r \in (-1, 1)$ ist*

$$\rho(r; \mathsf{L}^{M\Phi}) \geqslant \left(1 + \cos\frac{t}{2}\right) \Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\Big/ \Phi^{-1}\left(\frac{1+|r|}{1-|r|}\,\frac{1}{t}\right).$$

Beweis. Wird die Funktion f_t, $0 < t < \pi$, definiert durch

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqslant t/2), \\ 0 & (t/2 < |x| \leqslant \pi), \end{cases}$$

so gilt

$$\|f_t\|_{M\Phi} = 1/\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\|\Psi_r f_t\|_{M\Phi} \geqslant \left(1 + \cos\frac{t}{2}\right)\Big/ \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2\Phi_r(t/2)}\right),$$

wobei ϕ_r die durch (2.3) gegebene Transformationsgruppe ist. Da weiterhin

$$\frac{1-|r|}{1+|r|}\, t \leqslant 2\phi_r\left(\frac{t}{2}\right) \qquad (0 < t \leqslant \pi),$$

erhalten wir

$$\rho(r; \mathsf{L}^{M\Phi}) \geqslant \frac{\|\Psi_r f_t\|_{M\Phi}}{\|f_t\|_{M\Phi}} \geqslant \left(1 + \cos\frac{t}{2}\right) \Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\Big/ \Phi^{-1}\left(\frac{1+|r|}{1-|r|}\,\frac{1}{t}\right).$$

Beweis von Satz 3.2. Besitzt Φ nicht die Eigenschaft Δ_2, dann gibt es wegen (3.1) zu jedem $K > 0$, $s > 1$, $\eta > 0$ ein $t \in (0, \eta)$, so daß

$$\Phi\left(s\frac{1}{t}\right) > K\Phi\left(\frac{1}{t}\right),$$

also

$$\frac{1}{t} \geqslant \Phi^{-1}\left(K\Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Setzt man nun $1/t = \Phi^{-1}(1/u)$,[1] so ergibt sich hieraus

$$s\Phi^{-1}(1/u) \geqslant \Phi^{-1}(K/u).$$

Die Wahl $K = (1 + r)/(1 - r)$, $s = 1 + \cos(1/2\Phi(1/\eta))$ führt, wenn η klein genug ist, zu

$$(1 + \cos u/2)\, \Phi^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\Big/\Phi^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\frac{1}{u}\right)$$
$$\geqslant \left(1 + \cos\frac{1}{2\Phi(1/\eta)}\right)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\Big/\Phi^{-1}\left(\frac{K}{u}\right) \geqslant 1,$$

d.h. nach Lemma 3.4 zu $\rho(r; \mathsf{L}^{M\Phi}) \geqslant 1$.

Besitzt andererseits Φ die Eigenschaft Δ_2, dann gibt es ein $K > 1$ und ein u_0, so daß für alle $u \geqslant u_0$ gilt $\Phi(3u) < K\Phi(u)$. Wählt man nun $t > \Phi(u_0)$ und r_1 so, daß $K < (2/5\pi)(1 + r)/(1 - r)$ für alle $r_1 \leqslant r < 1$, so ergibt sich

$$\Phi^{-1}(t)\Big/\Phi^{-1}\left(\frac{2}{5\pi}\frac{1+r}{1-r}t\right) < \frac{1}{3}.$$

Andererseits gilt für $1 \leqslant t \leqslant \Phi(u_0)$

$$\lim_{r\to 1}\Phi^{-1}(t)\Big/\Phi^{-1}\left(\frac{2}{5\pi}\frac{1+r}{1-r}t\right) = \lim_{r\to 1} u_0\Big/\Phi^{-1}\left(\frac{2}{5\pi}\frac{1+r}{1-r}\right) = 0.$$

Daher gibt es ein r_2, so daß die obige Ungleichung auch für alle $1 \leqslant t \leqslant \Phi(u_0)$ und $r_2 \leqslant r < 1$ erfüllt ist. Mit $r_0 = \max(r_1, r_2)$ erhält man für alle $r_0 \leqslant r < 1$ also

$$\rho(r; \mathsf{L}^{M\Phi}) \leqslant 2g\left(\frac{2}{5\pi}\frac{1+r}{1-r}\right) < \frac{2}{3}.$$

[1] Dies ist möglich, *da* $\lim_{t\to\infty}\Phi^{-1}(t) = \infty$.

