Stochastic Processes and their Applications 10 (1980) 115-144

UN SURVOL DE LA THEORIE DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE*

C. DELLACHERIE
Départment de Mathématique, Université de Rouen, 76130 Mont-Saint-Aignan, France

Received 17 January 1980

The objective of this paper is to present the principal results of a large part of stochastic calculus in a manner that should be comprehensible to readers having only the general notions of stochastic processes. Not all the theorems are proved in detail, but all the fundamental theorems are explained with clarity and precision, and with special attention to the motivations behind them.

Given two real valued stochastic processes X and Y, the basic problem is to give a meaning to $Z = \int Y \, dX$ in such a way that the integral sign is not misused. If X is a process whose paths are of bounded variation, then Z should coincide with the ordinary Lebesgue–Stieltjes integral taken path by path. If Y is a left continuous step function, then Z should coincide with the obvious choice: if Y is constant on $]t, u]$, then $Z_u - Z_t$ is that constant times $X_u - X_t$. And finally, the Lebesgue dominated convergence theorem should hold: if the processes Y^n converge to Y and all the Y^n are dominated by a process Y' for which $\int Y' \, dX$ is well defined, then $Z_n = \int Y^n \, dX$ should converge to $Z = \int Y \, dX$ in some sense.

Starting with these requirements, it is shown that, if $\int Y \, dX$ is defined for all predictable Y, then X must be a semimartingale. Conversely, the integral is well defined for all predictable Y and all semimartingales X.

With the integrals defined, a number of their important properties are discussed. In particular, the integral Z is a semimartingale, and a change of variable formula (Ito's formula) holds for $f(Z)$. Finally, stochastic integral equations are introduced, and a general theorem is given on the existence and uniqueness of solutions.

A bibliography with commentaries supplements the text for the benefit of those who would like to go deeper into the subject.

Stochastic integrals	semimartingales
stochastic differential equations	Ito's formula

1. Introduction

Disposant ici d'un nombre confortable de pages, je voudrais développer la conférence de même titre écrite pour le Congrès International d'Helsinki, conférence qui avait pour but de présenter, de manière compréhensible pour un lecteur n'ayant que quelques notions de théorie des processus (stochastiques), les principaux résultats d'une grande part du calcul différentiel stochastique (plus précisément, de la part où la probabilité de base ne joue que par la classe des ensembles négligeables qu'elle définit). Même en laissant ainsi de côté des parts importantes de la théorie

* Appeared also in: *Measure Theory*, edited by D. Koelzow, Lecture Notes in Mathematics No. 794 (Springer, Berlin, 1980) 365–395.

(par exemple, tout ce qui touche à la notion, pourtant fondamentale, de martingale locale), il ne me serait pas possible de donner in extenso les démonstrations de tous les résultats cités (tout le volume me serait nécessaire!); j'ai cependant tâché d'expliquer, avec clarté et précision, le 'pourquoi' des théorèmes fondamentaux, tout en évitant d'introduire trop de concepts nouveaux pour la plupart des lecteurs. Le lecteur désireux d'approfondir le sujet pourra se reporter aux ouvrages cités dans la bibliographie.

2. Préliminaires

On se donne au départ un *espace filtré* $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ *vérifiant les conditions habituelles*: la *filtration* $\mathbb{F} = (F_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille croissante de tribus sur Ω (intuitivement, $\mathbb{R}_+$ est l'échelle des temps et F_t la tribu des événements connus à l'instant t), P est une mesure de probabilité sur $F_\infty = \bigvee_t F_t$; les conditions habituelles expriment que la filtration est complète (i.e. F_∞ est complète et F_0 contient tous les ensembles négligeables) et continue à droite (i.e. on a $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$ pour tout t; autrement dit, F_t contient aussi le futur infinitésimal après t). En fait, les conditions habituelles ne sont pas réellement indispensables pour ce que nous allons faire; mais, d'une part, elles sont fréquemment vérifiées (c'est le cas pour les filtrations associées aux bons processus de Markov), et, d'autre part, elles simplifient considérablement et la technique et la présentation des résultats.

Un *processus* X (à valeurs réelles; nous ne considérerons que ce cas) est intuitivement une fonction du temps t dépendant de l'aléa ω, et donc, finalement, une application $(t, \omega) \to X(t, \omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$; on note le plus souvent $X_t(\omega)$ la valeur en (t, ω), d'où la notation courante $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On appelle *trajectoire* associée à $\omega \in \Omega$ la fonction $t \to X_t(\omega)$. On dira que le processus X est *càdlàg* (resp *càglàd*) si toutes ses trajectoires sont des fonctions Continues A Droite et pourvues d'une Limite A Gauche (dans $\mathbb{R}$) pour $t \geq 0$ (resp. Continues A Gauche pour $t > 0$ et pourvues d'une Limite A Droite pour $t \geq 0$). Deux processus X et Y sont dits *indistinguables* si $\{\omega \in \Omega : \exists t\, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ est un ensemble négligeable; dans toute la suite, nous travaillons 'à l'indistinguabilité près' (c'est en particulier ainsi qu'il faudra entendre les résultats d'unicité). Il est facile de voir que X et Y, tous deux càdlàg (ou càglàd), sont indistinguables dès que Y est une *modification* de X (i.e. on a $Y_t = X_t$ p.s. pour chaque t); en particulier, un processus admet au plus une modification càdlàg. Un processus V sera dit *croissant* (resp *à variation finie*) si ses trajectoires sont croissantes (resp ont une variation finie sur tout intervalle fini) *et si, de plus,* V est càdlàg (ceci pour pouvoir écrire

$$V_t(\omega) = V_0(\omega) + \int_0^t \mathrm{d}V_s(\omega) = V_0(\omega) + \int_{]0,t]} \mathrm{d}V_s(\omega),$$

où l'intégrale est, trajectoire par trajectoire, une intégrale de Stieltjes).

Etant donnée notre filtration $\mathbb{F}$, il est naturel de se restreindre à étudier les processus X tels que X_t soit une v.a. $\boldsymbol{F}_t$-mesurable pour tout t et que X lui-même soit mesurable lorsque $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne $\boldsymbol{B}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ de la tribu produit $\boldsymbol{B}(\mathbb{R}_+) \times \boldsymbol{F}_\infty$; nous dirons, pour abréger, qu'un tel X est un $\mathbb{F}$-*processus* (la terminologie officielle étant 'X est mesurable et adapté à la filtration'). Il n'est pas difficile de voir qu'un processus càdlàg ou càglàd $X = (X_t)$ est un $\mathbb{F}$-processus dès que X_t est $\boldsymbol{F}_t$-mesurable pour chaque t.

Enfin, un processus M est une $\mathbb{F}$-*martingale* (resp $\mathbb{F}$-*surmartingale*, $\mathbb{F}$-*sous-martingale*; on omet '$\mathbb{F}$' s'il n'y a pas ambiguité) si

(a) M_t est une v.a. $\boldsymbol{F}_t$-mesurable et intégrable pour chaque t;

(b) on a, pour tout couple (s, t) tel que $s \leqslant t$,

$$M_s = E[M_t | \boldsymbol{F}_s] \text{ p.s.} \quad (\text{resp} \geqslant, \leqslant),$$

ce qui équivaut à dire, étant donné (a), que l'on a

$$\forall A \in \boldsymbol{F}_s \int_A M_s \, dP = \int_A M_t \, dP \quad (\text{resp} \geqslant, \leqslant).$$

Notez que M est une (sur)martingale ssi $-M$ est une (sous)martingale. Il est classique que, sous les conditions habituelles, toute martingale admet une (unique) modification càdlàg ainsi que, plus généralement, toute surmartingale ou sous-martingale X telle que la fonction $t \to E[X_t]$ soit continue à droite. *Toutes les (sous, sur)martingales considérées dans la suite seront càdlàg, et nous omettrons de le mentionner.* L'exemple fondamental de martingale continue (i.e. à trajectoires continues) est le *mouvement brownien* unidimensionnel issu de 0; d'après un théorème célèbre de P. Lévy, il est caractérisé en loi par le fait que c'est une martingale continue B telle que $B_0 = 0$ et que le processus $(B_t^2 - t)$ soit une martingale. Bien entendu, il n'est pas vrai que toute filtration $\mathbb{F}$ 'contient' un mouvement brownien: lorsque $\mathbb{F}$ est *déterministe* (i.e. $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}_\infty$), toutes les martingales sont à trajectoires constantes et donc triviales. Par ailleurs, 'le' mouvement brownien n'est unique qu'en loi: une filtration $\mathbb{F}$ peut être assez riche pour 'contenir' différents mouvements browniens indépendants. Rappelons enfin que (presque) toutes les trajectoires d'un mouvement brownien ont une variation infinie sur tout intervalle non dégénéré.

3. Introduction

Le problème de la définition de l'intégrale stochastique est, en gros, le suivant: savoir, pour une large classe $\mathbb{X}$ de $\mathbb{F}$-processus càdlàg[1] 'intégrants' X et pour une

[1] Nous reviendrons plus loin sur cette restriction assez naturelle.

large classe $\mathbb{Y}$ de $\mathbb{F}$-processus 'intégrés' Y, définir un $\mathbb{F}$-processus càdlàg Z par

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Y_s \, \mathrm{d}X_s$$

où Z_0 est une v.a. $\boldsymbol{F}_0$-mesurable et où l'opération symbolisée par $\int$ soit 'digne' d'être appelée une intégrale. Pour fixer les idées, disons que cette opération doit non seulement être linéaire en Y mais aussi quelque peu continue et que, par ailleurs, même si on ne peut exiger de pouvoir en général intégrer trajectoire par trajectoire (penser au brownien!), elle doit ressembler quelque peu à une intégrale trajectorielle – par exemple vérifier $Z_v - Z_u = X_v - X_u$ p.s. sur $A \in \boldsymbol{F}_\infty$ si Y vaut 1 sur le rectangle $]u, v] \times A$.

Nous verrons d'abord que ce problème a une solution en quelque sorte optimale, la classe $\mathbb{X}$ contenant en particulier tous les $\mathbb{F}$-processus à variation finie et toutes les (sur, sous)martingales, la classe $\mathbb{Y}$ contenant en particulier tous les $\mathbb{F}$-processus càglàd (mais pas tous les $\mathbb{F}$-processus càdlàg!). De plus, il se trouvera que $Z = \int Y \, \mathrm{d}X$, pour $X \in \mathbb{X}$ et $Y \in \mathbb{Y}$, sera lui-même un élément de $\mathbb{X}$, ce qui nous permettra de donner un sens à l'écriture infinitésimale $\mathrm{d}Z = Y \, \mathrm{d}X$. On peut alors développer tout un calcul différentiel stochastique (contenant le calcul différentiel classique, mais bien plus riche – le cas classique revenant à prendre Ω réduit à un point et à considérer $X_t = t$) dans lequel on sait faire des changements de variables (formule d'Ito) et intégrer des équations différentielles.

Encore quelques mots avant de se mettre au travail. D'abord, la démarche que nous adoptons ici pour présenter l'intégrale stochastique n'est pas celle qui a été adoptée, si je puis dire, par l'Histoire: la classe $\mathbb{X}$ des processus intégrants – appelés *semimartingales* – a été découverte petit à petit en partant du seul mouvement brownien et en passant par les martingales de carré intégrable alors que nous allons prendre pour définition une caractérisation assez nouvelle de cette classe (je donnerai quelques détails d'ordre historique à l'occasion de la bibliographie). Par ailleurs, comme on peut trouver maintenant dans de nombreux ouvrages le calcul intégral stochastique exposé dans toute sa généralité (intégrale du type 'Lebesgue–Stieltjes', où $\mathbb{Y}$ contient les $\mathbb{F}$-processus càglàd et est stable par convergence simple dominée), j'ai eu la coquetterie ici de développer une petite partie de ce calcul (intégrale du type, disons, 'Riemann–Dieudonné', où $\mathbb{Y}$, stable par convergence uniforme, est réduit en fait à la classe des $\mathbb{F}$-processus càglàd), suffisante pour traiter le calcul différentiel.

