Discrete Mathematics 17 (1977) 323–326.

NOTE

NOTE SUR LA RECHERCHE DES MONOMES MAXIMAUX EN ALGEBRE DE POST

J.P. BORDAT
Institut de Mathématiques, Place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier Cedex, France

Reçu en 21 juillet 1975

Cette note généralise de manière directe certaines propriétés des consensus et certains algorithmes connus en Algèbre de Boole. Les démonstrations, ainsi que divers exemples d'applications des algorithmes cités, pourront être trouvés dans [1].

Notations. Soit n un entier positif, p un entier supérieur à 1. On désignera par P l'ensemble totalement ordonné $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. L'ensemble E des applications de P^n dans P est un treillis (induit) et satisfait aux axiomes de définition d'un treillis de Post [2]. Ses éléments sont des fonctions de Post. Les lois de borne supérieure et de borne inférieure sur un treillis sont notées respectivement "+" et "·".

1. Définitions

1.1. *Monômes*

Dans E, on considère les applications particulières $x_i, x_{i(\alpha)}$ $(i, \alpha \in P \cdot (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in P^n)$.

$$x_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) = t_i,$$

$$x_{i(\alpha)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} p-1 & \text{si } t_i = \alpha \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

x_i est appelée $i$ème variable (voir p. ex. [2, 3]). $x_{i(\alpha)}$ est appelée $i$ème variables sous la forme α. Un monôme est un produit $\mu = c \cdot x_{i_1(\alpha_1)} x_{i_2(\alpha_2)} \cdots x_{i_q(\alpha_q)}$ $(i_k \neq i_l)$,
— d'une constante $c \in P$ dite coefficient, $c \neq 0$,
— d'une partie littérale (éventuellement absente) elle-même produit de plusieurs variables sous formes diverses.

En toute rigueur $x_{i_1(\alpha_1)} \cdots x_{i_q(\alpha_q)}$ n'est pas un monôme (absence de coefficient), mais définit la fonction égale au monôme $(p-1)x_{i_1(\alpha_1)} \cdots x_{i_q(\alpha_q)}$. On considérera cependant qu'une partie littérale seule définit un monôme de coefficient $p-1$.

Si $f \in E$ (f non constamment nulle), on sait qu'on peut exprimer f sous la forme [2, 5]

$$f = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_q$$

où les μ_i sont des monômes.

Une telle expression de f est un polynôme. Par exemple:

$$x_i = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \alpha \cdot x_{i(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \alpha \cdot x_{i(\alpha)}.$$

1.2. *Monômes et monômes maximaux d'une fonction de Post*

Nous dirons que μ est *monôme de f* si μ est un monôme *minorant f*.

μ est *monôme maximal de f* si et seulement si

(1) $\mu \leqslant f$,

(2) Pour tout monôme $\mu_1 : \mu \leqslant \mu_1 \leqslant f \implies \mu = \mu_1$.

1.3. *Egalité et inégalité irréductibles*

Une égalité (resp. inégalité) de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \quad \left(\text{resp. } f \leqslant \sum_{i=1}^{q} \mu_i\right)$$

où les μ_i sont des monômes, est dite irréductible si, par suppression d'un μ_i quelconque, la somme de monômes résiduelle est strictement inférieure à f (resp. ne majore plus f).

1.4. *Variables monoformes et multiformes d'un ensemble de monômes*

Dans un ensemble de monômes, les variables figurant sous une seule forme, par exemple α, sont dites monoformes. Les variables figurant sous au moins deux formes différentes α', α'' sont dites multiformes. Si une variable apparaît sous ses p formes, elle est dite multiforme complète.

1.5. *Consensus*

Soit un ensemble de monômes $E = \{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$. Désignons par c_j le coefficient de μ_j, par α_j le produit des variables de μ_j qui sont monoformes dans $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\}$ et par β_j le monôme produit des variables de μ_j restantes. Si on a l'égalité *irréductible* $\sum_{j=1}^{q} \beta_j = p - 1$, on dit que le monôme $\prod_{j=1}^{q} c_j\alpha_j$ est le consensus de E, et l'on écrit $\prod_{j=1}^{q} c_j\alpha_j = \mathscr{C}(E)$. q est appelé *classe* du consensus $\mathscr{C}(E)$.

2. Propriétés du consensus d'un ensemble de monômes et applications

2.1. *Propriétés du consensus* [4, 6]

Certaines propriétés de consensus en Algèbre de Boole se généralisent directement au cas où $p > 2$.

