JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 85, 1–85 (1989)

Correspondance de Howe pour les paires reductives duales: Quelques calculs dans le cas archimédien

C. MOEGLIN

Département de Mathématiques, U.E.R. 48, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, Paris, Cedex 05, 75230 France

Communicated by M. Vergne

Received June 1, 1987; revised February 5, 1988

0022-1236/89 \$3.00

INTRODUCTION

Le corps de base est $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels. Soient n, p, q des entiers. On note $O(2p, 2q)$ ou $O(\mathscr{Y})$ le groupe orthogonal relatif à une forme de signature $2p$, $2q$ sur un espace vectoriel, noté $\mathscr{Y}$, et $Sp(2n)$ ou $Sp(\mathscr{X})$ le groupe des automorphismes respectant une forme symplectique sur un espace vectoriel de dimension $2n$, noté $\mathscr{X}$. Ce couple $(Sp(\mathscr{X}, O(\mathscr{Y}))$ est une paire réductive duale au sens de Howe (cf. [H_2]) i.e. $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$ est naturellement un espace vectoriel muni d'une forme symplectique dont on note $Sp(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$ le groupe des automorphismes; $Sp(\mathscr{X})$ et $O(\mathscr{Y})$ s'identifient naturellement à des sous-groupes de $Sp(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$ et sont dans ce groupe leur commutant mutuel. On fixe un caractère unitaire de $\mathbb{R}$, noté χ (par exemple $\chi(x) = e^{2i\pi x}$ pour $x \in \mathbb{R}$) et on note $\mathscr{S}'$ l'unique (à isomorphisme près) représentation irréductible du groupe d'Heisenberg canoniquement associé à l'espace symplectique $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$, qui a pour restriction au centre de ce groupe d'Heisenberg le caractère χ. Alors $\mathscr{S}'$ devient naturellement une représentation projective de $Sp(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$ et donc une représentation, notée ω, d'une extension (non scindée) de $Sp(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$ par $\mathbb{C}^*$, notée $\widetilde{Sp}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$. Comme $\mathscr{Y}$ est de dimension paire, $Sp(\mathscr{X})$ et $O(\mathscr{Y})$ se relèvent dans $\widetilde{Sp}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$ (de façon unique) et l'on peut donc restreindre ω à $Sp(\mathscr{X}) \times O(\mathscr{Y})$. Notons $\mathscr{U}$ un compact maximal de $Sp(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$ et $\tilde{\mathscr{U}}$ son image réciproque dans $\widetilde{Sp}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$; Alors $\tilde{\mathscr{U}}$ est scindé, i.e. isomorphe à $\mathbb{C}^* \times \mathscr{U}$, $\omega|_{\mathbb{C}^*}$ est l'opération par homothétie évidente et l'on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}'$ qui sont finis sous l'action de $\mathscr{U}$. On note $K \simeq U(n)$ et $K' \simeq O(2p) \times O(2q)$ des compacts maximaux de $Sp(\mathscr{X})$ et $O(\mathscr{Y})$ respectivement, $sp(2n)$ et $o(2p, 2q)$ les algèbres de Lie de $Sp(\mathscr{X})$ et $O(\mathscr{Y})$. La restriction de ω à $\mathscr{S}$, permet de définir un $(sp(2n) \times o(2p, 2q) \times K \times K')$-module, noté encore $(\mathscr{S}, \omega)$. On note Hch_{Sp} et Hch_O l'ensemble des classes d'isomorphismes de modules de Harish-Chandra pour $Sp(\mathscr{X})$ et $O(\mathscr{Y})$ (on fera l'abus consistant à identifier les éléments de Hch_{Sp} et Hch_O a des modules de Harish-Chandra). Howe a énoncé puis démontré (cf. [H_2]) le résultat suivant: soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des quotients irréductibles de $(\mathscr{S}, \omega)$ ($\mathscr{E}$ est formé d'éléments du type $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ où $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ et $\mathscr{W} \in Hch_O$) et soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ (resp. $\mathscr{W} \in Hch_O$) alors il existe au plus un élément, noté $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{V}$) de Hch_O (resp. Hch_{Sp}) tel que $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W} \in \mathscr{E}$. En d'autres termes $\mathscr{E}$ est le graphe d'une bijection, notée $\Phi_{n,p,q}$, (ou plus simplement Φ si n, p, q sont fixés) d'un sous-ensemble de Hch_{Sp} avec un sous-ensemble de Hch_O. (Le résultat de Howe est plus général que celui que nous venons d'énoncer, puisqu'il s'applique à n'importe quelle paire réductive).

Grâce aux travaux de [K-V], on a une description explicite de cette bijection si $pq = 0$ (i.e., $O(\mathscr{Y})$ est compact) et par des travaux antérieurs à ceux de Howe dus à [R-S], si $n = 1$. Dans le cas général, on ne dispose que de résultats partiels comme ceux de [A]. Ce que j'aurais voulu faire est de décrire cette bijection à l'aide des paramètres de Vogan-Langlands ce qui aurait permis de vérifier quelles propriétés de fonctorialité possède cette bijection. (Récemment Cognet, [Co], a utilisé la représentation métaplectique pour retrouver le changement de base pour $GL(2, \mathbb{R})$ et $GL(2, \mathbb{C})$). Récemment, Adams a énoncé une conjecture [A_2] concernant les propriétés de fonctorialité de la correspondance de Howe. On peut énoncer sa conjecture en deux temps:

(1) la correspondance de Howe respecte les paquets d'Arthur,

(2) une description de la correspondance entre paquets d'Arthur.

Si $n \geqslant p+q$, le point (2) devrait être conséquence de ce travail. Toutefois, l'objectif que je m'étais fixé, semble difficile à atteindre, entre autre pour des raisons illustrées par l'exemple suivant:

Soit $z \in \mathbb{Z}$; $K = U(n)$ admet comme caractère l'application $\gamma \mapsto (\det \gamma)^z$, ce caractère est donc un K-type, noté $\det^z$. On vérifie facilement que l'ensemble des éléments de Hch_{Sp} pour lesquels $\det^z$ est un K-type est en bijection avec l'ensemble des caractères infinitésimaux du groupe symplectique; mais bien que $\det^z$ intervienne nécessairement avec multiplicité $\leqslant 1$, il n'a aucune raison (si $|z| > 1$) d'être, pour ces modules de Harish-Chandra, un K-type minimal. Les paramétrisations de Vogan, de ces éléments de Hch_{Sp}, est difficile (pour moi) à obtenir. Or si $z = p - q$ et si n est petit par rapport à $p+q$, tout élément de ce type, noté $\mathscr{V}$, est dans le domaine de définition de Φ, ayant pour image une représentation sphérique. Ainsi $\Phi(\mathscr{V})$ est déterminé par son caractère infinitésimal qui se déduit simplement de celui de $\mathscr{V}$. La correspondance de Howe est donc décrite, pour ces éléments en termes simples mais la correspondance entre les paramètres de Langlands-Vogan, elle, est compliquée: $\mathscr{V}$ peut être aussi bien une série discrète qu'une représentation de dimension finie.

Toutefois on peut décrire et c'est l'un des résultats de ce travail, un large sous-ensemble de $\mathscr{E}$ qui décrit la totalité de $\mathscr{E}$ si $n = p+q$ ou $p+q-1$. Dans ce sous-ensemble la correspondance entre K-types minimaux et K'-types minimaux ne dépend pas des paramètres continus et est très simple. Un résultat précis est décrit dans III.13 et IV.3. Pour cela, on utilise la notion de degré pour les représentations irréductibles de K et K' introduite par Howe dans sa démonstration [H_2] (dans un modèle de Fock, c'est le plus petit degré (au sens des polynômes) dans lequel la représentation intervient). Ainsi tout élément, noté $\mathscr{V}$, de Hch_{Sp} ou noté $\mathscr{W}$, de Hch_O admet des K ou K'-types de degré minimal et pour prouver sa conjecture, Howe a démontré que si $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W} \in \mathscr{E}$, les K-types de degré minimal de $\mathscr{V}$ sont en bijection avec les K'-types de degré minimal de $\mathscr{W}$ grâce aux harmoniques et montré que l'action des commutants de K et K' dans les algèbres enveloppantes de $Sp(2n)$ et $O(2p, 2q)$ respectivement sur les K et K'-types de degré minimal sont très liées. D'où l'intérêt de savoir quand l'intersection de l'ensemble des K ou K'-types de degré minimal avec l'ensemble des K ou K'-types minimaux est non vide.

> On démontre que cette intersection est non vide pour $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ si $\mathscr{V}$ appartient au domaine de définition de Φ et si $n \geqslant p+q$ (mais $\Phi(\mathscr{V})$ n'a aucune raison, sans conditions sur le paramètre continu de $\mathscr{V}$, d'avoir la même propriété. Et l'on a évidemment un résultat symétrique pour les éléments de Hch_O si $n < p+q$. (1)

Une des conséquences de ce résultat est que la correspondance de Howe est connue dès qu'elle connue, en termes de paramétrisation de Vogan-Langlands, quand n et $p+q$ sont très différents l'un par rapport à l'autre (cf. IV.4, 5 et 6).

En fait on peut améliorer un peu (1); rappelons que la paramétrisation de Vogan-Langlands d'un module de Harisch-Chandra, noté Z, est essentiellement déterminée par 2 paramètres, l'un discret (donnant en gros un K-type minimal) l'autre continu (donnant en gros l'action du commutant de K dans algèbre enveloppante sur ce K-type minimal qui intervient avec multiplicité 1). Dans ce travail, on montre que des conditions simples sur le paramètre discret permettent d'assurer à priori qu'il existe un K-type minimal qui est aussi de degré minimal; ce sont les conditions (†) (ou ($\bar{\dagger}$)) et (†)′ de II.1. La condition (†) dépend du groupe orthogonal (ce qui est assez naturel) et je n'en connais pas d'interprétation simple. Comme il n'y a qu'un seul groupe symplectique, la condition (†)′ est plus simple: la propriété importante est la suivante. Soit $\mathscr{W}$ un module de Harisch-Chandra irréductible pour $O(2p, 2q)$. On suppose d'abord que $\mathscr{W}$ est isomorphe à $\mathscr{W} \otimes \operatorname{signe}(\det)$, alors $\mathscr{W}$ vérifie (†)′. Supposons, maintenant que $\mathscr{W}$ ne soit pas isomorphe à $\mathscr{W} \otimes \operatorname{signe}(\det)$, alors soit $\mathscr{W}$ soit $\mathscr{W} \otimes \operatorname{signe}(\det)$ vérifie (†)′, éventuellement les deux, d'ailleurs. D'autre part la représentation triviale vérifie (†)′ alors que la représentation signe(det) ne vérifie pas (†)′. On vérifie dans ce travail que si $\mathscr{W} \in Hch_O$ est quotient de la représentation métaplectique, alors si $\mathscr{W}$ ne vérifie pas (†)′, $\mathscr{W} \otimes \operatorname{signe}(\det)$, qui vérifie (†)′, d'après ce qui précède, est aussi quotient de la représentation métaplectique.

Soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ et supposons que $n \leqslant p+q$; dans les parties II et III, on montre que si $\mathscr{V}$ satisfait (†) alors $\mathscr{V}$ est dans le domaine de définition de Φ et $\Phi(\mathscr{V})$ satisfait (†)′ plus une condition simple, notée (*)′ en III.1, qui porte sur le paramètre continu de $\Phi(\mathscr{V})$. On calcule $\Phi(\mathscr{V})$ en III.13. De plus tous les éléments de Hch_O qui vérifient (†)′ et (*)′ sont obtenus de cette façon. On a évidemment des résultats symétriques si $n \geqslant p+q$. Au début de la partie IV, par un calcul de R-groupes, on montre que si

$n = p + q$ ou $p + q - 1$ et si $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ est un quotient de la représentation métaplectique alors $\mathscr{V}$ vérifie (†), ce qui avec les résultats précédents règle complètement ces cas.

Dans la partie IV, on utilise (1) et les méthodes de la partie III qui consistent en l'adjonction et la soustraction de plans hyperboliques (suivant en cela [K]) pour obtenir le calcul de la correspondance de Howe dans d'autres cas. On retrouve et généralise un peu les résultats de [A], i.e., le calcul de $\Phi(\mathscr{V})$ quand $\mathscr{V}$ est une série discrète de $Sp(2n)$ soumise à des conditions telles que son K-type minimal soit aussi de degré minimal (cf. IV.7). Puis en IV.8, on donne des résultats analogues pour calculer l'image (réciproque) par la correspondance de Howe des séries discrètes de $O(2p, 2q)$ qui ne vérifient pas (†)', dans ce cas le K'-type minimal est aussi de degré minimal. A la fin je propose quelques conjectures assez techniques essentiellement dans le cas où $n \geqslant p + q$, cas qui me parait plus simple parce que l'on peut deviner quels devraient être les K'-types de degré minimal pour les éléments de Hch_O alors qu'il n'en est pas de même pour les éléments de Hch_{Sp}. Dans le cas où $n < p + q$, il me semble que ce qui serait possible de faire serait de déterminer quels éléments de Hch_O sont dans l'image (réciproque) de la correspondence de Howe, notée $\Psi_{n,p,q}$ ou plus simplement Ψ. Ils vérifient tous (†)', ayant donc un K'-type minimal qui est aussi de degré minimal, et on peut faire des conjectures sur cet ensemble trop techniques pour que je les écrive. Puis, soit $\mathscr{W} \in Hch_O$ un tel élément et W un de ses K'-types minimaux qui soit de degré minimal, on pourrait déterminer une induite pour $Sp(2n)$ contenant, comme sous-quotient $\Psi(\mathscr{W})$, et admettant l'image réciproque de W dans la correspondance obtenue grâce aux harmoniques (cf. I.4) comme K-type avec multiplicité 1; $\Psi(\mathscr{W})$ serait alors l'unique sous-quotient de cette induite contenant ce K-type. C'est ce qui se passe dans l'exemple donné au début de cette introduction. Dans cette optique, comme me le signale Adams, il serait préférable d'utiliser systématiquement les foncteurs $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$. En effet, identifier une représentation comme étant un $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ ne nécessite pas nécessairement de connaitre un K-type minimal et le paramètre continu. On ne peut toutefois pas éviter les difficultés majeures: il n'existe pas à ma connaissance, de conjectures simples permettant de décrire le domaine de définition de la correspondance de Howe. Si deux modules de Harish-Chandra sont L-indistinguable au sens de Langlands ou de Arthur et si l'un intervient comme quotient de la représentation métaplectique en général l'autre lui n'intervient pas comme quotient.

Je tiens à remercier très vivement A. Bouaziz et J. L. Waldspurger qui m'ont tous deux donné des indications très précieuses au cours de ce travail.

Ce travail est très technique et pour essayer de le rendre, quand même, lisible, je l'ai découpé en paragraphes et dans la mesure du possible, j'ai évité d'employer sans références (au reste du papier) des notations qui n'avaient pas été définies dans un paragraphe où le nom de la notation intervient dans le titre du paragraphe.

I. Harmoniques et caractères infinitésemaux

I.1. On garde les notations de l'introduction et on en introduit quelques autres. On fixe un caractère de $\mathbb{R}$, le caractère $t \mapsto e^{-(i/2)t}$. Dans [H$_1$] et [H$_2$], un rôle important est joué par l'espace des harmoniques dans un modèle de Fock, noté $\mathscr{P}$, de $\mathscr{S}$, la représentation métaplectique. Par définition $H(K)$ (resp. $H(K')$) l'espace des harmoniques pour K(resp. K') est l'ensemble des éléments de $\mathscr{P}$ annulés par les dérivations incluses dans le commutant de K (resp. K') dans l'algèbre de Lie de $Sp(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$. On pose $H(K, K') := H(K) \cap H(K')$ et Howe a prouvé que $H(K, K')$ est une représentation de $K \times K'$ sans muliplicité avec les propriétés suivantes: (cf. [H$_2$, lemme 3.3])

$$H(K, K') \simeq \bigoplus_{(\sigma, \tau) \in \mathscr{E}^c} V_\sigma \otimes W_\tau,$$

où $\mathscr{E}^c$ est un sous-ensemble de $K^\wedge \times K'^\wedge$ tel que pour $\sigma \in K^\wedge$ il existe au plus une classe de représentation irréductible, notée τ, de K' telle que $(\sigma \times \tau) \in \mathscr{E}^c$ et vice et versa. Ainsi $\mathscr{E}^c$ est le graphe d'une bijection, noté $\Phi^c_{n,p,q}$ ou plus simplement Φ^c, d'un sous ensemble de $K^\wedge$ sur un sous-ensemble de K'. On note $\Psi^c_{n,p,q}$, ou plus simplement Ψ^c, l'application réciproque de Φ^c.

Donnons une réalisation concrète de $\mathscr{P}$, un modèle de Fock de $\mathscr{S}$: soit X une polarisation complexe négative pour $\mathscr{X}$ (i.e., X est un sous-espace de $\mathscr{X} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur lequel la forme hermitienne $(x, y) \mapsto 1/\sqrt{-1}\langle x, \bar{y}\rangle$ est définie négative). Soit $\mathscr{Y} = E \oplus F$ une décomposition orthogonale de $\mathscr{Y}$ telle que la restriction de la forme orthogonale à E (resp. F) soit définie positive (resp. négative). On suppose que K est un sous-groupe de $GL(X)$, i.e., $K_{\mathbb{C}} \simeq GL(X)$ et que K' coïncide avec $O(E) \times O(F)$. Alors $\mathscr{P}$ se réalise dans l'algèbre des polynômes sur $X^* \otimes E \oplus X \otimes F$; K agit sur $\mathscr{P}$ par le produit tensoriel de l'action naturelle avec le caractère $(\det)^{p-q}$ et K' agit naturellement sur $\mathscr{P}$. On vérifie aussi très facilement que $H(K')$ est le produit tensoriel de l'espace des harmoniques pour $O(E)$ dans la paire $Sp(\mathscr{X}) \times O(E)$ par l'espace des harmoniques pour $O(F)$ dans la paire $Sp(\mathscr{X}) \times O(F)$ et son calcul a donc été fait dans [K-V, II.6.6 et II.6.13]. Quant à $H(K')$, il est calculé dans [K-V, III.6.3], où il semble manquer le produit tensoriel par $(\det)^{p-q}$ (mais il est peut-être inclus dans les définitions). Il n'est donc pas difficile d'en déduire $H(K, K')$ ou plutôt $\mathscr{E}^c$ qui nous intéresse, mais auparavant fixons les notations permettant de paramétriser les représentations de dimension finie des groupes unitaires et orthogonaux.

I.2. Grâce au résultat de Cartan-Weyl, reporté par exemple en [V_3, 4.5], on sait que pour tout groupe réductif compact, noté $\mathscr{K}$, l'ensemble de ses représentations irréductibles est classifié par l'ensemble des représentations irréductibles d'un de ses sous-groupes de Cartan, noté T (i.e. T est le normalisateur d'une sous-algèbre de Borel, notée b, de l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathscr{K}$) dont les différentielles sont des représentations de Lie T somme de caractères appartenant à la chambre de Weyl positive définie par b. Ainsi les représentations irréductibles de dimension finie de $U(n)$ sont donc paramétrisées par les suites de n entiers relatifs $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, où l'on a $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.

Un sous-groupe de Cartan, noté T, de $O(2p)$ est (cf. [V_3, 5.16]) isomorphe au produit semi-direct de sa composante neutre, un produit de p copies de $SO(2)$ par le groupe à 2 éléments $(1, \sigma)$ où 1 est l'unité et σ agit trivialement sur les $(p-1)$-premiers $SO(2)$ et par inversion sur le dernier. Les représentations irréductibles de T sont donc de 2 natures:

(a) les représentations de dimension 2 somme directe de deux représentations de $T°$ (la composante neutre) correspondant au caractère $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ où $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p > 0$ et au caractère $(\lambda_1, ..., -\lambda_p)$ ($\lambda_i \in \mathbb{N}$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$).

(b) les représentations de dimension 1 dont la restriction à $T°$ est le caractère $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ où $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p = 0$ sur lesquels σ agit soit par l'homothétie $+1$ soit par l'homothétie -1. Pour distinguer ces représentations, on les note $(\lambda_1, ..., \lambda_p)_+$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_p)_-$.

Pour unifier les notations, les représentations du cas (a) sont notées $(\lambda_1, ..., \lambda_p)_+$; rappelons qu'ici $\lambda_p \neq 0$, ce qui les distinguent du cas (b).

I.3. *Degré des K et K′ représentations irréductibles.* Suivant Howe, on définit le degré d'une représentation irréductible, notée V de K ou K', comme étant le plus petit degré, au sens usuel du degré d'un polynome, dans lequel V apparait dans le modèle de Fock (cf. I.1) ou $-\infty$ si V n'y apparait pas; cela a un sens puisque l'action de K et K' est homogène. On note $d°V$ ce degré. Soit V une représentation irréductible de K; alors Howe a démontré que si V apparait dans le modèle de Fock, V apparait dans $H(K)$ et la composante isotypique de $H(K)$ de type V est l'intersection de la composante isotypique du modèle de Fock, $\mathscr{P}$, de type V avec l'espace vectoriel formé des polynomes de degré inférieur ou égal à $d°V$ (cf. [H_2, 3.9(b) et 3.10(b)]). On a évidemment un résultat analogue pour $H(K')$. On calcule ces degrés à l'aide de [K-V] et les références de I.1.

LEMME. (i) *soit* $V \leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (*cf.* I.2) *une représentation irréductible de* $K = U(n)$. *On pose* $k = \sup\{i \mid \lambda_i + q - p > 0\}$ *et* $v = \sup\{i \mid \lambda_{n-i+1} + q - p < 0\}$. *Alors, on a:*

- *V apparait dans le modèle de Fock si et seulement si* $k \leqslant 2p$ *et* $v \leqslant 2q$.
- *si V apparait dans le modèle de Fock, on a:*

$$d^\circ V = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i + q - p|.$$

(ii) *Soit* $W \leftrightarrow ((\lambda_1, \dots, \lambda_p)_\varepsilon; (\mu_1, \dots, \mu_q)_\eta)$ *où* $\varepsilon, \eta = \pm 1$, *une représentation irréductible de* $O(2p) \times O(2q) = K'$ (*cf.* I.2). *On pose* $k = \sup\{1 \leqslant i \leqslant p \mid \lambda_i > 0\}$ *et* $v = \sup\{1 \leqslant i \leqslant q \mid \mu_i > 0\}$. *Alors on a:*

- *W apparait dans le modèle de Fock si et seulement si* $(1-\varepsilon)(p-k) + k \leqslant n$ *et* $(1-\eta)(q-v) + v \leqslant n$.
- *si W apparait dans le modèle de Fock, on a:*

$$d^\circ W = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \lambda_i + (1-\varepsilon)(p-k) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu_j + (1-\eta)(q-v).$$

I.4. *Correspondance entre K et K'-types déterminée par les harmoniques.*

COROLAIRE (Notations de I.3). *La représentation* $V \leftrightarrow (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ *de* K *apparait dans* $H(K, K')$ *si et seulement si l'on a:*

$$\begin{aligned} &k \leqslant p \text{ ou } k > p \text{ mais } \Lambda_{2p-k+1} = \cdots = \Lambda_k = 1 + p - q \\ &v \leqslant q \text{ ou } v > q \text{ mais } \Lambda_{n-2q+v} = \cdots = \Lambda_{n-v+1} = -1 + p - q. \end{aligned} \tag{1}$$

Si V apparait dans $H(K, K')$ la représentation $\Phi^c(V)$ de K' qui lui correspond a pour paramétrisation:

$$(\Lambda_1 + q - p, \dots, \Lambda_{k'} + q - p, 0, \dots, 0)_{\varepsilon'};$$
$$(-(\Lambda_n + q - p), \dots, -(\Lambda_{n-v'+1} + q - p), 0, \dots, 0)_{\eta'},$$

où l'on a:

$$k' = k,\ \varepsilon' = +1 \text{ si } k \leqslant p \text{ ou } k' = 2p - k,\ \varepsilon' = -1 \text{ si } k > p$$

et

$$v' = v,\ \eta' = +1 \text{ si } v \leqslant q \text{ ou } v' = 2q - v,\ \eta' = -1 \text{ si } v > q.$$

En inversant les rôles, la représentation $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon; (\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ *de* K' *apparait dans* $H(K; K')$ *si et seulement si l'on a:*

$$k + (1-\varepsilon)(p-k) + v + (1-\eta)(q-v) \leqslant n.$$

Si W *apparait dans* $H(K, K')$ *la représentation,* $\Psi^c(W)$, *de* K *qui lui correspond est paramétrisée par:*

$$(\lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{(1-\varepsilon)(p-k)}, 0, ..., 0, \underbrace{-1, ..., -1}_{(1-\eta)(q-v)}, -\mu_v, ..., -\mu_1) + p - q$$

$$(\textit{où } +p-q \textit{ est } \det{}^{p-q}). \tag{2}$$

Remarquons que le modèle de Fock précisé en I.1 pour la paire $Sp(2n)$, $O(2p, 2q)$ est aussi un modèle de Fock pour la paire non irréductible $(Sp(2n), O(2p))x\ (Sp(2n), O(2q))$ et pour la paire $(U(n), U(2p, 2q))$. Supposons que (1) soit satisfait. Alors [K-V, II.6.11] donne un vecteur de plus haut poids d'une représentation isomorphe à V et se trouvant dans $H(K)$ et en [K-V, II.6.1] ils ont montré que ce vecteur de plus haut poids se trouve aussi dans $H(K')$. D'où la suffisance de (1) et le calcul de $\Phi^c(V)$ est immédiat. On vérifie de même que (2) est suffisant et on calcule aisément $\Psi^c(W)$. Il reste à démontrer soit que (1) soit que (2) est nécessaire. On va le prouver pour (2), les notations étant plus simples. Supposons donc que l'on a:

- $k + v + (1-\varepsilon)(p-k) + (1-\eta)(q-v) > n$,
- W apparait dans $H(K, K')$,

et obtenons une contradiction.

