MATHEMATICS

MESURES p-ADIQUES A DENSITE

BY

DANIEL BARSKY

(Communicated by Prof. T. A. SPRINGER at the meeting of February 28, 1976)

RÉSUMÉ

On caractérise un sous espace du dual des fonctions continues sur un anneau local à valeurs dans le corps des fractions de cet anneau. L'intérêt de cette étude provient du lien étroit que existe entre ce sous espace et les éléments analytiques p-adiques au sens de Krasner sur le disque unité ouvert de C_p.

INTRODUCTION

Soit A un anneau local, et soit K son corps des fractions. Les mesures sont les éléments du dual topologique $\mathscr{C}'(A, K)$ de l'espace $\mathscr{C}(A, K)$ des fonctions continues de A dans K muni de la norme de la convergence uniforme sur A. Soit $\varphi_{x,h}(y) \in \mathscr{C}(A, K)$ la fonction caractéristique de la boule $\mathrm{B}(x, h)$ de centre $\mathrm{x} \in A$ et de rayon q^{-h}. Une mesure qui vérifie: $\lim_{h\to+\infty} (\mu|\varphi_{x,h})$ existe pour tout $\mathrm{x} \in A$, est une mesure à densité sur A. On étudie le sous espace $D'(A, K)$ des mesures à densité sur A. On décrit complétement $D'(A, K)$ (théorème 2 et 3). Pour effectuer cette description on donne une démonstration du théorème d'Urysohn p-adique. On montre aussi que le produit de convolution des mesures à densité n'est pas une opération interne de $D'(A, K)$ et qu'il existe des mesures à densité qui ne sont pas des limites uniformes de combinaisons linéaires finies de mesures de Dirac (corollaire de la proposition 8). L'intérèt des mesures à densité provient des faits suivants, exposés dans [4]. A toute série de Taylor $F(X) \in \mathbb{C}_p[[X]]$ ($\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$), convergeant dans le disque $\{|X|<1\}$, on peut associer une mesure $\mu_F \in \mathscr{C}'(\mathbb{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$. Les éléments analytiques au sens de Krasner sur le disque ouvert $\{|X|<1\}$ sont caractérisés par des propriétés de densité de la mesure associée. L'étude des mesures à densité a été commencée par Yvette Amice [2].

NOTATIONS. K est un corps local d'anneau des entiers A, d'idéal maximal $\underline{m}$, de corps résiduel $\underline{k}=A/\underline{m}$. Le cardinal de $\underline{k}$ est $q=p^f$ où p est un nombre premier. On note π une uniformisante locale de K, la valeur absolue $|\cdot|$ sur K est normalisée par $|\pi|=q^{-1}$ et la valuation $v(\cdot)$ est normalisée par $v(\pi)=1$. $\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs, si $n \in \mathbb{Z}$ on note $v_q(n)$ l'exposant de la plus haute puissance de q qui divise n.

Une suite très bien répartie bien ordonnée de A (en abrégé T.B.R.B.O.) est une suite $U=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A ($\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls) telle que $v(a_n-a_m)=v_q(n-m)$ pour tout couple $(n, m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ [6]. Si $M\subset K$ on note $\mathscr{C}(M, K)$ l'espace des fonctions continues de M dans K muni de la norme de la convergence uniforme sur M. On pose $|f|=\operatorname{Sup}_{x\in M}|f(x)|$. On désigne par $\mathscr{C}'(M, K)$ le dual topologique de $\mathscr{C}(M, K)$ muni de la norme habituelle, si $\mu\in\mathscr{C}'(M, K)$, $\|\mu\|=\operatorname{Sup}_{f\in\mathscr{C}(M,K)-\{0\}}|(\mu|f)|/|f|$ où l'on note $(\mu|f)$ l'action de μ sur f. La boule de centre x et de rayon q^{-h} est notée $\mathrm{B}(\mathrm{x}, h)$, sa fonction caractéristique $\varphi_{x,h}(y)\in\mathscr{C}(A, K)$. Si $U=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite T.B.R.B.O. de A on note $\varphi_n(x)$ la fonction caractéristique de $B(u_n, l(n)+1)$ où

$$l(n)=\left[\frac{\operatorname{Log}(n)}{\operatorname{Log}(q)}\right]$$

(si a est un nombre réel, $[a]$ est la partie entière de a, c'est à dire que $a\in\mathbf{N}$ et $a-1<[a]\leqslant a$), et φ_n^* est l'élément de $\mathscr{C}'(A, K)$ tel que $(\varphi_n^*, \varphi_m)=\delta_{n,m}$ (symbole de Kronecker). On note $\psi_{n,h}(y)$ la fonction caractéristique de la boule $B(\mathrm{u}_n, h)$.

On montre facilement à l'aide de la proposition 1 de [8] que $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, si $U=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite T.B.R.B.O. de A, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ forme une base normale de $\mathscr{C}(A, K)$ c'est à dire que, si $f\in\mathscr{C}(A, K)$, il existe une suite unique $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de K telle que $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$,

$$f(\mathrm{x})=\sum_{n\geqslant 0}a_n\varphi_n(x) \text{ et } |f|=\operatorname{Sup}_{n\geqslant 0}|a_n|.$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\varphi_n(x)$ est la représentation de $f\in\mathscr{C}(A, K)$ alors $a_n=f(u_n)-f(u_{n'})$ où n' est défini par $0\leqslant n'<q^{l(n)}$ et $v_q(n-n')={}^{l}(n)$ autrement dit si, $n=n_0+n_1q+\ldots+n_{l(n)}q^{l(n)}$, $n'=n-n_{l(n)}q^{l(n)}$. Dans la suite la notation n' désignera l'entier $n-n_{l(n)}q^{l(n)}$.

1. DÉFINITION

DÉFINITION 1. Un élément $\mu\in\mathscr{C}'(A, K)$ est une mesure à densité sur A si, pour tout x de A, il existe un élément $d_\mu(\mathrm{x})$ de K tel que: $\lim_{h\to+\infty}(\mu|\varphi_{x,h})=d_\mu(x)$.

On notera $D'(A, K)$ l'espace des mesures à densité sur A, $d_\mu(\mathrm{x})$ est la fonction densité associée à μ.

EXEMPLE. Notons δ_x la mesure de dirac au point $x\in\mathbf{Z}_p$, c'est à dire que, si $f\in\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$, $(\delta_x|f)=f(x)$. Soit $(\alpha(n))_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de $\mathbf{Z}_p$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0. Il est clair que $\mu=\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n\delta_{\alpha(n)}$ est une mesure à densité sur $\mathbf{Z}_p$ et que $d_\mu(x)=0$ si $x\notin(\alpha(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et si $x=\alpha(n)$ alors $d_\mu(x)=\lambda_n$. Les mesures de ce type seront appelées des mesures discrètes.

Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite T.B.R.B.O. de A, posons $b_n=(\mu|\varphi_n)$. On sait que l'on peut écrire $\mu=\sum_{m\geqslant 0}b_m\varphi_m^*$ avec $\operatorname{Sup}_{m\geqslant 0}|b_m|=\|\mu\|$. (La série du second membre convergeant simplement sur $\mathscr{C}(A, K)$). Réciproquement toute suite bornée d'éléments de K, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, définit une mesure μ sur $\mathscr{C}(A, K)$ en posant $\mu = \sum_{m\geqslant 0} b_m\varphi_m^*$ ([8]).

Si $f \in \mathscr{C}(A, K)$ il existe une unique suite de scalaires, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n\varphi_n(x)$, alors on a $(\mu|f) = \sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$. Rappelons la définition du produit tensoriel de deux mesures ainsi que celle du produit de convolution de deux mesures ([2]).

Définition 2 ([2]). Si μ et ν appartiennent à $\mathscr{C}'(A, K)$, leur produit tensoriel $\mu \otimes \nu$ est l'unique forme linéaire sur $\mathscr{C}(A, K) \otimes \mathscr{C}(A, K) \simeq \simeq \mathscr{C}(A \times A, K)$ définie par $(\mu \otimes \nu|f\cdot g) = (\mu|f)(\nu|g)$ (où $f\cdot g(x, y) = f(x)g(y)$) et prolongée par continuité sur $\mathscr{C}(A \times A, K)$.

Définition 3 ([2]). Si μ et ν appartiennent à $\mathscr{C}'(A, K)$, leur produit de convolution $\mu \star \nu$ est l'élément de $\mathscr{C}'(A, K)$ défini par $(\mu \star \nu|f) = = (\mu \otimes \nu|\tilde{f})$ où $\tilde{f}(x, y) = f(x+y)$.

La valeur de $\mu \star \nu$ sur une fonction caractéristique de boule est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1. Soient μ et ν deux mesures de $\mathscr{C}'(A, K)$ et $U = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite T.B.R.B.O. de A, alors: $(\mu \star \nu|\varphi_{x,h}) = \sum'_{x,n,m} (\mu|\psi_{n,h})(\nu|\psi_{m,h})$, le signe $\sum'_{x,n,m}$ indique que la sommation porte sur les indices m et n tels que: $0 \leqslant m, n < q^h$ et $|u_n + u_m - x| \leqslant q^{-h}$.

Il suffit de montrer que $\varphi_{x,h}(y+z) = \sum'_{x,n,m} \psi_{n,h}(y)\psi_{m,h}(z)$ donc il suffit de montrer que les deux membres sont nuls ou égaux à 1 simultanément. Or $\varphi_{x,h}(y+z) = 1$ si $|x-y-z| \leqslant q^{-h}$. Soient $h(y)$ et $h(z)$ deux entiers tels que $0 \leqslant h(y), h(z) < q^h$, $|u_{h(y)} - y| \leqslant q^{-h}$ et $|u_{h(z)} - z| \leqslant q^{-h}$. On a, pour $0 \leqslant n, m < q^h$, $\psi_{n,h}(y) = 0$ si $n \neq h(y)$, $\psi_{n,h}(y) = 1$ si $n = h(y)$, $\psi_{m,h}(z) = 0$ si $m \neq h(z)$ et $\psi_{m,h}(z) = 1$ si $m = h(z)$. Si $|u_n + u_m - x| \leqslant q^{-h}$ $(0 \leqslant n, m < q^h)$ alors $|x-y-z| \leqslant \leqslant q^{-h}$ est équivalent à $|u_n + u_m - y - z| \leqslant q^{-h}$ et par conséquent

$$\sum'_{x,n,m} \psi_{n,h}(y)\psi_{m,h}(z) = 0$$

si $|x-y-z| > q^{-h}$. Si $|x-y-z| \leqslant q^{-h}$, $|u_{h(y)} + u_{h(z)} - y - z| \leqslant q^{-h}$ donc le terme $\psi_{h(y),h}(y)\psi_{h(z),h}(z)$ figure dans la somme $\sum'_{x,n,m} \psi_{n,h}(y)\psi_{m,h}(z)$ et pour tout autre terme de la somme on a $n \neq h(y)$ ou $m \neq h(z)$ donc $\sum'_{x,n,m} \psi_{n,h}(y)\psi_{m,h}(z) = 1$. La proposition est démontrée.

2. MESURES A DENSITÉ

Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite T.B.R.B.O. de A, rappelons [4] que la meilleure suite extraite de U convergeant vers $x \in A$ est définie par: $h \to u_{h(x)}$ avec $0 \leqslant h(x) < q^h$ et $|u_{h(x)} - x| \leqslant q^{-h}$. La notation $(u_{h(x)})_{h\geqslant 0}$ désignera la meilleure suite extraite de U convergeant vers x.

Proposition 2. Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite T.B.R.B.O. de A. Soit $\mu = \sum_{n\geqslant 0} b_n\varphi_n^*$ une mesure sur $\mathscr{C}(A, K)$, μ est à densité au point x de A

si et seulement si la limite suivante existe:

$$d_\mu(x) = \lim_{h\to+\infty} (b_{h(x)} - \sum_{q^h>q^k>h(x)} \sum_{i=1}^{q-1} b_{h(x)+iq^k})$$

où $(u_{h(x)})_{h\geqslant 0}$ est la meilleure suite extraite de U convergeant vers x.

Si $x \in A$ on a

$$\varphi_{x,h} = \psi_{h(x),h} \text{ et } \psi_{h(x),h} = \varphi_{h(x)} - \sum_{q^h>q^k>h(x)} \sum_{i=1}^{q-1} \varphi_{h(x)+iq^k}.$$

En effet $\varphi_{x,h} = \sum_{n=0}^{q^h-1} a_n\varphi_n$ avec $a_n = \varphi_{x,h}(u_n) - \varphi_{x,h}(u_{n'})$ et par conséquent $(\mu|\varphi_{x,h}) = b_{h(x)} - \sum_{q^h>q^k>h(x)} \sum_{i=1}^{q-1} b_{h(x)+iq^k}$, d'où la proposition.

Corollaire. Soient U une suite T.B.R.B.O. de A et μ une mesure à densité sur A. Si $\mu = \sum_{n\geqslant 0} b_n\varphi_n^*$ alors, pour tout entier $k \geqslant 0$, $\lim_{h\to+\infty} (b_{k+q^h} + b_{k+2q^h} + \ldots + b_{k+(q-1)q^h}) = 0$.