4. Semimartingales

Si x est une fonction càdlàg de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et y une fonction càglàd de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, en *escalier* (i.e. y est une combinaison linéaire – finie – d'indicatrices d'intervalles), il est naturel de définir, pour $t \in \mathbb{R}_+$, *l'intégrale élémentaire*

$$\int 1_{]0,t]}(s) y(s)\,\mathrm{d}x(s) = \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}x(s)$$

en posant $\int 1_{]u,v]}(s)\,\mathrm{d}x(s) = x(v) - x(u)$ et en étendant par linéarité, le prolongement étant bien défini (exercice!). Maintenant, si X est un $\mathbb{F}$-processus càdlàg et Y un $\mathbb{F}$-processus càglàd (à trajectoires) en escalier, il est clair que l'on définit un nouveau $\mathbb{F}$-processus càdlàg Z, nul en 0, en posant

$$Z_t = \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s \quad \text{pour tout } t,$$

l'intégrale étant l'intégrale élémentaire prise trajectoire par trajectoire. Mais une intégrale digne de ce nom doit vérifier quelque continuité par rapport à la chose intégrée, et cela va nous mener à notre définition des semimartingales.

Nous dirons qu'un $\mathbb{F}$-processus càglàd, en escalier, est en fait un *processus prévisible élémentaire* (terminologie officielle, justifiée plus loin) s'il est une combinaison linéaire d'indicatrices de rectangles de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ de la forme $]u, +\infty[\, \times A$ avec $A \in \boldsymbol{F}_u$ (noter qu'une telle indicatrice est un $\mathbb{F}$-processus càglàd), et nous désignerons par $\boldsymbol{E}$ l'ensemble de ces processus prévisibles élémentaires. Regardant, pour t et X fixés, l'intégrale élémentaire comme opérateur linéaire de $\boldsymbol{E}$ dans L^0, espace des (classes de) v.a. finies sur Ω, nous allons demander que, pour chaque t, cet opérateur soit continu aussi peu que possible, compte tenu de ce que l'on veut finalement obtenir comme intégrale stochastique (voir les commentaires suivant la définition).

Définition 1. Un $\mathbb{F}$-processus càdlàg X est appelé une *semimartingale* (une $\mathbb{F}$-semimartingale s'il y a ambiguité sur la filtration) si, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale élémentaire $Y \to \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s$ définit un opérateur linéaire continu de $\boldsymbol{E}$, muni de la topologie de la convergence uniforme (en (t, ω)), dans L^0, muni de la topologie de la convergence en probabilité.

Remarque. Si on suppose seulement que X est un processus continu à droite en probabilité tel que X_t soit $\boldsymbol{F}_t$-mesurable pour chaque t, l'intégrale élémentaire étant définie comme précédement, on peut montrer que X admet une modification qui est càdlàg et donc une semimartingale si l'intégrale élémentaire est continue pour les topologies précitées.

Il est clair que la topologie choisie sur $\boldsymbol{E}$ est la topologie 'raisonnable' la plus forte possible si on veut avoir une bonne intégrale; par ailleurs, la topologie choisie sur L^0 est la topologie 'raisonnable' la plus faible possible qui ait quelque rapport avec la convergence simple. En fait, si Ω est réduit à un point, on retrouve exactement les fonctions continues à droite à variation finie sur tout intervalle fini (exercice!); plus généralement, si $\mathbb{F}$ est déterministe, les semimartingales sont les processus mesurables à variation finie (rappelons que, par convention, cela inclut la 'càdlàgité'), comme nous le verrons un peu plus loin.

Avant de donner des exemples (rassurons tout de suite le lecteur, cependant: toute martingale est une semimartingale, même si ce n'est pas évident avec notre définition), nous commençons par dégager quelques propriétés simples (avec notre définition) mais importantes des semimartingales.

Propriété 2. (a) *Changement de loi:* Supposons que l'on remplace la probabilité P par une probabilité équivalente Q. Comme cela ne change pas la topologie de L^0 (ni le fait que $\mathbb{F}$ vérifie les conditions habituelles), une semimartingale X pour P reste une semimartingale pour Q. Noter, en contraste, que la notion de martingale dépend fortement de la probabilité de base, à cause de la condition d'intégrabilité et surtout de la présence d'espérances conditionnelles dans la définition. Plus généralement, on a un résultat analogue lorsque l'on suppose seulement que Q est absolument continue par rapport à P (L^0 a alors une topologie plus faible), sauf qu'il faut alors compléter $\mathbb{F}$ par rapport à Q si l'on veut retrouver les conditions habituelles.

(b) *Changement de filtration:* Supposons que l'on remplace $\mathbb{F}$ par une filtration $\mathbb{G}$ plus petite (i.e. $\boldsymbol{G}_t$ est une sous-tribu de $\boldsymbol{F}_t$ pour tout t) vérifiant les conditions habituelles. Alors une $\mathbb{F}$-semimartingale X est encore une $\mathbb{G}$-semimartingale dès que X est un $\mathbb{G}$-processus; en effet, on ne fait alors que diminuer les espaces $\boldsymbol{E}$ et L^0 considérés.

(c) *Localisation:* Soit X un $\mathbb{F}$-processus et supposons qu'il existe une suite croissante (T_n) de v.a. ≥ 0, tendant vers $+\infty$, vérifiant la condition suivante: pour tout n, il existe une semimartingale X^n (attention, n n'est pas une puissance, mais un indice!) telle que l'on ait $X = X^n$ sur l'intervalle stochastique $[\![0, T_n[\![$, i.e.

$$X_t(\omega) = X_t^n(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \text{ et tout } t \in [0, T_n(\omega)[.$$

Alors X est une semimartingale. En effet, il est clair que X est alors càdlàg, et la continuité de l'intégrale élémentaire résulte aisément du fait que, pour t fixé, on a $\int_0^t Y_s \, dX_s = \int_0^t Y_s \, dX_s^n$ sur $\{T_n > t\}$ pour tout $Y \in \boldsymbol{E}$.

(d) Enfin, il est clair que l'ensemble $\boldsymbol{S}$ des semimartingales est un espace vectoriel. On peut en fait montrer que c'est une *algèbre* (pour le produit ordinaire) et une *lattice* (pour l'ordre ordinaire), et même mieux que cela. Nous reviendrons sur ce point quand nous verrons la formule de changement de variables.

Exemple 3. (a) Il est clair que *tout $\mathbb{F}$-processus à variation finie est une semimartingale*, l'intégrale élémentaire coincidant alors avec l'intégrale de Stieltjes. Réciproquement, supposons que la $\mathbb{F}$-semimartingale X soit encore une $\mathbb{F}^\varepsilon$-semimartingale pour la filtration plus grosse $\mathbb{F}^\varepsilon$ définie comme suit: on a $\varepsilon > 0$ fixé et $\boldsymbol{F}_t^\varepsilon = \boldsymbol{F}_{t+\varepsilon}$ pour tout t. Alors, X est à variation finie. En effet on a alors, parmi les $\mathbb{F}^\varepsilon$-processus prévisibles élémentaires, des processus Y tels que

$$Y_s(\omega) = \text{signe de } (X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega)) \quad \text{pour } t_i < s \leq t_{i+1}$$

lorsque $(t_0 = 0, t_1, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n = t)$ est une subdivision finie de l'intervalle $[0, t]$, de pas $< \varepsilon$. Comme l'image de la boule unité de $\boldsymbol{E}$ par l'intégrale élémentaire doit être, pour chaque t, un borné de L^0, on en conclut sans peine que X doit être à variation finie.

(b) *Toute martingale est une semimartingale.* Soit d'abord M une martingale telle que M_t^2 (ici 2 est un exposant) soit intégrable pour tout t. Alors, pour $u \leqslant v \leqslant s \leqslant t$, on a $E[1_A(M_v - M_u)1_B(M_t - M_s)] = 0$ pour tout $A \in \boldsymbol{F}_u$ et tout $B \in \boldsymbol{F}_s$, car la v.a. entre crochets est intégrable et la v.a. intégrable $1_A(M_v - M_u)1_B$ est $\boldsymbol{F}_s$-mesurable (cf. le b) de la définition d'une martingale). Par ailleurs, quitte à remplacer M_t par $M_t - M_0$ pour tout t, on peut supposer $M_0 = 0$, et on a alors $E[(M_t - M_s)^2] = E[M_t^2 - M_s^2]$; un calcul élémentaire montre alors que, pour $Y \in \boldsymbol{E}$, on a

$$E\left[\left(\int_0^t Y_s \,\mathrm{d}X_s\right)^2\right] \leqslant \|Y\|_\infty^2 E[M_t^2 - M_0^2]$$

si bien que l'intégrale élémentaire est, pour chaque t, continue dans L^2 et donc a fortiori dans L^0. Lorsque la martingale M n'est pas de carré intégrable, on montre, à l'aide de résultats de la théorie des martingales dont nous parlerons plus loin, la chose suivante: il existe une suite croissante (T_n) de v.a. $\geqslant 0$ tendant vers $+\infty$ et, pour chaque n, une martingale de carré intégrable M^n et un $\mathbb{F}$-processus à variation finie V^n (les n sont des indices) tels que $M = M^n + V^n$ sur l'intervalle stochastique $[\![0, T_n[\![$, ce qui permet de conclure par localisation. Notez qu'en général les trajectoires d'une martingale, même bornée, ne sont pas à variation finie, soit qu'elles comportent trop de petits sauts, soit que, continues, elles oscillent trop fortement (penser au mouvement brownien; en fait, (presque) toute trajectoire d'une martingale continue a une variation infinie sur tout intervalle sur lequel elle n'est pas constante).

(c) Plus généralement, *toute (sous, sur)martingale est une semimartingale.* Soit, par exemple, X une surmartingale. D'abord, par localisation, on se ramène à montrer que la surmartingale X^n telle que l'on ait $X_t^n = X_t$ pour $t \leqslant n$ et $X_t^n = X_n$ pour $t > n$, est une semimartingale, si bien que l'on peut supposer X à trajectoires constantes pour $t \geqslant n$. Ensuite, quitte à considérer les surmartingales $X \wedge n$, $n \in \mathbb{N}$ et à utiliser encore un argument de localisation (toute trajectoire d'un processus càdlàg, ou càglàd, étant bornée sur tout compact), on peut aussi supposer X borné supérieurement. Les hypothèses sur X sont alors suffisantes pour pouvoir appliquer un théorème fondamental de la théorie des martingales (décomposition de Doob–Meyer): on a $X = M - A$ où M est une martingale et A un $\mathbb{F}$-processus croissant.

(d) *Tout processus càdlàg, homogène et à accroissements indépendants, est une semimartingale pour sa filtration naturelle complétée.* En effet, il résulte aisément de la décomposition de Lévy du processus que ce dernier est somme d'une martingale de carré intégrable et d'un processus à variation finie.

Tous nos exemples de $\mathbb{F}$-semimartingales sont du type 'somme locale' d'une $\mathbb{F}$-martingale (même de carré intégrable) et d'un $\mathbb{F}$-processus à variation finie. En fait, il n'y en a point d'autres (et l'on retrouve alors une définition plus commune des semimartingales): c'est ce que nous allons essayer d'expliquer maintenant.

Théorème 4. *Un $\mathbb{F}$-processus càdlàg X est une semimartingale si et seulement s'il vérifie la condition ($\boldsymbol{L}$) suivante: il existe une suite croissante (T_n) de v.a. $\geqslant 0$ tendant vers $+\infty$ et, pour chaque n, une $\mathbb{F}$-martingale M^n et un $\mathbb{F}$-processus à variation finie V^n, tels que l'on ait $X = M^n + V^n$ sur $[\![0, T_n[\![$ pour chaque n. De plus, la condition ($\boldsymbol{L}$) peut être renforcée en la condition ($\boldsymbol{L}_b$) obtenue en demandant que, pour chaque n, T_n soit un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt*[2]*, M^n une $\mathbb{F}$-martingale bornée*[3] *et V^n un $\mathbb{F}$-processus à variation bornée*[3].

Démonstration. Il résulte de propriété 2 et l'exemple 3 que la condition est suffisante. La démonstration 'ex nihilo' de la condition nécessaire est fort longue, mais comporte trois grandes étapes distinctes que nous allons décrire maintenant, sans entrer dans les détails techniques demandant trop de connaissances en théorie des martingales.

