Discrete Mathematics 68 (1988) 71–76
North-Holland

SIGNATURES DES PERMUTATIONS ET DES MOTS EXTRAITS

Germain KREWERAS and Paul MOSZKOWSKI
Institut de Statistique, 4 Place Jussieu, 75005, Paris, France

Received 4 November 1985
Revised 20 February 1987

Tout mot injectif fini de n lettres écrit dans un alphabet totalement ordonné (notamment toute permutation) a une "signature" caractérisée par les $n-1$ croissances $(+)$ ou décroissances $(-)$ successives. Le résultat principal est que le nombre de permutations de signature donnée dont on peut *extraire* un mot donné w ne dépend que de la signature de w; on indique pour ce nombre une méthode de calcul généralisant l'algorithme de Viennot.

Any finite injective word of n letters written with a totally ordered alphabet (in particular any permutation) has a specific "signature" characterized by the $n-1$ successive increases $(+)$ or decreases $(-)$. The main result of the paper is that the number of permutations of given signature from which a given word w can be extracted depends only on the signature of w; a method generalizing Viennot's algorithm is given for the calculation of this number.

Une *signature* (de niveau $n-1$, avec n entier positif) est une suite de $n-1$ signes $+$ ou $-$; l'ensemble Σ_{n-1} des signatures de niveau $n-1$ a pour cardinal 2^{n-1}. Par définition une signature c (de Σ_{n-1}) *couvre* une signature c' (de Σ_{n-2}) si c' peut s'obtenir à partir de c par suppression de l'un quelconque des signes et raccordement (concaténation) de ce qui reste après cette suppression. On dira aussi, de façon équivalente, que c est *conséquent* de c' ou que c' est *antécédent* de c.

Exemples. la signature $(--++-)$ couvre chacune des trois signatures $(-++-)$, $(--+-)$, $(--++)$ et n'en couvre aucune autre.

La fermeture transitive de la relation de couverture définit une relation d'*ordre* (partiel) sur l'ensemble

$$\Sigma = \bigcup_{\lambda \in N} \Sigma_\lambda;$$

pour a et b dans Σ, on écrira $a \leqslant b$ soit si $a=b$, soit s'il existe dans Σ une suite $c_0 c_1 \ldots c_t$ telle que $c_0 = a$, $c_t = b$ et que c_k couvre $c_{k-1} (\forall k \in \{1, 2, \ldots, t\})$.

Toute permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et plus généralement tout mot injectif $y = y_1 y_2 \ldots y_n$ de n lettres tirées d'un alphabet totalement ordonné (par exemple l'ensemble Q des rationnels), a une signature dans Σ_{n-1}, définie par la suite des signes des différences $y_{i+1} - y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Etant donné un mot y, nous appelons mot *extrait de y* tout mot x obtenu par suppression de certaines des lettres de y (et raccordement de celles qui restent). Il est aisé de s'assurer que si a et b sont les signatures respectives de x et y, on a alors $a \leqslant b$ au sens de la relation d'ordre dans Σ.

Exemple.

$$y = \underline{4}\ 2\ 1\ 5\ \underline{6}\ 3, \qquad b = --++-,$$
$$x = 2\ 1\ 5\ 3, \qquad a = -+-.$$

Théorème 1. *Soit x un mot injectif de signature a, z un rationnel quelconque ne figurant pas dans x et b une signature couvrant a; alors il existe un mot y et un seul de signature b d'ou l'on peut extraire x par suppression de la lettre z.*

Démonstration. Supposons que b couvre a "par un signe $+$" (le cas où ce serait "par un signe $-$" se traiterait de manière semblable). L'hypothèse signifie que le passage de a à b se fait en allongeant d'une unité une séquence de r signes $+$ et une seule; r peut être nul, on se contente alors, pour passer de a à b, d'insérer un signe $+$ soit entre deux signes $-$, soit avant un $-$ initial, soit après un $-$ final.

Les termes de x s'intercalent par hypothèse entre les termes de a. Dans le cas général, la séquence de r signes $+$ est encadrée par un signe $-$ à gauche et un signe $-$ à droite, et l'on peut appeler x_i le terme qui suit immédiatement le signe $-$ de gauche et x_{i+r} le terme qui précède immédiatement le signe $-$ de droite. La suite $x_i x_{i+1} \ldots x_{i+r}$ est toujours croissante; elle ne comprend qu'un seul terme si $r = 0$.