En effet $d_\mu(u_k) = \lim_{h\to+\infty} (b_k - \sum_{q^h>q^l>k} \sum_{i=0}^{q-1} b_{k+iq^l})$.

Proposition 3. Si μ est une mesure à densité sur A, alors d_μ est une limite simple sur A de fonctions continues sur A.

Evident. Si $M \subset K$, on notera $B_1(M, K)$ l'espace des fonctions bornées de M dans K qui sont limites simples sur M de suites de fonctions continues de M dans K.

Lemme 1. Soit U une suite T.B.R.B.O. de A et soit $\mu = \sum_{n\geqslant 0} b_n\varphi_n^*$ une mesure à densité sur A. La fonction D_μ de U dans K, définie par $u_n \to D_\mu(u_n) = b_n$, peut être prolongée sur A en une fonction de $B_1(A, K)$ en posant $D_\mu(x) = \lim_{h\to+\infty} \sum_{n=0}^{q^h-1} b_n\psi_{n,h}(x)$. Si $x \notin U$, $D_\mu(x) = d_\mu(x)$.

La fonction D_μ dépend donc de U. Il suffit de montrer que, pour tout point x de A, la limite suivante existe $\lim_{h\to+\infty} b_{h(x)} = \lim_{h\to+\infty} D_\mu(u_{h(x)})$. En effet $b_{h(x)} = D_\mu(u_{h(x)}) = \sum_{n=0}^{q^h-1} D_\mu(u_n)\psi_{n,h}(x)$. Si $x \in U$ la suite $h \to u_{h(x)}$ est stationnaire dès que h est assez grand. Si $x \notin U$ la suite $h \to u_{h(x)}$ n'est pas stationnaire, donc pour tout entier n il existe $h \geqslant n$ tel que $u_{h(x)} \neq u_{(h+1)(x)}$. Ceci entraine que $q^h \leqslant (h+1)(x) < q^{h+1}$ et par conséquent $(\mu|\varphi_{x,h+1}) = (\mu|\psi_{(h+1)(x),h+1}) = (\mu|\varphi_{(h+1)(x)}) = b_{(h+1)(x)}$. Comme ces égalités sont vérifiées pour une infinité de valeurs de h, toutes celles telles que $(h+1)(x) \neq h(x)$, on a bien: $\lim_{h\to+\infty} b_{(h+1)(x)} = \lim_{h\to+\infty} (\mu|\varphi_{x,h+1}) = d_\mu(x)$. Comme d'autre part l'application $x \to \sum_{n=0}^{q^h-1} b_n\psi_{n,h}(x) = b_{h(x)} \in \mathscr{C}(A, K)$, on a démontré que $D_\mu \in B_1(A, K)$ et que $D_\mu(x) = d_\mu(x)$ si $x \notin U$.

Proposition 4. Soit μ une mesure à densité sur A. La fonction densité d_μ associée à μ est nulle en tout point où elle est continue. L'ensemble des points où d_μ n'est pas nulle est contenu dans un ensemble maigre.

On sait [7] que l'ensemble des points de discontinuité de d_μ est un ensemble maigre car $d_\mu \in B_1(A, K)$. Soit U une suite T.B.R.B.O. de A. Montrons que la fonction D_μ associée à U et à μ est nulle en tout point où elle est continue. Si l'on montre ceci, il est clair que d_μ est nulle sur le complémentaire d'un ensemble maigre car $D_\mu \in B_1(A, K)$ et U est maigre. Par conséquent d_μ est nulle sur un ensemble partout dense dans A et donc nulle en tout point de continuité.

Il reste à montrer que D_μ est nulle en tout point de continuité. Nous distinguerons deux cas suivant que le point de continuité appartient ou n'appartient pas à U. Soit $u_k \in U$ un point de continuité de D_μ. On a $\lim_{h\to+\infty} D_\mu(u_{k+iq^h}) = D_\mu(u_k)$ donc $\lim_{h\to+\infty} b_{k+iq^h} = b_k$. Or le corollaire de la proposition 2 montre que $\lim_{h\to+\infty} (\sum_{i=1}^{q-1} b_{k+iq^h}) = 0$ donc $|(q-1)b_k| \leqslant \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, et par conséquent $b_k = 0$. Soit $x \notin U$ un point de continuité de D_μ. Soit η un réel positif tel que $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |D_\mu(x) - D_\mu(y)| \leqslant \varepsilon$. Choisissons $u_k \in U$ tel que $|x - u_k| \leqslant \eta$, choisissons h de telle sorte que $|u_{k+iq^h} - u_k| \leqslant \eta$ et $|\sum_{i=1}^{q-1} b_{k+iq^h}| \leqslant \varepsilon$ avec $q^h > k$ (corollaire de la proposition deux). On a donc $|\sum_{i=1}^{q-1} D_\mu(u_{k+iq^h})| \leqslant \varepsilon$ et donc $|(q-1)D_\mu(x)| \leqslant \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, par conséquent $D_\mu(x) = 0$. La proposition est démontrée.

Proposition 5. Soit $D'(A, K)$ l'espace des mesures à densité sur A. L'application d de $D'(A, K)$ dans $B_1(A, K)$, définie par $\mu \to d_\mu$, est injective.

Remarquons que d est une application K-linéaire. Il suffit donc de montrer que $d_\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$ ou encore que, si $U = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite T.B.R.B.O. de A, $d_\mu = 0 \Rightarrow (\mu|\varphi_{n,h}) = 0$ pour tout entier $h \geqslant 0$ et tout entier n compris entre 0 et $q^h - 1$. Soit B une boule contenue dans A. Pour tout $x \in B$, il existe une boule $B(x) \subset B$ telle que $|(\mu|B(x))| \leqslant \varepsilon$ (on confond ici la boule $B(x)$ avec sa fonction caractéristique) puisque $d_\mu = 0$. On obtient ainsi un recouvrement de B dont on extrait un sous-recouvrement fini par n boules 2 à 2 disjointes $B(x_1), \ldots, B(x_n)$. On a $(\mu|B) = \sum_{i=1}^{n} (\mu|B(x_i))$ et par conséquent $|(\mu|B)| \leqslant \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $(\mu|B) = 0$ pour toute boule B de A. Par conséquent $\mu = 0$.

Nous allons préciser l'énoncé de la proposition 4. Pour cela nous allons donner une démonstration du théorème d'Urysohn p-adique. Cette démonstration nous sera utile. (Une démonstration a été donnée par Ellis [5] dans un cas plus général).

Théorème d'Urysohn 1. Soit F un ensemble fermé de A. Toute fonction $f \in \mathscr{C}(F, K)$ peut s'étendre en une fonction $\bar{f} \in \mathscr{C}(A, K)$. On peut choisir $\bar{f}$ de telle sorte que:

1) $\operatorname{Sup}_{x\in F} |f(x)| = \operatorname{Sup}_{x\in A} |\bar{f}(x)|$.
2) L'application $f \to \bar{f}$ est K-linéaire.