Etape A: Théorie des martingales: D'abord, on montre que les propriétés ($\boldsymbol{L}$) et ($\boldsymbol{L}_b$) sont des propriétés 'locales', ce qui est à peu près évident (pour l'initié, il n'est pas difficile de passer, dans ces situations, de 'T v.a. $\geqslant 0$' à 'T $\mathbb{F}$-temps d'arrêt' car, si Z^1 et Z^2 sont deux $\mathbb{F}$-processus càdlàg, la v.a. T définie par

$$T(\omega) = \inf\{t \geqslant 0: Z_t^1(\omega) \neq Z_t^2(\omega)\}$$

est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt). Ensuite, on montre que les propriétés ($\boldsymbol{L}$) et ($\boldsymbol{L}_b$) sont en fait équivalentes. Désignant par Z un $\mathbb{F}$-processus vérifiant ($\boldsymbol{L}$), on se ramène aisément à considérer séparément le cas où Z est à variation finie, qui est très facile à traiter, et le cas où Z est une martingale, qui est plus coriace à cause des 'grands' sauts possibles: il faut toute une technique (appelée compensation des sauts) et pas mal d'astuce pour y arriver – pendant longtemps d'ailleurs, on s'était contenté d'un résultat plus faible que ($\boldsymbol{L}_b$), où l'on avait 'martingale de carré intégrable' à la place de 'martingale bornée'. Ceci fait, on montre alors que si un $\mathbb{F}$-processus Z vérifie ($\boldsymbol{L}_b$) relativement à notre probabilité P, il vérifie encore ($\boldsymbol{L}_b$) relativement à toute probabilité Q équivalente à P. Ici encore, on se ramène aisément à considérer séparément le cas où Z est à variation bornée, qui est trivial, et le cas où Z est une martingale bornée, qui est plus délicat: on est amené à faire joujou avec la martingale M telle que M_t soit, pour chaque t, une densité de Q par rapport à P, Q et P étant restreintes à la tribu $\boldsymbol{F}_t$, petit jeu au cours duquel on est amené à utiliser le théorème de décomposition de Doob–Meyer. Revenant finalement à notre semimartingale X, on peut alors se permettre deux choses pour se simplifier la vie: d'une part, puisque la propriété ($\boldsymbol{L}$) est 'locale', on peut supposer que X est à trajectoires constantes pour $t \geqslant n$, ce qui permet de définir $\int_0^\infty Y_s \, dX_s$ pour tout $Y \in \boldsymbol{E}$. D'autre part, puisque seule

[2] Cela signifie que l'indicatrice de $[\![0, T_n[\![$ est un $\mathbb{F}$-processus. Nous avons cependant évité (non sans difficultés!) d'introduire cette notion, en fait éminemment importante, car elle demande pas mal de connaissances pour être manipulée efficacement. Le lecteur peut donc ignorer cette précision sans inconvénient majeur.

[3] Cela doit être entendu au sens le plus fort: la borne ne dépend pas de la trajectoire, et chaque trajectoire 'admet' cette borne sur tout $\mathbb{R}_+$.

la classe d'équivalence de la probabilité P entre en jeu, on peut supposer de plus que, pour tout $Y \in \boldsymbol{E}$, $\int_0^\infty Y_s \, dX_s$ est une v.a. intégrable: en effet, chacune de ces v.a. est intégrable si chaque X_t est intégrable, et chaque X_t est intégrable si $X^*_\infty = \sup_t |X_t|$ l'est (noter que X^*_∞ est une v.a., car on peut prendre le sup sur les rationnels); or, comme X est càdlàg et à trajectoires constantes après n, X^*_∞ est une v.a. finie et peut donc être supposée intégrable, quitte à remplacer P par une loi équivalente.

Etape B: Analyse fonctionnelle: Grâce à l'étape A, nous pouvons supposer que $Y \to \int_0^\infty Y_s \, dX_s$ est un opérateur continu de $\boldsymbol{E}$ dans L_0, à valeurs dans L^1. Dans ce cas, l'image de la boule unité B de $\boldsymbol{E}$ par cet opérateur est un convexe symétrique de L^1, borné dans L^0. Une application judicieuse du théorème de Hahn–Banach, que nous détaillerons après avoir vu la dernière étape, montre alors qu'il existe une probabilité Q équivalente à notre probabilité P telle que l'on ait

$$\sup_{Y \in B} \left| E_Q\left[\int_0^\infty Y_s \, dX_s\right]\right| < +\infty.$$

Autrement dit, nous pouvons maintenant supposer en plus que la forme linéaire $Y \to E[\int_0^\infty Y_s \, dX_s]$ sur $\boldsymbol{E}$ est continue. La dernière étape va montrer que, dans ces conditions, X est la différence de deux surmartingales et donc un processus vérifiant ($\boldsymbol{L}$) d'après l'exemple (il est clair que les processus vérifiant ($\boldsymbol{L}$) forment un espace vectoriel).

Etape C: Théorie des martingales: En fait, nous allons *seulement* utiliser la continuité de la forme $E[\int_0^\infty \cdots]$, laquelle *suffit* donc à entrainer la continuité de l'opérateur $\int_0^\infty \cdots$ dans L^0 (mais pas dans L^1). Avouons que cela est encore mal compris, encore qu'il soit tout à fait naturel que la théorie des martingales s'introduise à ce stade: pour un $\mathbb{F}$-processus càdlàg H tel que H_t soit intégrable pour tout t, dire que H est une martingale équivaut à dire (c'est très facile à voir) que, pour chaque t, la forme $E[\int_0^t Y_s \, dH_s]$ sur $\boldsymbol{E}$ est nulle (et donc continue!). Un $\mathbb{F}$-processus càdlàg H tel que, pour chaque t, on ait

$$\mathrm{Var}_t(H) = \sup_{Y \in B} \left| E\left[\int_0^t Y_s \, dH_s\right]\right| < +\infty,$$

B étant la boule unité de $\boldsymbol{E}$, et H_t étant supposé intégrable pour tout t, est appelé une *quasimartingale*[4]. La notation '$\mathrm{Var}_t(H)$' – qui rappelle 'variation' – se comprend mieux lorqu'on écrit cette quantité sous une autre forme. Appelons $\mathbb{S}(t)$ l'ensemble des subdivisions finies $\sigma = (t_0 = 0, t_1, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n = t)$ de l'intervalle $[0, t]$; un calcul élémentaire sur les espérances conditionnelles montre alors que, pour tout t, l'on a

$$\mathrm{Var}_t(H) = \sup_{\sigma \in \mathbb{S}(t)} E\left[\sum_\sigma |E[H_{t_{i+1}} - H_{t_i} | \boldsymbol{F}_{t_i}]|\right].$$

[4] La terminologie est fluctuante. Pour certains auteurs, une quasimartingale H doit vérifier $\sup_t \mathrm{Var}_t(H) < +\infty$; d'autres, encore plus exigeants, demandent $\sup_t[\mathrm{Var}_t(H) + E[|H_t|]] < +\infty$.

Sur cette expression, il est facile de voir que toute (sous, sur)martingale est une quasimartingale, $\mathrm{Var}_t(H)$ valant alors $|E[H_t-H_0]|$. Et le théorème de décomposition de Rao (analogue au théorème de décomposition d'une fonction à variation finie en différence de deux fonctions monotones) assure que toute quasimartingale est la différence de deux surmartingales (ou, si l'on veut, de deux sousmartingales). C'est fini.

Nous complétons maintenant la démonstration de l'étape B. Nous avons un espace probabilisé (Ω, F, P) et un convexe symétrique C de $L^1(P)$, borné dans L^0. Il s'agit de trouver une probabilité Q équivalente à P telle que $\sup_{f\in C}|E_Q[f]|<+\infty$. Dire que C est borné dans L^0 revient à dire que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $c_\varepsilon>0$ telle que

$$\sup_{f\in C} P\{|f|\geq c_\varepsilon\}\leq \varepsilon.$$

Soit alors $A\in F$ tel que $P(A)>0$, prenons $\varepsilon=\frac{1}{2}P(A)$ et posons $c=2c_\varepsilon$; on a alors en particulier, en posant $h^+=\sup(h,0)$ comme d'habitude,

$$\inf_{f\in C} E[(c1_A-f)^+]>0,$$

situation que nous exprimerons en disant que *$c1_A$ est loin d'être majoré par un élément de C*. Comme notre convexe est symétrique, l'existence de notre probabilité Q est alors assurée par la belle application suivante[5] du théorème de Hahn–Banach.

Théorème 5. *Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé et soit C un convexe de $L^1(P)$ tel que $0\in C$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Pour tout $A\in F$ tel que $P(A)>0$, il existe une constante $c>0$ telle que $c1_A$ soit loin d'être majoré par un élément de C,*

(b) *Il existe $g\in L^\infty$ tel que l'on ait $g>0$ p.s. et* $\sup_{f\in C}E[fg]<+\infty$.

Démonstration. Montrons d'abord que non (a) $\Rightarrow$ non (b) (et même un peu mieux). Supposons qu'il existe $h\in L^1_+$ (cône positif de L^1) tel que $E[h]>0$ et $\inf_{f\in C}E[(ch-f)^+]=0$ pour tout $c>0$; on peut alors écrire $nh=f_n-u_n-v_n$ avec $f_n\in C$, $u_n\in L^1_+$ et $E[|v_n|]<1/n$ pour tout n si bien qu'on a $E[f_ng]\geq nE[fg]-n^{-1}\|g\|_\infty$ pour tout $g\in L^\infty_+$, d'où l'impossibilité d'avoir (b) satisfaite. Voyons maintenant (a) $\Rightarrow$ (b). Soit G l'ensemble des $g\in L^\infty_+$ tels que $\sup_{f\in C}E[fg]<+\infty$ (on a $0\in G$), et soit (g_n) une suite d'éléments de G; choisissons des $c_n>0$ tels que les séries $\sum c_n\|g_n\|_\infty$ et $\sum c_nk_n$ convergent, où $k_n=\sup(0,\sup_{f\in C}E[fg_n])$: alors, $g=\sum c_ng_n$ appartient encore à G et

[5] Il s'agit d'un résultat tout récent de **Yan** (Jia-An), que nous avons préféré donner ici plutôt qu'un argument plus ancien de **Mokobodzki**, ce dernier étant exposé maintenant en de nombreux endroits. Signalons que le résultat de **Yan**, ou celui de **Mokobodzki** (qui repose sur un théorème de minimax, comme un résultat plus ancien de **Nikichine**) permet de montrer ceci: si (C_n) est une suite de convexes de $L^1(P)$, chacun d'eux étant borné dans L^0, alors il existe Q équivalente à P, à densité bornée, telle que l'on ait $\sup_{f\in C_n}|E_Q[f]|<+\infty$ pour tout n.

$\{g>0\}$ est la réunion des $\{g_n>0\}$. On en déduit l'existence, à un ensemble négligeable près, d'un plus grand ensemble $G\in\boldsymbol{F}$ tel qu'il existe $g\in\boldsymbol{G}$ vérifiant $G=\{g>0\}$. Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, que $P(G)=1$, ce qui établira le théorème. Supposons donc que $P(G^c)$ est >0. Alors, posant $G^c=A$, on sait qu'il existe $c>0$ te' ue $c1_A$ soit loin d'être majoré par C; autrement dit, $c1_A$ n'appartient pas à l'adhérence dans L^1 du convexe $C-L^1_+)=\{f-h, f\in C, h\in L^1_+\}$. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe donc $g_A\in L^\infty$ tel que l'on ait

$$\sup_{f\in C, h\in L^1_+A} E[(f-h)g_A]<cE[1_Ag_A].$$

Remplaçant h par $n1_B$, n parcourant $\mathbb{N}$ et B parcourant $\boldsymbol{F}$, on voit que g_A est p.s. ≥ 0; prenant $h=0$, on obtient $\sup_{f\in C}E[fg_A]<+\infty$, et aussi $E[1_Ag_A]>0$ en prenant de plus $f=0$ (il se peut que (a) $\Rightarrow$ (b) si on ne suppose pas $0\in C$). Mais alors, si $g\in\boldsymbol{G}$ vérifie $\{g>0\}=G$, on a $g+g_A\in\boldsymbol{G}$ et $P\{g+g_A>0\}>P(G)$, ce qui contredit la maximalité de G.

Revenons maintenant à notre semimartingale X. Nous avons vu que, pour toute probabilité Q équivalente à P, X se décompose 'localement' en la somme d'une martingale et d'un processus à variation finie, l'écriture de X sous une telle forme dépendant de Q (et n'étant pas unique par ailleurs). Nous verrons plus loin que, connaissant une telle écriture locale de X relativement à P, on peut trouver explicitement une écriture locale de X relativement à Q (formule de Girsanov). On peut aussi se demander si, en choisissant judicieusement Q, on peut arriver à obtenir une décomposition 'globale' de X relativement à Q. Cela est effectivement possible, dans un sens très fort, comme l'affirme le théorème suivant (que nous ne tenterons pas de démontrer ici).