On veut former un mot y à partir de x en insérant une nouvelle lettre z donnée et cela de façon que le mot formé y ait pour signature b. Si $z < x_i$, cela n'est possible qu'en insérant z immédiatement avant x_i; si $z > x_{i+r}$, cela n'est possible qu'en insérant z immédiatement après x_{i+r}; enfin si $x_i < z < x_{i+r}$, il existe un j tel que $i \leqslant j < j+1 \leqslant i+r$ et que $x_j < z < x_{j+1}$, et il faut insérer z entre x_j et x_{j+1}. Le raisonnement demeure valable si la séquence de r signes $+$ à rallonger ou à créer pour passer de a à b est *initiale* ou *finale*; il suffit de prendre pour x_i le terme initial de x dans la première hypothèse ou par x_{i+r} le terme final de x dans la deuxième. Le Théorème 1 est ainsi démonstré dans tous les cas. □

Théorème 2. *Si l'on se donne une suite de $t+1$ signatures dont chacune couvre la précédent, soit $c_0 c_1 \ldots c_t$, un mot injectif x de signature c_0, et une suite croissante de t rationnels distincts $z_1 z_2 \ldots z_t$ dont aucun ne figure dans x; alors il existe un mot injectif et un seul, de signature c_t, tel que les suppressions successives de $z_t z_{t-1} \ldots z_1$ donnent des mots successifs de signatures $c_{t-1} c_{t-2} \ldots c_0$ dont le dernier est x lui-même.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer t fois de suite le Théorème 1, de façon ascendante dans Σ. □

Exemple.

$$\begin{array}{llll} t=2: & x=4\ 1\ 5, & z_1=2, & z_2=3, \\ & c_0=-+, & c_1=-++, & c_2=-+-+, \\ & 4\ 1\ 5\ \Rightarrow & 4\ 1\ 2\ 5\ \Rightarrow & 4\ 1\ 3\ 2\ 5. \end{array}$$

Théorème 3. *Parmi les permutations de signature donnée b, le nombre de celles dont on peut extraire un mot donné x, de forme a, est égal au nombre de chemins de a à b dans Σ (et ne dépend par conséquent que de la signature de x).*

Démonstration. On suppose que $b \in \Sigma_{n-1}$ et qu'il y ait t lettres de $[1, n]$ qui ne figurent pas dans x; soient $z_1 z_2 \ldots z_t$ ces lettres dans l'ordre croissant. On pose $a = c_0$ et $b = c_t$. Alors, en vertu du Théorème 2, à chaque chemin de a à b dans Σ correspond une permutation et une seule de signature b et réciproquement; il y a donc autant de permutations de signature b qui répondent à la question que de chemins de a à b dans Σ. □

Exemple. ($n = 5$) Il y a 4 chemins de $-+$ à $-+-+$, qui passent respectivement par $-++$, $-+-$, $--+$, $+-+$. 4 1 5 et 5 3 4 sont deux exemples de mots de signature $-+$. Sur les 16 permutations de signature $-+-+$, il y en a 4 d'où l'on peut extraire 4 1 5 et 4 dont on peut extraire 5 3 4; le tableau ci-dessous les donne en regard des chemins correspondants:

Chemins	4 1 5	5 3 4
$-++$	4 1 3 2 5	5 1 3 2 4
$-+-$	4 1 5 2 3	5 3 4 1 2
$--+$	4 2 3 1 5	5 2 3 1 4
$+-+$	3 2 4 1 5	2 1 5 3 4

Dans ce qui suit on appellera $f(a, b)$ le nombre de chemins de a à b dans Σ. $f(\emptyset, b)$ n'est autre que le nombre total de permutations de signature b, nombre dont on sait qu'il existe différents procédés de calcul (cf. [1, 3–7]); une récapitulation de ces procédés existe en [2].

Méthode de calcul pratique de $f(a, b)$

L'un des procédés [7] consiste à dénombrer de proche en proche, à l'aide d'un algorithme additif, celles de ces permutations qui commencent par une lettre donnée. Ce procédé se généralise de la manière suivante au calcul de $f(a, b)$; on suppose $a \in \Sigma_{m-1}$ et $b \in \Sigma_{n-1}$, avec $m < n$. $f(a, b)$ est, on l'a *vu*, le nombre de permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ d'où l'on peut extraire un mot particulier z de signature a. On peut choisir pour z le mot *le plus* grand possible dans l'ordre lexicographique: si a commence par $-$, z commencera par m; si a commence par

Tableau 1

β	$++-+--+++$			
α	$+-+$	$-+$	$+$	$\emptyset$
μ	4	3	2	1
$\mu-\rho$	3	3	1	1
i				
1			1421	1421
2				1176
3	300	546	546	931
4		165	411	696
5	30	115	286	481
6	18	71	177	296
7	9	36	90	150
8	3	12	30	50
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
$f(\alpha,\beta)$	360	945	2961	5201

β	$+-+--+++$			
α	$+-+$	$-+$	$+$	$\emptyset$
μ	4	3	2	1
$\mu-\rho$	3	3	1	1
i				
1			245	245
2				245
3	60	135	135	235
4		50	125	215
5	12	44	109	185
6	9	35	87	146
7	6	24	60	100
8	3	12	30	50
9	0	0	0	0
10				
$f(\alpha,\beta)$	90	300	791	1421

β	$-+--+++$			
α	$+-+$	$-+$	$+$	$\emptyset$
μ	4	3	2	1
$\mu-\rho$	3	3	1	1
i				
1			0	0
2				10
3	0	10	10	20
4		6	16	30
5	3	9	22	39
6	3	11	27	46
7	3	12	30	50
8	3	12	30	50
9				
10				
$f(\alpha,\beta)$	12	60	135	245