Construisons par récurrence une suite T.B.R.B.O. de A, $U = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, telle que: si $B(u_n, h) \cap F \neq \emptyset$ $(0 \leqslant n < q^h)$ alors $u_n \in F$. On choisit u_0 arbitrairement dans F. Supposons la suite construite jusqu'à l'indice $q^h - 1$ et construisons la jusqu'à l'indice $q^{h+1} - 1$. On a

$$A - \bigcup_{0 \leqslant n < q^h} B(u_n, h+1) = \bigcup_{q^h \leqslant i < q^{h+1}} B(v_i, h+1)$$

où les v_i $(q^h \leqslant i < q^{h+1})$ sont rangés de telle sorte que $v(v_i - v_j) = v_q(i-j)$ $(q^h \leqslant i, j < q^{h+1})$ et $v(u_i - v_j) = v_q(i-j)$ $(0 \leqslant i < q^h \leqslant j < q^{h+1})$. (On sait que c'est toujours possible [1]). Si $B(v_i, h+1) \cap F = \emptyset$ on pose $u_i = v_i$ si $B(v_i, h+1) \cap$ $\cap F \neq \emptyset$ on choisit arbitrairement u_i dans $B(v_i, h+1) \cap F$. Soit alors $f \in \mathscr{C}(F, K)$. Nous construirons $\bar{f}$ sur U et nous montrerons que $\bar{f}$ peut se prolonger en une fonction de $\mathscr{C}(A, K)$. On pose $\bar{f}(u_0) = f(u_0)$. Supposons que l'on ait construit $\bar{f}(u_n)$ pour $n < m$. Construisons $\bar{f}(u_m)$ de la manière suivante. Si $u_m \in F$ on pose $\bar{f}(u_m) = f(u_m)$. Si $u_m \notin F$, définissons un entier m', par $0 \leqslant m' < q^{l(m)}$ et $v_q(m-m') = l(m)$, et posons $\bar{f}(u_m) = \bar{f}(u_{m'})$. Remarquons que $\bar{f}$ est localement constante sur $U \cap (A-F)$. En effet, si $u_n \in A-F$, il existe un entier h tel que $B(u_n, h) \subset A-F$ donc, si $|u_n - u_m| \leqslant q^h$, on a $\bar{f}(u_n) = \bar{f}(u_m)$. On peut prolonger $\bar{f}$ en une fonction de $\mathscr{C}(A, K)$, notée encore $\bar{f}$, localement constante sur $A-F$ et telle que $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in F$. En effet si $x \in A-F$ il existe un entier h tel que $B(x, h) \subset A-F$ et si $u_n \in B(x, h)$ alors $u_n \in A-F$, donc $\bar{f}(u_n) = \bar{f}(u_{h(x)})$. On peut donc poser $\bar{f}(x) = \bar{f}(u_{h(x)})$. La fonction $\bar{f}$ est localement constante sur $A-F$ et donc continue sur $A-F$. Posons, si $x \in F$, $\bar{f}(x) = f(x)$ et montrons que $\bar{f}$ est continue au point x. Soit ε un nombre réel positif, il existe par définition h tel que, pour tout $y \in F \cap B(x, h)$, $|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| =$ $= |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Soit maintenant $z \in B(x, h)$ et $z \notin F$, alors $u_{h(z)} = u_{h(x)}$ et comme $u_{h(x)} \in B(x, h) \cap F$ on a $|f(u_{h(x)}) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Comme, par construction, $\bar{f}(z) = f(u_{h'(z)})$ où $u_{h'(z)} \in F$ et $u_{(h'+1)(z)} \notin F$ (donc $u_{h'(z)} \in B(x, h)$), on a donc $|f(u_{h'(z)}) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ et donc $|\bar{f}(z) - \bar{f}(x)| \leqslant \varepsilon$. Il est immédiat que $\mathrm{Sup}_{x \in F} |f(x)| = \mathrm{Sup}_{x \in A} |\bar{f}(x)|$. Montrons que le prolongement $f \to \bar{f}$, ainsi construit est K-linéaire si la suite U associée à F est fixée. Si $x \in F$ il est clair que $\overline{f+g}(x) = \bar{f}(x) + \bar{g}(x)$ et que, si $\lambda \in K$, $\overline{\lambda f}(x) = \lambda \bar{f}(x)$. Si $x \in A-F$, soit h le plus grand entier tel que $u_{h(x)} \in F$, par construction de $\bar{f}$ on a $\bar{f}(x) = f(u_{h(x)})$ et par conséquent $(\overline{f+g})(x) = (f+g)(u_{h(x)})$. Donc $\bar{f}(x) + \bar{g}(x) =$ $= (\overline{f+g})(x)$. On montre de même que $\lambda \bar{f}(x) = (\overline{\lambda f})(x)$ pour $\lambda \in K$.

Soient F un sous ensemble fermé de A et U une suite T.B.R.B.O. de A associée à F par la construction précédente. On réservera la notation $\bar{f}$ au prolongement à A de $f \in \mathscr{C}(F, K)$ associé à U par la construction précédente.

Proposition 6. Soit $\mu \in \mathscr{C}'(A, K)$, soit F un sous-ensemble fermé de A, soit $U = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite T.B.R.B.O. de A associée à F par la construction précedente. La mesure $\bar{\mu} \in \mathscr{C}'(F, K)$ définie en posant $(\bar{\mu}|f) = (\mu|\bar{f})$, où $f \in \mathscr{C}(F, K)$ et où $\bar{f}$ est le prolongement de f à A associé à U par le théorème 1, est telle que $\|\bar{\mu}\| = \|\mu\|$.

Bien entendu, $\bar{\mu}$ dépend de U. Cette proposition découle immédiatement du théorème 1.

Soit F un sous-ensemble fermé de A. Notons $\chi_{x,h}$ la fonction caractéristique, dans $\mathscr{C}(F, K)$, de la boule $B(x, h) \cap F$ $(x \in F)$. *On dit que la mesure* $\nu \in (F, K)$ *est à densité sur* F *si et seulement si la limite suivante existe*: $\lim_{h \to +\infty} (\nu|\chi_{x,h}) = d_\nu(x)$.

Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite T.B.R.B.O. de A associée à F par la construction du théorème 1. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la base normale de $\mathscr{C}(A, K)$, constituée de fonctions caractéristiques de boules, associée à U. Il est facile de voir que les restrictions à F des fonctions φ_n, telles que $B(u_n, l(n)+1) \cap \cap F \neq \emptyset$, forment une base normale de $\mathscr{C}(F, K)$. On notera $N(F)$ l'ensemble des entiers n tels que $B(u_n, l(n)+1) \cap F \neq \emptyset$. Les restrictions de φ_n à F pour $n \in N(F)$ seront encore notées φ_n. On notera, pour $n \in N(F)$, φ_n^* les éléments du dual $\mathscr{C}'(F, K)$ de $\mathscr{C}(F, K)$ tels que $(\varphi_n^*|\varphi_m)=\delta_{n,m}$ si n et m appartiennent à $N(F)$. Toute mesure $\nu \in \mathscr{C}'(F, K)$ peut se développer de la manière suivante: $\nu=\sum_{n\in N(F)} b_n\varphi_n^*$ avec $\operatorname{Sup}_{n\in N(F)} |b_n|=\|\nu\|$ et $b_n=(\nu|\varphi_n)$. Il est immédiat de voir que, si $f \in \mathscr{C}(F, K)$ et $f=\sum_{n\in N(F)} a_n\varphi_n$, on peut prolonger f à A en posant, pour $x \in A$, $f(x)=\sum_{n\in N(F)} a_n\varphi_n(x)$ et que ce prolongement coïncide avec le prolongement $\tilde{f}$ de f associé à U par le théorème 1. On peut donc poser $a_n=0$ si $n \notin N(F)$, on fera cette convention désormais. De même si $\nu \in \mathscr{C}'(F, K)$, $\nu=\sum_{n\in N(F)} b_n\varphi_n^*$, on peut convenir que $b_n=0$ si $n \notin N(F)$ et donc poser $\nu=\sum_{n\geqslant 0} b_n\varphi_n^*$, avec cette convention, que l'on fera désormais, ν peut être considéré comme un élément de $\mathscr{C}'(A, K)$ et $\nu=\bar{\nu}$ où $\bar{\nu}$ a été défini à la proposition 6. On montre comme à la proposition 2 que: $(\nu|\chi_{x,h})=b_{h(x)}-\sum_{q^h>q^k>h(x)} \sum_{t=1}^{q-1} b_{h(x)+tq^k}$. Si ν est à densité sur F et si $d_\nu(x)$ est la fonction densité associée à ν on a: $d_\nu(x)=\lim_{h\to+\infty} \sum'^{q^h-1}_{n=0} (\nu|\psi_{n,h})\psi_{n,h}(x)$ ($x \in F$, et $\sum'$ indique que $n \in N(F)$), donc $d_\nu \in B_1(F, K)$ et $d_\nu(x)=\lim_{h\to+\infty} b_{h(x)}-\sum_{q^h>q^k>h(x)} \sum_{t=1}^{q-1} b_{h(x)+tq^k}$. On peut associer à d_ν et à U la fonction D_ν définie par: $D_\nu(x)=\lim_{h\to+\infty} \sum_{n=0}^{q^h-1} b_n\psi_{n,h}(x)$ où $x \in F$, $\psi_{n,h}$ est la restriction à F de la fonction $\psi_{n,h} \in \mathscr{C}(A, K)$. On montre comme précedemment que $D_\nu \in B_1(F, K)$ et que $d_\nu(x)=D_\nu(x)$ si $x \notin U$. Supposons maitenant que F soit parfait [7] ou [3]. On montre alors en utilisant la proposition 4 que D_ν est nulle en tout point de continuité et que d_ν est aussi nulle en tout point où elle est continue. Il suffit de remarquer que, compte tenu de la convention précédente, on peut considérer ν comme une mesure de $D'(A, K)$ et que F est fermé sans points isolés.

Lemme 2. Soit F un sous-ensemble parfait de A, soit U une suite T.B.R.B.O. de A associée à F par le théorème 1, soit $\mu \in D'(A, K)$. La mesure $\bar{\mu} \in \mathscr{C}'(F, K)$ associée à U et F par la proposition 6 est à densité sur F. La fonction densité $d_{\bar{\mu}}$ associée à $\bar{\mu}$ est la restriction à F de la fonction densité d_μ associée à μ.

Ce lemme montre donc que, bien que $\bar{\mu}$ dépende de U, $d_{\bar{\mu}}$ ne dépend pas de U; $d_{\bar{\mu}}$ ne dépend que de F et μ.

On a par définition si $x \in F$: $(\bar{\mu}|\varphi_{x,h})=(\mu|\bar{\varphi}_{x,h})$, or $\bar{\varphi}_{x,h}=\varphi_{x,h'}$ avec $h'=\operatorname{Sup}_y (v(x-y)-1)$ où $y \in F$ et $y \notin B(x, h) \cap F$. Comme F est parfait $\lim_{h\to+\infty} h'=+\infty$ et le lemme est démontré.

Lemme 3. Soit F un sous-ensemble parfait de A et soit $\mu \in D'(A, K)$. La fonction densité d_μ est nulle en tout point de F où elle est continue par rapport à F.

Rappelons que l'on dit que d_μ est continue en un point de F par rapport à F si la restriction de d_μ à F est continue en ce point.

Construisons une suite T.B.R.B.O. de A associée à F par le théorème 1, soit U cette suite. Soit $\bar{\mu} \in D'(F, K)$ associée à μ et à U par la proposition 6. On sait que $d_{\bar{\mu}} \in B_1(F, K)$, que $d_{\bar{\mu}}$ est nulle en tout point de continuité et que $d_{\bar{\mu}}$ est la restriction à F de d_μ. Le lemme est démontré.

THÉOREME 2. Soit $\mu \in D'(A, K)$. La fonction densité d_μ associée à est nulle sauf sur un sous-ensemble dénombrable de A.

Si f est une fonction bornée de A dans K et si F est un sous-ensemble de A, l'oscillation de f au point $e \in \bar{F}$ (adhérence de F) par rapport à F est défini par $\omega(f, x, F) = \lim_{h \to +\infty} \operatorname{Sup} |f(z) - f(y)|$ le Sup étant pris sur les couples $(y, z) \in (B(x, h) \cap F) \times (B(x, h) \cap F)$ (cf. [3] ou [4]). Soit i un entier, posons: $P_{i(1)} = \{x \in A\,;\, \omega(d_\mu, x, A) \geqslant q^{-i}\}$. Appelons $P^{\Omega}_{i(1)}$ le plus grand ensemble parfait contenu dans $P_{i(1)}$ (éventuellement $P^{\Omega}_{i(1)} = \emptyset$) ([3] ou [7]). Définissons, par récurrence sur les ordinaux dénombrables, $P_{i(\alpha)}$ (α est un ordinal dénombrable). Si α est accessible, donc si $\alpha - 1$ existe,

$$P_{i(\alpha)} = \{x \in P^{\Omega}_{i(\alpha-1)}\,;\, \omega(d_\mu, x, P^{\Omega}_{i(\alpha-1)}) \geqslant q^{-i}\}.$$