Théorème 6. *Soit X une $\mathbb{F}$-semimartingale. Il existe une probabilité Q équivalente à P telle que X s'écrive $X=M+V$ où M est une $\mathbb{F}$-martingale relativement à Q et V un $\mathbb{F}$-processus à variation finie tels que, pour tout t et tout $p\in[1,\infty[$, la v.a. M_t appartienne à $L^p(Q)$ ainsi que la variation $\int_0^t|dV_s|$ de V sur $[0,t]$.*

Remarque. Pour $p\in[1,\infty[$ fixé, on peut montrer qu'une semimartingale X peut s'écrire $X=M+V$ avec, pour tout t, $\int_0^t|dV_s|\in L^p$ et $\sup_{s<t}|M_s|\in L^p$ (qui équivaut à $M_t\in L^p$ pour $p>1$), si et seulement si, pour tout t, l'intégrale élémentaire est un opérateur continu de $\boldsymbol{E}$ dans L^p. Revenant alors à notre théorème (dont la démonstration utilise le théorème 4 et donc le théorème 5), on voit qu'il implique l'existence de Q équivalente à P telle que, pour tout $p\in[1,\infty[$, on ait $\sup_{Y\in B}E_Q[|\int_0^t Y_s\,dX_s|^p]<+\infty$ pour tout t, B étant la boule unité de $\boldsymbol{E}$. Cela est beaucoup plus fort, en se contentant même de $p=1$, que ce que nous avions obtenu au théorème 5, soit $\sup_{Y\in B}|E_Q[\int_0^t Y_s\,dX_s]|<+\infty$. Signalons à ce sujet que l'on déduit aisément d'un résultat de Nikichine ([1, théorème 16]) l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega,\boldsymbol{F},P)$ et d'un convexe symétrique C de $L^1(P)$, borné dans L^0, tel que C ne puisse être borné dans aucun $L^1(Q)$ avec Q équivalente à P.

5. Intégrale stochastique à la Riemann

L'idée de départ est très simple: puisque, pour chaque t, l'intégrale élémentaire définit un opérateur linéaire continu de $\boldsymbol{E}$, muni de la convergence uniforme, dans L^0, muni de la convergence en probabilité, on peut, L^0 étant complet pour cette structure, prolonger la définition de l'intégrale au complété de $\boldsymbol{E}$ par uniforme continuité. C'est bien ainsi que nous allons procéder, mais pas tout de suite, car, d'une part la convergence uniforme sur $\boldsymbol{E}$ est trop forte (il serait plus naturel d'avoir une structure uniforme qui soit quelquechose comme la convergence uniforme en t et la convergence en probabilité en ω) et, d'autre part, $\boldsymbol{E}$ lui-même est trop pauvre (tout $Y \in \boldsymbol{E}$ saute trop régulièrement en ce sens que, si T est une v.a. ≥ 0 à loi diffuse, il n'y a p.s. pas de saut de Y à l'instant aléatoire T), pour que le complété de $\boldsymbol{E}$ contienne tous les $\mathbb{F}$-processus càglàd. Aussi allons nous d'abord définir une bonne structure uniforme sur les processus, puis étudier la continuité de l'intégrale élémentaire sur un domaine plus gros que $\boldsymbol{E}$. Par ailleurs, comme nous n'allons plus toucher à notre filtration $\mathbb{F}$ et que nous n'allons considérer que des $\mathbb{F}$-processus, nous convenons de dire 'processus' tout court au lieu de '$\mathbb{F}$-processus' et cela, jusqu'à la fin de notre exposé.

5.1. *Choix d'une bonne structure uniforme*

A tout processus Z à trajectoires localement bornées on associe le processus[6] Z^* défini par $Z_t^* = \sup_{s\leq t}|Z_s|$; il est clair que Z^* est un processus càglàd (resp càdlàg) si Z l'est. Nous définissons alors sur l'espace des processus la structure de la *convergence uniforme sur tout compact en probabilité* – en abrégé (ouf!), la *convergence ucp* – par la distance suivante, invariante par translation,

$$d(Z^1, Z^2) = \sum_n 2^{-n} E[(Z^1 - Z^2)_n^* \wedge 1].$$

Il est facile de voir qu'une suite de processus (Z^k) à trajectoires localement bornées, mais c'est en fait sans importance – converge vers 0 pour la topologie *ucp* si et seulement si, pour toute v.a. $T \geq 0$, la suite en k des v.a.[7] Z_T^{k*} tend vers 0 en probabilité, et qu'il suffit de vérifier que, pour une suite croissante (T_n) de v.a. ≥ 0 tendant vers $+\infty$, la suite en k des $Z_{T_n}^{k*}$ tend vers 0 en probabilité pour tout n. Cette structure est donc 'locale' au sens où nous[8] entendons ce mot depuis le début de notre exposé, ce qui la rend très maniable. Par ailleurs, il est clair que l'espace $\boldsymbol{D}$ des processus càdlàg et l'espace $\boldsymbol{G}$ des processus càglàd sont complets, et, avec deux

[6] Il n'est pas évident, qu'en général, Z^* soit un $\mathbb{F}$-processus (Z en étant un), mais c'est vrai. Dans le cas où Z est càdlàg ou càglàd, le sup peut être pris sur les rationnels, et c'est alors trivial. Par ailleurs, la notation officielle comporte une étoile, dont le signe '#' est la meilleure approximation sur mon clavier....

[7] Si Z est un processus et T une v.a. ≥ 0, on note Z_T la v.a. définie par $Z_T(\omega) = Z_{T(\omega)}(\omega)$.

[8] Le mot 'local' a officiellement un sens voisin, mais distinct.

doigts de métier, on vérifie sans peine que l'espace G^e des processus càglàd, bornés, en escalier, est dense dans G.

5.2. *Continuité de l'intégrale élémentaire*

Nous nous donnons une semimartingale X et nous considérons maintenant l'intégrale élémentaire par rapport à X comme *définie sur* G^e, muni de la structure ucp, et *à valeur dans* D, muni aussi de la structure ucp (autrement dit, nous ne regardons plus $Z_t = \int_0^t Y_s \, dX_s$ pour chaque t, mais tout le processus $Z = (Z_t)$). Et nous allons démontrer que l'intégrale élémentaire est alors un opérateur linéaire *continu* de G^e dans D, ce qui est nettement mieux que ce que nous donne a priori notre définition d'une semimartingale.

A cette fin, nous introduisons d'abord un procédé d'approximation qui nous permettra d'approcher convenablement les éléments de G^e par des éléments de E. Nous associons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un processus ${}^kZ \in G^e$ à tout processus Z en posant ${}^kZ_0 = Z_0$ et

$$ {}^kZ_t = \begin{cases} Z_{(n-1)2^{-k}} & \text{pour } (n-1)2^{-k} < t \le n2^{-k} \le k, \\ Z_k & \text{pour } t > k. \end{cases} $$

Notez que, pour k fixé, $Z \to {}^kZ$ est un opérateur linéaire, de norme ≤ 1 pour la convergence uniforme et que, pour Z càglàd, Z est la limite simple des ${}^kZ$ (si Z est càdlàg, la limite simple des ${}^kZ$ est égal au processus Z_- tel que $Z_{-0} = Z_0$ et $Z_{-t} = Z_{t-}$, limite à gauche de Z en t, pour $t > 0$; nous utiliserons ce résultat plus tard). Par ailleurs, il est très facile de voir que, si Z est borné et $Z_0 = 0$, alors ${}^kZ$ appartient, pour tout k, au complété de E pour la convergence uniforme. Le lecteur aura compris que notre opérateur $Z \to {}^kZ$ va nous servir à introduire des sommes riemaniennes, le fait que nous ayons choisi un procédé dyadique d'approximation ne jouant qu'un rôle mineur d'ordre typographique.

Théorème 7. *L'intégrale élémentaire par rapport à une semimartingale X définit un opérateur linéaire continu $Y \to \int Y \, dX$ de G^e, muni de la topologie ucp, dans D, muni de la topologie ucp.*

Démonstration. Nous découpons la démonstration en trois petites étapes.

(1) Nous démontrons d'abord que, pour t fixé, $Y \to \int_0^t Y_s \, dX_s$ est continu de G^e dans L^0 quand G^e est muni de la convergence uniforme. Soit (Y^n) une suite dans G^e convergeant uniformément vers 0 et écrivons

$$ \int_0^t Y_s^n \, dX_s = \int_0^t (Y_s^n - {}^kY_s^n) \, dX_s + \int_0^t {}^kY_s^n \, dX_s. $$

Comme on a $\|{}^kY^n\|_\infty \le \|Y^n\|_\infty$ et que les ${}^kY^n$ appartiennent au complété de E pour la convergence uniforme, on peut choisir un n de sorte que la dernière intégrale soit petite dans L^0, uniformément en k. Par ailleurs, pour n fixé, et pour tout ω, on a $\lim_k \int_0^t {}^kY_s^n(\omega) \, dX_s(\omega)$ égal à $\int_0^t Y_s^n(\omega) \, dX_s(\omega)$ car X est continu à droite tandis que les trajectoires de Y^n sont en escalier et continues à gauche. C'est fini.

(2) Nous supposons toujours G^e muni de la convergence uniforme et montrons maintenant que $Y \to \int Y\,dX$ est continu de G^e dans D, muni quant à lui de la convergence ucp. L'espace D étant un espace vectoriel topologique, il nous suffit de montrer que l'image de la boule unité B de G^e par notre intégrale est un borné de D, soit encore que, pour tout t, l'ensemble des v.a. $(\int Y\,dX)_t^*$ avec $Y \in B$ est un borné de L^0. Or nous savons, grâce à (1), que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout t, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$\sup_{Y \in B} P\left\{\left|\int_0^t Y_s\,dX_s\right| \geq c_\varepsilon\right\} \leq \varepsilon.$$

Fixons t et $Y \in B$, et regardons l'ensemble $A = \{Z_t^* > c_\varepsilon\}$ avec $Z = \int Y\,dX$. Posons, pour tout $\omega \in A$, $T(\omega) = \inf\{u \leq t: |Z_u| > c_\varepsilon\}$ et, pour tout $\omega \notin A^c$, $T(\omega) = t$; on vérifie sans peine que T ainsi définie est une v.a. (noter que l'inf peut être pris sur $(\mathbb{Q} \cap [0, t]) \cup \{t\}$) et que l'indicatrice de l'intervalle stochastique $]\!]0, T]\!]$ est un élément de B; d'autre part, comme Z est càdlàg, on a $|Z_T| \geq c_\varepsilon$ sur A. Maintenant, on a aussi

$$Z_T = \int_0^t 1_{]\!]0,T]\!]}(s) Y_s\,dX_s;$$

comme $1_{]\!]0,T]\!]} Y$ est un élément de B, il est alors clair que l'on a

$$\sup_{Y \in B} P\left\{\left(\int Y\,dX\right)_t^* > c_\varepsilon\right\} \leq \varepsilon.$$

(3) Nous munissons finalement G^e de la topologie ucp et démontrons le théorème. Soit (Y^n) une suite dans G^e convergeant ucp vers 0. Posons $Z^n = \int Y_n\,dX_n$ et raisonnons par l'absurde. Quitte à extraire à deux reprises une sous-suite, on peut alors supposer qu'il existe un t et un $\varepsilon > 0$ tels que (Y_t^{n*}) converge p.s. vers 0 tandis que l'on a $P\{Z_t^{n*} > \varepsilon\} > \varepsilon$ pour tout n. Soit alors $A \in F_\infty$, de probabilité $> 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, tel que les Y_t^{n*} convergent uniformément vers 0 sur A. Posons, pour tout n, $\varepsilon_n = \|1_A Y_t^{n*}\|_\infty$ et définissons un élément U^n de G^e en prenant, pour tout s et tout ω, $U_s^n(\omega) = Y_s^n(\omega)$ si on a $-\varepsilon_n \leq Y_s^n(\omega) \leq \varepsilon_n$ et $U_s^n(\omega) = 0$ sinon. D'après (2), on a $\lim \int U^n\,dX = 0$ dans D et, comme l'intégrale élémentaire est prise trajectoire par trajectoire, on a pour tout n $\int_0^t U_s^n\,dX_s = \int_0^t Y_s^n\,dX_s$ sur A. On en déduit que les v.a. $1_A Z_t^{n*}$ tendent vers 0 en probabilité, d'où une contradiction.

5.3. *Intégrale stochastique*

Les espaces G^e, G et D seront désormais munis tacitement de la structure ucp. Rappelons que G^e est dense dans G et que G et D sont complets.

Définition 8. Soit X une semimartingale. On appelle *intégrale stochastique* (*de Riemann*) *par rapport à* X l'opérateur linéaire continu $Y \to Z = \int Y\,dX$ de G dans D obtenu en prolongeant l'intégrale élémentaire de G^e dans D par continuité.