Comme W apparait dans $H(K, K')$, cette représentation apparait dans $H(K')$ et d'après [K-V, II.6.13] on sait que la composante isotypique de type W dans $H(K')$ est isomorphe à $(V_1 \times V_2) \otimes W$, où V_1 et V_2 sont les représentations irréductibles de K paramétrisées respectivement par:

$$V_1 \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{(1-\varepsilon)(p-k)}, 0, ..., 0) + p$$

$$V_2 \leftrightarrow (0, ..., 0, \underbrace{-1, ..., -1}_{(1-\eta)(q-v)}, -\mu_v, ..., -\mu_1) - q.$$

Pour obtenir une contradiction il suffit de prouver que toute sous K-représentation irréductible de $V_1 \times V_2$ a un degré strictement inférieur à celui de W. Puisque $\det^{p-q}$ sort naturellement, il suffit de vérifier l'assertion suivante:

soient $V_1' \leftrightarrow (\Lambda_1', ..., \Lambda_n')$ et $V_2' \leftrightarrow (M_1', ..., M_n')$ des représentations irréductibles de K et $V' \leftrightarrow (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ une sous-K-représentation irréductible de $V_1' \otimes V_2'$. Alors on a:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i' + M_i'|.$$

Car si l'on fait $\Lambda_i' = \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\Lambda_i' = 1$, $k < i \leqslant k + (1-\varepsilon)(p-k)$, $\Lambda_i' = 0$, $i > k + (1-\varepsilon)(p-k)$ et $M_{n-i+1}' = -\mu_i$, $1 \leqslant i \leqslant v$, $M_{n-i+1}' = -1$, $v < i \leqslant v + (1-\eta)(q-v)$ et $M_{n-i+1}' = 0$, $i > v + (1-\eta)(q-v)$, on a, avec les hypothèses:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i' + M_i'| < \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \lambda_i + \sum_{1 \leqslant i \leqslant v} \mu_i + (1-\varepsilon)(p-k) + (1-\eta)(q-v) = d^\circ W.$$

Prouvons l'assertion: on sait qu'il existe un poids, noté $(\nu_1, ..., \nu_n)$ de V_2' tel que l'on ait (cf. par exemple, [V_2, 3.2.12]):

$$(\Lambda_1, ..., \Lambda_n) = (\Lambda_1' + \nu_1, ..., \Lambda_n' + \nu_n).$$

D'après le théorème de Kostant reporté en [B, exercise 1 du § 7], on sait que $(\nu_1, ..., \nu_n)$ appartient à l'enveloppe convexe définie par les conjugués de $(M_1', ..., M_n')$ sous l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}$ de K, ici le groupe des permutations à n lettres. Ainsi il existe un ensemble (a_σ), indexé par les éléments de $\mathfrak{S}$, formé de nombres réels compris entre 0 et 1 (au sens large) tels que l'on ait: $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} a_\sigma = 1$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\nu_i = \sum_\sigma a_\sigma M_{\sigma(i)}'$. D'où évidemment:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \Lambda_i' + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} a_\sigma M_{\sigma(i)}' \right| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} a_\sigma (\Lambda_i' + M_{\sigma(i)}') \right|$$
$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} a_\sigma |\Lambda_i' + M_{\sigma(i)}'| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} a_\sigma \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i' + M_{\sigma(i)}'| \right).$$

Vérifons que l'on a, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i' + M_{\sigma(i)}'| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i' + M_i'|,$$

ce qui suffit bien évidemment. Or on a:

$$\sum_{i \mid \Lambda_i' + M_{\sigma(i)}' \geqslant 0} \Lambda_i' + M_{\sigma(i)}' - \sum_{i \mid \Lambda_i' + M_{\sigma(i)}' < 0} \Lambda_i + M_{\sigma(i)}'$$
$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \Lambda_i' + M_{\sigma(i)}' - 2 \sum_{i \mid \Lambda_i' + M_{\sigma(i)}' < 0} \Lambda_i' + M_{\sigma(i)}'$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \Lambda'_i + M'_i - 2 \sum_{i \mid \Lambda'_i + M'_{\sigma(i)} < 0} \Lambda'_i + M'_{\sigma(i)}$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda'_i + M'_i|$$

$$+ 2 \left(\sum_{i \mid \Lambda'_i + M'_i < 0} (\Lambda'_i + M'_i) - \sum_{i \mid \Lambda'_i + M'_{\sigma(i)} < 0} (\Lambda'_i + M'_{\sigma(i)}) \right).$$

Soit $\alpha = \inf\{i \mid \Lambda'_i + M'_i < 0\}$ et $\mathfrak{J}$ l'ensemble des i tels que $\Lambda'_i + M'_{\sigma(i)} < 0$. On note s le cardinal de $\mathfrak{J}$. En utilisant le fait que $\Lambda' + M'$, Λ', M' sont dominants, on a:

$$\sum_{i \geqslant \alpha} \Lambda'_i + M'_i = \sum_{i \mid \Lambda'_i + M'_i < 0} \Lambda'_i + M'_i,$$

$$\sum_{i \in \mathfrak{J}} \Lambda'_i \geqslant \sum_{i > n-s} \Lambda'_i,$$

$$\sum_{i \in \mathfrak{J}} M'_{\sigma(i)} \geqslant \sum_{i > n-s} M'_i.$$

D'où:

$$\sum_{i \mid \Lambda'_i + M'_i < 0} \Lambda'_i + M'_i - \sum_{i \mid \Lambda'_i + M'_{\sigma(i)} < 0} (\Lambda'_i + M'_{\sigma(i)})$$

$$\leqslant \sum_{i \geqslant \alpha} \Lambda'_i + M'_i - \sum_{i > n-s} \Lambda'_i + M'_i$$

$$= \sum_{\alpha \leqslant i \leqslant n-s} \Lambda'_i + M'_i \qquad \text{si } \alpha \leqslant n-s,$$

$$= 0 \qquad \text{si } \alpha = n-s+1,$$

$$= -\sum_{n-s < i < \alpha} \Lambda'_i + M'_i \qquad \text{si } \alpha > n-s+1.$$

Par définition de α, c'est toujours $\leqslant 0$. D'où évidemment le résultat cherché qui termine la démonstration du corollaire.

I.5. L'assertion sur le degré d'une sous représentation irréducible de $K = U(n)$ incluse dans un produit tensoriel démontrée dans la preuve de I.4, nous reservira dans la suite et on utilisera aussi la remarque suivante du même type:

Remarque. Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2p}$ *une suite d'entiers relatifs et* $(\lambda_1, ..., \lambda_{2p}) \leftrightarrow W'$ *la représentation irréductible de* $U(2p)$ *lui correspondant.*

Soit W une sous-$O(2p)$-représentation incluse dans W' paramétrée par $(\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_\varepsilon$ alors on a, pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j} \lambda'_i \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} (\lambda_i - \lambda_{2p-i+1}).$$

On utilise simplement le fait que $(\lambda'_1, ..., \lambda'_p)$ paramétrise un caractère de T° (la composante neutre d'un sous-groupe de Cartan de $O(2p)$) qui est la restriction d'un caractère d'un sous-groupe de Cartan de $O(2p)$ contenant T° et intervenant comme "poids" dans W'.

I.6. On utilisera plusieurs fois la remarque technique suivante:

Remarque. Soient $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ et $\mathscr{W} \in Hch_O$. On suppose que $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ est un quotient de la représentation métaplectique. Soient $V \leftrightarrow (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ un K-type de $\mathscr{V}$ et $W \leftrightarrow (\bar{\lambda}_1, ..., \bar{\lambda}_p)_{\bar{\varepsilon}}$; $(\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_q)_{\bar{\eta}}$ un K'-type de $\mathscr{W}$. Alors $\mathscr{W}$ contient un K'-type, noté $W' \leftrightarrow (\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_{\varepsilon'}$; $(\mu'_1, ..., \mu'_q)_{\eta'}$ où les λ' (resp. les μ') vérifient les inégalités de I.5 *quand on fait, pour $1 \leqslant j \leqslant 2p$ (resp. $1 \leqslant j \leqslant 2q$), $\lambda_j = \sup(\Lambda_j + q - p, 0)$, on a nécessairement $\sup\{j \mid \Lambda_j + q - p > 0\} \leqslant 2p$, (resp. $\lambda_j = -\sup(\Lambda_{n-j+1} + q - p, 0)$, on a nécessairement $\sup\{j \mid \Lambda_{n-j+1} + q - p < 0\} \leqslant 2q$). De même $\mathscr{V}$ contient un K-type, noté $V' \leftrightarrow (\Lambda'_1, ..., \Lambda'_n) + p - q$, qui vérifie les inégalités suivantes, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$: $\bar{\mu}'_j \leqslant \Lambda'_j \leqslant \bar{\lambda}'_j$ où l'on a posé:*

$$\begin{aligned}
k = \sup\{j \mid \lambda_j > 0\}, \quad & \bar{\lambda}'_j = \lambda_j && \text{si } j \leqslant k \\
& \phantom{\bar{\lambda}'_j} = 1 && \text{si } k < j \leqslant k + (1-\bar{\varepsilon})(p-k) \\
& \phantom{\bar{\lambda}'_j} = 0 && \text{si } j > k + (1+\bar{\varepsilon})(p-k), \\
v = \sup\{j \mid \mu_j > 0\}, \quad & \bar{\mu}'_j = 0 && \text{si } j \leqslant n - (v + (1-\bar{\eta})(q-v)), \\
& \phantom{\bar{\mu}'_j} = -1 && \text{si } n - (v + (1-\bar{\eta})(q-v)) \\
& && \qquad < j \leqslant n - v + 1, \\
& \phantom{\bar{\mu}'_j} = -\bar{\mu}_{n-v+1} && \text{si } j > n - v + 1.
\end{aligned}$$

On remarque que l'on a nécessairement: $k + (1-\bar{\varepsilon})(p-k) \leqslant n$ et $v + (1-\bar{\eta})(q-v) \leqslant n$.

[H_2, 4.1(b)] montre que $\mathscr{W}$ contient une sous-représentation irréductible pour K' incluse dans la composante isotypique de type V, pour K, des harmoniques $H(K)$, notée $H(K)_V$. On sait, grâce à [K-V] que $H(K)_V$ sous l'action de $U(2p) \times U(2q)$ est irréductible et connue (cf. I.1). On applique alors I.5 pour trouver W'. On vérifie de même que $\mathscr{V}$ contient un K-type, noté V', inclus dans un certain produit tensoriel déjà utilisé dans la preuve de I.4. On obtient les inégalités $\leqslant$ comme dans la preuve de I.4 et les inégalités $\geqslant$ en échangeant les rôles de V_1 et V_2 (cf. I.4).

I.7. *Caractères infinitésimaux.* On note ici $Z(\mathfrak{g})^G$ et $Z(\mathfrak{g}')^{G'}$ le commutant de $Sp(\mathscr{X})$ et $O(\mathscr{Y})$ dans leur algèbre enveloppante ($Z(\mathfrak{g})^G$ est le centre de l'algèbre enveloppante et $Z(\mathfrak{g}')^{G'}$ est une algèbre de polynomes de codimension finie dans le centre de l'algèbre enveloppante de $O(\mathscr{Y})$). On (i.e. les physiciens) connait des générateurs simples de ces algèbres et on vérifie sur les formules dans un modèle de Schrödinger que les images de $Z(\mathfrak{g})^G$ et $Z(\mathfrak{g}')^{G'}$ par la représentation métaplectique coïncident. Une telle égalité est signalée à la fin de [H_1]. On a besoin d'un résultat plus explicite. Rappelons que $Z(\mathfrak{g})^G$ (resp. $Z(\mathfrak{g}')^{G'}$) s'identifie par un homorphisme du à Harisch-Chandra, noté φ_{Sp} (resp. φ_0) aux fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^{p+q}$) invariantes par permutations et changement de signes. On a alors le lemme suivant:

LEMME. *Si $n \leqslant p+q$, $Z(\mathfrak{g})^G$ agit injectivement dans la représentation métaplectique et l'homorphisme surjectif, noté ω, de $Z(\mathfrak{g}')^{G'}$ sur $Z(\mathfrak{g})^G$, coïncidant avec la restriction de la représentation métaplectique à $Z(\mathfrak{g}')^{G'}$, vérifie*:

$$\forall z' \in Z(\mathfrak{g}')^{G'}, \forall (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \langle \varphi_0(z'), (v_1, ..., v_n, p+q-n-1, ..., 1, 0)\rangle = \langle \varphi_{Sp}(\omega(z')), (v_1, ..., v_n)\rangle. \tag{1}$$

On a un résultat symétrique si $n \leqslant p+q$, i.e. ω: $Z(\mathfrak{g})^G \twoheadrightarrow Z(\mathfrak{g}')^{G'}$ vérifiant:

$$\forall z \in Z(\mathfrak{g})^G, \forall (v_1, ..., v_{p+q}) \in \mathbb{C}^{p+q}, \quad \langle \varphi_{Sp}(z), (v_1, ..., v_{p+q}, n-(p+q), ..., 1)\rangle = \langle \varphi_0(\omega(z)), (v_1, ..., v_{p+q})\rangle. \tag{2}$$

Il y a de nombreuses façons de vérifier ce lemme: en tenant compte de ce qui le précède, il suffit par exemple de construire à priori (comme cela est fait en III.8 en prenant $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ et pour π_i et π'_i des caractères) suffisamment de quotient irréductibles de la représentation métaplectique, dont on connait les caractères infinitésimaux. Une autre façon, consiste à se ramener formellement au cas où $O(\mathscr{Y})$ est compact (en faisant quelques changement de variables dans les formules de la représentation dans un modèle de Schrödinger).

I.8. *Quotient de la représentation métaplectique restreinte à un membre de la paire réductive duale.*

COROLLAIRE. *Soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ (resp. $\mathscr{W} \in Hch_O$). On suppose que $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{W}$) est un quotient de la représentation métaplectique restreinte à $Sp(\mathscr{X})$ (resp. $O(\mathscr{Y})$). Alors $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{W}$) appartient au domaine de définition de la correspondance de Howe (resp. à son image).*

La démonstration copie [W]. On pose $Z = \mathrm{Hom}(\mathscr{S}, \mathscr{V})$, homorphismes

"$Sp(\mathscr{X})$" équivariants (où $\mathscr{S}$ est la représentation métaplectique). On note Z' le dual algebrique de Z. Il est clair que Z et donc Z' a une action de Lie $O(\mathscr{Y}) \times K'$ et on note Z^* le sous-ensemble de Z' formé des éléments K'-finis. Vérifions que Z^* est un module de Harish-Chandra (de longueur finie) pour $O(\mathscr{Y})$. Soit τ un élément de $K'^\wedge$. On note Z_τ (resp. Z_τ^*) la composante isotypique de Z (resp. Z^*) de type τ; montrons que Z_τ est de dimension finie ce qui entrainera qu'il en est de même de Z_τ^*. On note $\mathscr{P}_\tau$ la composante isotypique de $\mathscr{P}$ (le modèle de Fock) de type τ. On a (cf. [H_2, 3.10(b)]): $\mathscr{P}_\tau = U(sp(2n))\, H(K')_\tau$ (où $sp(2n) = \text{Lie } Sp(\mathscr{X})$ et $U(\ )$ est l'algèbre enveloppante). Rappelons que τ est isomorphe à sa contragrédiente. On a des inclusions immédiates:

$$Z_\tau \subsetneq \operatorname{Hom}_{sp(2n) \times K}(\mathscr{P}_\tau, \mathscr{V}) \subsetneq \operatorname{Hom}_K(H(K')_\tau, \mathscr{V}).$$

D'après [H_2, 3.9(d)], $H(K')_\tau$ est un espace vectoriel de dimension finie donc ne faisant intervenir qu'un nombre fini de représentation de K. Comme $\mathscr{V}$ est admissible, $\operatorname{Hom}_K(H(K')_\tau, \mathscr{V})$ est de dimension finie. D'où l'assertion cherchée: $\dim Z_\tau < \infty$ et $\dim Z_\tau^* < \infty$. Grâce à I.7, on sait, en outre, que le centre de l'algèbre enveloppante associée à $O(\mathscr{Y})$ agit dans Z (donc dans Z^*) avec un noyau de codimension finie. Il résulte de ces deux propriétés que Z^* est admissible de longueur finie.

Il reste à vérifier que l'application naturelle de $Zx\mathscr{S}$ sur $\mathscr{V}$ donne lieu à un morphisme non nul de la représentation métaplectique ($\mathscr{S}$ ou $\mathscr{P}$) dans $\mathscr{V} \otimes Z^*$ entrelaçant toutes les actions. Or on a un morphisme non nul:

$$\alpha : \mathscr{P} \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(Z, \mathscr{V}),$$

et avec τ comme plus haut:

$$\alpha(\mathscr{P}_\tau) \subset Z_\tau^* \otimes \mathscr{V}.$$

D'où α se factorise par l'inclusion de $Z^* \otimes \mathscr{V}$ dans $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(Z, \mathscr{V})$ ce qui est le résultat cherché.

I.9. *Adjonction de plans hyperboliques.*

LEMME. *Soient $z \in \mathbb{N}$, $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$, $\mathscr{W} \in Hch_O$. On suppose que $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{W}$) appartient au domaine de définition (resp. à l'image) de la correspondance de Howe, notée comme dans l'introduction, $\Phi_{n,p,q}$, alors il en est de même pour $\Phi_{n,p+z,q+z}$ (resp. $\Phi_{n+z,p,q}$).*

Ce lemme est "bien connu". Vérifions l'assertion concernant $\mathscr{V}$. Soit Z^+ et Z^- des espaces vectoriels de dimension z munis d'une forme quadratique symétrique définie positive et négative respectivement. La représentation métaplectique pour la paire $(Sp(\mathscr{X}), O(\mathscr{Y} \oplus Z^+ \oplus Z^-))$ restreinte à $Sp(\mathscr{X})$

est le produit tensoriel des représentations métaplectiques pour les paires $(Sp(\mathscr{X}), O(\mathscr{Y}))$ et $(Sp(\mathscr{X}), O(Z^+ + Z^-))$ restreint à la diagonale de $Sp(\mathscr{X}) \times Sp(\mathscr{X})$. Grâce à I.8, il suffit de vérifier que la représentation triviale de $Sp(\mathscr{X})$ intervient comme quotient de la représentation métaplectique pour la paire $(Sp(\mathscr{X}), O(Z^+ \oplus Z^-))$ i.e., une paire où le groupe orthogonal est déployé. C'est immédiat puisque cette représentation a un modèle dans l'espace de Schwartz des fonctions sur $\mathscr{X} \otimes \mathscr{L}$ (où $\mathscr{L}$ est un lagrangien de $Z^+ \oplus Z^-$), le groupe symplectique opèrant par la représentation naturelle; l'évaluation au point 0 forunit donc un tel quotient.

II. Lien entre K-type minimal et K-type de degré minimal

II.1. *Degré d'un module de Harish-Chandra et K-type de degré minimal.* Soient $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ et $\mathscr{W} \in Hch_O$; tenant compte de I.3, on définit, toujours en suivant Howe, le degré de $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ en posant:

- $d^\circ\mathscr{V} = \inf_{(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \leftrightarrow V \mid \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{V}) \neq 0} \{\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |\Lambda_j + q - p|\}$,
- $d^\circ\mathscr{W} = \inf_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)_\varepsilon; (\mu_1, \ldots, \mu_q)_\eta \leftrightarrow W \mid \mathrm{Hom}_{K'}(W, \mathscr{W}) \neq 0} \{\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu_j + (1-\varepsilon)(p-k) + (1-\eta)(q-v)\}$, où $k = \sup\{j \mid \lambda_j > 0\}$ et $v = \sup\{j \mid \mu_j > 0\}$.

Soit V un K-type de $\mathscr{V}$; on dit que V est un K-type de degré minimal si l'on a: $d^\circ V = d^\circ \mathscr{V}$ (cf. I.3). On définit de même la notion de K'-type de degré minimal de $\mathscr{W}$.

La démonstration donnée par Howe de sa conjecture dans le cas archimédien repose essentiellement sur le fait que si V est un K-type de degré minimal de $\mathscr{V}$ alors V intervient dans $H(K, K')$ et $\mathscr{W}$ contient $\Phi^c(V)$ (cf. I.4) comme K'-type en degré minimal (cf. [H_2, § 4]). En outre l'action du commutant de K' dans l'algèbre enveloppante de Lie $O(\mathscr{Y})$ sur $\Phi^c(V)$ est en grande partie déterminée par l'action du commutant de K dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $Sp(\mathscr{X})$ sur V. Il est alors bien clair qu'il est important d'éclaircir les rapports entre K-type de degré minimal et K-type minimal. Introduisons quelques conditions liées à ce problème:

soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$; *on dit que* $\mathscr{V}$ *vérifie* (†) *si* $\mathscr{V}$ *contient un K-type minimal, noté V et paramétrisé par* $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ (*cf.* I.2), *avec la propriété suivante*: *on note* $(\tilde{\Lambda}_1, \ldots, \tilde{\Lambda}_n)$ *le poids associé par Vogan à V* (*il est calculé en* II.4) *et on pose* $p'_{r+1} = \sup\{j \mid \tilde{\Lambda}_j > 0\}$ *et* $q'_{r+1} = \sup\{j \mid \tilde{\Lambda}_{n-j+1} < 0\}$. *On demande que l'on ait*:

(α) $p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 1, 0$ *ou* -1.

(β) *si* $n > p'_{r+1} + q'_{r+1}$, $\forall p'_{r+1} < j \leqslant n - q'_{r+1}$, $|\Lambda_j + q + p| \leqslant 1$.

(γ) $p \geqslant p'_{r+1}$, $q \geqslant q'_{r+1}$ *et* $\#\{p'_{r+1} < j \leqslant n - q'_{r+1} \Lambda_j + q - p \rangle 0$ (*resp.* $<0)\} \leqslant 2(p - p'_{r+1})$ (*resp.* $2(q - q'_{r+1})$).

On notera ($\ddagger$) la condition ($\dagger$) quand on oublie (γ). (Remarquons que ($\dagger$) et ($\ddagger$) coïncident dès que $n < p + q$ et que si $n = p + q$, ($\ddagger$) entraine déjà que $p \geqslant p'_{r+1}$ et $q \geqslant q'_{r+1}$).