Si α est inaccessible, donc si $\alpha - 1$ n'existe pas,

$$P_{i(\alpha)} = \bigcap_{\alpha' < \alpha} P_{i(\alpha')} = \bigcap_{\alpha' < \alpha} P^{\Omega}_{i(\alpha')}.$$

On désigne par $P^{\Omega}_{i(\gamma)}$ le plus grand ensemble parfait contenu dans l'ensemble fermé $P_{i(\gamma)}$ (éventuellement $P^{\Omega}_{i(\gamma)} = \emptyset$) ([3] ou [7]). Comme $d_\mu \in B_1(A, K)$, on sait ([3], [4], ou [7]) qu'il existe un ordinal dénombrable accessible $\beta(i)$ tel que $P_{i(\beta(i)-1)} \neq \emptyset$ et $P_{i(\alpha)} = \emptyset$ pour tout ordinal dénombrable $\alpha \geqslant \beta(i)$. Appelons $R(i)$ l'ensemble $R(i) = \{x \in A\,;\, |d_\mu(x)| \geqslant q^{-i}\}$. Comme d_μ est nulle sur un ensemble partout dense de A (proposition 4) il est clair que $R(i) \subset P_{i(1)}$. Il n'est pas possible qu'il existe un élément $y \in R(i)$ tel que $y \in P^{\Omega}_{i(\alpha)}$ pour tout $\alpha < \beta(i)$. En effet ou bien $P^{\Omega}_{i(\beta(i)-1)} = \emptyset$ ou bien $y \in P^{\Omega}_{i(\beta(i)-1)}$ or $\omega(d_\mu, y, P^{\Omega}_{i(\beta(i)-1)}) \geqslant q^{-i}$ car d_μ est nulle en tout point de continuité par rapport à $P^{\Omega}_{i(\beta(i)-1)}$ (lemme 3) et les points de continuité de d_μ par rapport à $P^{\Omega}_{i(\beta(i)-1)}$ en constituent un sous-ensemble dense. Par conséquent $P_{i(\beta(i))}$ ne serait pas vide. Donc $R(i) \subset \bigcup_{\alpha<\beta(i)} (P_{i(\alpha)} - P^{\Omega}_{i(\alpha)})$. L'ensemble des points où d_μ n'est pas nulle est $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} R(i)$ et est donc contenu dans $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} \bigcup_{\alpha<\beta(i)} (P_{i(\alpha)} - P^{\Omega}_{i(\alpha)})$. Or on sait que $P_{i(\alpha)} - P^{\Omega}_{i(\alpha)}$ est dénombrable ([5] ou [7]) et comme l'ensemble des ordinaux inférieurs à $\beta(i)$ est dénombrable on en déduit que $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} \bigcup_{\alpha<\beta(i)} (P_{i(\alpha)} - P^{\Omega}_{i(\alpha)})$ est dénombrable, et donc aussi $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} R(i)$. Le théorème est démontré.

Ce théorème montre qu'à toute mesure $\mu \in D'(A, K)$ est associée une suite de couples $(\alpha_i, \lambda_i) \in A \times K$ indexée par les entiers avec $\operatorname{Sup}_{i \in \mathbf{N}} |\lambda_i| < +\infty$, telle que $d_\mu(\alpha_i) = \lambda_i$ et $d_\mu(x) = 0$ si $x \neq \alpha_i$ ($i \in \mathbf{N}$). Réciproquement nous allons caractériser les suites de couples $(\alpha_i, \lambda_i)_{i \in \mathbf{N}}$ avec $(\alpha_i, \lambda_i) \in A \times K$ et $\operatorname{Sup}_{i \in \mathbf{N}} |\lambda_i| < +\infty$ telles qu'il existe une mesure $\mu \in D'(A, K)$ vérifiant $d_\mu(\alpha_i) = \lambda_i$ et $d_\mu(x) = 0$ si $x \neq \alpha_i$ ($i \in \mathbf{N}$).

Lemme 4. Soit $\mu \in D'(A, K)$. Pour tout entier $h \geqslant 0$ il existe $N(h)$ points de A $(c_h(1), c_h(2), \ldots, c_h(N(h)))$ et $N(h)$ boules disjointes de rayon $q^{-h(i)} \leqslant q^{-h}$ $(1 \leqslant i \leqslant N(h))$ et de centre $c_h(i)$ telles que:

1) $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant N(h)} B(c_h(i), h(i)) = A$.
2) $|(\mu | B(c_h(i), h(i))) - d_\mu(c_h(i))| \leqslant q^{-h}$ $(1 \leqslant i \leqslant N(h))$ (ici $B(c_h(i), h(i))$ désigne la boule et sa fonction caractéristique).

Comme d_μ est à densité en tout point x de A, il existe une boule $B(x, r(x))$ avec $r(x) \geqslant h$ telle que $|(\mu | B(x, r(x))) - d_\mu(x)| \leqslant q^{-h}$. Les boules $B(x, r(x))$ forment un recouvrement ouvert de A dont on peut extraire un sous-recouvrement fini formé de $N(h)$ boules disjointes.

Lemme 5. Soit $\mu \in D'(A, K)$. Il existe une suite de points de A, $C = (c(i))_{i \in \mathbf{N}}$ et une suite de nombres entiers $N = (N(i))_{i \in \mathbf{N}}$ telles que; si $B(x, h) \subset A$ et si $(c(i_m))_{1 \leqslant m \leqslant M}$ (éventuellement $M = +\infty$) sont les éléments de C contenus dans $B(x, h)$, on ait $(\mu | B(x, h)) = \lim_{r \to +\infty} \sum_{1 \leqslant i_m \leqslant N(r)} d_\mu(c(i_m))$.

Tout d'abord remarquons que, si $k > h$, on peut supposer que la suite $c_k(1), \ldots, c_k(N(k))$ associée à k par le lemme 4 contient la suite $c_h(1), \ldots, c_h(N(h))$ associée à h par le lemme 4. En effet on peut imposer au sous-recouvrement fini utilisé au lemme 4 de contenir les boules de centre $c_h(1), \ldots, c_h(N(h))$. On peut donc construire une suite $C = (c(i))_{i \in \mathbf{N}}$, une suite d'entiers $N = (N(i))_{i \in \mathbf{N}}$ et une suite double d'entiers

$$(r_h(i))_{h \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant i \leqslant N(h)}$$

telles que $r_h(i) \geqslant h$, $|(\mu | B(c(i), r_h(i))) - d_\mu(c(i))| \leqslant q^{-h}$ pour $1 \leqslant i \leqslant N(h)$ et $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant N(h)} B(c(i), r_h(i)) = A$ pour tout entier $h \geqslant 0$. Soit maintenant $B(x, h) \subset A$. Choisissons un entier $l \geqslant h$, il existe alors $N(l)$ boules disjointes de centre $(c(i))_{1 \leqslant i \leqslant N(l)}$ et de rayon $(r_l(i))_{1 \leqslant i \leqslant N(l)}$ qui recouvrent A $(r_l(i) \leqslant q^{-h})$. Soient $B(c(i_m), r_l(i_m))$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$ celles qui recouvrent $B(x, h)$. Ces boules forment une partition de $B(x, h)$ et donc

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant k} (\mu | B(c(i_m), r_l(i_m))) = (\mu | B(x, h)),$$

or $(\mu | B(x, h)) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant k} d(c(i_m)) + \pi^h t$ où $t \in A$. Le lemme est démontré.