Il est clair que $\int Y \, dX$ est aussi linéaire en X. Nous passons maintenant en revue un certain nombre de propriétés fondamentales de l'intégrale stochastique (en abrégé, i.s.).

Propriété 9. (a) *Invariance:* Il est clair que l'on ne change pas l'i.s. si on remplace P par une probabilité équivalente, ou si l'on remplace la filtration $\mathbb{F}$ par une filtration $\mathbb{G}$ plus petite telle que X reste un $\mathbb{G}$-processus.

(b) *Associativité:* Pour $Y \in \boldsymbol{G}$ fixé, le processus $Z = \int Y \, dX$ est une semimartingale et, pour tout $U \in \boldsymbol{G}$, on a $\int U \, dZ = \int UY \, dX$, ce qui donne un sens à l'écriture différentielle $dZ = Y \, dX$. On démontre cela en supposant d'abord $Y \in \boldsymbol{G}^e$ et U parcourant $\boldsymbol{G}^e$ (c'est alors très facile), puis en passant à la limite (point n'est besoin d'invoquer Banach–Steinhaus; il suffit d'utiliser les définitions 1 et 8 et le théorème 6 en remarquant que $\boldsymbol{G}$ est une algèbre topologique).

(c) *Sauts de l'i.s.:* Si T est une v.a. >0, on a $\Delta Z_T = Y_T \Delta X_T$ p.s., où ΔZ est le processus $Z - Z_-$ des sauts de Z (et de même pour X). On démontre cela encore une fois en supposant d'abord $Y \in \boldsymbol{G}^e$, puis en passant à la limite.

(d) *Rapport avec l'intégrale de Stieltjes:* Soit $A \in \boldsymbol{F}_\infty$ tel que, pour (presque) tout $\omega \in A$, la trajectoire $t \to X_t(\omega)$ soit à variation finie. Alors, pour presque tout $\omega \in A$, la trajectoire $t \to Z_t(\omega)$ est égale à ce que donne l'intégrale de Stieltjes de $t \to Y_t(\omega)$ par rapport à $dX_t(\omega)$. Cela se démontre comme les points précédents.

(e) *Caractère local:* Soit X' une autre semimartingale et supposons que l'on ait $X = X'$ sur un intervalle stochastique $]\!]S, T]\!]$, où S et T sont deux v.a. ≥ 0 telles que $S \leq T$; alors, si Y et Y' sont deux éléments de $\boldsymbol{G}$ tels que $Y = Y'$ sur $]\!]S, T]\!]$, on a $Z_T - Z_S = Z'_T - Z'_S$ p.s. (où l'on a posé $Z = \int Y \, dX$ et $Z' = \int Y' \, dX'$). Cela se démontre en employant le même argument que précédemment, mais il faut un peu de métier pour traiter le cas où l'indicatrice de $]\!]S, T]\!]$ n'appartient pas à $\boldsymbol{G}$ (i.e. le cas où l'un des S, T n'est pas un temps d'arrêt).

(f) *Approximation riemannienne:* Si Y est un processus càglàd (resp. càdlàg), alors $\int {}^kY \, dX$ converge dans $\boldsymbol{D}$ vers $\int Y \, dX$ (resp. $\int Y_- \, dX$), d'où une approximation pour chaque t de l'intégrale susdite par des sommes riemanniennes en développant $\int_0^t {}^kY_s \, dX_s$. Pour voir cela, en nous contentant du cas où Y est càdlàg, on considère une suite (Y^n) dans $\boldsymbol{G}^e$ convergeant vers Y_- dans $\boldsymbol{G}$ et on écrit

$$\int (Y_- - {}^kY) \, dX = \int (Y_- - Y^n) \, dX + \int (Y^n - {}^kY^n) \, dX + \int ({}^kY^n - {}^kY) \, dX.$$

Dans le membre de droite, le premier terme est petit dans $\boldsymbol{D}$ quand n est grand, ainsi que le troisième, uniformément en k; quant au second, pour n et ω fixés, il converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ car X est continu à droite et Y^n continu à gauche, en escalier.

Nous allons introduire maintenant (à l'aide de notre i.s., mais on peut procéder autrement, quoique d'une manière moins élégante) un concept très important – le crochet droit $[X, X]$ d'une semimartingale X – qui se trouve au coeur de tout le développement 'moderne' de la théorie des martingales (inégalités du type Burkholder, espaces H^1 et BMO, etc); c'est d'ailleurs grâce à cette notion que l'on peut par exemple démontrer le théorème 6.

Définition 10. On appelle *crochet droit* de deux semimartingales X, Y le processus càdlàg $[X, Y]$ défini par

$$[X, Y] = XY - \int Y_- \,\mathrm{d}X - \int X_- \,\mathrm{d}Y,$$

expression appelée 'formule d'intégration par parties'.

Quand X et Y sont des processus à variation finie, les intégrales sont des intégrales de Stieltjes, et on retrouve alors la formule classique d'intégration par parties: $[X, Y]_t = X_0 Y_0 + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \,\Delta Y_s$, la famille des produits des sauts de X et Y étant sommable pour tout ω. Mais, on peut avoir $[X, Y] \neq 0$ pour des semimartingales continues X, Y telles que $X_0 = Y_0 = 0$: par exemple, si X est le mouvement brownien (unidimensionnel, issu de 0), on a $[X, X]_t = t$ pour tout t.

Avant de donner quelques propriétés du crochet, nous en établissons une approximation discrète qui en fera mieux comprendre la structure.

Théorème 11. *Soient X et Y deux semimartingales. Pour chaque t, la v.a. $[X, Y]_t$ est limite en probabilité, quand k tend vers $+\infty$, de sommes de la forme*

$$X_0 Y_0 + \sum_{0\leq i\leq n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

avec n = partie entière de $2^k t$, $t_i = i2^{-k}$ pour $0 \leq i \leq n$ et $t_{n+1} = t$.

Démonstration. On sait que $[X, Y]_t$ est limite en probabilité, pour k tendant vers $+\infty$, de $X_t Y_t - \int_0^t {}^k Y_s \,\mathrm{d}X_s - \int_0^t {}^k X_s \,\mathrm{d}Y_s$. On écrit alors les deux intégrales sous forme de sommes finies, on développe $X_t Y_t$ sous la forme $X_0 Y_0 + \sum_i (X_{t_{i+1}} Y_{t_{i+1}} - X_{t_i} Y_{t_i})$, et on trouve l'approximation voulue pour $k \geq t$.

Remarque. Plus généralement, on peut montrer que $[X, Y]_t$ est limite en probabilité de sommes de la forme considérée où (t_i) parcourt toutes les subdivisions finies de $[0, t]$, quand le pas des subdivisions tend vers 0. Prenant $X = Y$, on voit que, si une semimartingale n'a pas en général une variation finie, elle a toujours, *en un certain sens*, une 2-variation finie. Le 'en un certain sens' provient du fait que les subdivisions considérées ne dépendent pas des trajectoires: prise trajectoire par trajectoire, la 'vraie' 2-variation du mouvement brownien est p.s. infinie sur tout intervalle non dégénéré!

Propriété 12. (a) $[X, X]$ est un processus croissant (cela se voit immédiatement sur l'approximation discrète), et $[X, Y]$ est un processus à variation finie (en effet, on a

$[X, Y] = \frac{1}{4}([X+Y, X+Y] - [X-Y, X-Y])$. Revenant à la formule de définition de $[X, Y]$, on en déduit que le produit de deux semimartingales est une semimartingale.

(b) $[X, X]$ se comporte comme une forme quadratique positive, mais à valeur dans L^0. En particulier, posant $[X, Y]_s^t = [X, Y]_t - [X, Y]_s$, on a l'inégalité de Kunita-Watanabé

$$|[X, Y]_s^t| \leq ([X, X]_s^t)^{1/2}([Y, Y]_s^t)^{1/2}.$$

(c) Pour toute v.a. $T > 0$, on a $\Delta[X, Y]_T = \Delta X_T \Delta Y_T$ p.s. Cela résulte aisément de l'identification des sauts d'une i.s.

(d) On peut montrer que, si Y est à variation finie, on a

$$[X, Y]_t = X_0 Y_0 + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s,$$

la famille des produits des sauts étant sommable pour (presque) tout ω, même si X n'est pas à variation finie.

(e) On peut aussi montrer que l'on a $[X, X] = 0$ si et seulement si X est un processus continu à variation finie tel que $X_0 = 0$ et que, plus généralement, la partie 'continue' du processus croissant $[X, X]$ provient de la partie 'martingale continue' de X lorsque ce dernier est décomposé localement en somme d'une martingale et d'un processus à variation finie.

(f) Si Y est de la forme $\int H\,\mathrm{d}U$, où H appartient à $\boldsymbol{G}$ et U est une semimartingale, alors on a $[X, Y] = \int H\,\mathrm{d}[X, U]$ et donc, en particulier, $[\int H\,\mathrm{d}U, \int H\,\mathrm{d}U] = \int H^2\,\mathrm{d}[U, U]$. Il suffit de traiter le cas $X = U$, le cas général s'y ramenant par polarisation. On établit d'abord la formule dans le cas simple où H est l'indicatrice d'un rectangle $]u, \infty[\times A$ avec $A \in \boldsymbol{F}_u$, puis pour $H \in \boldsymbol{E}$ par linéarité; on obtient ensuite le cas où H appartient au complété de $\boldsymbol{E}$ pour la convergence uniforme, puis, finalement, le cas où H appartient à $\boldsymbol{G}$, par passage à la limite. Nous détaillons le dernier pas (le précédent étant analogue). Soit donc $H \in \boldsymbol{G}$ que l'on approche par les ${}^kH$; posant $Y^k = \int {}^kH\,\mathrm{d}X$, on sait que les Y^k convergent dans $\boldsymbol{D}$ vers $Y = \int H\,\mathrm{d}X$. Ecrivons

$$\int {}^kH\,\mathrm{d}[X, X] = [X, Y^k] = XY^k - \int Y^k_-\,\mathrm{d}X - \int X_-\,\mathrm{d}Y^k.$$

Le seul terme posant un petit problème dans le passage à la limite est le dernier $\int X_-\,\mathrm{d}Y^k$. Mais, grâce à l'associativité, nous avons

$$\int X_-\,\mathrm{d}Y^k = \int X_-({}^kH\,\mathrm{d}X) = \int {}^kH(X_-\,\mathrm{d}X)$$

où $X_-\,\mathrm{d}X$ est la différentielle d'une semimartingale; il n'y a alors plus de difficulté pour passer à la limite.

Avant d'aborder le calcul différentiel stochastique, qui n'utilise que notre 'petite' intégrale stochastique, nous allons dire maintenant quelques mots de la 'grande'.

6. Intégrale stochastique à la Lebesgue

Nous partons toujours de l'intégrale élémentaire $\int Y\,\mathrm{d}X$ par rapport à une semimartingale X, Y appartenant à $\boldsymbol{E}$, et nous voulons étendre la définition de l'intégrale à une vaste algèbre $\boldsymbol{Y}$ de processus, de sorte à avoir un "théorème de convergence simple dominée", ce qui est beaucoup mieux que ce que nous avons pour l'instant.

Nous considérons maintenant la tribu $\boldsymbol{P}$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus prévisibles élémentaires (rappelons qu'un processus est une application de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne) ou, plus précisément, par les processus Z de la forme $Z=Z_0+Y$, Z_0 v.a. $\boldsymbol{F}_0$-mesurable et $Y\in\boldsymbol{E}$ (ceci, parce que nos éléments de $\boldsymbol{E}$ sont tous nuls à l'instant 0). La tribu $\boldsymbol{P}$ est appelée *tribu des ensembles prévisibles* et les processus mesurables par rapport à $\boldsymbol{P}$ sont appelés *processus prévisibles*; le nom provient en particulier du fait que les générateurs de $\boldsymbol{P}$ sont des processus càglàd, et donc des processus bien connus à l'instant t si on les connait pour tout $s<t$. Il est facile de voir que *tout processus càglàd est prévisible* (Z càglàd est approché simplement par les ${}^kZ$), mais il est faux, en général, qu'un processus càdlàg soit prévisible.