β	$+--+++$			
α	$+-+$	$-+$	$+$	$\emptyset$
μ	4	3	2	1
$\mu-\rho$	3	3	1	1
i				
1			10	10
2				10
3	3	6	6	10
4		3	6	9
5	0	2	5	7
6	0	1	3	4
7	0	0	0	0
8				
9				
10				
$f(\alpha,\beta)$	3	12	30	50

β	$--+++$			
α	$+-+$	$-+$	$+$	$\emptyset$
μ	4	3	2	1
$\mu-\rho$	3	3	1	1
i				
1			0	0
2				0
3	0	0	0	1
4		1	1	2
5	0	1	2	3
6	0	1	3	4
7				
8				
9				
10				
$f(\alpha,\beta)$	0	3	6	10

β	$-+++$			
α	$+-+$	$-+$	$+$	$\emptyset$
μ	4	3	2	1
$\mu-\rho$	3	3	1	1
i				
1			0	0
2				1
3	0	1	1	1
4		0	1	1
5	0	0	1	1
6				
7				
8				
9				
10				
$f(\alpha,\beta)$	0	1	3	4

β	$+++$			
α	$+-+$	$-+$	$+$	$\emptyset$
μ	4	3	2	1
$\mu-\rho$	3	3	1	1
i				
1			1	1
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
$f(\alpha,\beta)$	0	0	1	1

r signes + suivis d'un signe $-$, z commencera par $m-r$, $m-r+1, \ldots, m$; etc. Exemple:

$$a = ++--+- \quad (m=7) \;\Rightarrow\; z = 5\ 6\ 7\ 4\ 2\ 3\ 1.$$

On appellera $f_i(a, b)$ le nombre de permutations x de signature b qui commencent par i $(x_1 = i)$ et d'où l'on peut extraire ce z particulier.

Les notations $+\beta$ et $-\beta$ vont de soi; elles désignent, si $\beta \in \Sigma_{\nu-1}$, des signatures appartenant à Σ_ν. On notera d'autre part α^* la signature obtenue par suppression du premier signe de α; $\alpha \in \Sigma_{\mu-1} \Rightarrow \alpha^* \in \Sigma_{\mu-2}$. Si $\alpha = \emptyset$, on convient que $\alpha^* = \emptyset$ également.

Supposons $i \leqslant \mu$. La seule valeur possible pour x_1 est alors le premier terme $\mu - \rho$ de z; on a donc

$$i \neq \mu - \rho \;\Rightarrow\; f_i(\alpha, \beta) = 0.$$

Si $i = \mu - \rho$, on s'assure aisément que

$$f_i(\alpha, +\beta) = \sum_{j \geqslant i} f_j(\alpha^*, \beta) \quad \text{et} \quad f_i(\alpha, -\beta) = \sum_{j < i} f_j(\alpha^*, \beta). \tag{1}$$

Mais i peut aussi être $\geqslant \mu + 1$; dans ce cas on a les égalités encore plus simples

$$f_i = (\alpha, +\beta) = \sum_{j \geqslant i} f_j(\alpha, \beta) \quad \text{et} \quad f_i(\alpha, -\beta) = \sum_{j < i} f_j(\alpha, \beta).$$

On peut alors, pour calculer $f(a, b)$, calculer de proche en proche les $f_i(\alpha, \beta)$ pour tous les couples de signatures (α, β) tels que l'on ait les concaténations $a = \alpha'\alpha$ et $b = \beta'\beta$, en commençant par le cas trivial où β est formé de signes identiques (tous + ou tous $-$).

Exemple.

$$a = +-+ \qquad (m = 4),$$
$$b = ++-+--+++ \quad (n = 10).$$

Formation des colonnes du Tableau 1 de droite à gauche; cases encadrées correspondant à (1); la ligne en zigzag sépare les cas $i \leqslant \mu$ et $i \geqslant \mu + 1$.

Si pour chaque β on ne retient que la colonne de droite, on retrouve l'algorithme de Viennot [7], avec une disposition légèrement différente. Le calcul est aussi rapide que si l'on appliquait m fois l'algorithme de Viennot; il est même en réalité plus rapide puisque pour β donné les entiers rencontrés sont de plus en plus petits quand μ augmente.

Références

[1] M. Abramson, A note on permutations with fixed pattern, J. Combin. Theory Ser. A 19 (1975) 237–239.

[2] K. Benchékroun, Dénombrement des solutions de certaines équations dans le groupe symétrique. Thèse de 3è cycle, Université Paris VI (1985).

[3] L. Carlitz, Permutations with prescribed pattern, Math. Nachr. 58 (1973) 31–55.

[4] N.G. De Bruijn, Permutations with given ups and downs, Nieuw Arch. Wisk. 18 (3) (1970) 61–65.

[5] P.A. Mac-Mahon, Combinatory Analysis (Chelsea, New York, 1960).

[6] I. Niven, A combinatory proof of finite sequences, Nieuw Arch. Wisk. 16 (1968) 116–123.

[7] G. Viennot, Permutations ayant une forme donnée, Discrete Math. 26 (1979) 279–284.