Wegen Lemma 2.8′ in [8] gibt es deshalb ein $\epsilon > 0$, so daß das Integral in (3.2) endlich ist.

Die Φ zugeordnete Youngsche Funktion Ψ erfüllt die Bedingung Δ_2, wenn $\Psi(t) < \infty$ für $0 < t < \infty$ (d.h. Ψ keinen Sprung besitzt) und es eine Konstante K und ein $t_0 \in (0, \infty)$ gibt, so daß $\Psi(2t) \leqslant K\Psi(t)$ für alle $t \geqslant t_0$. Analog zu Satz 3.2 zeigt man Satz 3.2′.

Satz 3.2′. *Die Φ zugeordnete Youngsche Funktion Ψ erfüllt genau dann die Bedingung Δ_2, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß*

$$\int_0^1 \frac{\rho(r; \mathsf{L}^{M\Psi})}{(1-r)^{1+\epsilon}}\, dr < \infty. \tag{3.4}$$

Der Beweis verläuft genau wie derjenige von Satz 3.2; nur ist darauf zu achten, daß $\lim_{t\to\infty} \Psi^{-1}(t) = a < \infty$ gelten kann, falls Ψ die Bedingung Δ_2 nicht erfüllt. In diesem Falle folgt aus Lemma 3.4 jedoch

$$\rho(r; \mathsf{L}^{M\Psi}) \geqslant \lim_{t\to\infty} \left(1 + \cos\frac{1}{2t}\right) \Psi^{-1}(t) \Big/ \Psi^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\, t\right) = 2,$$

so daß das Integral in (3.4) ohnehin divergiert.

Zusammenfassend können wir nun das folgende Konvergenzkriterium für Fourierreihen in Orlicz Räumen aufstellen.

Satz 3.5. *Für die Orlicz Räume $\mathsf{L}^{M\Phi}(T)$, $\mathsf{L}^{\Phi}(T)$, $\mathsf{L}^{M\Psi}(T)$, $\mathsf{L}^{\Psi}(T)$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *Die Fourierteilsummenoperatoren S_n konvergieren stark gegen die Identität.*

(b) *Es gibt ein $p(1 < p < 2)$, so daß der Raum ein Interpolationsraum zu $(\mathsf{L}^{p'}(T), \mathsf{L}^{p}(T))$ ist, $1/p + 1/p' = 1$.*

(c) *Der Konjugiertenoperator H ist stetig.*

(d) *Der Raum ist reflexiv.*

Beweis. Der Schritt (a) $\Rightarrow$ (c) ist eine Folgerung aus Satz 2.2. Zum Nachweis von (c) $\Rightarrow$ (d) beachten wir, daß die Stetigkeit von H beispielsweise auf $\mathsf{L}^{M\Phi}(T)$ die Endlichkeit der Integrale (3.2) und

$$\int_0^1 \frac{\rho(-r; \mathsf{L}^{M\Phi})}{(1-r)^{\epsilon}}\, dr \tag{3.5}$$

für gewisse $\epsilon > 0$ impliziert (siehe [8]). Da jedoch $\rho(-r; \mathsf{L}^{M\Phi}) = [(1+r)/(1-r)]\, \rho(r; \mathsf{L}^{\Psi})$ und $\rho(r; \mathsf{L}^{\Psi}) \leqslant 2\rho(r; \mathsf{L}^{M\Psi}) \leqslant 4\rho(r; \mathsf{L}^{\Psi})$, folgt aus (3.5) die Endlichkeit von (3.4). Wegen Satz 3.2 und Satz 3.2′ erfüllen deshalb Φ und Ψ die Bedingung Δ_2. Dies ist jedoch (vergl. Luxemburg [13, p. 58]) genau dann der Fall, wenn die Räume L^{Φ}, $\mathsf{L}^{M\Phi}$ bzw. L^{Ψ}, $\mathsf{L}^{M\Psi}$ absolut stetige Norm besitzen. Damit folgt (d) auf Grund der Tatsache, daß ein Banachscher Funktionenraum $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ genau dann reflexiv ist, wenn $\mathsf{L}^{\lambda}(T)$ und $\mathsf{L}^{\lambda'}(T)$ absolut stetige Normen haben. Der Schritt (d) $\Rightarrow$ (b) ergibt sich aus diesen Überlegungen zusammen mit Satz 3.2, Satz 3.2′, und Satz 2.3. Aus (b) erhält man (c) durch Interpolation, während (a) aus der Kombination von (c) und (d) folgt.