Un processus prévisible Y est dit *localement borné* si $Y_t^*=\sup_{s\leqslant t}|Y_s|$ est fini pour tout t; on voit aisément que Y est localement borné si et seulement s'il existe une suite croissante (T_n) de v.a. $\geqslant 0$ tendant vers $+\infty$ et, pour chaque n, une constante $c_n>0$, telles que Y soit majoré en module par c_n sur l'intervalle stochastique $[\![0,T_n[\![$ pour tout n.[9] Nous noterons $\boldsymbol{P}_b^1$ l'algèbre des processus prévisibles localement bornés, qui contient l'algèbre $\boldsymbol{G}$ des processus càglàd.

La construction de l'intégrale stochastique (en abrégé, i.s.), dont nous indiquerons les grandes lignes, aboutit finalement au résultat suivant.

Théorème 13. *Soit X une semimartingale. Il existe un unique opérateur linéaire $Y\to\int Y\,\mathrm{d}X$ de $\boldsymbol{P}_b^1$ dans $\boldsymbol{D}$ vérifiant les conditions*

(1) *Pour $Y\in\boldsymbol{E}$, $\int Y\,\mathrm{d}X$ est donné par l'intégrale élémentaire,*

(2) *Si (Y^n) est une suite dans $\boldsymbol{P}_b^1$ majorée en module par un élément de $\boldsymbol{P}_b^1$ et convergeant simplement vers Y $(\in\boldsymbol{P}_b^1)$, alors, pour chaque t, $(\int Y^n\,\mathrm{d}X)_t$ converge en probabilité vers $(\int Y\,\mathrm{d}X)_t$ (écrit aussi $\int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s$).*

De plus, sous l'hypothèse de (2), *$\int Y\,\mathrm{d}X$ est une semimartingale et les semimartingales $\int Y^n\,\mathrm{d}X$ convergent vers $\int Y\,\mathrm{d}X$ dans $\boldsymbol{D}$, muni de la topologie ucp. Enfin, l'i.s. $\int H\,\mathrm{d}X$ vérifie les propriétés* 9(a), (b), (c), (d) *et* (e) *et la propriété* 12(f) *avec $H\in\boldsymbol{P}_b^1$ au lieu de $H\in\boldsymbol{G}$.*

[9] Le processus Y étant prévisible, Lenglart a démontré récemment que l'on pouvait trouver des T_n, c_n de sorte que les T_n soient des temps d'arrêt et (tout la difficulté est dans ce 'et') que Y soit majoré en module par c_n sur l'intervalle stochastique $[\![0,T_n]\!]$ (fermé à droite), ce qui, pour un spécialiste, est beaucoup mieux.

Démonstration. D'abord l'unicité résulte immédiatement du théorème des classes monotones, $\boldsymbol{E}$ étant une algèbre engendrant la tribu $\boldsymbol{P}$. Pour l'existence, on a dès le départ deux voies possibles: la voie 'rennaise', où l'on considère 'sérieusement' l'intégrale élémentaire comme une mesure vectorielle (à valeur ici dans L^0, pour t fixé, ou dans $\boldsymbol{D}$, si on regarde tous les t à la fois) définie sur le petit domaine $\boldsymbol{E}$ et qu'il s'agit d'étendre au grand domaine $\boldsymbol{P}_b^1$, voie qui ne nécessite guère de théorie des martingales (sauf pour donner des exemples!), mais exige par contre quelques connaissances en analyse fonctionnelle; et puis, la voie 'strasbourgeoise', plus ancienne, où l'on considère 'sérieusement' une semimartingale comme somme locale d'une martingale de carré intégrable et d'un processus à variation finie, voie qui nécessite donc quelques connaissances en théorie des martingales, mais peu de choses en dehors. Comme je ne renie pas mes origines, c'est cette seconde voie que je vais esquisser maintenant. D'abord, il n'y a aucune difficulté d'intégrer un $Y \in \boldsymbol{P}_b^1$ par rapport à un processus V à variation finie: on prend trajectoire par trajectoire l'intégrale de Stieltjes, qui fournit bien une intégrale ayant les propriétés voulues. Supposons que l'on veuille maintenant intégrer par rapport à une martingale M de carré intégrable, telle que, pour simplifier, on ait $M_0 = 0$ et $M_t = M_n$ pour $t \geq n$, pour un certain n (nous noterons $\boldsymbol{M}_n^2$ l'espace vectoriel des martingales de ce type). Regardons alors plus précisément qu'au exemple 3(b) le processus $Z = \int Y \,\mathrm{d}M$ pour $Y \in \boldsymbol{E}$. Ecrivant chaque $\int_0^t Y_s \,\mathrm{d}M_s$ comme une somme $\sum Y_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$, où (t_i) est une subdivion finie de $[0, t]$ et Y_i est, pour chaque i, une variable étagée $\boldsymbol{F}_{t_i}$-mesurable, on voit aisément, grâce à un petit calcul d'espérances conditionnelles, que Z est une martingale de carré intégrable, et en fait un élément de $\boldsymbol{M}_n^2$. D'autre part on peut montrer que, pour toute martingale de carré intégrable N, on a $E[N_t^2] = E[[N, N]_t]$ pour tout t (regarder l'approximation discrète du crochet droit; on peut montrer qu'elle converge dans L^1 dans ce cas) et on peut donc écrire pour tout t

$$E[Z_t^2] = E[[Z, Z]_t] = E\left[\int_0^t Y_s^2 \,\mathrm{d}[M, M]_s\right]$$

si bien que, pour M fixée et Y parcourant $\boldsymbol{E}$, l'intégrale $\int Y \,\mathrm{d}M$ définit une isométrie de l'espace $\boldsymbol{E}$ muni de la seminorme hilbertienne $\|Y\| = (E[\int_0^n Y_s^2 \,\mathrm{d}[M, M]_s])^{1/2}$ dans l'espace $\boldsymbol{M}_n^2$ muni de la norme hilbertienne $\|N\| = (E[N_n^2])^{1/2}$, qui est complet pour cette norme. Soit $L^2(M)$ l'espace des processus prévisibles Y tels que $E[\int_0^n Y_s^2 \,\mathrm{d}[M, M]_s]$ soit fini, muni de la seminorme hilbertienne $(\cdots)^{1/2}$ associée (c'est en fait l'espace L^2 de la mesure sur $\boldsymbol{P}$ définie par $Y \to E[\int_0^n Y_s \,\mathrm{d}[M, M]_s]$): $L^2(M)$ contient tous les processus prévisibles bornés, et $\boldsymbol{E}$ est dense dans $L^2(M)$. On peut alors prolonger de manière unique l'isométrie définie par l'intégrale élémentaire en une isométrie de $L^2(M)$ dans $\boldsymbol{M}_n^2$, ce qui donne une bonne i.s. $\int Y \,\mathrm{d}M$ pour $Y \in L^2(M)$. Revenons finalement à X semimartingale et Y prévisible localement borné: on peut trouver une suite croissante (T_n) de v.a. ≥ 0 tendant vers $+\infty$ telle que, pour chaque n, il existe un processus prévisible borné Y^n, une martingale de carré intégrable M^n et un processus à variation finie V^n de sorte que l'on ait $Y = Y^n$

et $X = M^n + V^n$ sur $[\![0, T_n[\![$; on peut évidemment supposer de plus $T_n \leq n$. $M_0^n = 0$ et $M_t^n = M_n^n$ pour $t \geq n$. On définit alors $\int Y\,\mathrm{d}X$ comme étant le processus égal à $\int Y^n\,\mathrm{d}M^n + \int Y^n\,\mathrm{d}V^n$ sur $[\![0, T_n[\![$ pour chaque n, l'unicité permettant de montrer que tout cela se recolle bien. Nous arrêtons là notre survol de la démonstration.

Remarque. On sait aussi prolonger l'i.s. par rapport à une semimartingale X à des processus non prévisibles, ou non localement bornés, mais nous n'en parlerons pas ici.

Nous terminons cette section en disant juste deux mots, en passant, sur la notion de martingale locale, que je ne me résouds pas à passer complètement sous silence. Lorsque Y est un processus prévisible borné et M une martingale de carré intégrable, on a vu que $\int Y\,\mathrm{d}M$ est encore une martingale, de carré intégrable. Mais, si M est une martingale quelconque, ou encore si Y est seulement localement borné, alors $\int Y\,\mathrm{d}M$ n'est plus en général une martingale, mais est ce qu'on appelle une *martingale locale*, i.e. un processus càdlàg L pour lequel existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$ telle que, pour chaque n, existe une martingale M^n de sorte que l'on ait $L = M^n$ sur $[\![0, T_n]\!]$ (fermé à droite: c'est très important!). Avec un peu de métier, on montre aisément qu'une semimartingale L est une martingale locale si et seulement s'il existe un processus càglàd Y ne s'annulant jamais tel que $\int Y\,\mathrm{d}L$ soit une martingale (de carré intégrable, si on le désire).

La notion de martingale locale permet, en particulier, d'écrire des décompositions 'globales': on peut montrer, par exemple, qu'un processus càdlàg X est une semimartingale si et seulement si l'on peut écrire $X = L + V$ où L est une martingale locale et V un processus à variation finie-décomposition non unique, dépendant par ailleurs de la probabilité de base P. Et, si l'on a une telle décomposition $X = L + V$ relativement à P, on sait écrire une décomposition relativement à Q, probabilité équivalente à P, de la manière suivante. Appelons M la martingale relativement à P telle que M_t soit pour chaque t une densité de Q par rapport à P quand Q et P sont restreintes à $\boldsymbol{F}_t$; on sait que M ne s'annule nulle part. On a alors ce qui est appelé la 'formule de Girsanov'

$$X = \left(L - \int \frac{1}{M}\,\mathrm{d}[L, M]\right) + \left(\int \frac{1}{M}\,\mathrm{d}[L, M] + V\right)$$

où, dans la première parenthèse, on a une martingale locale relativement à Q et, dans la seconde, un processus à variation finie, les intégrales étant des intégrales de Stieltjes ($1/M$ n'est pas prévisible en général).

7. La formule de changement de variables

Si V est un processus continu à variation finie et si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il est bien connu que $f(V)$ est encore un processus continu à variation finie et que l'on a la formule $f(V)=f(V_0)+\int f'(V)\,\mathrm{d}V$; c'est, trajectoire par trajectoire, la formule classique de "changement de variable", qui se visualise bien en écrivant, pour chaque t, $f(V_t)-f(V_0)=\sum_i (f(V_{t_{i+1}}-V_{t_i}))$ pour une subdivision finie (t_i) de $[0, t]$ et en développant chaque parenthèse par la formule de Taylor à l'ordre 1. Si V, à variation finie, est seulement càdlàg, on obtient la formule, moins classique,

$$f(V_t)-f(V_0)=\int_0^t f'(V_{s-})\,\mathrm{d}V_s+\sum_{0<s\leq t}(f(V_s)-f(V_{s-})-f'(V_{s-})\,\Delta V_s)$$

où, dans la famille sommable qui tient compte des sauts, on reconnait un avatar du développement de Taylor à l'ordre 1. Dans le cas d'une semimartingale X, on a une formule analogue pour $f(X)$, avec f de classe C^2 cette fois, appelée souvent *formule d'Ito*, où il apparait cette fois un développement de Taylor à l'ordre 2 dû au fait, qu'en un certain sens (cf. le théorème 11), X a une 2-variation finie.

Théorème 14. *Soient X une semimartingale et f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est encore une semimartingale, et on a, pour tout t,*

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_0^t f'(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s+\tfrac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,\mathrm{d}[X, X]_s+\sum_{0<s\leq t}U_s$$

où

$$U_s=\{f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\,\Delta X_s-\tfrac{1}{2}f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2\},$$

la première intégrale étant une i.s. et la famille $(U_s)_{s\leq t}$ p.s. sommable.