Remarque. Il est clair que l'on peut imposer à la suite $C = (c(i))_{i \in \mathbf{N}}$ de contenir l'ensemble des points de A où d_μ n'est pas nulle.

Lemme 6. Soient $C = (c(i))_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de points de A, $D = (d(i))_{i \in \mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres de K, $N = (N(i))_{i \in \mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers. Supposons que la condition $(\star)$ ci-après soit vérifiée:

$(\star)$ pour tout $x \in A$ et tout entier $h \geqslant 0$, la suite

$$l \to D(x, l, h) = \sum_i d(i); \ (1 \leqslant i \leqslant N(l) \text{ et } c(i) \in B(x, h))$$

converge.

Alors il existe une mesure μ sur A telle que $(\mu | \varphi_{x,h}) = \lim_{l \to +\infty} D(x, l, h)$.

Le lemme est évident car il suffit de connaître $(\mu|\varphi_{x,h})$ pour tout $x \in A$ et pour tout entier h pour pouvoir calculer $(\mu|f)$ pour toute $f \in \mathscr{C}(A, K)$.

On dira que $\mu \in \mathscr{C}'(A, K)$ vérifie la condition $(\star\star)$ par rapport à la suite T.B.R.B.O. U de A si la fonction $D_{\mu,U}$ de U dans K définie par $D_{\mu,U}(u_n) = (\mu|\psi_{n,\,l(n)+1})$ $(u_n \in U)$ peut se prolonger en une fonction de $B_1(A, K)$ en posant, pour $x \in A$,

$$D_{\mu,U}(x) = \lim_{h\to+\infty} \sum_{j=0}^{q^h-1} D_{\mu,U}(u_j)\psi_{j,h}(x) = \lim_{h\to+\infty} D_{\mu,U}(u_{h(x)}).$$

Théoreme 3. Soit $(\alpha_i, \lambda_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $A \times K$ telle que $\mathrm{Sup}_{i\in\mathbf{N}} |\lambda_i| < +\infty$, soit f l'application de A dans K définie par $f(\alpha_i) = \lambda_i$ et $f(x) = 0$ si $x \neq \alpha_i$ $(i \in \mathbf{N})$. Pour qu'il existe une mesure $\mu \in D'(A, K)$ telle que $d_\mu = f$ il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées:

1) Il existe une permutation ϱ des entiers et une suite strictement croissante d'entiers positifs $N = (N(i))_{i\in\mathbf{N}}$ telles que les suites $C = (c(i))_{i\in\mathbf{N}}$ où $c(i) = \alpha_{\varrho(i)}$, $N = (N(i))_{i\in\mathbf{N}}$, $(d(i))_{i\in\mathbf{N}} = (\lambda_{\varrho(i)})_{i\in\mathbf{N}} = D$ vérifie la condition $(\star)$.
2) La mesure μ construite à l'aide des suites C, N, D vérifie la condition $(\star\star)$ pour toute suite T.B.R.B.O. U de A et $D_{\mu,U} = f$ sur $A - U$.

La nécessité des deux conditions découle du lemme 5, de la remarque qui le suit, du lemme 1, de la proposition 3.

La condition 1 permet de construire une mesure μ (lemme 6). La condition 2 entraine que μ est à densité sur A et que $d_\mu = f$. En effet si $x \in A$ on peut construire une suite T.B.R.B.O. $U = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que, pour $h \geqslant 0$, $u_{h(x)} \neq u_{(h+1)(x)}$ (U dépend de x). Par conséquent $\lim_{h\to+\infty} D_{\mu,U}(u_{h(x)})$ existe et comme $D_{\mu,U}(u_{h(x)}) = (\mu|\varphi_{x,h})$ on a $\lim_{h\to+\infty} (\mu|\varphi_{x,h}) = D_{\mu,U}(x)$, donc μ est à densité sur A. Enfin comme $x \notin U$ on a $D_{\mu,U}(x) = f(x)$. On peut donc poser $d_\mu = f$.

Les théorèmes 2 et 3 permettent donc de décrire assez complètement l'espace $D'(A, K)$.

On a la proposition immédiate suivante:

Proposition 7. $D'(A, K)$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}'(A, K)$.

3. Exemple et application

Nous allons construire une mesure à densité qui ne soit pas une mesure discrète. Soit, dans $\mathbf{Z}_p$, les ensembles

$$M^+ = \{x \in \mathbf{Z}_p;\, x = p^n,\, n \geqslant 0\},\quad M^- = \{x \in \mathbf{Z}_p;\, x = -p^n,\, n \geqslant 0\}$$

et $M = M^+ \cup M^-$. Soit f la fonction valant 1 sur M^+, -1 sur M^- et 0 sur $\mathbf{Z}_p - M$. Nous allons montrer qu'il existe une mesure à densité $\mu \in D'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ telle que $d_\mu = f$.

Considérons la suite d'entiers $N = (2i)_{i\in\mathbf{N}}$. Considérons les suites $C = (c(i))_{i\in\mathbf{N}}$, $c(2i) = p^i$ et $c(2i+1) = -p^i$, $D = (d(i))_{i\in\mathbf{N}}$, $d(2i) = 1$ et