On démontrera dans cette partie, que si $\mathscr{V}$ a un K-type minimal, noté V, vérifiant ($\ddagger$) alors ce K-type est de degré minimal et que si l'on a en plus les hypothèses suivantes: V vérifie ($\dagger$), $n \leqslant p + q$, $\mathscr{V}$ est dans le domaine de définition de la correspondance de Howe avec son image notée $\mathscr{W}$, alors $W := \Phi^c(V)$ est un K'-type minimal (et de degré minimal) de $\mathscr{W}$. De plus $\mathscr{W}$ vérifie la condition définie ci-après et notée ($\dagger$)$'$ grâce au K'-type W. *On dit que* $\mathscr{W} \in Hch_O$ *vérifie* ($\dagger$)$'$ *si l'on a*:

$\mathscr{W}$ contient un K'-type minimal, noté W et paramétrisé par $(\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon$; $(\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ *tel que l'on ait, en posant* $k = \sup\{j \mid \lambda_j > 0\}$ *et* $v = \sup\{j \mid \mu_j > 0\}$:

$$\varepsilon(p - k) + \eta(q - v) \geqslant 0.$$

On démontrera aussi que si $\mathscr{W}$, W vérifient ($\dagger$)$'$, alors W est un K'-type de degré minimal de $\mathscr{W}$ et que si $\mathscr{W}$ est dans la correspondance de Howe avec l'hypothèse supplémentaire $n \geqslant p + q$, alors $V := \psi^c(W)$ est un K-type minimal de l'image réciproque de $\mathscr{W}$, notée $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}$, V vérifient ($\dagger$).

La condition ($\dagger$)$'$ s'explique assez facilement: soit $\mathscr{X}$ un module de Harish-Chandra pour $SO(2p, 2q)$. On choisit comme cela est possible $\mathscr{W} \in Hch_O$ tel que sa restriction, noté $\mathscr{W}_1$, en un module de Harish-Chandra pour $SO(2p, 2q)$ contient $\mathscr{X}$ comme sous-quotient (en fait comme sous-module). On note det le caractère non trivial de $O(2p, 2q)$ et on a:

$$\mathscr{W} \otimes \det \simeq \mathscr{W} \Leftrightarrow \mathscr{X} \not\simeq \alpha \mathscr{X}$$

(où α est un automorphisme extérieur de $SO(2p, 2q)$ induit par un élément de K' non dans $SO(2p, 2q)$).

Tout élément de Hch_O dont la "restriction" à $SO(2p, 2q)$ contient $\mathscr{X}$ est isomorphe soit à $\mathscr{W}$ soit à $\mathscr{W} \otimes \det$. La condition ($\dagger$)$'$ est toujours vérifiée soit par $\mathscr{W}$ soit par $\mathscr{W} \otimes \det$, éventuellement par les deux—éventualité peu fréquente quand $\mathscr{W} \not\simeq \mathscr{W} \otimes \det$ mais se produisant—et ainsi ($\dagger$)$'$ ne permet pas de choisir entre $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W} \otimes \det$ quand ces représentations sont non isomorphes mais presque.

Cette partie est très pénible; on y utilise intensivement les résultats de Vogan et on est obligé de calculer explicitement les données θ-stables associées par Vogan à un K'-type (cf. II.2) et à un K-type (cf. II.4) ce qui n'est pas non plus très amusant.

II.2. *Données θ-stables (discrètes) associées par Vogan à un K′-type.* Soit $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon$; $(\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ une représentation irréductible de K'. On pose: ($\lambda_{p+1} = \mu_{q+1} = 0$ et $\lambda_u = \mu_u = +0$ si $u \leqslant 0$)

(1) $x = \sup\{j \mid \lambda_{p-j+1} + \mu_{q-j+1} \leqslant 1\}$,

$$\begin{aligned} p' &= x && \text{si } \lambda_{p-x} \neq 0, \\ &= x+1 && \text{sinon.} \\ q' &= x && \text{si } \mu_{q-x} \neq 0, \\ &= x+1 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On vérifie que $x = \inf(p', q')$ et $|p' - q'| \leqslant 1$.

(2) On définit inductivement sur i les entiers, notés p_i, q_i suivants:

$$\begin{aligned} &\text{si } i = 0, && p_0 = q_0 = 0, \\ &\text{si } i > 0, && p'_i = \sum_{1 \leqslant j < i} p_j,\ q'_j = \sum_{1 \leqslant j < i} q_j,\ m_i = (\lambda_{p'_i+1} + 2(p - p'_i)) \\ & && \quad - (\mu_{q'_i+1} + 2(q - q'_i)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_i &= 0 && \text{sauf si } m_i \geqslant -1 \text{ et } p'_i < p - p', \\ q_i &= 0 && \text{sauf si } m_i \leqslant 1 \text{ et } q'_i < p - q'. \end{aligned}$$

(on laisse au lecteur le soin de vérifier que si $|m_i| \leqslant 1$ alors $p'_i < p - p'$ est équivalent à $q'_i < q - q'$)

si $m_i > 1$ et $p'_i < p - p'$, on a $p_i = 1$ et $q_i = 0$,

si $m_i < -1$ et $q'_i < q - q'$, on a $q_i = 1$ et $p_i = 0$

si $|m_i| \leqslant 1$ et $p'_i < p - p'$, $q'_i < q - q'$,

on pose $x_i = \sup\{j \geqslant 1 \mid \lambda_{p'_i+1} = \cdots = \lambda_{p'_i+j}$ et $\mu_{q'_i+1} = \cdots = \mu_{q'_i+j}\}$

et l'on définit alors:

si $m_i = 0$, $p_i = q_i = x_i$,

$$\begin{aligned} &\text{si } m_i = -1,\ p_i = x_i && \text{et} && q_i = x_i && \text{si } \mu_{q'_i+x_i} \neq \mu_{q'_i+x_i+1}, \\ & && && \quad = x_i + 1 && \text{sinon,} \\ &\text{si } m_i = 1,\ q_i = x_i && \text{et} && p_i = x_i && \text{si } \lambda_{p'_i+x_i} \neq \lambda_{p'_i+x_i+1}, \\ & && && \quad = x_i + 1 && \text{sinon} \end{aligned}$$

(on laisse encore au lecteur le soin de vérifier que l'on a $p'_{i+1} \leqslant p - p'$ et $q'_{i+1} \leqslant q - q'$ et que la double suite finit par atteindre $(p - p', q - q')$).

(3) On pose $r = \inf\{i \mid p'_{i+1} = p - p' \text{ et } q'_{i+1} = q - q'\}$.

(4) Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on pose

$$\begin{aligned} \sigma'_i &= 0 && \text{si } m_i \geqslant 1, \\ &= \tfrac{1}{2} && \text{si } m_i = 0, \\ &= 1 && \text{si } m_i \leqslant -1. \end{aligned}$$

A W, Vogan associe d'abord un poids, noté ici $(\tilde{\Lambda}; \tilde{M})$ (i.e., un caractère de l'algèbre de Lie d'un tore maximal (cf. [V_2, 5.3.3]), puis une sous-algèbre parabolique complexe, notée ici $\mathfrak{q}$ (cf. [V_2, 5.3.22]) (c'est la sous-algèbre parabolique "positive" associée naturellement à $(\tilde{\Lambda}; \tilde{M})$ vu comme caractère de l'algèbre de Lie d'un tore compact de $O(2p, 2q)$) et il considère $L := \mathrm{Norm}_{O(2p,2q)}\, \mathfrak{q}$. On identifie $(\tilde{\Lambda}; \tilde{M})$ à $(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_p)$; $(\tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_q)$ le produit tensoriel de deux caractères pour des tores maximaux de $SO(2p)$ et $SO(2q)$. (Ces objets ne dépendent que d'une sous-représentation irréductible de $SO(2p) \times SO(2q)$ incluse dans W, n'importe laquelle et donc pas de ε et η).

LEMME. (i)

Soit $1 \leqslant j \leqslant p$, *si* $j > p'_{r+1}$ $(= p - p')$, *on a* $\tilde{\lambda}_j = 0$,

si $j \leqslant p'_{r+1}$, *on pose* $i = \sup\{v \mid p'_v < j \leqslant p'_{v+1}\}$ *et l'on a*:

$\tilde{\lambda}_j = \lambda_j + (p - q) - (p'_i - q'_i) - 1 + \sigma'_i \geqslant \tfrac{1}{2}$.

Soit $1 \leqslant j \leqslant q$, *si* $j > q'_{r+1}$ $(= q - q')$, *on a* $\tilde{\mu}_j = 0$,

si $j \leqslant q'_{r+1}$, *on pose* $i = \sup\{v \mid q'_v \leqslant j \leqslant q'_{v+1}\}$ *et l'on a*:

$\tilde{\mu}_j = \mu_j + (q - p) - (q'_i - p'_i) - \sigma'_i \geqslant \tfrac{1}{2}$.

(ii) *On choisit des bases orthonormées de* E *et* F (*cf.* I.1), *notées* $e_1, ..., e_{2p}$ *et* $f_1, ..., f_{2q}$ (*la norme des* f_j *vaut* -1) *de telle sorte que les sous-algèbres de borel déterminant les paramétrisations en* I.2, *soient les stabilisateurs des drapeaux isotropes complets définis par les éléments rangés par ordre des indices croissant,* $e_{2j-1} + \sqrt{-1}\, e_{2j}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ *et même chose avec les* f_j. *Alors* $\mathfrak{q}$ *est l'algèbre de Lie du stabilisateur, noté* Q, *dans* $O(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} + F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ *du drapeau isotrope suivant*: $\mathscr{D}_0 = 0 \subsetneqq \mathscr{D}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathscr{D}_r$ *où* $\mathscr{D}_i$ *est engendré sur* $\mathbb{C}$ *par l'ensemble des éléments* $(e_{2j-1} + \sqrt{-1}\, e_{2j})$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}$ *et* $(f_{2j-1} + \sqrt{-1}\, f_{2j})$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}$.

(iii) *On a* $L = Q \cap O(\mathscr{Y})$ *et* L *est isomorphe à*:

$$U(p_1, q_1) \times \cdots \times U(p_r, q_r) \times O(2p', 2q').$$

Il faut faire un certain nombre de choix de système de racines; on adopte les notations e_j et f_j de l'énoncé de (ii). On note avec des minuscules les algèbres de Lie. Dans $so(2p, \mathbb{C})$, on note $\mathfrak{b}_E$ la sous-algèbre de Borel stabilisant le drapeau isotrope $E_0 = 0 \subsetneq E_1 \cdots \subsetneq E_p$ où E_j est engendré sur $\mathbb{C}$ par E_{j-1} et $e_{2j-1} + \sqrt{-1}e_{2j}$ et on note $\mathfrak{t}_E$ le tore stabilisant les droites engendrées par les différents $e_{2j-1} + \sqrt{-1}e_{2j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$. On définit de même dans $so(2q, \mathbb{C})$, $\mathfrak{b}_F$ et $\mathfrak{t}_F$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_E + \mathfrak{t}_F$ est celle d'un tore maximal de $O(2p, 2q)$. Grâce à $\mathfrak{b}_E$ et $\mathfrak{b}_F$ on a des chambres de Weyl positives pour $\mathfrak{t}_E$ et $\mathfrak{t}_F$ (c'est celles dont il est question dans l'énoncé de (ii)). On a donc un système de racines compactes positives dont on note ρ_c la demi-somme des éléments. Il est clair que $\Lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_p); (\mu_1, ..., \mu_q)$ est dominant. Il faut encore choisir un système de racines positives, noté Δ^+, contenant les racines compactes positives pour lequel $\Lambda + 2\rho_c$ soit dominant. Pour préciser ce choix qui n'est pas unique remarquons que l'on a:

$$\begin{aligned}\Lambda + 2\rho_c = (\lambda_1 + 2(p-1), ..., \lambda_j + 2(p-j), ..., \lambda_p);\\ (\mu_1 + 2(q-1), ..., \mu_j + 2(q-j), ..., \mu_q).\end{aligned}$$

On note $\mathscr{D}'$ le drapeau isotrope, $\mathscr{D}'_0 = 0 \subsetneq \mathscr{D}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{D}'_{p+q}$ ayant la propriété suivante: soit $1 \leqslant j \leqslant p+q$; si $\mathscr{D}'_j$ contient $e_{2v-1} + \sqrt{-1}e_{2v}$ où $1 \leqslant v \leqslant p$ alors $\mathscr{D}'_j$ contient $f_{2w-1} + \sqrt{-1}f_{2w}$ pour tout w tel que $\lambda_v + 2(p-v) < \mu_w + 2(q-w)$. Et si $\mathscr{D}'_j$ contient $f_{2w-1} + \sqrt{-1}f_{2w}$ où $1 \leqslant w \leqslant q$, alors $\mathscr{D}'_j$ contient $e_{2v-1} + \sqrt{-1}e_{2v}$ pour tout v tel que $\mu_w + 2(q-w) \leqslant \lambda_v + 2(p-v)$. Cela fixe complètement Δ^+ et une chambre de Weyl, notée $\mathscr{C}^+$. On note ρ_n la demi-somme des racines non compactes de Δ^+. On pose:

$$\bar{\Lambda} := \Lambda + \rho_c - \rho_n =: (\bar{\lambda}_1, ..., \bar{\lambda}_p); (\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_q)$$

(jusqu'ici on a suivi à la lettre les définitions de Vogan). Grâce à [C], on sait que $(\tilde{\Lambda}; \tilde{M})$ est la projection orthogonale de $\bar{\Lambda}$ sur $\bar{\mathscr{C}}^+$ (la fermeture de $\mathscr{C}^+$ pour la topologie usuelle). On calcule $\bar{\Lambda}$: pour $1 \leqslant j \leqslant p$ et $1 \leqslant j' \leqslant q$, on pose:

$$\begin{aligned}Q_j &= \#\{v \mid \lambda_j + 2(p-j) \geqslant \mu_v + 2(q-v)\}\\ P_{j'} &= \#\{v \mid \mu_{j'} + 2(q-j') > \lambda_v + 2(p-v)\}.\end{aligned}$$

Et l'on a: (presque par définition)

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_j &= \lambda_j + p - j - Q_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p,\\ \bar{\mu}_j &= \mu_j + q - j - P_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant q.\end{aligned}$$

On a besoin des inégalités suivantes qu'on laisse au lecteur:

(5) soit $1 \leqslant i \leqslant r$; on a: (avec les conventions précédant (1))

$$\lambda_{p_i'} + 2(p - p_i') - (\mu_{q_i'+1} + 2(q - q_i')) \geqslant 0,$$
$$\mu_{q_i'} + 2(q - q_i') - (\lambda_{p_i'+1} + 2(p - p_i')) \geqslant 0.$$

On va prouver que l'on a:

(6) soient $1 \leqslant i \leqslant r$ et $p_i' \leqslant j \leqslant p_{i+1}'$, alors:

$\tilde{\lambda}_j = \lambda_j + (p-q) + (q_i' - p_i') - \sigma_i$ où $\sigma_i = 1$ si $m_i \geqslant 0$ et 0 si $m_i = -1$,

i.e.,

$$Q_j = \sigma_i + (p_i' - q_i') + q - j.$$

Supposons d'abord que $q_i \neq 0$; alors on a pour tout $1 \leqslant j' \leqslant x_i$:

$$\lambda_{p_i'+j'} + 2(p - p_i' - j') - (\mu_{q_i'+j'} + 2(q - q_i' - j')) = m_i = -1, 0 \text{ ou } 1.$$

On en déduit facilement que l'on a:

$$Q_{p_i'+j'} = q - (q_i' + j') + \sigma_i,$$

et donc si $j = p_i' + j'$, on a $Q_j = q - q_i' + p_i' - j + \sigma_i$, ce que l'on voulait. Il reste à voir le cas de $j = p_{i+1}'$ quand $p_i > q_i$. Utilisant le calcul précédent et l'égalité $\lambda_{p_{i+1}'} = \lambda_{p_i'+q_i}$, on a:

$$\lambda_{p_{i+1}'} + 2(p - p_{i+1}') - (\mu_{q_{i+1}'} - 2(q - q_{i+1}')) = m_i - 2 = -1,$$

i.e.

$$Q_{p_{i+1}'} = q - q_{i+1}' = q - q_i' + p_i' - j + 1,$$

ce que l'on voulait. Supposons maintenant que $q_i = 0$; i.e. $m_i > 1$ et $p_i = 1$. La première égalité de (5) où l'on fait $i = i+1$ donne (si $q_i' < q$):

$$\lambda_{p_{i+1}'} + 2(p - p_{i+1}') - (\mu_{q_{i+1}'+1} + 2(q - q_{i+1}' - 1)) \geqslant 2,$$

et la deuxième inégalité de (5) donne (en tenant compte de ce que $p_{i+1}' = p_i' + 1$):

$$\lambda_{p_{i+1}'} + 2(p - p_{i+1}') - (\mu_{q_i'} + 2(q - q_i')) \leqslant -2.$$

On en déduit que l'on a:

$$Q_{p_{i+1}'} = Q_j = q - q_i' = q - q_i' + p_i' - j + 1,$$

ce que l'on voulait. Cela termine la preuve de (6). Supposons maintenant que l'on a $p'_{r+1} < j \leqslant p$, en particulier $\lambda_j = 1$ ou 0, et montrons que l'on a:

(7) $\bar{\lambda}_j = 0$ si $\lambda_j = 1$,

(8) $\bar{\lambda}_j = -1$ si $\lambda_j = 0$, $p - j \leqslant q'$ $(= q - q'_{r+1})$ et $\mu_{q-p+j} = 0$,

(9) $\bar{\lambda}_j = 0$ dans les cas restants.

Prouvons (7), i.e., supposons $\lambda_j = 1$ alors $q' \geqslant p' \geqslant p - j$ et $\mu_{q-p+j} = 0$. On a:

$$\lambda_j + 2(p-j) - (\mu_{q-p+j} + 2(q - (q-p+j)) = 1.$$

D'où $Q_j = q - (q-p+j) + 1 = p - j + 1$, et $\bar{\lambda}_j = 1 + p - j - Q_j = 0$. D'où (7). On prouve par le même calcul (8) et (9) sauf le cas où $j = p'_{r+1} + 1$ et $p' = q' + 1$. Supposons donc que $j = p'_{r+1} + 1$ et $p' = q' + 1$. On a si $q'_{r+1} < q$,

$$\lambda_j + 2(p-j) - (\mu_{q'_{r+1}+1} + 2(q - q'_{r+1} - 1)) = -\mu_{q'_{r+1}+1} + 2 = 2 \text{ ou } 1.$$

En outre, on a ici $\mu_{q'_{r+1}} > \mu_{q'_{r+1}+1}$ (cf. (1)), d'où:

$$Q_j = q - q'_{r+1} \qquad \text{et} \qquad \bar{\lambda}_j = 0 + p' - 1 - q' = 0.$$

Cela termine la preuve de (9). On démontre de façon analogue que l'on a:

(10) soit $1 \leqslant i \leqslant r$ et soit $q'_i < j \leqslant q'_{i+1}$, alors on a:

$$\bar{\mu}_j = \mu_j + (q-p) + (p'_i - q'_i) - \bar{\sigma}_i \qquad \text{où } \bar{\sigma}_i = 1 \text{ si } m_i < 0 \text{ et } 0 \text{ si } m_i = 0 \text{ ou } 1.$$

(11) Si $q'_{i+1} < j \leqslant q$, $\bar{\mu}_j = 0$.

(La situation n'est pas complètement symétrique à cause du choix de Δ^+.) Soit $1 \leqslant i \leqslant r$:

- on suppose que $p_i q_i \neq 0$, alors il résulte de (6) et (10) que l'on a pour $1 \leqslant j \leqslant p_i$ ou $1 \leqslant j \leqslant q_i$, $\bar{\lambda}_{p'_i+j} = \bar{\lambda}_{p'_i+1}$, $\bar{\mu}_{q'_i+j} = \mu_{q'_i+1}$ et

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{p'_i+1} - \bar{\lambda}_{q'_i+1} = m_i - \sigma_i + \bar{\sigma}_i &= 0 \qquad \text{si } m_i = -1 \text{ ou } 1\\ &= -1 \qquad \text{si } m_i = 0.\end{aligned}$$

- on suppose que $p'_{i+1} < p'_{r+1}$ et $p_i \neq 0$; alors on a : (que $p_{i+1} \neq 0$ ou non)

$$\bar{\lambda}_{p'_i+1} - \bar{\lambda}_{p'_{i+1}+1} \geqslant \lambda_{p'_{i+1}} - \lambda_{p'_{i+1}+1} + (p_i - q_i) - \sigma_i + \sigma_{i+1} =: x_i.$$

Montrons que x_i est $\geqslant 0$ avec égalité seulement si $m_i = 0$: Supposons d'abord que $p_i = q_i$ et $\lambda_{p'_{i+1}} = \lambda_{p'_{i+1}+1}$: alors $m_i = 0$ (cf. (2)) et $\mu_{q'_{i+1}} > \mu_{q'_{i+1}+1}$. Cela entraine que $m_{i+1} \geqslant 1$ et donc $\sigma_{i+1} = 1$. D'où $x_i = 0$. Supposons maintenant que $p_i > q_i$ (d'où $m_i \geqslant 1$). Si $\lambda_{p'_{i+1}} > \lambda_{p'_{i+1}+1}$ on a $x_i > 0$. Si $\lambda_{p'_{i+1}} = \lambda_{p'_{i+1}+1}$ on a $m_i \geqslant 1$ et $m_{i+1} = m_i - 2$ si $m_i > 1$ et $m_{i+1} \geqslant 0$ si $m_i = 1$. Dans tous les cas $\sigma_{i+1} = 1$, d'où $x_i > 0$. On règle les cas restants de façon similaire.

Vérifions maintenant que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $p_i \neq 0$ et pour tout $p'_i < j \leqslant p'_{i+1}$ on a:

(12) $\bar{\lambda}_j \geqslant 0$ avec égalité seulement si $m_i = 0$.

Supposons d'abord $(p-q) + (q'_i - p'_i) > 0$; l'assertion ne peut alors être fausse que si $\lambda_j = 0$, $m_i > 0$ et $(p-q) + (q'_i - p'_i) = 1$. On aurait dans ce cas, $q'_i < q'_{i+1}$ et $0 \leqslant \mu_{q'_i+1} = -m_i + 2$. Or d'après (1), $\mu_{q'_i+1} = 1$ ou 0 est exclu, d'où une contradiction.

Supposons maintenant que $(p-q) + (q'_i - p'_i) = 0$. Cela entraine que l'on a: $\lambda_{p'_i+1} = \mu_{q'_i+1} + m_i$ et $\bar{\lambda}_{p'_i+1} = \lambda_{p'_{i+1}} - \sigma_i$. Il est exclu par (1) que l'on ait $\lambda_{p'_i+1} = 0$ et $\mu_{q'_i+1} = 1$ ou 0 (cela exclut $\lambda_{p'_i+1} = 0$ car $m_i \geqslant -1$) ou que l'on ait $\lambda_{p'_{i+1}} = 1$ et $\mu_{q'_{i+1}} = 0$ (cela exclut $\lambda_{p'_{i+1}} = 1$ avec $m_i \geqslant 1$). On conclut alors aisément. Il reste à voir le cas où $p - q + q'_i - p'_i < 0$; on a: $\bar{\lambda}_j = -(p - q + q'_i - p'_i) + m_i + \mu_j + 1 - \sigma_i$ et $m_i \geqslant -1$. Il suffit de s'assurer que $m_i = -1$ entraine $\sigma_j = 0$.

Faisant des calculs similaires en remplaçant les λ par les μ, on voit que la projection orthogonale de Λ sur $\mathscr{C}^+$ coïncide avec ce qui est annoncé dans le lemme. On a aussi l'inégalité $\geqslant \frac{1}{2}$, grâce à (12). Il est alors très facile de calculer $\mathfrak{q}$ et L.