(a) Le consensus d'un ensemble $E = \{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$ de monôme est unique par définition, et on a l'inégalité irréductible,

$$\mathscr{C}(E) \leq \sum_{i=1}^{q} \mu_i.$$

(b) Soit un ensemble $E = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\}$ de monômes. Si μ est monôme maximal de $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_q$, il existe une partie Q de E dont μ est le consensus.

(c) Isotonie du consensus: Soient $Q = \{\mu_i \mid i \in I\}$ un ensemble de monômes possédant un consensus $\mathscr{C}(Q)$ et $R = \{\lambda_i \mid i \in I\}$ un ensemble de monômes tels que, pour tout $i \in I$, $\mu_i \leq \lambda_i$. Il existe alors une partie R_1 de R telle que $\mathscr{C}(R_1)$ existe et $\mathscr{C}(Q) \leq \mathscr{C}(R_1)$.

(d) Soit $E = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\}$ un ensemble de monômes tels que $q \geq p$ et possédant un consensus $\mathscr{C}(E) = \mu$. Soit x une variable multiforme complète de E. Il existe au moins une égalité de consensus $\mu = \mathscr{C}(Q)$ où les monômes de E contenant x sous une de ses p formes ne sont pas générateurs et, plus précisément, où Q est une partie de l'ensemble F déduit de E en remplaçant ces monômes par leurs consensus par rapport à x.

2.2. *Généralisation d'algorithmes de recherche de monômes maximaux*

A partir de ces propriétés, il est possible de généraliser deux algorithmes classiques en Algèbre de Boole: tours de consensus, consensus par variables pivots. On part d'une expression en somme de monômes de la fonction. Les consensus, s'ils existent, sont calculés sur des ensembles de p monômes au lieu d'être calculés sur des couples de monômes. p monômes admettent un consensus si et seulement si une variable est multiforme complète dans l'ensemble de ces p monômes, les autres étant monoformes.

Exemple. Dans le cas $p = 4$, $n = 3$

$$2y_{(0)}z_{(3)} = \mathscr{C}\{2y_{(0)}x_{(0)}, 2y_{(0)}x_{(1)}, 3y_{(0)}x_{(2)}, 3z_{(3)}x_{(3)}\}.$$

3. Autre méthode d'obtention des monômes maximaux d'une fonction f

On utilise l'antiautomorphisme involutif $\beta : E \to E$ défini dans [2] par

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{p-1} i \cdot x_{(p-i-1)}.$$

En particulier,

$$\beta(i) = p - i - 1 \quad \text{et} \quad \beta(x_{(i)}) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p-1} x_{(j)}. \tag{1}$$

Dans le cas $p = 2$, β se réduit à la complémentation.

$$\forall x, y \in E \quad \beta(x + y) = \beta(x) \cdot \beta(y) \quad \text{et} \quad \beta(x \cdot y) = \beta(x) + \beta(y). \tag{2}$$

Théorème 3.1. *On obtient tous les monômes maximaux d'un produit de fonctions données elles-mêmes comme sommes de tous leurs monômes maximaux en effectuant le produit de ces sommes, puis en supprimant les termes nuls et les monômes non maximaux dont la somme de monômes obtenus.*

Si μ_i est un monôme, $\beta(\mu_i)$ s'écrit aisément à partir de (1) et (2) comme somme de tous ses monômes maximaux. La fonction f étant donnée par $f = \sum_{i=1}^{q} (\mu_i)$, en appliquant $\beta : \beta(f) = \prod_{i=1}^{q} \beta(\mu_i)$; on obtient, après suppression des monômes non maximaux, tous les monômes maximaux de $\beta(f)$. Le calcul de $\beta(\beta(f)) = f$ donne alors tous les monômes maximaux de f.

Bibliographie

[1] J.P. Bordat, Treillis de Post. Applications aux fonctions et aux équations de la logique à p valeurs, Thèse de Doctorat de Spécialité, Université Montpellier II (29 septembre 1975).

[2] G. Epstein, The lattice theory of Post Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960) 300–317.

[3] F. Lapscher, Utilisation des matrices booléennes pour l'étude des treillis de Post, Math. Sci. Humaines, 49 (1975) 43–73.

[4] F. Lapscher, Ensembles ordonnés et Algèbre de Boole (non publié), Cours, Université Montpellier II (1972).

[5] G. Lévy, Formes disjonctives minimales dans une logique à plusieurs valeurs, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A (1969) 613–615.

[6] P. Tison, Théorie des consensus, Thèse Doct. Ingén., Grenoble (1965).