Démonstration. Nous montrons d'abord que le processus

$$V=f(X)-f(X_0)-\int f'(X_-)\,\mathrm{d}X$$

est à variation finie; nous l'identifierons après. Pour montrer cela, il suffit de prouver qu'il existe une suite croissante (T_n) de v.a. ≥ 0 tendant vers $+\infty$ telle que, pour chaque n, V soit à variation finie sur $[\![0, T_n[\![$. Notons, au passage, que ceci est valable aussi pour l'identification de V. Nous prenons

$$T_n(\omega)=\inf\{t\geq 0\colon t\geq n \text{ ou } |X_t(\omega)|>n\}.$$

Dans ces conditions, l'indicatrice de $[\![0, T_n[\![$ est un processus si bien que $X1_{[\![0,T_n[\![}$ est encore une semimartingale, et nous nous sommes donc ramenés à démontrer le théorème quand X est une semimartingale à valeurs dans $[-n, +n]$. Soit alors C une constante de Lipschitz pour f' sur $[-n, +n]$; on a, pour x, y dans l'intervalle,

$$|f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)|\leq C(y-x)^2 \tag{1}$$

et donc, si (t_i) est une subdivision finie de l'intervalle $[s, t]$,

$$|f(X_t)-f(X_s)-\sum_i f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})|\leq C\sum_i (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2.$$

Prenant pour (t_i) la subdivision de $[s, t]$ associée à une approximation ${}^kX$ de X et appliquant la propriété 9(f) et le théorème 11, on obtient, en passant à la limite en probabilité,

$$|f(X_t)-f(X_s)-\int_s^t f'(X_{u-})\,\mathrm{d}X_u| \leq C([X,X]_t-[X,X]_s)$$

d'où V est à variation finie. Pour l'identification de V, que nous ne détaillerons pas, on vérifie d'abord, grâce à la formule d'intégration par parties et les propriétés du crochet droit, la chose suivante: si la formule d'Ito est vraie pour une certaine fonction g de classe C^2, elle est encore vraie pour $f(x)=xg(x)$. On en déduit que la formule est vraie lorsque f est une fonction polynome. Enfin, on approche f de classe C^2 uniformément sur $[-n, +n]$ par des fonctions polynomes f_k de sorte que f' (resp f'') soit aussi approchée uniformément par les f'_k (resp f''_k), et on montre que l'on peut passer à la limite.

Remarques. (a) On écrit le plus souvent la formule d'Ito en remplaçant $\int_0^t f''(X_{s-})\,\mathrm{d}[X,X]_s$ par $\int_0^t f''(X_{s-})\,\mathrm{d}[X,X]_s^c$ où $[X,X]^c$ est la partie 'continue' du processus croissant $[X,X]$; dans ce cas, le terme tenant compte des sauts s'écrit plus simplement: U_s est remplacé par $\{f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\,\Delta X_s\}$. Cette formule est en fait plus belle car on peut montrer que $[X,X]^c$ est le crochet droit de la partie 'martingale continue' – notée X^c malgré l'ambiguité – de X, si bien que l'on trouve souvent $[X,X]^c$ écrit $[X^c, X^c]$ (ou même $\langle X^c, X^c\rangle$, mais nous ne parlerons pas ici du 'crochet oblique'). Par ailleurs on ne peut décomposer $\{f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\,\Delta X_s\}$ en $\{f(X_s)-f(X_{s-})\}$ et $\{f'(X_{s-})\,\Delta X_s\}$ car, en général, les deux familles obtenues ne sont pas sommables séparément.

(b) Supposons que f soit une fonction *convexe* au lieu de la supposer de classe C^2, et revenons à la première partie de la démonstration: au lieu de (1), nous écrivons maintenant

$$f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\geq 0 \tag{2}$$

où f' est la dérivée à gauche de f. En procédant par approximation discrète comme précédemment, on voit que $V=f(X)-f(X_0)-\int f'(X_-)\,\mathrm{d}X$ est cette fois un processus croissant. On en déduit, en particulier, que $f(X)$ est encore une semimartingale; prenant $f(x)=x^2$ et $f(x)=x^+$, on peut alors établir aisément la fin du exemple 3(d). Par ailleurs, l'élucidation de la structure de V pour $f(x)=|x|$ mène à la théorie importante du *temps local* d'une semimartingale.

(c) Dans de nombreuses applications du calcul différentiel stochastique (en géométrie différentielle, par exemple), on n'a affaire qu'à des semimartingales *continues*, ce qui fait disparaitre l'encombrante partie de la formule relative aux sauts. On utilise alors assez souvent une variante de l'i.s. appelée *intégrale de Stratonovitch*: si X et Y sont deux semimartingales continues, on pose par définition

$$\text{(S)}\qquad \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s = \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \tfrac{1}{2}[Y,X]_t.$$

La formule de changement de variable, pour f de classe C^3, s'écrit alors comme en calcul différentiel classique

$$f(X_t)-f(X_0)=(S)\int_0^t f'(X_s)\,dX_s;$$

cela se déduit aisément de la formule d'Ito et des propriétés du crochet droit.

La formule de changement de variables qui, malgré son air un peu rébarbatif dans le cas où il y a des sauts, est d'une grande efficacité en calcul différentiel stochastique, admet une extension elle-même très utile aux fonctions de classe C^2 à plusieurs variables. Cette extension est un peu lourde à écrire sans introduction d'un formalisme convenable; mais, comme nous n'allons pas l'utiliser par la suite, nous nous contenterons de noter $\bar{X}=(X^1,\dots,X^n)$ la donnée de n semimartingales $X^1,\dots,X^n$ et d'autre part de noter D_if (resp. D_iD_jf) les dérivées partielles au premier ordre (resp second ordre) d'une fonction $f(\bar{x})=f(x^1,\dots,x^n)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$. On a alors

$$\begin{aligned} f(\bar{X}_t) &= f(\bar{X}_0)+\sum_i\int_0^t D_if(\bar{X}_{s-})\,dX^i_s \\ &\quad+\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t D_iD_j(\bar{X}_{s-})\,d[X^i,X^j]_s \\ &\quad+\sum_{0<s\leq t}\{f(\bar{X}_s)-f(\bar{X}_{s-})-\sum_i D_if(\bar{X}_{s-})\,\Delta X^i_s \\ &\quad-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}D_iD_jf(\bar{X}_{s-})\,\Delta X^i_s\,\Delta X^j_s\}, \end{aligned}$$

la famille intervenant dans le dernier terme étant p.s. sommable. En particulier, si $X^1,\dots,X^n$ sont n semimartingales et si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, alors $f(X^1,\dots,X^n)$ est encore une semimartingale (on a un résultat analogue si on suppose f convexe au lieu de classe C^2). La démonstration est analogue en tout point à celle du théorème 14; lorsque l'on prend $f(x,y)=xy$, on retrouve la formule d'intégration par parties (que nous utilisons dans la démonstration, mais on peut aussi procéder autrement).

8. Equations différentielles stochastiques

Nous nous bornerons à énoncer un théorème d'existence et d'unicité 'global' sous des hypothèses analytiques analogues à celles du théorème classique de Cauchy–Lipschitz.

Théorème 15. *Soient X une semimartingale et f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}$ et vérifiant*

(1) *Pour x fixé,* $(t, \omega) \to f(t, \omega, x)$ *est un processus càglàd,*

(2) *Pour* (t, ω) *fixé,* $x \to f(t, \omega, x)$ *est une fonction lipschitzienne, avec une constante de Lipschitz k ne dépendant pas de t mais pouvant dépendre de* ω.

Dans ces conditions, l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}Z = f(\cdot, \cdot, Z_-)\,\mathrm{d}X$$

admet une solution Z, semimartingale, unique si l'on se donne la condition initiale Z_0, *v.a.* $\boldsymbol{F}_0$*-mesurable.*

On vérifie facilement que, si Z est un processus càdlàg, alors l'application $(t, \omega) \to f(t, \omega, Z_{t-}(\omega))$ est un processus càglàd, qui peut donc être intégré par rapport à la semimartingale X. Notre équation différentielle a donc bien un sens: elle signifie que le processus càdlàg Z doit être solution de l'équation intégrale

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f(s, \cdot, Z_{s-})\,\mathrm{d}X_s\,;$$

une solution Z de cette équation intégrale étant nécessairement une semimartingale, la propriété d'associativité de l'i.s. légitime alors l'écriture différentielle de l'équation.

Nous donnons maintenant quelques idées sur la démonstration du théorème. L'idée de départ est, comme dans le cas classique, de se ramener à une situation où l'on peut appliquer un théorème de point fixe à l'opérateur intégral associé à l'équation; cependant elle est ici bien plus difficile à mettre en oeuvre. On connait pour cela deux voies, la 'strasbourgeoise', qui procède par petits pas ramenant finalement l'énoncé à un cas particulier 'maniable' grâce à des techniques de théories des martingales qu'il n'est pas question d'exposer ici, et la 'rennaise', plus récente, qui a entr'autres l'avantage d'inclure tout le côté technique de théorie des martingales dans la belle inégalité de Métivier–Pellaumail que voici, sans démonstration.

Théorème 16. *Soit X une semimartingale. Il existe un processus croissant A contrôlant X au sens suivant: pour tout temps d'arrêt* $T > 0$ *et tout processus càglàd Y, on a*

$$E\left[\left(\int Y\,\mathrm{d}X\right)_{T-}^{*2}\right] \leq E\left[A_{T-}\left(\int Y^2\,\mathrm{d}A\right)_{T-}\right] (\leq +\infty).$$

Remarque. L'inégalité est encore vraie pour Y prévisible localement borné. Par ailleurs, on peut montrer que la propriété de contrôle de l'énoncé caractérise les semimartingales: un processus càdlàg X est une semimartingale ssi il existe un processus croissant A tel que l'inégalité de l'énoncé soit vérifiée pour tout $Y \in \boldsymbol{E}$ (l'intégrale $\int Y\,\mathrm{d}X$ étant donnée par l'intégrale élémentaire).

Démonstration du théorème 15. (Nous serons obligés ici de manipuler un peu les temps d'arrêt.) Nous supposons d'abord que la constante de Lipschitz k de l'énoncé ne dépend pas de ω. Soit S un temps d'arrêt et supposons que l'on connaisse une solution U de l'équation sur l'intervalle $[\![0, S[\![$; cela signifie que U est une semimartingale qui coincide avec $Z_0+\int f(\cdot, \cdot, U_-)\,dX$ sur $[\![0, S[\![$ (par exemple, si S est constant et égal à 0, on peut prendre u constant égal à 0). L'identification des sauts d'une i.s. permet alors de trouver une solution V sur l'intervalle $[\![0, S]\!]$: il suffit de poser $V=U1_{[\![0,S[\![}+Z_S1_{[\![S,\infty[\![}$ où Z_S est la v.a. valant Z_0 sur $\{S=0\}$ et $U_{S-}+f(S, \cdot, U_{S-})\Delta X_S$ sur $\{0<S<\infty\}$. Soit maintenant T le temps d'arrêt défini par

$$T(\omega)=\inf\{t \geq S(\omega): A_t^2(\omega)-A_S^2(\omega)>1/2k^2\}$$

où k est la constante de Lipschitz et A un processus croissant contrôlant X au sens du théorème 16; comme A est càdlàg, on a $T>S$ sur $\{S<\infty\}$, et, A étant croissant, on a partout

$$A_{T-}\int_{]\!]S,T[\![} dA_s=A_{T-}(A_{T-}-A_S)\leq A_{T-}^2-A_S^2\leq 1/2k^2$$

avec $A_\infty=A_{\infty-}=\lim_{t\to\infty} A_t$. Soient alors U, V deux semimartingales solutions de l'équation sur l'intervalle $[\![0, S]\!]$, Z_0 étant donné; pour simplifier les notations, nous poserons $F(U)=\int f(\cdot, \cdot, U_-)\,dX$, et de même pour V. On déduit alors de l'inégalité de Métivier–Pellaumail et des inégalités précédentes la chaîne d'inégalités suivante

$$E[(F(U)-F(V))_{T-}^{*2}]\leq E\left[A_{T-}\int_{]\!]S,T[\![} k^2(U_--V_-)^2\,dA_s\right]\leq \tfrac{1}{2}E[(U-V)_{T-}^{*2}]$$

où, dans la première inégalité, on a tenu compte du fait que l'on a $U=V$ sur $[\![0, S]\!]$ et $|f(\cdot, \cdot, U_-)-f(\cdot, \cdot, V_-)|\leq k|U_--V_-|$. On voit alors poindre à l'horizon la possibilité de définir une contraction sur un bon espace de processus, ce qui permet finalement (nous ne donnons pas les détails) d'obtenir une solution de l'équation sur $[\![0, T[\![$, unique sur cet intervalle. Posant $S=T_1$, $T=T_2$, on recommence l'opération avec T_2 à la place de T_1 et, comme A est càdlàg, la suite des temps d'arrêt T_n ainsi construits tend en croissant vers $+\infty$, ce qui permet, par recollement, d'obtenir la solution unique de l'équation. Voyons rapidement, pour finir, comment traiter le cas où la constante de Lipschitz est une fonction $k(\omega)$ de ω. Quitte à remplacer $k(\omega)$ par $\sup|f(t, \omega, y)-f(t, \omega, x)|\,|y-x|^{-1}$ quand t parcourt $\mathbb{R}_+$ et (x, y) le complémentaire de la diagonale de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on peut supposer que $k(\cdot)$ est une v.a. Soit alors c une constante telle que $P\{k\leq c\}>0$; posons, pour tout entier n, $\Omega_n=\{k\leq c+n\}$ et désignons par P_n la probabilité $P(\cdot\cap\Omega_n)/P(\Omega_n)$ sur Ω_n muni de la filtration trace $\mathbb{F}^n$ de $\mathbb{F}$. La restriction de X à $\mathbb{R}_+\times\Omega_n$ est une $\mathbb{F}^n$-semimartingale d'après définition 1, et on peut considérer l'équation restreinte à Ω_n. Sur Ω_n, on a une solution unique Z^n d'après la première partie de la démonstration, et un procédé de recollement reposant sur l'invariance et le caractère local de l'i.s. (cf. propriété 9) permet finalement d'avoir une solution unique Z sur Ω.