Lorentz Räume. Aus der Definition der Lorentz Räume

$$\Lambda(\varphi, p) \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

folgt unmittelbar, daß sie eine absolut stetige Norm besitzen. Deshalb sind nach Satz 2.8 und Satz 2.3 äquivalent:

(a) Für alle $f \in \Lambda(\varphi, p)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \| S_n f - f \| = 0$.

(b) Es gibt eine Zahl q $(1 < q < 2)$, so daß mit $1/q + 1/q' = 1$ $\Lambda(\varphi, p)$ Interpolationsraum zu $(\mathsf{L}^{q'}(T), \mathsf{L}^{q}(T))$ ist.

(c) Der Konjugiertenoperator H ist stetig auf $\Lambda(\varphi, p)$.

Darüber hinaus erhalten wir in speziellen Lorentz Räumen eine der Bedingung (d) in Satz 3.5 entsprechende Aussage über die Struktur des Funktionenraumes.

Satz 3.6. *Verschwindet die Funktion φ nirgendwo im Intervall $(0, 2\pi)$, dann ist für $1 < p < \infty$ jede der vorstehenden Aussagen äquivalent zu*

(d) *$\Lambda(\varphi, p)$ ist gleichmäßig konvex.*

Wir beweisen diesen Satz, indem wir ähnlich zu Boyd [2] die Äquivalenz der Aussagen (c) und (d) zeigen. Zunächst formulieren wir eine Variation eines Satzes von Halperin [9], deren Beweis analog zu diesem verläuft.

Lemma 2.7. *Der Lorentz Raum $\Lambda(\varphi, p)$, mit $1 < p < \infty$ und $\varphi(t) \neq 0$, für $t \in (0, 2\pi)$, ist genau dann nicht gleichmäßig konvex, wenn es zu jedem $0 < r < 1$ eine Nullfolge $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $(0, 2\pi)$ gibt, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\frac{1-r}{1+r} t_n} \varphi(t)\, dt \Big/ \int_0^{t_n} \varphi(t)\, dt \right) = 1.$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses zeigen wir

LEMMA 3.8. *Verschwindet φ nirgends in $(0, 2\pi)$, dann ist der Raum $\Lambda(\varphi, p)$, $1 < p < \infty$, genau dann gleichmäßig konvex, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß*

$$\int_0^1 \frac{\rho(r;\Lambda(\varphi, p))}{(1-r)^{1+\epsilon}}\, dr < \infty. \tag{3.6}$$

Beweis. Für die im Beweis von Lemma 3.4 definierten Funktionen f_t gilt offensichtlich

$$\|f_t\|_{\varphi,p} = \left(\int_0^t \varphi(u)\, du\right)^{1/p},$$

$$\|\Psi_r f_t\|_{\varphi,p} = \left(\int_0^{2\Phi_{-r}(t/2)} (1+\cos\phi_r(u/2))^p\, \varphi(u)\, du\right)^{1/p}.$$

Mit der gleichen Argumentation wie dort erhalten wir demnach

$$\rho(r;\Lambda(\varphi,p)) \geqslant \left(1+\cos\frac{t}{2}\right)\left(\int_0^{\frac{1-r}{1+r}t} \varphi(u)\, du \Big/ \int_0^t \varphi(u)\, du\right)^{1/p}.$$

Ist nun $\Lambda(\varphi, p)$ nicht gleichmäßig konvex, so folgt mit Lemma 3.7, daß $\rho(r;\Lambda(\varphi,p)) \geqslant 2$, und das Integral in (3.6) divergiert für jedes $\epsilon > 0$.