II.3. *Lien entre K'-type minimal et de degré minimal.*

LEMME. *Soit $\mathscr{W} \in Hch_O$ et soit W un K'-type minimal de $\mathscr{W}$. On adopte les notations de II.2. Soit $W' \leftrightarrow (\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_{\varepsilon'}; (\mu'_1, ..., \mu'_q)_{\eta'}$ un autre K'-type de $\mathscr{W}$, alors on a*:

(α) $\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu'_j \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu_j$.

(β) $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$, $\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} \mu'_j \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} \mu_j$.

(γ) *On pose k (resp. k') $= \sup\{j \mid \lambda_j$ (resp. $\lambda'_j) > 0\}$, v (resp. v') $= \sup\{j \mid \mu_j$ (resp. $\mu'_j) > 0\}$ et on suppose que W vérifie $(\dagger)'$. Alors on a*:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda'_j + (1-\varepsilon')(p-k') + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu'_j + (1-\eta')(q-v') = d^\circ W'$$
$$\geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j + (1-\varepsilon)(p-k) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu_j + (1-\eta)(q-v) = d^\circ W.$$

En particular, W est de degré minimal dans $\mathscr{W}$.

On note ici, $\mathfrak{u}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{q}$ (cf. II.2), $\mathfrak{k}_0 = \text{Lie}\, K'$, $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie}\, O(2p, 2q)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ (pour l'involution de points fixes K'). D'une manière générale, soit $\mathscr{E}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $S^*(\mathscr{E})$, $\Lambda^*\mathscr{E}$, l'algèbre symétrique et l'algèbre extérieure de $\mathscr{E}$; si $\mathscr{E}$ est muni d'une base, notée $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_e)$, on appelle bases standards de $S^*(\mathscr{E})$, $\Lambda^*\mathscr{E}$, les bases formées par les éléments $\varepsilon_1^{m_1} \cdots \varepsilon_e^{m_e}$ (où $(m_1, ..., m_e)$ parcourt $\mathbb{N}^e$), $\varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_j}$ où $1 \leqslant j \leqslant e$, $(i_1 < \cdots < i_j)$ est un sous-ensemble de $\{1, ..., e\}$. On note χ le caractère de $L \cap K'$ dans $\Lambda^{\max} \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ et $\mathbb{C}_\chi$ la représentation de $L \cap K'$ associée.

On note aussi W_L la représentation de $L \cap K'$ telle que $W_L \otimes \mathbb{C}_\chi$ admet $(\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon; (\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ comme l'un de ses plus haut poids (cf. [V_2, 6.5.5]).

Suivant [V_2, 5.4.8], on choisit un ensemble de données θ-stables $(\mathfrak{q}, H, \delta, \nu)$ pour $\mathscr{W}$ à l'aide de W; i.e., $\mathfrak{q}$ a déjà été défini, H est un sous-groupe de Cartan maximalement déployé de L (rappelons que L est quasi-déployé), en posant $T := H \cap K'$, δ est un caractère de T intervenant dans la restriction de W_L à T et ν est le paramètre continu qui ici ne jouera aucun rôle mais qui est une forme linéaire sur Lie $H \cap \mathfrak{p}$ donnant l'action du commutant de K' dans l'algèbre enveloppante, sur W (qui intervient avec multiplicité 1 dans $\mathscr{W}$). Précisons un peu plus H et $\delta \otimes \chi$:

H contient le centre de chacun des groupes $U(p_i, q_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, noté c_i. On identifie c_i à $U(1)$ de la façon suivante:

soit $c \in U(1)$; on note γ_c l'élément de $O(\mathscr{Y})$ défini par (notations de II.2):

$$\gamma_c e_j = e_j \text{ si } j \notin [2p'_i + 1,\, 2p'_{i+1}],$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_c e_{2j-1} &= \left(\frac{c + c^{-1}}{2}\right) e_{2j-1} + \sqrt{-1}\left(\frac{c - c^{-1}}{2}\right) e_{2j} \\ \gamma_c e_{2j} &= -\sqrt{-1}\left(\frac{c - c^{-1}}{2}\right) e_{2j-1} + \left(\frac{c + c^{-1}}{2}\right) e_{2j} \end{aligned}\right\} \quad \text{si } j \in [p'_i + 1,\, p'_{i+1}],$$

et des formules analogues en remplaçant e_j par f_j. Alors on a:

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant r,\ \forall c \in c_i,\ \delta \otimes \chi(c) = c^{n_i}$$

où

$$n_i = \sum_{p'_i < j \leqslant p'_{i+1}} \lambda_j + \sum_{q'_i < j \leqslant q'_{i+1}} \mu_j. \tag{1}$$

(Pour nous, seul nous intéresse $\delta \otimes \chi$, mais on a gardé cette notation compliquée pour suivre Vogan; δ est un $K' \cap L$ type gentil alors que $\delta \otimes \chi$ ne l'est pas.) Posons $H \cap O(2p', 2q') =: H'$ et avec les notations de II.2 on définit H' comme étant le sous-groupe de $O(2p', 2q')$ qui laisse stable les droites engendrées par les éléments $e_{2p'_{r+1}+j} \pm f_{2q'_{r+1}+j}$ où $1 \leqslant j \leqslant 2(\inf(p'.q'))$. Dans ces conditions $H' \cap K =: T'$ est engendré par une copie de $O(2)$ si $\inf(p', q') < \sup(p', q')$ et par l'ensemble des éléments qui envoient $e_{2p'_{r+1}+j}$ sur $\alpha_j e_{2p'_{r+1}+j}$, $f_{2q'_{r+1}+j}$ sur $\alpha_j f_{2q'_{r+1}+j}$ où $1 \leqslant j \leqslant 2(\inf(p', q'))$, $\alpha_j = \pm 1$ et agissent trivialement ailleurs. On notera γ_j l'élément de T' du type précédent pour lequel $\alpha_j = -1$ et $\alpha_{j'} = 1$ si $j' \neq j$.

On pose aussi:

$$w = \sup\{j \mid \lambda_{p'_{r+1}+j} = 1 \text{ ou } \mu_{q'_{r+1}+j} = 1\}$$

(Remarquons que $w \leqslant \inf(p', q')$). On choisit pour la restriction de δ à T' le caractère suivant:

$\chi \otimes \delta$ est sur la copie de $O(2)$, si elle existe, un caractère qui ne nous intéresse pas vraiment (il est trivial si $\varepsilon = 1$ et $p' > q'$ ou si $\eta = 1$ et $q' > p'$ et non trivial dans les autres cas),

$$\begin{aligned} \chi \otimes \delta(\gamma_j) = -1 \quad & \text{si } \varepsilon\eta = +1,\ j \text{ est impair et } j \leqslant 2w-1 \text{ ou si } \varepsilon\eta = -1, \\ & j \text{ n'est pas impair et inférieur ou égal à } 2w-1, \\ = 1 \quad & \text{dans les cas restant.} \end{aligned} \tag{2}$$

Suivant les notations de Vogan, on note $\mathscr{W}' := X_L(\delta \otimes \nu)$ la représentation standard de $(\mathfrak{l} = \text{Lie } L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},\ L \cap K')$ qui ici est une série principale de paramètre discret δ et de paramètre continu ν. D'après [V_2, 6.5.10 et 6.3.20 et suivants], on sait qu'il existe un $L \cap K'$-type, noté ici Z, de $\mathscr{W}'$ tel que l'on ait:

$$\text{Hom}_{L \cap K'}(H^\circ(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}', W'), S(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) \otimes Z \otimes \mathbb{C}_\chi) \neq 0 \tag{3}$$

et la restriction de Z à T contient le caractère δ. Remarquons que $Z \otimes \mathbb{C}_\chi$ est le produit tensoriel de représentations irréductibles, notés Z^i, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, de $U(p_i) \times U(q_i)$ et d'une représentation, notée Z' de $O(2p') \times O(2q')$. On paramétrise $Z \otimes \mathbb{C}_\chi$ par $(Z_1, ..., Z_p)_{\bar{\varepsilon}}$; $(Z'_1, ..., Z'_q)_{\bar{\eta}}$ d'où Z' est paramétrisé par $(z_1, ..., z_{p'})_{\bar{\varepsilon}}$; $(z'_1, ..., z'_q)_{\bar{\eta}}$ quand on pose $z_j = Z_{j+p'_{r+1}}$ et $z'_j = Z_{j+q'_{r+1}}$ pour $1 \leqslant j \leqslant p'$ ou $1 \leqslant j \leqslant q'$. Avec ce qui précède et (1) on a pour $1 \leqslant i \leqslant r$:

$$\sum_{p'_i < j \leqslant p'_{i+1}} Z_j + \sum_{q'_i < j \leqslant q'_{i+1}} Z'_j = \sum_{p'_i < j \leqslant p'_{i+1}} \lambda_j + \sum_{q'_i < j \leqslant q'_{i+1}} \mu_j.$$

Soit x un vecteur de plus haut poids dans W', x est un élément de $H^\circ(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}', W')$ et soit φ un élément non nul en (3), alors, copiant [V_2, 6.3.12], on voit que l'image de $\varphi(x)$ dans $S(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) \otimes (Z \otimes \mathbb{C}_\chi)/n'(Z \otimes \mathbb{C}_\chi)$ (où n' est la sous-algèbre nilpotente maximale "de" $L \cap K'$ définissant la chambre de Weyl positive) est non nul. Ainsi il existe un ensemble, noté A, de racines intervenant dans $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ (ensemble avec multiplicités) tel que, notant de façon évidente $\sum_{\alpha \in A} \alpha = (a_1, ..., a_p)$; $(b_1, ..., b_p)$, on ait:

$$\forall 1 \leqslant j < p,\ \lambda'_j = Z_j + a_j,\ \pm\lambda'_p = Z_p + a_p$$

et

$$\forall 1 \leqslant j < q,\ \mu'_j = Z'_j + b_j,\ \pm\mu'_q = Z'_q + b_q. \tag{4}$$

On a donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} \mu'_j = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} a_j + \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} b_j + \mu_j. \tag{5}$$

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu'_j \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} a_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} b_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1}} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{r+1}} \mu_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'} z_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'} z'_j \tag{6}$$

(z_j et z'_j notations introduites plus haut). Rappelons que l'on a

$$\sum_{p'_{r+1} < j \leqslant p} \lambda_j + \sum_{q'_{r+1} < j \leqslant q} \mu_j = w \tag{7}$$

En outre les racines intervenant dans $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ et donc les éléments de A sont de l'une des formes suivantes:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_j \pm \varepsilon_{j'} := (0, ..., 0, \underset{j}{1}, 0 ..., 0); 0, ..., 0, \underset{j'}{\pm 1}, 0, ..., 0) \\ &\qquad \text{où } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ tel que } p'_i \leqslant j \leqslant p'_{i+1} \text{ et } j' > q'_{i+1} \\ &\pm\varepsilon_j + \varepsilon_j' := (0, ..., 0, \underset{j}{\pm 1}, ..., 0, ..., 0); (0, ..., 0, \underset{j'}{1}, 0, ..., 0) \\ &\qquad \text{où } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ tel que } q'_i < j \leqslant q'_{i+1} \text{ et } j > p'_{i+1}. \end{aligned} \tag{8}$$

D'où pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, $\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} a_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} b_j \geqslant 0$ et les inégalités (β) de l'énoncé du lemme resultent donc de (6).

En outre, tenant compte de (7) et (8), (α) résultera de l'assertion (9):

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'} z_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'} z'_j \geqslant w. \tag{9}$$

Remarquons que $\gamma_{2j} \cdot \gamma_{2j-1}$ où $1 \leqslant j \leqslant w$ est un élément du produit des tores de $O(2p')$ et $O(2q')$ laissant stables les droites engendrées par les éléments $e_{2x-1} + \sqrt{-1}e_{2x}$ pour $p'_{r+1} < x \leqslant p$ et $f_{2x-1} + \sqrt{-1}f_{2x}$ pour $q'_{r+1} < x \leqslant q$, respectivement. Ainsi Z' contient un vecteur propre pour ces tores de poids noté $(y_1, ..., y_{p'})$; $(y'_1, ..., y'_{q'})$ et vérifiant:

$$y_j + y'_j \text{ est impair si } 1 \leqslant j \leqslant w \text{ est pair si } w < j \leqslant \inf(p', q').$$

Utilisant le fait que ce poids est dans l'enveloppe convexe des poids extrêmaux [B, ex 1 du § 7], on tire très facilement:

$$w \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'} y_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'} y'_j \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'} z_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'} z'_j.$$

D'où (9).

Pour démontrer (γ), il faut revenir à (3) et non à sa version simplifiée (4). Remarquons d'abord que $(\dagger)'$ entraine que soit ε, soit $\eta = +1$. Si $\varepsilon = \eta = +1$, (γ) est conséquence de (α) et donc déjà prouvé. On suppose donc que $\varepsilon\eta = -1$ et par symétrie que $\varepsilon = +1$. Mais $(\dagger)'$ entraine encore que l'on a:

$$w = \sup\{j \mid \mu_{q'_{r+1}+j} = 1\} \qquad (\text{ou } w = 0) \text{ et } 0 < q' \leqslant p'.$$

D'où:

$$w + (1-\varepsilon)(p-k) + (1-\eta)(q-v) = 2q' - w.$$

On pose:

$$\bar{k} = \sup\{j \mid z_j > 0\}, \qquad \bar{v} = \sup\{j \mid z'_j > 0\}.$$

On sait que Z' contient δ dans sa restriction à T' (χ est trivial sur $O(2p') \times O(2q')$), et on va en déduire que l'on a:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'} z_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'} z'_j + (1-\bar{\varepsilon})(p'-\bar{k}) + (1-\bar{\eta})(q'-\bar{v}) \geqslant 2q' - w. \quad (10)$$

Comme il n'est pas très facile de calculer la restriction de Z' à T', on note E' (resp. F') le sous-espace vectoriel de E (resp. F) engendré par les éléments $e_{2p'_{r+1}+1}, ..., e_{2p}$ (resp. $f_{2q'_{r+1}+1}, ..., f_{2q}$) et on plonge Z' dans le produit tensoriel $Z_1 \otimes Z_2$ où Z_1 et Z_2 sont les représentations de $O(2p')$ et $O(2q')$ suivantes: (cf. notations du début de la démonstration)

$$Z_1 := S^{z_1 - z_2}(E') \otimes S^{z_2 - z_3}\left(\bigwedge^2 E'\right) \otimes \cdots \otimes S^{z_{\bar{k}}-1}\left(\bigwedge^{\bar{k}} E'\right) \otimes \bigwedge^{\bar{k}+(1-\bar{\varepsilon})(p'-\bar{k})} E',$$

$$Z_2 := S^{z'_1 - z'_2}(F') \otimes S^{z'_2 - z'_3}\left(\bigwedge^2 F'\right) \otimes \cdots \otimes S^{z'_{\bar{v}}-1}\left(\bigwedge^{\bar{v}} E'\right) \otimes \bigwedge^{\bar{v}+(1-\bar{\eta})(q'-\bar{v})} F'.$$

Soient y_1 et y_2 des éléments appartenant aux bases standards de Z_1 et Z_2. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2q'$, on a: $\gamma_j(y_1 \otimes y_2) = \pm(y_1 \otimes y_2)$ et:

$$\begin{aligned}
&\#\{1 \leqslant j \leqslant 2q' \mid \gamma_j(y_1 \otimes y_2) = -(y_1 \otimes y_2)\} \\
&\quad \leqslant (z_1 - z_2) + 2(z_2 - z_3) + \cdots + \bar{k}(z_{\bar{k}} - 1) + \bar{k} \\
&\qquad + (1 - \bar{\varepsilon})(p' - \bar{k}) + (z'_1 - z'_2) + \cdots + \bar{v}(z'_{\bar{v}} - 1) + \bar{v} + (1 - \bar{\eta})(q' - \bar{v}) \\
&\quad = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \bar{k}} z_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant \bar{v}} z'_j + (1 - \bar{\varepsilon})(p' - \bar{k}) + (1 - \bar{\eta})(q' - \bar{v}). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Evidemment $Z_1 \otimes Z_2$ contient un élément, noté z, tel que l'on ait: (cf. (2))

$$\#\{1 \leqslant j \leqslant 2q' \mid \gamma_j \cdot z = -z\} = 2q' - w,$$

et en écrivant z à l'aide des bases standards de Z_1 et Z_2 on voit que pour y_1 et y_2 bien choisis le membre de gauche de (11) est superieur ou égal à $2q' - w$. On obtient alors (10).

Prouvons maintenant (γ). Comme ici $\inf(p', q') > 0$, avec les notations qui précèdent (4), on a: $\dim \bar{Z} = 1$. Ainsi $\varphi(x)$ a pour image dans $S(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) \otimes \bar{Z}$ un élément du type $s \otimes \bar{z}$ où $\bar{z}$ est de poids $(v_1, ..., v_p)$; $(v'_1, ..., v'_q)$ pour l'action de H' et s de poids $\sum_{\alpha \in A} \alpha$ pour l'action de H'. On note A' (resp. A'') le sous ensemble de A (compté avec multiplicité formé des éléments (cf. (8), pour les notations):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_j \pm \varepsilon_{j'} &&\text{où l'on a } \bar{v} \leqslant j \leqslant q \ \text{(resp. } q'_{r+1} < j' \leqslant \bar{v}\text{)}, \\
&\pm \varepsilon_j + \varepsilon_{j'} &&\text{où l'on a } \bar{k} < j \leqslant p \ \text{(resp. } p'_{r+1} < j \leqslant \bar{k}\text{)}.
\end{aligned}$$

Avec les notations de l'énoncé, on pose:

$$\bar{k}' = \sup(k', p'_{r+1}) - p'_{r+1}, \qquad \bar{v}' = \sup(v', q'_{r+1}) - q'_{r+1}.$$

Admettons que l'on ait prouvé:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p'_{r+1} < j \leqslant p} \lambda'_j + \sum_{q'_{r+1} < j \leqslant q} \mu'_j + (1 - \varepsilon')(p' - \bar{k}') \\
&\qquad + (1 - \eta')(q' - \bar{v}') + \#(A') + \#(A'') \\
&\quad \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'} z_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'} z'_j + (1 - \bar{\varepsilon})(p' - \bar{k}) + (1 - \bar{\eta})(q' - \bar{v}). \qquad (12)
\end{aligned}$$

Ajoutons à (12) l'égalité (5) pour $i = r$ en enlevant le cardinal de $A' \cup A''$ aux deux membres. Le membre de gauche devient alors inférieur ou égal au degré de W' (on a égalité si $k' \geqslant p'_{i+1}$ et $v' \geqslant q'_{r+1}$); le membre de droite, grâce à (10) et à la forme des éléments de A qui y restent après avoir enlevé ceux de $A' \cup A''$, est lui supérieur ou égal au degré de W. D'où le résultat. Il reste donc à prouver (12).

Pour cela, on remarque que

$$S(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})\,|_{O(2p')\times O(2q')}\simeq S\left(\bigotimes^{q'_{r+1}} E'\right)\otimes S\left(\bigotimes^{p'_{r+1}} F'\right)\otimes\mathscr{F} \qquad (13)$$

où $\mathscr{F}$ est un espace vectoriel sur lequel $O(2p')\times O(2q')$ agit trivialement. Soit $\bar{k}<j\leqslant p$; tenant compte de (4), on a:

- si $j\leqslant\bar{k}'+p'_{r+1}$ alors on a $\lambda'_j\geqslant 1$ et A' contient un élément du type $\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}$ avec $j'\leqslant q'_{r+1}$.
- si $j>\bar{k}'+p'_{r+1}$ et si $\varepsilon'\neq\bar{\varepsilon}$ alors on note γ'_{2j-1} l'élément de $O(2p')$ qui a pour seul effet d'envoyer e_{2j-1} sur $-e_{2j-1}$ (notation γ'_{2j} analogue). On doit avoir $\gamma'_{2j-1}s=-s=\gamma'_{2j}s$. Utilisant (13), on voit que A'' contient deux éléments du type $\pm\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}$ (j' peut ne pas être le même pour les deux éléments mais $j'\leqslant q'_{r+1}$).

On raisonne de la même façon pour $\bar{v}<j\leqslant q$ et avec (14) on obtient (12), ce qui termine la démonstration.

II.4. *Le cas du groupe symplectique.* Soit $V\leftrightarrow\Lambda:=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)$ un K-type; on va déterminer les données θ-stables discrètes associées à V par Vogan comme on l'a fait en II.2 pour le groupe orthogonal.

Définissons d'abord l'ensemble suivant:

$$\mathscr{E}=\{1\leqslant j\leqslant n\mid\exists 1\leqslant w\leqslant n,\ \Lambda_j-\Lambda_w=1,0\text{ ou }-1\text{ et }|\Lambda_j+n-(w+j)+1|\leqslant 1$$
$$\text{et }|\Lambda_w+n-(w+j)+1|\leqslant 1\}.$$

Supposons d'abord que $\mathscr{E}\neq\varnothing$; on note j_- (resp. j_+) l'élément minimal (resp. maximal) de $\mathscr{E}$. Il est facile de vérifier que l'on a:

$$\Lambda_{j_-}-\Lambda_{j_+}=1\text{ ou }0,\qquad |\Lambda_{j_-}+n-(j_-+j_+)+1|\leqslant 1$$

et

$$|\Lambda_{j_+}+n-(j_-+j_+)+1|\leqslant 1.$$

On en déduit alors que $\mathscr{E}$ est le segment $[j_-,j_+]$. Si $\mathscr{E}$ est vide on pose $j_-=+\infty$ et $j_+=-\infty$ (le segment $[+\infty,-\infty]$ est vide). On pose:

(1) $s=\#\mathscr{E}$.

On définit inductivement sur i les entiers p_i et q_i suivants après avoir posé pour tout i, $p'_i=\sum_{j<i}p_j$, $q'_i=\sum_{j<i}q_j$, $m_i=\Lambda_{p'_i+1}+\Lambda_{n-q'_i}+2(q'_i-p'_i)$.

(2) Si $p'_i\geqslant j_--1$ et $q'_i\geqslant n-j_+$, on a: $p_i=q_i=0$,

(3) si $p_i' < j_- - 1$ ou si $q_i' < n - j_+$, on a:

si $m_i > 1$, $\quad q_i = 0,\ p_i = 1$,

si $m_i < -1$, $\quad q_i = 1,\ p_i = 0$,

si $m_i = -1, 0, 1$, $\quad$ on pose $x_i = \sup\{v \geqslant 1 \mid \Lambda_{p_i'+1} = \cdots = \Lambda_{p_i'+v}$

et $\Lambda_{n-q_i'} = \cdots = \Lambda_{n-q_i'-v+1}\}$,

si $m_i = 0$, $\quad p_i = q_i = x_i$,

si $m_i = 1$, $\quad q_i = x_i,\ p_i = x_i$ si $\Lambda_{p_i'+x_i} \neq \Lambda_{p_i'+x_i+1}$,

$= x_i + 1$ sinon,

si $m_i = -1$, $\quad p_i = x_i$ et $q_i = x_i$ si $\Lambda_{n-q_i'-x_i+1} \neq \Lambda_{n-q_i'+1}$

$= x_{i+1}$ sinon.

(4) On pose $r = \sup\{i \mid p_i + q_i \neq 0\}$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier les propriétés suivantes:

(5) $p_{r+1}' + q_{r+1}' + s = n$,

(6) si $s \neq 0$, $p_{r+1}' = j_- - 1$ et $n - q_{r+1}' = j_+$,

(7) si $p_i \neq 0$, $\Lambda_{p_i'+1} + q_i' - p_i' > 1$ si $m_i \geqslant 1$

> 0 si $m_i = -1$ ou 0,

(8) si $q_i \neq 0$, $\Lambda_{n-q_i'} + q_i' - p_i' < -1$ si $m_i \leqslant -1$,

< 0 si $m_i = 0$ ou 1,

(9) si $s \neq 0$ et $p_{r+1}' < j \leqslant n - q_{r+1}'$, $\Lambda_j + q_{r+1}' - p_{r+1}' = 1$, 0 ou -1, les valeurs 1 et -1 étant exclusives l'une de l'autre.