L'énoncé du théorème 15 ne fait intervenir qu'une seule semimartingale X. En fait, il est possible de remplacer l'unique intégrale dans l'équation intégrale associée par une somme finie d'intégrales du même type et, plus généralement, de considérer des systèmes d'équations différentielles stochastiques. D'autre part, on sait étudier la stabilité de la solution en fonction des données Z_0, f, X (nous donnerons des références dans la bibliographie). Enfin, on sait aussi traiter le cas où f est seulement localement lipschitzienne, avec étude des 'explosions'.

Une équation particulièrement importante est l'équation $\mathrm{d}Z = Z_- \,\mathrm{d}X$ avec $Z_0 = 1$, qui définit une semimartingale notée $\mathcal{E}(X)$ et appelée *l'exponentielle de X au sens des semimartingales*. On sait écrire explicitement $\mathcal{E}(X)$: si X est continu, $\mathcal{E}(X) = \exp(X - \frac{1}{2}[X, X])$, où 'exp' est la fonction exponentielle ordinaire et, en général, on a

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}[X, X]_t) \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s + \tfrac{1}{2}(\Delta X_s)^2)$$

avec un produit infini p.s. absolument convergent. Par ailleurs, si X et Y sont deux semimartingales, on a $\mathcal{E}(X)\,\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X, Y])$.

Bibliographie commentée

Je vais essayer ici de donner quelques idées sur le développement historique des notions d'intégrale stochastique et de semimartingale. En fait, je ne pourrai donner de tout cela qu'une vue bien partiale (je connais très mal d'autres approches de l'intégrale stochastique comme celles de **Millar**, ou **McShane**, ou **Skorokhod**), et aussi partielle (le peu que j'ai dit sur les martingales locales ne me permettant pas de leur rendre justice).

L'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien doit ses débuts à **Wiener** (intégration de processus 'déterministes'), mais c'est à **Ito** que revient la création d'un véritable calcul différentiel stochastique attaché au mouvement brownien, dans une série d'articles allant de 1944 à 1961. Ce calcul, qui a des liens étroits avec la théorie des diffusions, n'a cessé depuis sa création de susciter de nombreux travaux, y compris en géométrie différentielle. Mais, parler de ces travaux nous entraînerait loin du coeur de notre exposé (et aussi de mon 'domaine de compétence'). Aussi me bornerai-je à citer une référence classique (qui date déjà)

H. P. McKean, *Stochastics Integrals*, Academic Press, New York, 1969.

Après des travaux préliminaires de **Doob**, **Meyer** et **Courrège**, le premier travail fondamental sur l'extension du calcul d'Ito aux martingales de carré intégrable est

H. Kunita and **S. Watanabé**, *On square integrable martingales*, Nagoya Math. J. 30 (1967), 209–245,

qui n'aborde cependant pas les équations différentielles. L'extension aux martingales locales (introduites par **Ito** et **Watanabé** à l'occasion de leur travail sur le théorème de décomposition de Doob–Meyer) et aux semimartingales (définies par **Meyer** comme sommes d'une martingale locale et d'un processus à variation finie) débute dans

P. A. Meyer, *Intégrales stochastiques* Séminaire Probabilités I, Lecture Notes in Mathematics 39, pp. 72–162, Springer, Berlin, 1967,

où apparaissent l'utilisation des processus prévisibles (notion alors bien récente introduite par **Meyer** en théorie générale des processus sous le nom de processus très bien mesurables) et la définition et utilisation en temps continu du crochet droit (à la place du crochet oblique de **Motoo** et **Watanabé**); elle trouve sa forme quasidéfinitive dans

C. Doléans-Dade and **P. A. Meyer,** *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales,* Séminaire Probabilités IV, Lecture Notes in Mathematics 124, pp. 77–107, Springer, Berlin, 1970.

Mais l'invariance de la notion de semimartingale (définie à la Meyer) par changement de loi équivalente a été découverte beaucoup plus tard (mais moins tardivement qu'il n'y parait!) par

J. Jacod and **J. Mémin,** *Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 35 (1976) 1–37,

précédé d'un travail de **Van Schuppen** et **Wong** sur la 'formule de Girsanov'. On trouve aussi dans cet article la décomposition 'locale' d'une semimartingale en une martingale bornée et un processus à variation bornée, qui a été aussi découverte indépendamment par **Doléans-Dade** et **Yen** (qui s'appelle **Yan** désormais). Enfin, après un travail préliminaire de **Protter**, l'étude générale des équations différentielles stochastiques sort de ses balbutiements avec

C. Doléans-Dade, *On the existence and unicity of solutions of stochastic differential equations,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 36 (1976) 93–101,

mais 'l'astuce' pour traiter le cas où la constante de Lipschitz dépend de ω est due à **Lenglart.**

Par ailleurs, la première interprétation de l'intégrale stochastique comme intégrale vectorielle apparait dans

J. Pellaumail, *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob–Meyer,* Astérisque 9, Soc. Math. France, 1973,

point de vue développé par **Métivier** et **Pellaumail** dans une série d'articles abordant aussi le calcul différentiel stochastique pour des processus à valeurs banachiques (et en particulier hilbertiennes). C'est la lecture de

M. Métivier and **J. Pellaumail,** *Mesures stochastiques à valeurs dans les espaces L^0,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 40 (1977) 101–114, qui a provoqué la démonstration par **Mokobodzki** et moi-même du théorème 4 de notre exposé, i.e. de l'équivalence de la définition à la Meyer des semimartingales et de celle adoptée à la définition 1 de l'exposé. La démonstration originale, avec un énoncé amélioré par **Meyer**, est dans

> **P. A. Meyer,** *Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie,* Séminaire Probabilités XIII, Lecture Notes in Mathematics, 721, pp. 620–623, Springer, Berlin, 1979,

mais l'importance de la notion de quasimartingale comme 'auxiliaire technique' avait été mise auparavant en évidence par

> **C. Stricker,** *Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtrations naturelles,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 39 (1977) 55–64,

où se trouve aussi établi le premier résultat du type de notre théorème 6 (ce dernier résulte de conversations entre **Bichteler** et moi-même à Oberwolfach; une belle démonstration due à **Lenglart** paraitra dans Séminaire Probabilités XIV). L'équivalence des deux définitions de la notion de semimartingale a été aussi découverte, au moyen d'un théorème de factorisation de **Maurey** et **Rosenthal,** par

> **K. Bichteler,** *Stochastic integration, L^p-theory of semimartingales,* Ann. Probability, à paraitre,

qui, reprenant le point de vue 'intégrale vectorielle', retrouve aussi d'importantes équivalences de normes 'à la Burkholder' (évoquées pour les martingales au théorème 6) établies pour les semimartingales par

> **M. Yor,** *Inégalités entre processus minces et applications,* C.R. Acad Sci. Paris 286 (1978) 799–801,

après que **Emery** ait introduit des normes maniables sur les semimartingales.

On doit à ce dernier l'introduction systématique de topologies à caractère 'local' (en particulier, la plus simple de toutes: notre topologie ucp); voir

> **M. Emery,** *Une topologie sur l'espace des semimartingales,* Séminaire Probabilités XIII, Lecture Notes in Mathematics 721, pp. 260–280, Springer, Berlin, 1979.

L'idée de localiser sur des intervalles du type $[\![0, T[\![$ au lieu du type $[\![0, T]\!]$ (qui est celui rencontré en théorie des martingales locales) remonte en fait à

> **M. Kazamaki,** *Changes of time, stochastic integrals, and weak martingales,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 22 (1972) 25–32,

mais ne s'était révélée efficace qu'après l'introduction d'une classe spéciale de semimartingales dans

C. Yoeurp, *Décompositions des martingales locales et formules exponentielles*, Séminaire Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics 511, pp. 432–480, Springer, Berlin, 1976,

étudiée de manière détaillée par **Meyer**. Ceci dit, l'introduction de bonnes topologies sur les semimartingales permet d'étudier la stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques dans

P. Protter, *H^p-stability of solutions of stochastic differential equations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 44 (1978) 337–352,

M. Emery, *Equations différentielles lipschitziennes. Etude de la stabilité*, Séminaire Probabilités XIII, Lecture Notes in Mathematics 721, pp. 281–293, Springer, Berlin, 1979.

Signalons encore, sur les équations différentielles stochastiques, les travaux de **Métivier** et **Pellaumail** (référence plus loin) et

H. Doss and **E. Lenglart,** *Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles stochastiques*, Ann. Inst. Henri Poincaré XIV (1978) 189–214,

où l'on montre en particulier que la résolution de certaines équations différentielles stochastiques se ramène à celle d'équations différentielles ordinaires. Enfin, l'équation définissant 'l'exponentielle' d'une semimartingale a été la première étudiée (**Doléans-Dade**, 1970) et a suscité de nombreux travaux.

L'intégrale à la Riemann présentée dans notre exposé n'a, pour les spécialistes, qu'un intérêt essentiellement pédagogique. Je tiens cependant à remercier **Lenglart** pour le partage de ce souci pédagogique: il m'a bien aidé à surmonter quelques points épineux, insoupçonnés dans mes nombreux exposés oraux. Je signale au passage que **Pellaumail** a été le premier à définir le crochet droit à l'aide de l'i.s. Par ailleurs, **Bichteler** (locus cité) a montré que l'on avait, pour Y càglàd, une approximation de $\int Y\,\mathrm{d}X$ pour la *convergence p.s.* par des sommes riemanniennes plus sophistiquées que les nôtres. Enfin, Meyer m'a signalé que **Brennan** avait aussi défini récemment une intégrale de Riemann par rapport à une quasimartingale.

Avant de donner une liste de monographies récentes sur le sujet, j'ajouterai encore quelques mots sur des développements en cours de la théorie pour lesquels on trouvera des références dans le volume XIV du Séminaire de Probabilités de Strasbourg. D'abord, l'étude du comportement des semimartingales après grossissement de la filtration, mise en oeuvre depuis plusieurs années par **Barlow**, **Jeulin**, **Meyer** et **Yor** (avec une modeste contribution de ma part); puis l'extension du domaine de validité de l'i.s. par **Yor** (au delà de la prévisibilité) et par **Jacod** (au delà de la bornitude locale), étudiée par **Mémin** et **Yan**. Enfin, **Schwartz** est en train de développer le calcul différentiel stochastique sur les variétés, ce qui a suscité de nouveaux travaux sur les semimartingales, définies seulement sur une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (**Schwartz, Meyer, Stricker**).

A seigneur tout honneur, nous commencerons notre liste de monographies par

> **P. A. Meyer,** *Un cours sur les intégrales stochastiques,* Séminaire Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics 511, pp. 246–400, Springer, Berlin, 1976,

qui a redonné une impulsion à l'étude du sujet dans toutes ses dimensions. La palme pédagogique revient cependant à

> **M. Métivier,** *Reelle und Vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der Stochastischen Integration,* Lecture Notes in Mathematics 607, Springer, Berlin, 1977,

qui traite aussi des semimartingales à valeurs hilbertiennes. Un ouvrage tout récent, qui donne la vue la plus complète du calcul stochastique et de ses applications à l'heure actuelle,

> **J. Jacod,** *Calcul stochastique et Problèmes de martingales,* Lecture Notes in Mathematics 714, Springer, Berlin, 1979.

Enfin, seront parus quand paraitront ces lignes

> **C. Dellacherie** and **P. A. Meyer,** *Probabilités et Potentiel,* volume 2, chapitres V à VIII, Hermann, Paris,

qui n'aborde pas les équations différentielles, au contraire de

> **M. Métivier** and **J. Pellaumail,** *Stochastic Integrations,* Academic Press, New York,

et aussi, ouvrage dont je ne connais pas le contenu,

> **M. M. Rao,** *Stochastic Processes and Integration,* Noordhoff, Groningen.