Andererseits erhalten wir für jedes $f \in \Lambda(\varphi, p)$ wie im Beweis zu Lemma 3.3.

$$\|\Psi_r f\|_{\varphi,p} \leqslant 2\left\|f^*\left(\frac{1+r}{1-r}\,\cdot\right)\right\|_{\varphi,p}. \tag{3.7}$$

Nun gilt jedoch für $0 < r < 1$

$$\sup_{\|f\|_{\varphi,p}\leqslant 1} \left\|f^*\left(\frac{1+r}{1-r}\,\cdot\right)\right\|_{\varphi,p} = N(r)^{1/p},$$

wobei abkürzend

$$N(r) = \sup_{0<t\leqslant 2\pi} \left(\int_0^{\frac{1-r}{1+r}t} \varphi(u)\, du \Big/ \int_0^t \varphi(u)\, du\right)$$

gesetzt sei. Ist $\Lambda(\varphi,p)$ gleichmäßig konvex, so folgt mit Lemma 3.7, daß $N(r) < 1$ für jedes $0 < r < 1$. Wir wählen jetzt ein $0 < r < 1$ und konstruieren induktiv die Folge $r_0 = r$, $r_{k+1} = 2r_k/(1 + r_k^2)$, $k = 0, 1, \ldots$. Wie man unmittelbar sieht, gilt $N(r_{k+1}) \leqslant (N(r_k))^2 \leqslant (N(r))^{2^k}$. Es gibt deshalb eine ganze Zahl k, so daß $2(N(r_{k+1}))^{1/p} < 1$. Damit folgt nach (3.7) aber auch, daß $\rho(r_{k+1};\Lambda(\varphi,p)) < 1$ und daß das Integral (3.6) für ein gewisses $\epsilon > 0$ endlich ist (vergl. Boyd [2] und [8]).

Beweis zu Satz 3.6. Da für $0 < r < 1$

$$\left\| f^*\left(\frac{1-r}{1+r}\cdot\right)\right\|_{\varphi,p} = \left(\int_0^{2\pi} (f^*(t))^p \, \varphi\left(\frac{1+r}{1-r}\, t\right) dt\right)^{1/p} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \|f\|_{\varphi,p} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/p},$$

folgt aus (3.7)

$$\rho(-r; \Lambda(\varphi, p)) \leqslant 2\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/p}$$

und damit in Falle $1 < p < \infty$ für alle $\epsilon > 0$ mit $\epsilon + (1/p) < 1$

$$\int_0^1 \frac{\rho(-r; \Lambda(\varphi, p))}{(1-r)^\epsilon}\, dr < \infty. \tag{3.8}$$

Deshalb ist (3.6) notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von H, und Satz 3.6 ist eine Folgerung aus Lemma 3.8.

Acknowledgments

Die Verfasser danken Herrn Professor P. L. Butzer für seine Unterstützung bei der Abfassung dieser Note und Herrn Professor Ch. Fefferman für die Diskussionen zu Satz 2.2.

Literaturverzeichnis

1. C. Bennet, On the harmonic analysis of rearrangement invariant Banach function spaces, Thesis, Univ. of Newcastle upon Tyne, 1971 (unveröffentlicht).
2. D. W. Boyd, The Hilbert transform on rearrangement invariant spaces, *Canad. J. Math.* **19** (1967), 599–616.
3. D. W. Boyd, Indices of function spaces and their relationship to interpolation, *Canad. J. Math.* 21 (1969), 1245–1254.
4. D. W. Boyd, Indices for Orlicz spaces, *Pacific J. Math.* **38** (1971), 315–323.
5. P. L. Butzer and H. Berens, "Semi-Groups of Operators and Approximation. Grundlehren 145, Springer, Berlin, 1967.
6. P. L. Butzer und R. J. Nessel, "Fourier Analysis and Approximation," Vol. 1, Birkhäuser Verlag, Basel and Academic Press, New York, 1971.
7. A. P. Calderón, Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz, *Studia Math.* **26** (1966), 273–299.
8. F. Fehér, D. Gaşpar, und H. Johnen, Der Konjugiertenoperator auf rearrangement invarianten Funktionenräumen, im Druck.
9. I. Halperin, Uniform convexity in function spaces. *Duke Math. J.* **21** (1954), 205–208.

10. M. A. Krasnosel'skii und Ya. B. Ruticki, "Convex Functions and Orlicz Spaces," P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.
11. G. G. Lorentz, "Bernstein Polynomials," University of Toronto Press, Toronto, Ontario, Canada, 1953.
12. G. G. Lorentz und T. Shimogaki, Interpolation theorems for operators in function spaces, *J. Functional Analysis* **2** (1968), 31–51.
13. W. A. Luxemburg, "Banach Function Spaces," Van Gorcum & CO., Assen, 1955.
14. R. Ryan, Conjugate functions in Orlicz spaces, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 1371–1377.
15. M. Zippin, Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant function spaces, *J. Functional Analysis* **7** (1971), 267–284.