LEMME. *Soit $V \leftrightarrow (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ un K-type; on note $(\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_n)$ le poids associé par Vogan à V, $\mathfrak{q}$ la sous-algèbre parabolique déterminée par V et* $L := \mathrm{Norm}_{Sp(2n)}\,\mathfrak{q}$ (*cf.* [V_2, 5, § 3]). *Alors on a* (*avec les notations précédant le lemme*):

soit $1 \leqslant i \leqslant r$, *on pose* $\sigma_i = 0 \quad$ *si* $m_i \geqslant 1$,

$= \frac{1}{2} \quad$ *si* $m_i = 0$,

$= 1 \quad$ *si* $m_i \leqslant -1$.

Pour $p_i' < j \leqslant p_{i+1}'$ *on a*: $\tilde{\Lambda}_j = \Lambda_j + q_i' - p_i' - 1 + \sigma_i \geqslant \frac{1}{2}$, (10)

pour $q_i' < j \leqslant q_{i+1}'$ *on a*: $\tilde{\Lambda}_{n-j+1} = \Lambda_{n-j+1} + q_i' - p_i' + \sigma_i \leqslant -\frac{1}{2}$, (11)

pour $p_{r+1}' < j \leqslant n - q_{r+1}'$ *on a* $\tilde{\Lambda}_j = 0$. (12)

On a les relations supplémentaires: $\tilde{\Lambda}_j + \tilde{\Lambda}_{n-j'+1} = 0$ (*resp.* <0, *resp.* >0) *si et seulement si il existe i compris entre* 1 *et r* (*au sens large*) *tel que l'on ait* $p'_i < j \leqslant p'_{i+1}$ (*resp.* $j > p'_{i+1}$, *resp.* $j \leqslant p'_{i+1}$) *et* $q'_i < j' \leqslant q'_{i+1}$ (*resp.* $j' \leqslant q'_{i+1}$, *resp.* $j' > q'_{i+1}$). *Et cela détermine* $\mathfrak{q}$ (*de façon analogue à* II.2). *On a*: $L \simeq U(p_1, q_1) \times \cdots \times U(p_r, q_r) \times Sp(2s)$.

On ne démontre pas ce lemme qui est en tout point analogue à II.2. On peut même s'y ramener (cf. le lemme suivant).

II.5. LEMME. Φ^c (*cf.* I.4) *induit par restriction une bijection de l'ensemble des K-types vérifiant* (†) *sur l'ensemble des K'-types, notés W, vérifiant* (†)′ *et appartenant à l'image de* Φ^c, *telle que les entiers r*, p_i, q_i *définis en* II.2 *pour W et* II.4 *pour V coïncident,* (*d'où aussi* $s = (n-(p+q)) + (p'+q')$). *Et l'on a, avec les notations de* II.2 *et* II.4:

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1},\ \tilde{\Lambda}_j = \tilde{\lambda}_j, \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant q'_{r+1},\ \tilde{\mu}_j = -\tilde{\Lambda}_{n-j+1}.$$

En outre si W est un K'-type vérifiant (†)′ *et si* $n \geqslant p+q$, *alors W est dans l'image de* Φ^c.

On paramétrise V par $(\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$; pour la preuve on note R, P_i, Q_i les entiers associés à W en II.2 gardant les notations r, p_i, q_i, s pour V. On suppose que V vérifie (†) et on pose:

$$\tau = p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 1,\ 0 \text{ ou } -1 \qquad \text{(par hypothèse)}.$$

Vérifions que:

$$\Lambda_j + q - p \geqslant 0 \qquad \text{si } j \leqslant p'_{r+1} \tag{1}$$

$$\leqslant 0 \qquad \text{si } j > n - q'_{r+1} \tag{2}$$

On pose $i^\circ = \inf\{i \mid p'_{i+1} = p'_{r+1}\}$ (i.e., $p_{i+1} = \cdots = p_r = 0$ et $q_{i+1} = \cdots = q_r = 1$) D'après II.4, on a:

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{p'_{r+1}} &= \Lambda_{p'_{r+1}} + q'_{i^\circ} - p'_{i^\circ} - 1 + \sigma_{i^\circ}\\ &= \Lambda_{p'_{r+1}} + q'_{r+1} - p'_{r+1} - 1 + \sigma_{i^\circ} + p_{i^\circ} - q_{i^\circ} - (r - i^\circ)\\ &= \Lambda_{p'_{r+1}} + q - p + \tau - 1 + \sigma_{i^\circ} + p_{i^\circ} - q_{i^\circ} - (r - i^\circ).\end{aligned} \tag{3}$$

On remarque (cf. II.4) que $\sigma_{i^\circ} + p_{i^\circ} - q_{i^\circ} \leqslant 1$. D'où:

$$0 < \tilde{\Lambda}_{p'_{r+1}} \leqslant \Lambda_{p'_{r+1}} + q - p + 1,$$

qui entraine (1). On démontre (2) de la même façon.

On pose $k=\sup\{j \mid \Lambda_j+q-p>0\}$ et $v'=\inf\{j \mid \Lambda_j+q-p<0\}$. D'après (1) et (2), on a: (en posant $v=n-v'+1$)

$$k \leqslant n-q'_{r+1}, \qquad v \leqslant n-p'_{r+1}. \tag{4}$$

Et avec II.4(9), on a:

$$\text{soit } k \leqslant p'_{r+1} \qquad \text{soit } v \leqslant q'_{r+1}. \tag{5}$$

Si $n<p+q$ (4) se réecrit:

$$k<p+(q-q'_{r+1})=p+(p-p'_{r+1})-\tau,$$
$$v<q+(p-p'_{r+1})=q+(q-q'_{r+1})+\tau.$$

En particulier

$$k \leqslant 2p-p'_{r+1} \qquad \text{et} \qquad v \leqslant 2q-q'_{r+1}. \tag{6}$$

Comme on a prouvé (1) et en utilisant (†), on montre que l'on a:

$$\sup\{j \mid \Lambda_j+q-p>1\} \leqslant p'_{r+1} \leqslant p$$
$$\sup\{j \mid \Lambda_{n-j+1}+q-p<-1\} \leqslant q'_{r+1} \leqslant q;$$

(6) étant assuré par (†) quand $n \geqslant p+q$, on déduit de I.4 que V est dans le domaine de définition de Φ^c. On pose $W:=\Phi^c(V)$. On connait la paramétrisation de $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon; (\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ où l'on a:

$$\begin{array}{llll} \text{si } p \geqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant k, & \lambda_j=\Lambda_j+q-p, & k<j \leqslant p, & \lambda_j=0 \text{ et } \varepsilon=+1, \\ \text{si } p<k,\ 1 \leqslant j \leqslant 2p-k, & \lambda_j=\Lambda_j+q-p, & 2p-k<j \leqslant p, & \lambda_j=0 \text{ et } \varepsilon=-1, \\ \text{si } q \geqslant v,\ 1 \leqslant j \leqslant v, & \mu_j=-(\Lambda_{n-j+1}+q-p), & v<j \leqslant q, & \mu_j=0 \text{ et } \eta=+1, \\ \text{si } q<v,\ 1 \leqslant j \leqslant 2q-v, & \mu_j=-(\Lambda_{n-j+1}+q-p), & 2q-v<j \leqslant q, & \mu_j=0 \text{ et } \eta=-1. \end{array} \tag{7}$$

On va montrer que W vérifie (†)'. Tenant compte de (5) et (†), (γ), on sait déjà que l'on n'a pas $\varepsilon=\eta=-1$. Ainsi si $\varepsilon\eta=+1$, W vérifie (†)'. Supposons donc que l'on ait $\varepsilon\eta=-1$; alors par symétrie on peut supposer que $\varepsilon=+1$ i.e. $k \leqslant p$ et $v>q$. Alors (†)' s'exprime par:

$$(p-k)-(v-q) \geqslant 0, \qquad \text{i.e. } (p+q)-(k+v) \geqslant 0. \tag{8}$$

Si $n \leqslant p+q$, (8) est évident. Supposons donc que $n>p+q$. On a avec (5), $k \leqslant p'_{r+1}$ et avec (†), (γ), $v \leqslant 2q-q'_{r+1}$ et avec (†) (β): $\Lambda_{n-q'_{r+1}}+q-p=-1$. Or on a:

$$\Lambda_{n-q'_{r+1}}+q'_{r+1}-p'_{r+1}=-1, 0 \text{ ou } 1 \qquad \text{(cf. II.9)},$$

d'où avec (†), $\tau \geqslant 0$. On obtient:

$$v+k \leqslant p'_{r+1}+2q-q'_{r+1}=(p+q)+(q-q'_{r+1})-(p-p'_{r+1})$$
$$=p+q-\tau \leqslant p+q.$$

D'où (8).

On va démontrer la fin du lemme pour V et W; le point important à vérifier est l'égalité $p'_{r+1}=P'_{r+1}$ et $q'_{r+1}=Q'_{r+1}$; le reste en découle en comparant les m_i et les définitions. On garde les notations k, v introduites plus haut et on note $k'=\inf(k, 2p-k)$, $v'=\inf(v, 2q-v)$ (cf. (7)).

On pose ici $i^2=\inf 1 \leqslant i \leqslant r$ $q'_{r+1}=q'_{i^2+1}$ et comme dans (3), on a:

$$\tilde{\Lambda}_{n-q'_{r+1}+1}=\Lambda_{n-q'_{r+1}+1}+q-p+\tau+\sigma_{i^2}+p_{i^2}-q_{i^2}+r-i^2<0. \qquad (3)'$$

En comparant (3) et (3)', on voit que quelque soit τ, on a soit $k \geqslant p'_{r+1}$, soit $v \geqslant q'_{r+1}$. Distinguons suivant les valeurs de τ:

1^e^ *cas* $\tau=0$: alors (3) et (3)' entrainent que $k \geqslant p'_{r+1}$ et $v \geqslant q'_{r+1}$. Tenant compte de (5), on a au moins une égalité et avec (†) on a:

$$\forall p'_{r+1}<j \leqslant n-q'_{r+1}, \qquad \Lambda_j+q-p \leqslant 1.$$

Utilisant encore $\tau=0$ (7) (qui définit W) et II.2(3) et (1), on voit que l'on a: $p'_{r+1}=P'_{r+1}$ et $q'_{r+1}=Q'_{r+1}$.

2^e^ *cas* $\tau=1$: alors (3)' entraine que $v \geqslant q'_{r+1}$. Mais (3)' entraine en plus que $\Lambda_{n-q'_{r+1}+1}+q-p<-1$. D'où avec les notations de II.2(1) on a: $x \leqslant q-q'_{r+1}$. Utilisant (8), on vérifie facilement que l'on a en fait égalité. En outre (8) donne aussi: $\lambda_{p'_{r+1}+1}=\lambda_{p'_{r+1}+2}=0$ et comme $\tau=+1$, on a: $p-x=p'_{r+1}+2$. D'où, avec II.2(3) et (1), on a encore les égalités cherchées: $p'_{r+1}=P'_{r+1}$ et $q'_{r+1}=Q'_{r+1}$.

3^e^ *cas* $\tau=-1$ est symétrique de $\tau=1$.

On laisse au lecteur la fin de la démonstration.

II.6. *Lien entre K-type minimal et K-type de degré minimal.*

LEMME. *Soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ admettant $V \leftrightarrow (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ comme l'un de ses K-types minimaux. Soit V' un K-type intervenant dans $\mathscr{V}$ et paramétrisé par $(\Lambda'_1, ..., \Lambda'_n)$. On adopte les notations de* II.4 *et l'on a*:

(α) $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$, $\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}}(\Lambda_j-\Lambda'_j)-\sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}}(\Lambda_{n-j+1}-\Lambda'_{n-j+1}) \leqslant 0$.

(β) *On suppose que* ($\mathscr{V}$, V) *vérifient* (†) *alors on a*:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |\Lambda_j+q-p| \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |\Lambda'_j+q-p|.$$

En particulier V est de degré minimal (notion qui dépend de l'indice de Witt $2(p-q)$).

Ce lemme se démontre avec les mêmes méthodes que celles qui ont servi en II.3 mais de façon nettement plus simple parce que K est connexe.

II.7. *Correspondence entre K et K'-types minimaux, sous $(\dagger)'$ et avec $n \geqslant p+q$.*

LEMME. *Soient $\mathscr{W} \in Hch_O$ et $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon;\ (\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ un K'-type minimal pour $\mathscr{W}$. On suppose que $(\mathscr{W}, W)$ vérifient $(\dagger)'$, que $n \geqslant p+q$ et que $\mathscr{W}$ intervient comme quotient de la représentation métaplectique. Alors on note $\mathscr{V}$ l'élément de Hch_{Sp} qui lui correspond par la correspondance de Howe et l'on a:*

$$V := \Psi^c(W)$$

(*cf.* II.5) *est un K-type minimal de $\mathscr{V}$ (vérifiant $(\dagger)$).*

On adopte les notations de II.2 relatives à W, i.e. r, p_i, q_i, p', q', $(\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon;\ (\mu_1, ..., \mu_q)_\eta \leftrightarrow W$ et $(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_p);\ (\tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_q)$. On rappelle que ces entiers correspondent à ceux associés à V (cf. II.5) à s près que l'on introduit aussi. En outre on utilise la notation $\mathfrak{q}$ et L de II.4 relative à V et on note $\mathfrak{u}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{q}$. Puisque W, grâce à $(\dagger)'$ et II.3(γ), est de degré minimal, on sait (cf. [H_2, 4.1(c)]) que V est un K-type de $\mathscr{V}$. Pour démontrer qu'il est minimal, on va démontrer qu'il est fortement $\mathfrak{u}$-minimal au sens de Vogan (cf. [V_1; 3.13]). Mais indiquons d'abord pourquoi, grâce aux travaux de Vogan cela suffit: on note $R = \dim \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ (où $\mathfrak{p}$ est défini par la décomposition de Cartan liée à K). Alors dire que V est fortement $\mathfrak{u}$-minimal entraine (cf. [V_1, 3.14]) que $H^R(\mathfrak{u}, \mathscr{V})$ contient un $L \cap K$-type, noté Z, de même plus haut poids que $V \otimes \mathbb{C}_{\chi^{-1}}$ (où χ est le caractère de l'action de $K \cap L$ dans $\bigwedge^R \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$); en particulier Z est un $K \cap L$-type gentil (au sens de Vogan "fine", i.e. la sous-algèbre parabolique qui lui correspond est l'algèbre de Lie de L). On pose $Y := H^R(\mathfrak{u}, \mathscr{V})$ vu comme module module de Harish-Chandra pour L. On sait que Y contient un sous-quotient irréductible, noté Y', contenant Z comme $L \cap K$-type. Comme Z est gentil, Z est un $L \cap K$-type minimal de Y' et on peut plonger Y' dans une série principale, notée $X(\delta \otimes \nu)$ pour L où δ correspond à Z et ν est un paramètre continu. Grâce à [V_2, 6.4.13 où (c) est vérifié] on en tire que ($\mathfrak{l} :=$ Lie $L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) l'on a: $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}, L \cap K}(Y, X(\delta \otimes \nu)) \neq 0$. Avec [$V_2$, 6.5.9(g)], on en déduit que $\mathrm{Hom}_{sp(2n), K}(\mathscr{V}, X(q, \delta \otimes \nu)) \neq 0$ (notation de Vogan $X(\mathfrak{q}, \delta \otimes \nu)$ est l'induite parabolique). On sait que V est un K-type minimal de $X(\mathfrak{q}, \delta \otimes \nu)$ (cf. [V_2, 6.5.5]) donc à fortiori de $\mathscr{V}$.

Montrons donc que V est fortement u-minimal. La preuve est très technique, il faut démontrer que certains K-types n'interviennent pas dans $\mathscr{V}$, ces K-types sont précisés par leur plus haut poids dans la preuve de [V_1, 5.2, 8 lignes avant 5.3] et pour les décrire, dans notre situation, on commence par introduire quelques notations supplémentaires.

On note $\rho_c := ((n-1)/2, ..., (n-2i+1)/2, ..., -(n-1)/2)$ la demi-somme des racines compactes positives (pour le choix le plus habituel, ensemble noté Δ_c^+). Le groupe de Weyl de K est identifié au groupe des permutations sur n éléments et est noté $\mathfrak{S}$. On note les racines suivant Bourbaki: $\pm\varepsilon_j \pm \varepsilon_{j'} = (0, ..., \underset{j}{\pm 1}, 0, ..., \underset{j'}{\pm 1}, 0, ..., 0)$ (les deux $\pm$ n'étant pas liés et en acceptant $j = j'$ si les deux $\pm$ coïncident en remplaçant 1 par 2). Soit σ un élément du groupe $\mathfrak{S}$; on pose:

$$B_\sigma = \{\alpha \in \Delta_c^+ \mid \sigma^{-1}(\alpha) \notin \Delta_c^+\}.$$

Il faut démontrer que si A est un ensemble, sans multiplicité, de racines intervenant dans $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$, si σ est un élément du groupe $\mathfrak{S}$ tel que les éléments de B_σ soient des racines de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}$ et si Δ est un K-type identifié à son plus haut poids $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ tel que l'on ait:

$$\Delta + 2\rho_c = \sigma^{-1}\left(\Lambda + 2\rho_c - \sum_{\alpha \in B_\sigma} \alpha - \sum_{\alpha \in A} \alpha\right)$$
$$(\Lambda := (\Lambda_1, ..., \Lambda_n) \text{ est le plus haut poids de } V), \qquad (1)$$

alors Δ n'intervient dans $\mathscr{V}$ que si σ est l'identité et A est vide.

On fixe σ, A, Δ vérifiant (1) avec l'hypothèse sur σ faite avant (1) et on calcule Δ en posant: $\sum_{\alpha \in A} \alpha := (a_1, ..., a_n)$, $\sum_{\alpha \in B_\sigma} \alpha := (b_1, ..., b_n)$. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a:

$$\Delta_j + n - 2j + 1 = \Lambda_{\sigma(j)} + n - 2\sigma(j) + 1 - b_{\sigma(j)} - a_{\sigma(j)},$$
$$\begin{aligned} b_j &= \#\{j' > j \mid \sigma^{-1}(j) > \sigma^{-1}(j')\} \\ &\quad - \#\{j' < j \mid \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(j')\} \\ &= \#\{j' \mid \sigma^{-1}(j) > \sigma^{-1}(j')\} - \#\{j' < j\} = \sigma^{-1}(j) - j. \end{aligned}$$

D'où évidemment, pour $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\Delta_j = \Lambda_{\sigma(j)} + j - \sigma(j) - a_{\sigma(j)}.$$

On va obtenir le résultat cherché uniquement grâce aux lemmes II.8 et II.9 ci dessous qui peuvent être vérifiés avec des hypothèses plus générales que celles de II.7 (la preuve de II.7 est reportée après II.9).

II.8 LEMME. *On suppose que* $n \geqslant p+q$. *Soient* $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ *et* $\mathscr{W} \in Hch_O$ *tels que* $\mathscr{V}$ *et* $\mathscr{W}$ *se correspondent dans la correspondance de Howe. Soit* $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon$; $(\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ *un* K'*-type minimal de* $\mathscr{W}$. *Soit* $V' \leftrightarrow (\Lambda'_1, ..., \Lambda'_n)$ *un* K*-type de* $\mathscr{V}$; *alors on a*:

(a)

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu_j$$
$$\leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \Lambda'_j + q - p - \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \Lambda'_{n-j+1} + q - p - \sum_{p < j \leqslant n-q} |\Lambda'_j + q - p|.$$

(b) *On suppose que* W *intervient dans les harmoniques* $H(K, K')$ (*cf.* I.4). *On pose* $V := \Psi^c\ (W)$ *et* (a) *est une égalité pour* $V' = V$ (*même sans savoir que* $V \in \mathscr{V}$).

On pose $k := \sup\{j \mid \Lambda'_j + q - p > 0\}$ et $v := \sup\{j | \Lambda'_{n-j+1} + q - p\} < 0$. On applique I.6 et on sait donc que $\mathscr{W}$ contient un K'-type noté $W' \leftrightarrow (\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_{\varepsilon'}$; $(\mu'_1, ..., \mu'_q)_{\eta'}$ qui vérifie l'inégalité suivante: (cf. I.6)

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu'_j \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant \inf(p,k)} \Lambda'_j + q - p - \sum_{\inf(p,k) < j \leqslant k} \Lambda'_j + q - p$$
$$- \sum_{1 \leqslant j \leqslant \inf(q,v)} \Lambda'_{n-j+1} + q - p$$
$$+ \sum_{\inf(q,v) < j \leqslant v} \Lambda'_{n-j+1} + q - p. \tag{1}$$

De l'hypothèse $n \geqslant p+q$, on tire $\inf(p, k) \leqslant n - \inf(q, v)$ et on vérifie alors que le deuxième membre de (1) coïncide avec le deuxième membre de l'énoncé de (a). On obtient (a) avec II.3(α).

(b) est une conséquence immédiate du calcul de V fait en I.4.

II.9 LEMME (Hypothèses et notations de II.8). *On adopte les notations* p'_i, q'_i *de* II.2 *pour* W. *On pose* $k' = \sup\{j \mid \Lambda'_j + q - p > 0\}$ *et* $v' = \sup\{j \mid \Lambda'_{n-j+1} + q - p < 0\}$. *On suppose que* $p'_{r+1} \leqslant n - v'$. *Alors on a, pour tout* $1 \leqslant i \leqslant r$:

(a) *si* $v' \geqslant q'_{i+1}$,

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} \mu_j$$
$$\leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} \Lambda'_j + q - p - \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} (\Lambda'_{n-j+1} + q - p).$$

(b) *si* $v' < q'_{i+1}$, *on a la même inégalité qu'en* (a) *mais la dernière* *somme ne porte que sur les indices vérifiant* $1 \leqslant j \leqslant \inf(q'_{i+1}, (n-2p+p'_{i+1}))$.

La démonstration est analogue à celle de II.8.

II.10. *Preuve de* II.7, 1

II.10. *Preuve de* II.7, 1^e*partie*. On suppose que pour σ et A bien choisi, Δ défini par II.7(1) appartient à $\mathscr{V}$. On définit l'entier F de la façon suivante:

$$\begin{aligned} F &= p + (n-p-q)/2 && \text{si } n-(p+q) \text{ est pair,} \\ &= p + (n-p-q-1)/2 && \text{si } n-(p+q) \text{ est impair et} \\ & && \text{si } \sigma^{-1}(p+(n-p-q+1)/2 \geqslant p+(n-p-q)/2, \\ &= p+(n-p-q+1)/2 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On va d'abord démontrer les assertions suivantes:

(1) σ est une permutation de $[1, n]$ qui laisse stable les intervalles $[1, F]$ et $[F+1, n]$.

(2) A ne contient que des éléments de la forme:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_j + \varepsilon_{n-j'+1} && \text{où } \exists 1 \leqslant i \leqslant r \text{ tel que } p'_i < j \leqslant p'_{i+1} \text{ et } q'_{i+1} < j' < n-F, \\ -&\varepsilon_j - \varepsilon_{n-j'+1} && \text{où } \exists 1 \leqslant i \leqslant r \text{ tel que } q'_i < j' \leqslant q'_{i+1} \text{ et } p'_{i+1} < j \leqslant F. \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on pose $\delta_j = \Delta_j + q - p$ et $v_j = \Lambda_j + q - p$. Et on pose aussi:

$$\begin{aligned} z &:= \sum_{1 \leqslant j \leqslant F} (\Lambda_j - \Delta_j) - \sum_{F < j \leqslant n} (\Lambda_j - \Delta_j) \\ &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant F} (v_j - \delta_j) - \sum_{F < j \leqslant n} (v_j - \delta_j). \end{aligned} \tag{3}$$

Vérifions d'abord que l'on doit avoir $z \leqslant 0$:
si $n = p + q$, cela résulte immédiatement de II.8(a) et (b). Supposons donc que $n > p + q$. On pose $k' = \sup\{j \mid \delta_j > 0\}$ et $v' = \inf\{j \mid \delta_j < 0\}$.