$d(2i+1)=-1$. Soit $D(x, l, h)=\sum_i d(i)$ où $1 \leqslant i \leqslant 2l$ et $c(i) \in B(x, h)$. Si $0 \notin B(x, h)$, la suite $l \to D(x, l, h)$ est stationnaire pour $l \geqslant l_0$ car il n'y a qu'un nombre fini de points $c(i)$ dans $B(x, h)$. En particulier, si $x=p^n$ ou $-p^n$ $(n<h)$ $\lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)=+1$ ou -1; si, pour tout $n \geqslant 0$, $v(x+p^n)<h$ et $v(x-p^n)<h$, alors $\lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)=0$. Si $0 \in B(x, h)$, alors, pour tout i tel que $2i \geqslant h$, tous les points $c(i)$ se trouvent dans $B(x, h)$ et par conséquent $D(x, l, h)=0$. La condition 1 du théorème 3 est vérifiée, il existe donc une mesure $\mu \in \mathscr{C}'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ telle que $(\mu|\varphi_{x,h})= =\lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)$. Montrons que μ est à densité sur $\mathbf{Z}_p$ et que $d_\mu=f$. Il suffit donc de montrer que $\lim_{h\to+\infty} \lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)=f(x)$. Si $x=p^n$ ou $x=-p^n$ alors pour h assez grand on a $\lim_{h\to+\infty} \lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)=1$ ou -1 car $\lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)=1$ ou -1. Si $x \notin M$ et si $x \neq 0$ alors, pour h assez grand, $v(x+p^n)<h$ et $v(x-p^n)<h$ pour tout $n \geqslant 0$ et par conséquent $\lim_{h\to+\infty} \lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)=0$. Si $x=0$ alors $\lim_{h\to+\infty} \lim_{l\to+\infty} D(x, l, h)=0$. On a donc montré que $\mu \in D'(Z_p, \mathbf{Q}_p)$ et que $d_\mu=f$.

Proposition 8. Il existe une mesure $\mu \in D'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ telle que $d_\mu(x)=0$ si $x \in \mathbf{Z}_p - M$, $d_\mu(x)=1$ si $x \in M^+$, $d_\mu(x)=-1$ si $x \in M^-$. En outre $(\mu|\varphi_{x,h})=0$ si $B(x, h) \cap M=\emptyset$, $(\mu|\varphi_{x,h})=1$ si $B(x, h) \cap M^+ \neq \emptyset$, $(\mu|\varphi_{x,h})=-1$ si $B(x, h) \cap M^- \neq \emptyset$, $(\mu|\varphi_{0,h})=0$.

On note $\Delta'(Z_p, \mathbf{Q}_p)$ le sous-espace des mesures discrètes sur $\mathbf{Z}_p$.

Corollaire. $\Delta'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p) \notin D'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$.

En effet la mesure μ construite à la proposition 8 appartient à $D'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ mais pas à $\Delta'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$. Sinon il existerait une suite d'éléments de $\mathbf{Z}_p$, $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{N}}$, et une suite bornée d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0, $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}}$, telles que $\mu=\sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda_i \delta_{\alpha_i}$. Or $d_\mu(x)=0$ si $x \neq \alpha_i$ et $d_\mu(\alpha_i)=\lambda_i$, par conséquent il y aurait une infinité d'indices i tels que $\lambda_i=1$ ou -1, la suite $i \to \lambda_i$ ne tendrait pas vers 0.

Nous noterons μ la mesure construite à la proposition 8. Nous allons montrer que $\nu=\mu \star \mu$ n'est pas une mesure à densité sur $\mathbf{Z}_p$. Plus précisément nous allons montrer que ν n'a pas de densité en 0. Choisissons comme suite T.B.R.B.O. la suite des entiers naturels. On a (proposition 1): $(\nu|\varphi_{0,h})=(\mu|\varphi_{0,h})(\mu|\varphi_{0,h})+\sum_{0\leqslant n<p^h} (\mu|\varphi_{n,h})(\mu|\varphi_{p^h-n,h})$. Si $n \neq p^k$, $k<h$, alors $(\mu|\varphi_{n,h})=(\mu|\varphi_{p^h-n,h})=0$, si $n=\varphi^k$, $k<h$, $(\mu|\varphi_{p^k,h})=+1$ et si $n=p^h-p^k$, $k<h$, $(\mu|\varphi_{p^h-p^k,h})=(\mu|\varphi_{-p^k,h})=-1$ et enfin $(\mu|\varphi_{0,h})=0$. Donc $(\nu|\varphi_{0,h})=2h$ et, comme $2h$ n'a pas de limite φ-adique lorsque h tend vers plus l'infini, ν n'est pas à densité au point 0.

Théoreme 4. $D'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ n'est pas une sous-algèbre de convolution de $\mathscr{C}'(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$.

Ce théorème répond à une question posée par Y. Amice dans [2]. Par contre on montre facilement que, si $\mu \in \Delta'(A, K)$ et $\mu_1 \in D'(A, K)$, $\mu \star \mu_1 \in D'(A, K)$.

Généralisations. On peut étendre ces résultats au cas des mesures sur $\mathscr{C}(A, L)$ où L est une extension de K. En effet $\mathscr{C}(A, L)=L \otimes \mathscr{C}(A, K)$

et $\mathscr{C}'(A, L) = L \otimes \mathscr{C}'(A, K)$. Soit $\mu \in \mathscr{C}'(A, K)$ et soit $i \to n(i)$ une suite strictement croissante d'entiers. On dit que μ est à densité faible au point $x \in A$ pour la suite $i \bigcap n(i)$ si la limite suivante existe: $\lim_{i \to +\infty} (\mu | \varphi_{x, n(i)}) = = d_\mu(x)$, $d_\mu(x)$ est la densité faible de μ pour la suite $i \to n(i)$. Les résultats précédents se généralisent sans peine pour les mesures à densité faible sur A pour la suite $i \to n(i)$. L'intérêt des mesures à densité faible provient du fait suivant. On peut associer, à un élément analytique au sens de Krasner sur la boule unité ouverts de $\mathbb{C}_p$, une mesure de $\mathscr{C}'(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ à densité faible sur $\mathbb{Z}$ pour la suite $h \to h!$ ($\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$). Cette théorie est développée dans [4].

Université Paris 7, Dépt. Math.
Tour 45–55, 5e étage,
2, place Jussieu,
75230-Paris Cedex 05, (France)

BIBLIOGRAPHIE

1. Amice, Y. – Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. Fr. t. **92**, 117–180 (1964).
2. Amice, Y. – Mesures p-adiques. Séminaire Delange-Pisot-Poitou 6e année (64/65) exposé 16.
3. Baire, R. – Leçon sur les fonctions discontinues. Gauthier-Villard Paris 1930.
4. Barsky, D. – Mesures p-adiques à densité et prolongement analytique. Thèse d'état Paris 7 (1974).
5. Ellis, R. – A non archimedean analog of the Tietze-Urysohn extension theorem. Proc. of the Kon. Ned. Akad. van Wetensch. Séries A t. **70**, 332–333 (1967).
6. Helsmoortel, E. – Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un anneau local. C.R.A.S. t. **271**, 546–548 (1970).
7. Kuratowski, K. – Topologie. Monographie Math. 4e édition Varsovie 1958.
8. Serre, J. P. – Endomorphismes complètement continus d'espaces de Banach p-adiques. Pub. Math. I.H.E.S. no. 12 (1962).