1^e *cas*: $k' \leqslant F \leqslant v'$; ici $\sum_{j \leqslant F} \delta_j - \sum_{j > F} \delta_j$ est le degré de Δ; il doit donc être supérieur ou égal au degré de V et l'assertion est claire.

2^e *cas*: $F < k'$; réécrivons II.8(a) et (b):

$$\begin{aligned} z' &:= \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} (v_j - \delta_j) - \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} (v_{n-j+1} - \delta_{n-j+1}) \\ &\quad - \sum_{p < j \leqslant n-q} |v_j| + \sum_{p < j \leqslant n-q} |\delta_j| \leqslant 0. \end{aligned}$$

Or on a: (si $k' > n-q$, la deuxième somme ci-dessous est nulle par convention)

$$z' - z = 2\left(\sum_{p<j\leqslant k'} \delta_j + \sum_{k'<j\leqslant n-q} |\delta_j|\right) - \sum_{p<j\leqslant n-q} |v_j| - \sum_{p<j\leqslant F} v_j + \sum_{F<j\leqslant n-q} v_j.$$

On connait v_j pour $p<j\leqslant n-q$ (cf. I.4) et on vérifie que l'on a:

$$\begin{aligned} - \sum_{p<j\leqslant n-q} |v_j| - \sum_{p<j\leqslant F} v_j + \sum_{F<j\leqslant n-q} v_j &\geqslant -2(F-p) && \text{si } \eta = +1, \\ &\geqslant -2(n-q-F) && \text{si } \varepsilon = +1. \end{aligned}$$

(On a nécessairement soit $\varepsilon = +1$, soit $\eta = +1$ grâce à $(\dagger)'$.) D'où $z'-z \geqslant 2(F-p+1-\sup((F-p), (n-q-F)) \geqslant 0$, par choix de F. D'où l'assertion.

Le 3$^{\text{e}}$ *cas* est symétrique de 2$^{\text{e}}$ et on a donc prouvé (3).

Il reste à vérifier que l'on a $z>0$ si (1) et (2) ne sont pas vérifiés. Pour $1\leqslant i\leqslant r$, on pose:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{P}}_i &:= \{p'_i < j \leqslant p'_{i+1} \mid \sigma^{-1}(j) > F\}, & \tilde{p}_i &= \#\tilde{\mathscr{P}}_i, \\ \tilde{\mathscr{Q}}_i &:= \{q'_i < j \leqslant q'_{i+1} \mid \sigma^{-1}(n-j+1) \leqslant F\}, & \tilde{q}_i &= \#\tilde{\mathscr{Q}}_i, \\ \tilde{\mathscr{P}} &:= \{p'_{r+1} < j \leqslant F \mid \sigma^{-1}(j) > F\}, & \tilde{x} &= \#\tilde{\mathscr{P}}, \\ \tilde{\mathscr{Q}} &:= \{q'_{r+1} < j \leqslant n-F \mid \sigma^{-1}(n-j+1) \leqslant F\}, & \tilde{y} &= \#\tilde{\mathscr{Q}}. \end{aligned}$$

Les hypothèses sur σ (en fait sur B_σ) assurent que $\tilde{\mathscr{P}}_i$, $\tilde{\mathscr{Q}}_i$, $\tilde{\mathscr{P}}$, $\tilde{\mathscr{Q}}$ sont des segments vides ou se terminant respectivement par p'_{i+1}, q'_{i+1}, F, $n-F$. Et l'on a aussi:

$$\tilde{x}\tilde{y} = 0 \tag{4}$$

On pose $\tilde{p} := \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \tilde{p}_i$, $\tilde{q} := \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \tilde{q}_i$, $\tilde{p}'_{i+1} := \sum_{j\leqslant i} \tilde{p}_i$, $\tilde{q}'_{i+1} := \sum_{j\leqslant i} \tilde{q}_i$ (ou 0 si $i=0$) avec ces définitions, on a:

$$\tilde{p} + \tilde{x} = \tilde{q} + \tilde{y}. \tag{5}$$

Remplaçant dans z, Δ par son expression II.7(1), on trouve:

$$z = \sum_{1\leqslant j\leqslant F} v_j - \sum_{F<j\leqslant n} v_j - \sum_{j\mid\sigma^{-1}(j)\leqslant F} (v_j + \sigma^{-1}(j) - j - a_j) + \sum_{j\mid\sigma^{-1}(j)>F} (v_j + \sigma^{-1}(j) - j - a_j).$$

On calcule:

$$\sum_{j \mid \sigma^{-1}(j)>F} (\sigma^{-1}(j)-j) - \sum_{j \mid \sigma^{-1}(j)\leqslant F} (\sigma^{-1}(j)-j) =: 2z^+$$
$$= 2\left(\sum_{j>F\sigma^{-1}(j)\leqslant F} j - \sum_{j\leqslant F\sigma^{-1}(j)>F} j\right)$$
$$= 2\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant r} \tilde{q}_i(n-q'_{i+1}) + \tilde{q}_i(\tilde{q}_i+1)/2 - \tilde{p}_i p'_{i+1} + \tilde{p}_i(\tilde{p}_i-1)/2\right)$$
$$+ 2((\tilde{y}-\tilde{x})F + \tilde{y}(\tilde{y}+1)/2 + \tilde{x}(\tilde{x}-1)/2). \tag{6}$$

Pour minorer z, on commence par oublier les éléments de A de la forme $\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}$ tels que $\sigma^{-1}(j)$, $\sigma^{-1}(j')\leqslant F$ et de la forme opposée quand $\sigma^{-1}(j)$, $\sigma^{-1}(j')>F$; ces éléments contribuent par $+2$ dans z. Remarquons que quand aura prouvé, que malgré cet oubli, $z\geqslant 0$, (2) résultera de (1). On remarque maintenant que les éléments de A du type ci-après contribuent par 0 dans z:

$$\pm(\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}) \text{ avec soit } \sigma^{-1}(j)\leqslant F<\sigma^{-1}(j'), \text{ soit } \sigma^{-1}(j')\leqslant F<\sigma^{-1}(j).$$

Tous les autres éléments de A ont une contribution négative dans z que l'on note $-2z^-$ et que l'on minore par:

$$z^- \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \tilde{p}_i(n-F-q'_{i+1}-\tilde{y}-\tilde{q}+\tilde{q}'_{i+1}+\tilde{x}+\tilde{p}-\tilde{p}'_{i+1}+(\tilde{p}_i+1)/2)$$
$$+ \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \tilde{q}_i(F-p'_{i+1}-\tilde{x}-\tilde{p}+\tilde{p}'_{i+1}+\tilde{y}+\tilde{q}-\tilde{q}'_{i+1}+(\tilde{q}_i+1)/2)$$
$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \tilde{p}_i(n-F-q'_{i+1}+\tilde{q}'_{i+1}-\tilde{p}'_{i+1}+(\tilde{p}_i+1)/2)$$
$$+ \tilde{q}_i(F-p'_{i+1}+\tilde{p}'_{i+1}-\tilde{q}'_{i+1}+(\tilde{q}_i+1)/2).$$

On obtient alors:

$$(\tfrac{1}{2})z \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\left(\sum_{j\in\mathscr{P}_i}\lambda_j + \sum_{j\in\mathscr{Q}_i}\mu_j\right)$$
$$+ \sum_{j\in\mathscr{P}} v_j - \sum_{j\in\mathscr{Q}} v_{n-j+1} + z^+ - z^- \tag{7}$$

(on a utilisé le calcul de V fait en I.4).

Pour améliorer le calcul, on fait intervenir les quantités suivantes pour $1\leqslant i\leqslant r$ et $j\in\mathscr{P}_i$ ou $j\in\mathscr{Q}_i$:

$$\bar{\lambda}_j := \lambda_j + p - q + q'_{i+1} - p'_{i+1} - \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}_j := \mu_j + q - p + p'_{i+1} - q'_{i+1} - \tfrac{1}{2},$$

On a:

$$\begin{aligned} z'' &:= \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\sum_{j\in\mathscr{P}_i}(\lambda_j-\bar\lambda_j)+\sum_{j\in\mathscr{Q}_i}(\mu_j-\bar\mu_j)\\ &= (p-q)(\tilde q-\tilde p)+\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(\tilde p_i-\tilde q_i)(p'_{i+1}-q'_{i+1})+\tilde p/2+\tilde q/2. \end{aligned}$$

On calcule $z''+z^+-z^-$ en utilisant l'égalité suivante:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(\tilde p_i-\tilde q_i)(\tilde p'_{i+1}-\tilde q'_{i+1})=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(\tilde p_i-\tilde q_i)^2/2+(\tilde p-\tilde q)^2/2.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} z''+z^+-z^- \geqslant{}& \tilde y(\tilde y+1)/2+\tilde x(\tilde x-1)/2\\ &+\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(\tilde p_i-\tilde q_i)^2/2+(\tilde p-\tilde q)^2/2-\tilde p/2+\tilde q/2\\ &+(\tilde x-\tilde y)(-2F+n+p-q). \end{aligned}$$

A l'aide de la définition de F, on s'assure que $(x-y)(-2F+n+p-q)\geqslant 0$ (remarquons que $-2F+n+p-q=n-(q+p)+2(p-F)=1$, 0 ou -1; si celà vaut 1 alors $\tilde y=0, \ldots$). En outre pour $j\in\tilde{\mathscr{P}}$ ou $n-j+1\in\tilde{\mathscr{Q}}$, on a $|v_j|\leqslant 1$. On peut donc réecrire (cf. aussi (4) et (5)):

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}z \geqslant{}& \tilde y(\tilde y+1)/2+\tilde x(\tilde x-1)/2+\tilde x^2/2+\tilde y^2/2+\tilde x/2-\tilde y/2-\tilde x-\tilde y\\ &+\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\sum_{j\in\mathscr{P}_i}\bar\lambda_j+\sum_{j\in\mathscr{Q}_i}\bar\mu_j+(\tilde p_i-\tilde q_i)^2/2)\\ ={}& \tilde y(\tilde y-1)+\tilde x(\tilde x-1)+\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\left(\sum_{j\in\mathscr{P}_i}\bar\lambda_j+\sum_{j\in\mathscr{Q}_i}\bar\mu_j+(\tilde p_i-\tilde q_i)^2/2\right). \quad (8) \end{aligned}$$

Evidemment (1) est équivalent à $\tilde p_i=\tilde q_i=0$ pour $1\leqslant i\leqslant r$, cf. (4) et (5). Soit $1\leqslant i\leqslant r$ tel que $\tilde p_i+\tilde q_i\neq 0$. Avec les notations de II.2, on écrit:

$$\begin{aligned} z_i &:= \sum_{j\in\mathscr{P}_i}\bar\lambda_j+\sum_{j\in\mathscr{Q}_i}\bar\mu_j\\ &= \sum_{j\in\mathscr{P}_i}\tilde\lambda_j+\sum_{j\in\mathscr{Q}_i}\tilde\mu_j+(\tilde p_i-\tilde q_i)(q_i-p_i-\sigma'_i+\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

On vérifie alors à l'aide des définitions de II.2 que l'on a:

$$\tfrac{1}{2}\geqslant q_i-p_i-\sigma'_i+\tfrac{1}{2}\geqslant -\tfrac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad z_i\geqslant \tilde p_i/2+\tilde q_i/2-|(\tilde p_i-\tilde q_i)|/2. \quad (9)$$

Avec (8), on obtient donc $\frac{1}{2}z\geqslant \tilde y(\tilde y-1)+\tilde x(\tilde x-1)+(\tilde p+\tilde q)/2\geqslant 0$, l'égalité forçant $\tilde p=\tilde q=0$ c'est-à-dire (1) et (2) (cf. (6)).

II.11. *Preuve de* II.7—*deuxième partie.* On démontre progressivement en faisant décroitre i de r à 1 que l'on a:

- σ est l'identité de $p'_{i+1}+1$ à $n-q'_{i+1}$ et laisse stable les segments $[1, p'_{i+1}]$ et $]n-q'_{i+1}, n]$.
- A ne contient pas d'élément de la forme $(\varepsilon_j+\varepsilon_{j'})$ avec $1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1} < j' \leqslant n-q'_{i+1}$ ni de la forme opposée si $p'_{i+1} < j \leqslant n-q'_{i+1} < j' \leqslant n$.

On pose: $k' = \sup\{j \mid \delta_j > 0\}$, on a gardé la notation δ_j de II.10, $v' = \{j \mid \delta_j < 0\}$. Evidemment on veut démontrer que $\Delta = \Lambda$ et donc que $k' \leqslant n - q'_{r+1}$ et $v' > p'_{r+1}$. Remarquons toutefois que $k' \leqslant v'$ et $p'_{r+1} \leqslant n - q'_{r+1}$ (cf. II.5 ou $n \geqslant p+q$), donc au moins une des inégalités précédentes est satisfaite; par symétrie on suppose que $v' > p'_{r+1}$.

La démonstration procède comme en II.10, tant que l'on peut utiliser II.9(a), pour $V' = \Delta$. On ne fera pas cette démonstration mais on va regarder le cas où on ne peut plus utiliser II.9(a), i.e. il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ pour lequel on a:

$$n - v' + 1 < q'_{i+1}, \tag{1}$$

$$n - (2p - p'_{i+1}) < q'_{i+1} \qquad \text{pour que II.9(b) ne soit pas II.9(a).} \tag{2}$$

Supposons que cette situation se produise et notons i° le plus grand indice pour lequel elle se produit. Et c'est (2) qui impose alors des conditions

$$n - (2p - p'_{i^\circ+1}) < q'_{i^\circ+1} \tag{3}$$

$$n - (2p - p'_{i^\circ+2}) \geqslant q'_{i^\circ+2} \qquad \text{ou } i^\circ = r. \tag{4}$$

Si $i^\circ = r$, (3) donne $(p - p'_{r+1}) - (q - q'_{r+1}) > n - (p+q)$. Or $p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 1$, 0 ou -1, (cf. II.2 ou II.5) et (3) force:

$$n = p+q, \qquad n - (2p - p'_{r+1}) = q'_{r+1} - 1, \qquad p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 1. \tag{5}$$

Si $i^\circ < r$, de (4) et (3) on obtient par soustraction: $p_{i^\circ+1} - q_{i^\circ+1} = \tau + \tau'$ où τ et τ' sont les différences positives en (3) et (4). Avec II.2, cela force $\tau' = 0$ et $\tau = 1$, i.e:

$$n - (2p - p'_{i^\circ+1}) = q'_{i^\circ+1} - 1 \qquad \text{et} \qquad p'_{i^\circ+1} - q'_{i^\circ+1} = 1. \tag{6}$$

Et il faut démontrer que cette situation est contradictoire avec le fait que Δ intervienne dans $\mathscr{V}$ (avec l'hypothèse de récurrence si $i^\circ < r$). On va faire cette démonstration en supposant que $i^\circ = r$, les autres cas étant complètement analogues étant donné ce que l'on vient de vérifier.

On pose $j^\circ = q'_{r+1} - 1$. Et on définit un entier $1 \leqslant i_1 \leqslant r$ par: $q'_{i_1} < j^\circ \leqslant q'_{i_1+1}$. On adopte les notations δ_j, ν_j, F de II.10 et on pose:

$$z := \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1}} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{r+1}} \mu_j - \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1}} \delta_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant j^\circ} \delta_{n-j+1}.$$

On va démontrer que $z > 0$ ce qui contredira II.9(b).

On pose encore:

pour $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\tilde{\mathscr{P}}_i := \{p'_i < j \leqslant p'_{i+1} \mid \sigma^{-1}(j) > p'_{r+1}\}, \qquad \tilde{p}_i = \# \tilde{\mathscr{P}}_i,$$

$$\tilde{\mathscr{P}} := \{p'_{r+1} < j \leqslant F \mid \sigma^{-1}(j) \leqslant p'_{r+1}\}, \qquad \tilde{p} = \# \tilde{\mathscr{P}},$$

pour $1 \leqslant i < i_1$,

$$\tilde{\mathscr{Q}}_i := \{q'_i < j \leqslant q'_{i+1} \mid \sigma^{-1}(n-j+1) \leqslant n - j^\circ\}, \qquad \tilde{q}_i = \# \tilde{\mathscr{Q}}_i,$$

pour $i = i_1$,

$$\tilde{\mathscr{Q}}_{i_1} := \{q'_{i_1} < j \leqslant j^\circ \mid \sigma^{-1}(n-j+1) \leqslant n - j^\circ\}, \qquad \tilde{q}_{i_1} = \# \tilde{\mathscr{Q}}_{i_1},$$

$$\tilde{\tilde{\mathscr{Q}}}_{i_1} := \{j^\circ < j \leqslant q'_{i+1} \mid \sigma^{-1}(n-j+1) > n - j^\circ\}, \qquad \tilde{\tilde{q}}_{i_1} = \# \tilde{\tilde{\mathscr{Q}}}_{i_1}$$

pour $i_1 < i \leqslant r$,

$$\tilde{\tilde{\mathscr{Q}}}_i := \{q'_i < j \leqslant q'_{i+1} \mid \sigma^{-1}(n-j+1) > n - j^\circ\}, \qquad \tilde{\tilde{q}}_i = \# \tilde{\tilde{\mathscr{Q}}}_i,$$

$$\tilde{\tilde{\mathscr{Q}}}_{r+1} := \{q'_{r+1} < j \leqslant n - F \mid \sigma^{-1}(n-j+1) > n - j^\circ\}, \qquad \tilde{\tilde{q}}_{r+1} = \# \tilde{\tilde{\mathscr{Q}}}_{r+1}.$$

On note $\tilde{q} := \sum_{1 \leqslant i \leqslant i_1} \tilde{q}_i$ et l'on a: $\tilde{p} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \tilde{p}_i$, $\tilde{q} = \sum_{i_1 \leqslant i \leqslant r+1} \tilde{\tilde{q}}_i$. En outre il existe au plus une valeur de i, notée x, telle que l'on ait:

$$i_1 \leqslant x \leqslant r \text{ et } \tilde{\tilde{q}}_x \neq 0 \text{ et dans ce cas, on a } \tilde{\tilde{q}}_x = 1 \text{ et } \tilde{\tilde{\mathscr{Q}}}_x = \{q'_{r+1}\}.$$

Par des méthodes analogues à celles de II.10, on vérifie que l'on a: ($\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_j$, ... sont les notations de II.10),

$$z \geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \sum_{j \in \tilde{\mathscr{P}}_i} \bar{\lambda}_j + \sum_{j \in \tilde{\mathscr{Q}}_i} \bar{\mu}_j + (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)^2/2 + \mu_{q'_{r+1}} - \tilde{\tilde{q}}_x(\bar{\mu}_{q'_{x+1}} + p'_{r+1} - p'_{x+1} - \tfrac{1}{2} + \tilde{q}).$$

On sait que $p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 1$ (cf. le début de la preuve) et par définition de p'_{r+1} et q'_{r+1} (cf. II.2(3) et (1)) cela entraine que $\mu_{q'_{r+1}} > 0$. Ainsi si $\tilde{\tilde{q}}_x = 0$, on a $z > 0$, la contradiction cherchée. Supposons donc que $\tilde{\tilde{q}}_x = 1$ (l'autre possibilité). On a alors $q'_{r+1} = q'_{x+1}$ et on exprime $\mu_{q'_{r+1}}$ à l'aide de $\bar{\mu}_{q'_{r+1}}$. Mais il faut être plus précis qu'en II.10(9) et vérifier que l'on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, $j \in \tilde{\mathscr{P}}_i$ et $j \in \tilde{\mathscr{Q}}_i$, $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_{j'} \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui se fait avec II.2, en remarquant que $\bar{\lambda}_j = \frac{1}{2}$ nécessite $m_i = 0$ (seule valeur de m_i donnant des $\frac{1}{2}$ entiers) et qu'alors $q_i - p_i - \sigma'_i + \frac{1}{2} = 0$ (même remarque pour $\bar{\mu}_{j'}$). On obtient alors: $z \geqslant (p-q) + q'_{r+1} - p'_{r+1} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)^2/2 + (\tilde{p} - \tilde{q})/2 = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)^2/2 - (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)/2 \geqslant 1$, ce qui est la contradiction cherchée.

II.12. *Correspondance entre K-type minimaux sous la condition* (†) *et* $n \leqslant p+q$.

LEMME. *On suppose* $n \leqslant p+q$. *Soit* $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ *et* $V \leftrightarrow (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ *un K-type minimal de* $\mathscr{V}$. *On suppose que* $(\mathscr{V}, V)$ *vérifient* (†) (*cf.* II.1) *et que* $\mathscr{V}$ *est un quotient de la représentation métaplectique. Alors V intervient dans les harmoniques* (*cf.* II.5) *et* $W := \Phi^c(V)$ *est un K'-type minimal* (*vérifiant* (†)') *de l'unique élément de* Hch_O, *noté* $\mathscr{W}$, *tel que* $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ *soit un quotient de la représentation métaplectique.*

La démonstration de ce lemme suit la même méthode que celle de II.7 bien que $O(2p, 2q)$ ne soit pas un groupe connexe; la notion de K'-type minimal ne dépend que de l'action de l'algèbre de Lie de K' ainsi que la notion de fortement "n"-minimal. On adopte les notations W et $\mathscr{W}$ de l'énoncé et grâce à II; 5, on sait que les entiers p_i, q_i, r définis pour V et W coïncident. On note $\mathfrak{q}$ la sous-algèbre parabolique θ-stable associée à W (cf. II.2) et $\mathfrak{u}$ son radical nilpotent. On note $\mathfrak{S}$ le groupe de Weyl de $SO(2p) \times SO(2q)$; les éléments de $\mathfrak{S}$ s'identifient au produit d'une permutation de $[1, p]$ par une permutation de $[1, q]$ plus une fonction signe, i.e., une application de $[1, p] \cup [1, q]$ dans ± 1. Si $\sigma \in \mathfrak{S}$, on écrit $\sigma = (|\sigma|, \text{signe } \sigma)$ suivant la décomposition précédente. Soit A un sous-ensemble de racines intervenant dans $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ (où $\mathfrak{p}$ est définie par la décomposition de Cartan relative à K') et $\sigma \in \mathfrak{S}$. On pose:

$$\sum_A := \sum_{\alpha \in A} \alpha =: (a_1, ..., a_p); (a'_1, ..., a'_q)$$

$$B_\sigma := \{\alpha \in \Delta_c^+ \mid \sigma^{-1}(\alpha) \notin \Delta_c^+\},$$

où Δ_c^+ est le système de racines compactes positives le plus habituel.

On pose $(\Lambda'; M') = ((\lambda'_1, ..., \lambda'_p);\ (\mu'_1, ..., \mu'_q)) := \sigma^{-1}((\Lambda; M) + 2\rho_c - \sum_{\alpha \in B_\sigma} \alpha - \sum_A)$, où $(\Lambda; M) := (\lambda_1, ..., \lambda_p); (\mu_1, ..., \mu_q)$ avec $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon; (\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a:

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant p,\ \lambda'_j = \lambda_{\sigma(j)} + j - \sigma(j) - a_{\sigma(j)} \qquad \text{si signe } \sigma(j) = +1,$$

$$= -(\lambda_{\sigma(j)} + 2p - j - \sigma(j) - a_{\sigma(j)}) \qquad \text{si signe } \sigma(j) = -1.$$

Et des résultats pour μ'_j si $1 \leqslant j \leqslant q$, analogues.

On suppose que σ vérifie:

(1) B_σ est formé d'éléments intervenant dans $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}'$,

et que l'on a:

(2) $(\Lambda'; M')$ intervient dans la restriction à la composante neutre de K' d'un K'-type de $\mathscr{W}$, ici on voit $(\Lambda'; M')$ comme une représentation de $SO(2p) \times SO(2q)$ (cf. I.2)

(3) Et il suffit (comme dans II.7) de montrer que σ est l'identité et A est vide

Sans perdre les hypothèses (1) et (2), mais en changeant éventuellement σ en un élément du groupe de Weyl de K', noté σ', on peut supposer, comme nous le ferons que λ'_p et μ'_q sont positifs ou nuls. Le passage de σ à σ' se fait en changeant éventuellement le signe de $\sigma(p)$ et celui de $\sigma(q)$, mais comme σ est un élément du groupe de Weyl de $SO(2p) \times SO(2q)$, de (3) pour σ' on déduit aussi (3) pour σ.

Ainsi il existe $\varepsilon', \eta' = \pm 1$ tels que $(\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_{\varepsilon'}; (\mu'_1, ..., \mu'_q)_{\eta'}$ paramétrise un K'-type de $\mathscr{W}$.

Tout ce que l'on va faire, c'est établir un analogue aux lemmes II.8 et II.9 et laisser le reste de la démonstration au lecteur. (Le lemme qui suit est essentiellement trivial si $n < 2\inf(p, q)$, seul cas où nous avons vraiment besoin de II.12.)

II.13. Lemme (Notation et hypothèses de II.12, $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$, V, W). *On adopte les notations p_i, q_i, r de* II.2 *pour W (cf. aussi* II.5) *et on pose $p'_{r+2} = p$, $q'_{r+2} = q$. Soit W' un K'-type de $\mathscr{W}$, paramétrisé par $(\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_{\varepsilon'}$; $(\mu'_1, ..., \mu'_q)_{\eta'}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant r+1$, on pose*:

$$z_i := \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} \lambda_j - \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} \mu_j - \mu'_j.$$

(a) *On a $z_{r+1} \leqslant 0$.*

(b) *Soit $1 \leqslant i \leqslant r$; on suppose que l'on n'est pas dans l'une des situations suivantes*: ($k' := \sup\{j \mid \lambda'_j > 0\}$ *et* $v' := \{j \mid \mu'_j > 0\}$)

(1) $\varepsilon' = -1$, $k' \langle p'_{i+1}$ *et* $p - p'_{i+1} < q - q'_{i+1}$,

(2) $\eta' = -1$, $v' < q'_{i+1}$ *et* $q - q'_{i+1} < p - p'_{i+1}$,

alors on a $z_i \leqslant 0$.

(c) *On suppose que* (1) *en* (b) *est vérifié et on note i° le plus grand entier tel que l'on ait*:

$$i^\circ \leqslant r; \qquad k' < p'_{i^\circ+1} \qquad \text{et} \qquad p - p'_{i^\circ+1} < q - q'_{i^\circ+1}.$$

On pose:

$$i_1 := \inf\{1 \leqslant i \leqslant i^\circ \mid p'_{i+1} = p'_{i^\circ+1}\},$$

$$z' := \sum_{1 \leqslant j < p'_{i^\circ+1}} \lambda_j - \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i^\circ+1}} \mu_j - \mu'_j,$$

et l'on a:

- $p - p'_{i^\circ+1} = q - q'_{i^\circ+1} - 1$ et si $i^\circ < r$, $q_{i^\circ+1} = p_{i^\circ+1} + 1$,
- $z' < 2(i_1 - i^\circ)$.

On applique I.6: on sait que $\mathscr{V}$ contient un K-type noté $X \otimes \det^{p-q}$ tel que en paramétrisant X par $(v_1, \ldots, v_n)$ on ait pour tout $1 \leqslant j_1 \leqslant p$:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant j_1} v_j \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant \inf(j_1, k')} \lambda'_j + \sup(0, ((1-\varepsilon')/2)(j_1 - k') - \sup(0, j_1 - (n - (v' + (1-\eta')(q - v'))). \tag{1}$$

On a aussi pour tout $1 \leqslant j_2 \leqslant q$:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant j_2} - v_{n-j+1} \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant \inf(j_2, v')} \mu'_j + \sup(0, ((1-\eta')/2)(j_2 - v') - \sup(0, j_2 - (n - k' + (1-\varepsilon')(p - k'))). \tag{2}$$

En outre, on sait (cf. I.4 et I.5) que l'on a:

$$d^\circ(X \otimes \det^{p-q}) \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu'_j + (1-\varepsilon')(p-k') + (1-\eta')(q-v') - 2\sup(0, k' + (1-\varepsilon')(p-k') - n + v' + (1-\eta')(q-v'). \tag{3}$$

A l'aide de II.6, on vérifie que l'on a, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} (\lambda_j - v_j) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} (\mu_j + v_{n-j+1}) \leqslant 0. \tag{4}$$

En posant $k := \sup\{j \mid \lambda_j > 0\}$ et $v = \sup\{j \mid \mu_j > 0\}$, on a:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \mu_j + (1-\varepsilon)(p-k) + (1-\eta)(q-v) = d^\circ V \leqslant d^\circ(X \otimes \det^{p-q}). \tag{5}$$

Si $\varepsilon' = \eta' = +1$, il est clair que (a) et (b) sont vérifiés. Supposons maintenant que $\varepsilon' = \eta' = -1$; de (3) et (5), on tire:

$$\begin{aligned} z_{r+1} &\leqslant 2(p-k') + 2(q-v') + 2(n-p-q) - 2(p-k') - 2(q-v') \\ &= 2(n-p-q) \leqslant 0. \end{aligned}$$

D'où aussi (a) dans ce cas. Supposons maintenant que $\varepsilon'\eta' = -1$; par symétrie, on peut supposer que $\varepsilon' = -1$ et $\eta' = +1$. Il faut commencer par améliorer l'inégalité (3): soit $\bar{k} = \sup\{j \mid v_j > 0\}$. Utilisant I.6, on voit que l'on a $\bar{k} \leqslant 2p - k'$ et l'on a donc:

$$\begin{aligned} d^\circ(X \otimes \det^{p-q}) &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant \bar{k}} v_j - \sum_{\bar{k} < j \leqslant n} v_j \\ &\leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant k'} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant v'} \mu'_j + 2(p-k') - 2(2p-k'-\bar{k}) \\ &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant k'} \lambda'_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant v} \mu'_j + 2(\bar{k}-p). \end{aligned}$$

Ainsi (a) est prouvé si $\bar{k} \leqslant p$, mais dans le cas contraire, il suffit de démontrer (cf. (4)) que l'on a:

$$d^\circ(X \otimes \det^{p-q}) - d^\circ V \geqslant 2(\bar{k}-p) - ((1-\varepsilon)(p-k) + (1-\eta)(q-v)).$$

On retrouve ici la difficulté qu'il y avait eu à prouver II.3(γ) et que l'on n'avait pas eu en II.6. Et la démonstration se fait exactement comme pour II.3(γ) et nous ne la ferons pas.

Pour prouver (b) et (c), on va supposer que $\varepsilon' = \eta' = -1$, le cas où $\varepsilon'\eta' = -1$ est analogue, plutôt plus simple.

De (1), (2) et II.6, on voit que si i est tel que $p'_{i+1} \leqslant k'$ et $q'_{i+1} \leqslant v'$, on a $z_i \leqslant 0$ (cf. aussi (4)). Supposons maintenant que i est tel que $p'_{i+1} \geqslant k'$ et $q'_{i+1} \geqslant v'$. De (1), (2) et (4), on tire:

$$\begin{aligned} z_i &\leqslant (p'_{i+1} - k') + n - p'_{i+1} - 2q + v' + (q'_{i+1} - v') + n - q'_{i+1} - 2p + k' \\ &= 2(n-p-q) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Supposons maintenant que $p'_{i+1} \geqslant k'$ et $q'_{i+1} \leqslant v'$. De (1), (2) et (4), on tire à fortiori:

$$z_i \leqslant (p'_{i+1} - k') + n - q'_{i+1} - 2p + k' = (n-p-q) + (q - q'_{i+1}) - (p - p'_{i+1}). \tag{7}$$

Cela prouve (b) si $q - q'_{i+1} < p - p'_{i+1}$.

Prouvons maintenant (c), en supposant toujours $\varepsilon' = \eta' = -1$ (le cas

$\varepsilon'\eta' = -1$ étant analogue). On adopte les notations i°, i_1 de l'énoncé. Remarquons d'abord qu'il résulte de II.2 que l'on a:

$$q'_{i^\circ+1} - q'_{i_1+1} = i^\circ - i_1. \tag{8}$$

Puisque i° a une propriété de maximalité, il y a deux cas possibles:

- $i^\circ = r$, mais alors grâce à (†), $p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} < 0$ entraine que $p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = -1$.
- $i^\circ < r$; puisque $k' < p'_{i^\circ+2}$, on a $p - p'_{i^\circ+2} \geqslant q - q'_{i^\circ+2}$.

Or on a:

$$\begin{aligned}(p - p'_{i^\circ+2}) - (q - q'_{i^\circ+2}) - (p - p'_{i^\circ+1}) + (q - q'_{i^\circ+1}) &= -p_{i^\circ+1} + q_{i^\circ+1}\\ &= 1, 0 \text{ ou } -1.\end{aligned}$$

D'où nécessairement

$$(p - p'_{i^\circ+1}) = (q - q'_{i^\circ+1} - 1) \qquad \text{et} \qquad q_{i^\circ+1} = p_{i^\circ+1} + 1. \tag{9}$$

Grâce à (7) ou (6), on a:

$$z_{i^\circ} \leqslant 1. \tag{10}$$

De plus:

$$z' = z_{i^\circ} - \lambda_{p'_{i^\circ+1}} \qquad \text{et} \qquad p'_{i^\circ+1} = p'_{i_1+1}. \tag{11}$$

Il résulte de II.2(2) que l'on a:

- soit $i_1 = i^\circ = r$ et comme $p - p'_{r+1} = q - q'_{r+1} - 1$, $\lambda_{p'_{r+1}} \geqslant 2$ (cf. II.2(3) et (1))
- soit $i_1 < r$ et avec (8) et (9), $q_{i_1+1} \neq 0$. Alors II.2(2), montre que:

$$\lambda_{p'_{i_1+1}} + 2(p - p'_{i_1+1}) - (\mu_{q'_{i_1+1}} + 2(q - q'_{i_1+1})) \geqslant 0.$$

C'est-à-dire:

$$\lambda_{p'_{i_1+1}} \geqslant 2(p - p'_{i_1+1} - q + q'_{i_1+1}) = 2(i^\circ - i_1) + 2$$

(cf. (8) et (9)). On obtient le résultat cherché: $z' < 2(i_1 - i^\circ)$, grâce à (10) et (11).

III. Calcul de la correspondance de Howe sous les conditions (†) et (†)'

III.1. *Introduction et conditions* (*) *et* (*)'. Commençons par quelques définitions supplémentaires que nous justifierons plus loin. Soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$;

remarquons que les entiers associés à un K-type minimal de $\mathscr{V}$ par II. ne dépendent pas du choix du K-type minimal choisi, (cf. [V_2, 6.5.15]). On pose:

$$\begin{aligned} \sigma &:= 0 \qquad \text{si } p-q+q'_{r+1}-p'_{r+1}=0, \\ &:= 1 \qquad \text{si } p-q+q'_{r+1}-p'_{r+1}\neq 0. \end{aligned}$$

On dit que $\mathscr{V}$ vérifie (*) si l'on a:

(*) *$n \geqslant p+q$ et il existe un sous-groupe parabolique, noté P de $Sp(2n)$, ayant un Lévi isomorphe à $GL(n-p-q+\sigma)\times Sp(2(p+q-\sigma))$ et un élément, noté $\mathscr{V}'$, de $Hch_{Sp(2(p+q-\sigma))}$ tels que $\mathscr{V}$ soit un sous-quotient de l'induite (normalisée) de P à $Sp(2n)$ de la représentation*: $|\det|^{(n-p-q-\sigma+1)/2}$ $(\text{signe}\det)^{p-q}\otimes\mathscr{V}'$, *contenant un K-type minimal de cette induite.*

Soit $\mathscr{W}\in Hch_O$, comme plus haut les entiers qui sont associés à l'un de ses K'-types minimaux en II.2 ne dépendent pas du choix du K'-type minimal, et on note encore $\sigma := 0$ ou 1 suivant que $p-q+q'_{r+1}-p'_{r+1}$ est nul ou non. On dit que $\mathscr{W}$ vérifie (*)′ si l'on a: (*)′ *est vide si $n=p+q$ et $\sigma=1$.*

(*)′: *$n\leqslant p+q$ et il existe un sous-groupe parabolique, noté P', de $O(2p,2q)$, ayant un Levi isomorphe à $GL(p+q-n-\sigma)\times O(2p-(p+q-n-\sigma), 2q-(p+q-n-\sigma))$ et un élément, noté $\mathscr{W}'$, de $Hch_{O(2p-(p+q-n-\sigma),2q-(p+q-n-\sigma))}$, tels que $\mathscr{W}$ soit un sous-quotient de l'induite (normalisée) de P' à $O(2p,2q)$ de la représentation $|\det|^{(p+q-n+\sigma-1)/2}\otimes\mathscr{W}'$, contenant un K'-type minimal de cette induite.*

Remarquons que ces conditions portent essentiellement sur le paramètre continu; on les réexprimera de cette façon à la fin de ce §.

La condition générale derrière (*) et (*)′ est la suivante:

à la suite de Kudla, on vérifie dans cette partie la propriété simple suivante:

(1) on adopte les notations $\Phi_{n,p,q}$ et $\Psi_{n,p,q}$ de l'introduction pour la correspondance de Howe et son inverse. Soient $\mathscr{V}\in Hch_{Sp(2n)}$ et $\mathscr{W}\in Hch_{O(2p,2q)}$; on suppose que $\mathscr{V}\otimes\mathscr{W}$ est un quotient de la représentation métaplectique. Alors $\mathscr{W}$ est dans l'image de $\Phi_{n',p,q}$ pour tout $n'\geqslant n$ (cf. I.9) et $\Psi_{n',p,q}(\mathscr{W})$ est un sous-quotient de l'induite à partir d'un sous-groupe parabolique de Levi isomorphe à $GL(n'-n)\times Sp(2n)$ de la représentation $|\det|^{((n'+n+1)/2)-(p+q)}(\text{signe}\det)^{p-q}\otimes\mathscr{V}$. Alors qu'en général $\Psi_{n',p,q}(\mathscr{W})$ ne contient pas un $U(n')$-type minimal de cette induite (on précisera cela dans IV)(*) le demande (quand on fait $n' := n$ et $n=p+q$ ou $p+q-1$ suivant les valeurs de $p-q+q'_{r+1}-p'_{r+1}$).

On voit que (*)′ fait intervenir des groupes orthogonaux du type

$O(2p+1, 2q+1)$ que nous n'étudions pas dans ce travail alors qu'ils ne sont pas vraiment différents et que cela va nous obliger à quelques formulations un peu lourdes.

Réexprimons (*) et (*)′ sous la forme complètement équivalente suivante, qui utilise uniquement les paramètres de Langlands-Vogan:

(**). *Soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ (on garde la notation σ de (*)) et on suppose que $n \geqslant p+q$; soit P_0 un parabolique cuspidal attaché à $\mathscr{V}$ par Langlands (on n'a pas besoin de condition de négativité), $P_0 = MAN$ une décomposition de Langlands de P_0. On sait à priori que l'on a (avec les notations de* II.4 *pour un K-type minimal de $\mathscr{V}$ (cf. [V_2, 6.5.15])):*

$$MA \simeq \underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{s} \times \underbrace{GL(2) \times \cdots \times GL(2)}_{\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \inf(p_i, q_i)} \times Sp(2\bar{s})$$

où

$$\bar{s} := \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |p_i - q_i|. \tag{2}$$

En outre Langlands associe aussi à $\mathscr{V}$ une série discrète, noté δ, de M et un caractère, noté ν, de A. (on retrouve δ à l'aide d'un K-type minimal (cf. [V_2, 6. § 5]). La condition (*) dit exactement que l'on a $s \geqslant n-(p+q)+\sigma$ et que la restriction de $(\delta \otimes \nu)$ (à conjugaison près: permutation et inversion) à $n-(p+q)+\sigma$ facteurs en $GL(1)$ est le caractère:

$$t_1 \cdots t_{n-(p+q)+\sigma} \mapsto |t_1| \cdots |t_{n-(p+q)}|^{n-(p+q)} \operatorname{signe}(t_1 \cdots t_{n-(p+q)+\sigma})^{p-q}$$

si $\sigma = 1$, $t_{n-p-q+1}$ n'intervient que par son signe).

On réexprime de même (*)′:

(**)′: *Soit $\mathscr{W} \in Hch_O$; on suppose que $n \leqslant p+q$, (on garde la notation σ de (*)′) et on note P'_0 un parabolique cuspidal attaché à $\mathscr{W}$ (analogue de P_0) avec comme décomposition de Langlands $P'_0 = M'A'N'$. Ici, on utilise les notations de* II.2, *relatives à un K′-type minimal de $\mathscr{W}$. Et on a:*

$$M'A' \simeq \underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{2\inf(p', q')} \times \underbrace{GL(2) \times \cdots \times GL(2)}_{\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \inf(p_i, q_i)} \times O(2\bar{p}, 2\bar{q})$$

$$\text{où } \bar{p} := \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \sup(0, p_i - q_i) + \sup(0, p' - q')$$

$$\bar{q} := \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \sup(0, q_i - p_i) + \sup(0, q' - p'). \tag{3}$$

A $\mathscr{W}$, Langlands attache aussi une série discrète δ' et un caractère continu ν'

et la condition $(**)'$ *dit exactement que l'on a*: $2\inf(p', q') \geqslant p+q-n-\sigma$ *et* $\delta' \otimes \nu'$ *restreint à* $p+q-n-\sigma$ *facteurs en* $GL(1)$ (*toujours à conjugaison près*: *permutation et inversion*) *est le caractère*: $t_1 \cdots t_{p+q-n-\sigma} \mapsto |t_1| \cdots |t_{p+q-n-1}|^{p+q-n-1}$ (*on "oublie"* t_{p+q-n} *si* $\sigma = 0$).

Dans cette partie III, on commence en III.2 par "définir," en supposant $n \geqslant p+q$, une application, noté Ψ_n, de l'ensemble des éléments de Hch_O qui vérifient $(\dagger)'$ sur l'ensemble des éléments de Hch_{Sp} qui vérifient $(\dagger)$ et $(*)$; cette définition dépend à priori du choix d'un K'-type minimal vérifiant $(\dagger)'$ mais on démontrera plus loin qu'il n'en est rien. En III.3, on suppose $n \leqslant p+q$ et on donne une définition symétrique d'une application $\Phi_{p,q}$ de l'ensemble des éléments de Hch_{Sp} qui vérifient $(\dagger)$ sur l'ensemble des éléments de Hch_O qui vérifient $(\dagger)'$ et $(*)'$. Le résultat principal de ce chapitre consiste à démontrer que Ψ_n (si $n \geqslant p+q$) et $\Phi_{p,q}$ (si $n \leqslant p+q$) calculent la correspondance de Howe, i.e., si $\mathscr{W} \in Hch_O$ vérifie $(\dagger)'$ alors $\Psi_n(\mathscr{W}) \otimes \mathscr{W}$ est quotient de la représentation métaplectique si $n \geqslant p+q$ et un résultat symétrique si $n \leqslant p+q$ (cf. III.13).

III.2. *Description de* Ψ_n *quand* $n \geqslant p+q$. Soient $\mathscr{W} \in Hch_O$ et W un K'-type minimal de $\mathscr{W}$. On suppose que $(\mathscr{W}, W)$ vérifient $(\dagger)'$, que $n \geqslant p+q$ et tenant compte de II.5 on pose $V := \Psi^c(W)$. On commence par décrire le cas où $\mathscr{W}$ est une série discrète et où $n = p+q$. Sous ces hypothèses, $\mathscr{W}$ a un unique K'-type minimal, $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon; (\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ et, avec les notations de II.2 relatives à W, on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, $p_i + q_i = 1$ et $p' + q' \leqslant 1$. Cette série discrète $\mathscr{W}$ est complètement déterminée par son K'-type minimal et pas par son paramètre de Harish-Chandra, le groupe n'étant pas connexe, mais donnons quand même ce paramètre de Harish-Chandra, noté $(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_p); (\tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_q)$ où l'on a (cela résulte de II.2):

$$\tilde{\lambda}_j = \lambda_j + p - q - p'_i + q'_i - 1 \qquad \text{où } i \text{ est défini par } j = p'_i + 1 = p'_{i+1},$$

$$\tilde{\mu}_j = \mu_j + q - p - q'_i + p'_i - 1 \qquad \text{où } i \text{ est défini par } j = q'_i + 1 = q'_{i+1}.$$

Remarquons que l'on a:

$$p' = q' = 0 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}_j \tilde{\mu}_{j'} \neq 0, \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant p \text{ et } 1 \leqslant j' \leqslant q,$$

$$p' = 1 \text{ (resp. 0)},\ q' = 0 \text{ (resp. 1)} \Leftrightarrow \tilde{\lambda}_p = 0 \text{ (resp. } \tilde{\mu}_q = 0)$$

et tous les autres paramètres sont non nuls.
Alors si $n = p+q$, $\mathscr{V} = \Psi_n(\mathscr{W})$ *est la* (*limite de*) *série discrète* (*limite si* $p' + q' \neq 0$) *de paramètre de Harish-Chandra, noté* $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_n)$ *où l'on a*:

$$\tilde{\lambda}_j = \tilde{\Lambda}_j \qquad si\ 1 \leqslant j \leqslant p,$$

$$\tilde{\mu}_j = -\tilde{\Lambda}_{n-j+1} \qquad si\ 1 \leqslant j \leqslant q.$$

Remarquons que $\tilde{\Lambda}$ est régulier sauf si $p'+q'\neq 0$ auquel cas on a soit $\tilde{\Lambda}_p=0$, soit $\tilde{\Lambda}_{n-q+1}=0$. Cette (limite de) série discrète est précisée par son K-type minimal qui vaut $V := (\Psi^c)(W)$ (cf. [V_1, 7.18]), mais aussi, si l'on préfère par une chambre de Weyl positive; c'est celle pour laquelle $\tilde{\Lambda}$ est dominant et si $p'+q'=1$ la racine $2\varepsilon_p$ (cf. II.7 pour la notation $2\varepsilon_p$) est positive quand $p'=1$ (i.e., $\tilde{\Lambda}_p=0$) et la racine $-2\varepsilon_{n-q+1}$ est positive quand $q'=1$ (i.e. $\tilde{\Lambda}_{n-q+1}=0$).

(1) Remarque (hypothèses et notations précèdentes) on suppose ici que $p'+q'\neq 0$ et on note $\Psi_{p+q-1}(\mathscr{W})$ la série discrète de $Sp(2n-2)$ de paramètre de Harish-Chandra $((\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_{j-1}, \tilde{\Lambda}_{j+1}, ..., \tilde{\Lambda}_n)$ où $j=p$ si $p'=1$ et $j=p+1$ si $q'=1$. On note P un parabolique de $Sp(2n)$ ayant ses Levi isomorphes à $GL(1)\times Sp(2n-2)$. Alors $\Psi_n(\mathscr{W})$ est le sous-quotient de l'induite de P à $Sp(2n)$ de la représentation $(\text{signe det})^{p-q}\otimes\Psi_{p+q-1}(\mathscr{W})$ qui contient le K-type (minimal) V. On retrouve ainsi $\Psi_n(\mathscr{W})$ dans sa classification de Langlands-Vogan.

On écrit la paramétrisation de Langlands de $\mathscr{V} := \Psi_n(\mathscr{W})$ à l'aide de [V_2, 6.6.15]:

- le parabolique cuspidal a ses Levi, noté MA isomorphes à $GL(1)\times Sp(2n-2)$ (cf. II.4, ici $p_i+q_i=1$ pour tout $1\leqslant i\leqslant r$ et $s=1$),
- la série discrète de M vaut sur $Sp(2n-2)$ exactement $\Psi_{p+q-1}(\mathscr{W})$ (on compare les paramètres de Harish-Chandra) et vaut sur (± 1) $(\subsetneq GL(1))$ le caractère $(\text{signe det})^{p-q}$ (pour voir cela, il faut référer à [V_2, 6.6.2(c)] et se rappeler que V est paramétré par $((\lambda_1, ..., \lambda_p, -\mu_q, ..., -\mu_1))+p+q$ si $W\leftrightarrow(\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon$; $(\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$, car $\varepsilon=\eta=1$ par $(\dagger)'$ et $\lambda_p+\mu_q\neq 0$).

(2) Remarquons aussi que dans le cas où nous nous sommes placés, $\mathscr{W}$ a un unique K'-type minimal vérifiant $(\dagger)'$ et que Ψ_n ne dépend donc que de $\mathscr{W}$.

Passons au cas général (On garde les notations $\mathscr{W}$, W vérifiant $(\dagger)'$ et V du début). Soit P_0' un parabolique cuspidal, $P_0'=M'A'N'$ une décomposition de Langlands de P_0', Δ' une série discrète de M', v' un caractère de A' et on suppose que $\mathscr{W}$ est le sous-quotient de Langlands de l'induite de P_0' à $O(2p, 2q)$ de la représentation $\Delta'\otimes v'$ contenant W; puisque W est un K'-type minimal de $\mathscr{W}$, $M'A'$ est décrit par III.1(3). On décompose naturellement $\Delta'\otimes v' =: (\Delta_1'\otimes v_1')\otimes(\Delta_2'\otimes v_2')\otimes\bar{\Delta}'$ où $\bar{\Delta}'$ est une série discrète de $O(2\bar{p}, 2\bar{q})$, $\Delta_1'\otimes v_1'$ un caractère du produit de tous les facteurs de type $GL(1)$ et $\Delta_2'\otimes v_2'$ une représentation du produit de tous les facteurs de type $Gl(2)$. W détermine $\bar{\Delta}'$, Δ_1' et Δ_2'.

On note P_0^+ un sous-groupe parabolique de $Sp(2n)$ avec une décomposition de langlands $M^+A^+N^+$, où l'on a (avec les notations $p', q', \ldots$ de III.1(2)):

$$M^+A^+ \simeq \underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{2\inf(p',q')+n-p-q} \times \underbrace{GL(2) \times \cdots \times GL(2)}_{\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \inf(p_i,q_i)} \times Sp(2(\bar{p}+\bar{q})) \quad (3)$$

On définit une représentation de M^+A^+ en faisant le produit tensoriel

- du caractère: $t_1 \cdots t_{n-(p+q)} \mapsto |t_1| \cdots |t_{n-(p+q)}|^{n-p-q}$ sign$(t_1 \cdots t_{n-(p+q)})^{p-q}$, des $n-p-q$ premiers facteurs en $Gl(1)$, (4)
- du caractère: $\Delta'_1 \otimes v'_1$ signe $\det^{p-q}$ sur les autres facteurs $GL(1)$, (5)
- de la représentation: $\Delta'_2 \otimes v'_2$ sur les facteurs $GL(2)$, (6)
- de la représentation $\Psi_{\bar{p}+\bar{q}}(\bar{\Delta}')$ sur $Sp(2(\bar{p}+\bar{q}))$ (cf. (2)). (7)

On note cette représentation $\Delta^+ \otimes v^+$ et on définit alors $\mathscr{V} := \psi_n(\mathscr{W})$ comme étant l'unique sous-quotient de l'induite de P_0^+ à $Sp(2n)$ de $\Delta^+ \otimes v^+$, prolongée trivialement sur N^+, qui contient le K-type V. (*V est un K-type minimal de l'induite, cf.* [V_1, 7.17 *et* 7.18]) *et y intervient avec multiplicité un* (*mêmes références*).

On aura besoin de la remarque suivante:

(8) on obtient la même définition de $\mathscr{V}$, en remplaçant Δ'_2 en (6) par son produit tensoriel par le caractère signe $\det^{p-q}$ (on n'a pas changé la représentation) et en remplaçant en (5) et (6) les représentations par leurs contragrédientes (un tel changement conserve le semi-simplifié de l'induite).

Tenant compte de la remarque (1) et de (4), il est clair que $\Psi_n(\mathscr{W})$ vérifie (*), défini en III.1. Deplus les éléments de Hch_{Sp} qui contiennent V comme K-type minimal et qui vérifient (*) sont tous sous-quotient d'une induite à partir de P_0^+, défini avant (3), et de la (limite de) série discrète Δ^+, seul le caractère continu peut varier mais astreint à vérifier (4). Tenant compte de (5) et (6), il est alors clair que tous ces éléments s'écrivent sous la forme $\Psi_n(\mathscr{W}')$ avec $\mathscr{W}'$ un élément de Hch_O contenant W comme K'-type minimal. On a ainsi prouvé:

(9) *Ψ_n définit une surjection de l'ensemble des éléments de Hch_O muni d'un choix de K'-type minimal vérifiant* (†)' *sur l'ensemble des éléments de Hch_{Sp} vérifiant* (†) *et* (*).

En termes de paramétrisation de Vogan. $\mathscr{V} := \Psi_n(\mathscr{W})$ a pour paramètre θ-stables (q, H, δ, v) où q, H, δ, v sont décrits grâce à V (en II.4) (H est un sous-groupe de Cartan déployé maximal de L) et $v = v^+$ si $p-q+q'_{r+1}-p'_{r+1}=0$; si $p-q+q'_{r+1}-p'_{r+1} \neq 0$, on a une "inclusion" (à conjugaison près) de A^+ dans H et $v|_{A^+} = v^+$, v étant trivial sur la composante connexe de la partie déployée de $H \cap Sp(2s)$; cela définit complètement v.

III.3. *Description de $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ quand $n \leqslant p+q$.* Soient $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ et V un K-type minimal de $\mathscr{V}$; on suppose que V vérifie (†) et que V est paramétré par $((\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$. On pose $W := \Phi^c(V)$ (cf. II.5). On adopte les notations p_i, q_i, s, r de II.4 et on traite d'abord le cas où: $\mathscr{V}$ est une série discrète et $p+q-n=0$ ou 1.

La condition (†) dit ici seulement que $p \geqslant p'_{r+1}$ et $q \geqslant q'_{r+1}$. Rappellons que V est ici l'unique K-type minimal de $\mathscr{V}$, que $s=0$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ $p_i+q_i=1$. *On définit alors $\mathscr{W} := \Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ comme étant l'unique série discrète de $O(2p, 2q)$ qui contienne W comme K'-type minimal*; l'existence de cette série discrète est prouvée par Vogan dans [V_1, fin de p. 54 et début p. 55, en tenant compte de ce que grâce à II.5 AN, avec les notations de locus cité, est trivial]. En termes plus élémentaires: on note $(\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_n)$ le paramètre de Harish-Chandra de $\mathscr{V}$ (il est décrit en II.4) et $\mathscr{W}_0$ la série discrète de la composante neutre de $O(2p, 2q)$ de paramètre de Harish-Chandra $(\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_{p'_{r+1}}, O(\text{si } p \geqslant p'_{r+1}))$; $(-\tilde{\Lambda}_n, ..., -\tilde{\Lambda}_{n-q'_{r+1}+1}, O(\text{si } q > q'_{i+1}))$ et $\mathscr{W}$ est l'unique représentation de $O(2p, 2q)$ contenant $\mathscr{W}_0$ dans sa restriction et vérifiant (†)'.

Cas général. On adopte les notations P_0, δ, ν de III.1(2) et on décompose $\delta \otimes \nu$ sous la forme $(\delta_1 \otimes \nu_1) \otimes (\delta_2 \otimes \nu_2) \otimes \bar{\delta}$ comme on l'a fait pour $\Delta' \otimes \nu'$ en III.2. Ici $\bar{\delta}$ est une série discrète de $Sp(2\bar{s})$ qui vérifie (†) si l'on remplace p par $\bar{p}$ et q par $\bar{q}$; en outre on a (cf. II.5, III.1(2) et (3)) $\bar{p}+\bar{q}-\bar{s}=\sigma$, où σ est défini en III.1(*) et $2\inf(p', q') = p+q-n-\sigma+s$. On définit une représentation de $M'A'$ (notations de III.I(3)) en faisant le produit tensoriel des représentations suivantes:

- le caractère $(t_1, ..., t_{p+q-n-\sigma}) \mapsto |t_1| \cdots |t_{p+q-n-1}|^{p+q-n-1}$ sur les $p+q-n-\sigma$ premiers facteurs $GL(1)$ (on "oublie" t_{p+q-n} si $\sigma=0$),
- le caractère $(\delta_1 \otimes \nu_1)$ signe$(\det)^{p-q}$ sur les autres facteurs $GL(1)$,
- la représentation $(\delta_2 \otimes \nu_2)$ sur les facteurs $GL(2)$, (*Rq*: $\delta_2 \otimes \nu_2 \simeq \delta_2 \otimes \nu_2 \text{ sign} \det)^{p-q}$),
- la représentation $\Phi_{\bar{p},\bar{q}}(\bar{\delta})$ sur $O(2\bar{p}, 2\bar{q})$.

On note $\delta' \otimes \nu'$ cette représentation de $M'A'$, où δ' est une série discrète de M' et ν' un caractère de A'. *On définit alors $\mathscr{W} := \Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ comme étant l'unique sous-quotient de l'induite de P'_0 à $O(2p, 2q)$ de la représentation $\delta' \otimes \nu'$ (prolongée trivialement à N') qui contient le K'-type W.*

Toute cette construction ne fait que préciser le paramètre continu de $\mathscr{W}$ seul manquant après la connaissance d'un K'-type minimal, en l'occurrence W et ce paramètre continu vaut ν'.

On vérifie ici, plus aisément qu'en III.2, *que $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ vérifie* (†)' *et* (*)' *et que tout élément de Hch_O vérifiant* (†)' *et* (*)' *s'écrit sous cette forme* (*avec $\mathscr{V}$ bien choisi*).

III.4. *Adjonction de plans hyperboliques.*

LEMME. *Soient* $z \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{C}$.

(i) *Soient* $\tau := 0$ *ou* 1 *et* $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$; *on suppose que* $\mathscr{V}$ *admet un K-type minimal, noté* V *et paramétrisé par* $(\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$. *On note* P *un sous-groupe parabolique de* $Sp(2n+2z)$ *ayant ses Levi isomorphes à* $GL(z) \times Sp(2n)$ *et* π *la "représentation" de* P *triviale sur son radical unipotent et valant* $|\det|^m\,(\mathrm{signe}\,\det)^\tau \otimes \mathscr{V}$ *sur l'un de ses Levi. La représentation induite de* P *à* $Sp(2n+2z)$ *de* π *admet la représentation irréductible de* $U(n+z)$, *notée* V' *définie ci-après, comme* $U(n+z)$-*type minimal et* V' *intervient avec multiplicité un.*

$$V' \leftrightarrow (\Lambda'_1, ..., \Lambda'_{n+z}) \qquad \text{où l'on a: (avec les notations de II.4 pour } V)$$

$$\Lambda'_j = \Lambda_j \qquad \text{si } 1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1},$$

$$\Lambda'_{n+z-j+1} = \Lambda_{n-j+1} \qquad \text{si } 1 \leqslant j \leqslant q'_{r+1},$$

$$\Lambda'_j + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 1,\ 0 \text{ ou } -1 \text{ (1 et } -1 \text{ étant exclusifs)}$$

$$\text{si } p'_{r+1} < j \leqslant n+z-q'_{r+1} \text{ et } \forall \alpha = 1, 0 \text{ ou } -1$$

$$\begin{aligned} \#\{p'_{r+1} < j \leqslant n+z-q'_{r+1} \mid \Lambda'_j + q'_{r+1} - p'_{r+1} = \alpha\} \\ - \#\{p'_{r+1} < j \leqslant n-q'_{r+1} \mid \Lambda_j + q'_{r+1} - p'_{r+1} = \alpha\} &= 0 \text{ si } \alpha \equiv \tau[2] \\ &= 0 \text{ ou } z \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Cela peut donner 2 *possibilités pour* V' (*rappelons que* $\Lambda'_1 \geqslant \cdots \geqslant \Lambda'_{n+z}$) *mais les deux conviennent.* (*Ces deux choix sont conjugués par l'action d'un R-groupe convenable*).

En particulier si V *vérifie* (‡) (*cf.* II.1), *intervient dans les harmoniques* (*cf.* I.4) *et si* $\tau \equiv p - q[\mathrm{mod}\ 2]$, *on pose* $W := \Phi^c(V)$ *et on peut prendre pour* V' *la représentation* $\Psi^c_{n+z,p,q}(W)$.

(ii) *Avec les hypothèses et notations de* (i), *on note* $\mathscr{V}'$ *l'unique sous-quotient de l'induite de* π *qui contient* V'. *Alors il existe un homomorphisme surjectif de* $(K \times sp(2n))$-*modules de la "restriction" de* $\mathscr{V}'$ *à* $Sp(2n)$ *sur* $\mathscr{V}$ *qui envoie "le" vecteur de plus haut poids de* V' *sur celui de* V.

(iii) *Soient* $\mathscr{W} \in Hch_O$ *et* W *l'un de ses* K'-*types minimaux. On note* P' *un sous-groupe parabolique de* $O(2p+2z, 2q+2z)$ *ayant ses Levi isomorphes à* $GL(2z) \times O(2p, 2q)$ *et* π' *la représentation de* P' *triviale sur le radical unipotent de* P' *et valant* $|\det|^m \otimes \mathscr{W}$ *sur l'un des Levi de* P'. *On suppose que* W *vérifie* (†)' (*hypothèse utile*) *et que* W *intervient dans les harmoniques* (*hypothèse simplificatrice*). *On pose* $W' := \Phi^c_{n,p+z,q+z}\Psi^c_{n,p,q}(W)$. *Alors* W' *est un* $O(2p+2z) \times O(2q+2z) \times O(2q+2z)$-*type minimal de l'induite de* π'*y intervenant avec multiplicité un.*

(iv) *Avec les hypothèses et notations de* (iii), *on note* $\mathscr{W}$ *l'unique sous-quotient de l'induite de* π' *qui contient* W'. *Alors il existe un homomorphisme surjectif de* $(K' \times o(2p, 2q))$*-modules de* $\mathscr{W}'$ *"restreint" à* $O(2p, 2q)$ *sur* $\mathscr{W}$ *qui envoie le vecteur de plus haut poids de* W' *sur celui de* W.

(i) D'abord on vérifie que V' intervient dans l'induite; c'est un simple calcul de réciprocité de Frobenius.

Ensuite on calcule les entiers p_i, q_i, r, s de II.4 pour V'; on vérifie quasiment sans calculs qu'ils coïncident avec ceux définis pour V sauf s qui (1) devient $s+z$.

Maintenant les points clés sont [V_3, 8.1] et [V_1, 7.16]: [V_3, 8.1] dit que les "K"-types minimaux d'une induite sont inclus dans l'induite des "K"-types minimaux (évidemment le "K" change). On peut remplacer P par un sous-groupe parabolique de Levi noté $\bar{P}$ de Levi $\underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{z} \times MA$ (où MA est défini en III.1(2)) et π par une représentation, $\tilde{\pi}$, valant le caractère $(t_1, \ldots, t_z) \mapsto |t_1|^{m-(z-1)/2} \cdots |t_z|^{m+(z-1)/2}$ signe$(t_1 \cdots t_z)^\tau \otimes \delta \otimes v$ (δ, v notations de ce qui suit III.1(2)). Le calcul des $U(n+z)$-types minimaux de cette induite est fait en [V_1, 7.16] mais explicitons: grâce à (1), on vérifie que le L de [V_1, 7.16] coïncide avec le L défini par II.4 pour V' (cf. ce qui précède [V_1, 7.7] en pensant que λ à cet endroit est le $\tilde{\Lambda}$ de II.4 pour V'). De même le n de [V_1, 7.16] est le radical nilpotent du parabolique de II.4 et il est très facile de vérifier la propriété de petitesse requise; l'autre vérification à faire dans [V_1, 7.16] consiste à vérifier que V' intervient effectivement dans l'induite, ce que nous avons déjà fait. La multiplicité un est dans [V_1, 7.17].

(ii) se prouve comme (i) et l'hypothèse $(\dagger)'$ intervient pour avoir l'analogue de (1).

(iii): on garde les notations $\bar{P}$, $\tilde{\pi}$ de la preuve de (i). En choisissant correctement $\bar{P}$, on peut supposer, comme nous le ferons, que $\mathscr{V}'$ est un sous-module de l'induite de $\tilde{\pi}$. Avec ce même choix, mais en changeant éventuellement P (en gardant la même classe de conjugaison pour ses Levi), on peut aussi supposer que l'induite de π est un sous-module de l'induite précédente. Comme V' intervient déjà dans l'induite de $\tilde{\pi}$ avec multiplicité un (cf. la preuve de (i)), $\mathscr{V}'$ est un sous-module de l'induite de π. La réciprocité de Frobenius et le fait que $Sp(2n+2z) = PU(n+z)$, donnent un homorphisme, φ, nul sur aucun $U(n+z)$-types, $K \times sp(2n)$-équivariant de $\mathscr{V}'$ sur $\mathscr{V}$. Puisque V' a multiplicité un dans l'induite, la réciprocité de Frobenius montre encore que V' restreint à $(U(n+z) \cap GL(z)) \times K$ contient V prolongé par un caractère évident à $U(n+z) \cap GL(z)$, avec multiplicité un. Il reste à s'assurer que $\varphi(V') \subset V$. C'est peut-être évident avec la construction de φ, mais cela résulte en tout cas du fait que V, convenablement prolongé comme plus haut, est un $(U(n+z) \cap$

$GL(z)) \times K$ type minimal de π (tout autre sous-K-module de V' stable par $U(n+z) \cap GL(z)$ ne vérifie pas les inégalités de II.6 (α)). Le lemme est alors clair, (iv) se démontrant comme (ii).

III.5. *Tout module de Harish-Chandra est dans la correspondance de Howe après adjonction de plans hyperboliques.*

Remarques (Notations $\Phi_{n,p,q}$ et $\Psi_{n,p,q}$ de l'introduction).

(i) *Soit* $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$; *on fixe* n *et* $p-q$ *et on note* $(p(\mathscr{V}), q(\mathscr{V}))$ *les entiers* (*s'ils existent et l'infini sinon*) *tels que* $p(\mathscr{V}) - q(\mathscr{V}) = p - q$, $\mathscr{V}$ *est dans le domaine de définition de* $\Phi_{n, p(\mathscr{V}), q(\mathscr{V})}$ *et* $p(\mathscr{V}) + q(\mathscr{V})$ *est minimal avec ces propriétés. Alors on a*: $p(\mathscr{V}) + q(\mathscr{V}) < +\infty$.

(ii) *Soit* $\mathscr{W} \in Hch_O$, *on fixe* p *et* q *et on note* $n(\mathscr{W})$ *le plus petit entier* (*s'il existe et l'infini sinon*) *tel que* $\mathscr{W}$ *soit dans l'image de* $\Phi_{n(\mathscr{W}), p, q}$. *Alors* $n(\mathscr{W}) < +\infty$.

Ces remarques sont "bien connues"; faute de références, on va esquisser la preuve de (i) ((ii) est analogue): on commence par supposer que $p = q = n$. On reprend les notation $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ de I, pour l'espace symplectique et orthogonal et on note Y un sous-espace isotrope maximal de $\mathscr{Y}$. On note $\mathscr{S}$ l'espace de Schwartz formé des fonctions de Schwartz sur $\mathrm{Hom}(Y, \mathscr{X})$; $\mathscr{S}$ est l'espace d'une réalisation de la représentation métaplectique pour $Sp(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y})$ du moins quand on se limite aux éléments finis sous l'action d'un compact maximal fixé, noté $\mathscr{K}$. On note τ_0 un élément de $\mathrm{Hom}(Y, \mathscr{X})$ qui est surjectif. On vérifie que l'orbite de τ_0 sous $Sp(2n)$ est fermée; on la note Ω. D'où un morphisme surjectif, équivariant pour $Sp(2n)$, de $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{S}(\Omega)$, l'espace des fonctions de Schwartz sur Ω. Le stabilisateur de τ_0 dans $Sp(2n)$ est trivial; ce qui permet d'identifier $\mathscr{S}(\Omega)$ et l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $Sp(2n)$, noté $\mathscr{S}(Sp(2n))$. On a ainsi un homomorphisme surjectif, noté φ, équivariant pour $Sp(2n)$, de $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{S}(Sp(2n))$ (en utilisant par exemple un plongement dans les fonctions L^2), on voit qu'en restreignant cet homomorphisme aux éléments $\mathscr{K}$-finis de $\mathscr{S}$, l'image, notée $\mathscr{S}'$, est un sous-espace dense de $\mathscr{S}(Sp(2n))$ stable par les représentations régulières gauche et droite de $sp(2n)$ et formé d'éléments K-finis. Soit maintenant $(\pi, \mathscr{V})$ (une représentation de $Sp(2n)$; soit $v \in \mathscr{V}$. L'application qui à $f \in \varphi\ \mathscr{S}'$ associe $\int_{Sp(2n)} f(\gamma^{-1})\, \pi(\gamma) v\, d\gamma$, ne peut être nul sans (par densité) l'être aussi sur les fonctions à support compact, ce qui est exclu.

D'où un morphisme $K \times$ Lie $Sp(2n)$*-équivariant de la représentation métaplectique dans l'ensemble des vecteurs K-finis de* $\mathscr{V}$. (1)

Soit maintenant $p-q$ quelconque et par symétrie, supposons que

$p-q \geqslant 0$. On va prouver, ce qui est légèrement plus précis que l'énoncé, que l'on a:

$$\Phi_{n,(n+p-q,n)} \text{ a } Hch_{Sp} \text{ tout entier comme domaine de définition.}$$

Pour $(p', q') \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{S}_{p',q'}$ la représentation métaplectique pour la paire $(Sp(2n), O(2p', 2q')))$. Alors on a:

$$\mathscr{S}_{n+p-q,n \mid Sp(2n)} \simeq (\mathscr{S}_{n,n} \otimes \mathscr{S}_{p-q,0}) \mid_{Sp(2n)}.$$

Soit $(\pi, \mathscr{V}) \in Hch_{Sp}$ et $(\pi', \mathscr{V}')$ un élément de Hch_{Sp} quotient de $\mathscr{S}_{p-q,0}$. D'après (1), il existe un morphisme non nul de $\mathscr{S}_{n,n}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{V}', \mathscr{V})$ (il faut en fait remplacer $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ par des représentations de $Sp(2n)$ et $Sp(2n)$ agit dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{V}', \mathscr{V})$ de la façon habituelle). Il est alors clair qu'il existe un morphisme équivariant de $\mathscr{S}_{n+p-q,q}$ dans $\mathscr{V}$ non nul et on conclut grâce à I.8.

III.6. *Quelques homorphismes entre représentations métaplectiques (1^e partie)*. Soient n, p, $q \in \mathbb{N}$; on note $\mathscr{S}_{n,p,q}$ la représentation métaplectique pour la paire $Sp(2n)$, $O(2p, 2q)$.

LEMME. (i) *soit $z \in \mathbb{N}$; alors il existe un homomorphisme injectif, équivariant pour K et pour $(K' \times o(2p, 2q))$, de $\mathscr{S}_{n,p,q}$ dans $\mathscr{S}_{n,p+z,q+z}$ qui envoie l'ensemble des vecteurs de plus haut poids de l'espace des harmoniques pour $K \times K'$* (*cf.* I.4) *dans l'ensemble des vecteurs de plus haut poids de l'espace des harmoniques pour $K \times O(2p+2z) \times O(2q+2z)$.*

(ii) *Soit $z \in \mathbb{N}$; alors il existe un homomorphisme injectif, équivariant pour K' et pour $(K \times sp(2n))$ de $\mathscr{S}_{n,p,q}$ dans $\mathscr{S}_{n+z,p,q}$ avec les mêmes propriétés qu'en* (i).

(i) La représentation métaplectique $\mathscr{S}_{n,z,z}$ contient un vecteur K-fixe, noté x_0. En outre on a:

$$\mathscr{S}_{n,p+z,q+z} \mid_{Sp(2n) \times O(2p,2q)} \simeq \mathscr{S}_{n,p,q} \otimes \mathscr{S}_{n,z,z},$$

l'action de $(K' \times o(2p, 2q))$ se faisant sur $\mathscr{S}_{n,p,q}$ uniquement.

Le produit tensoriel par x_0 réalise donc un homomorphisme injectif de $\mathscr{S}_{n,p,q}$ dans $\mathscr{S}_{n,p+z,q+z}$ qui a les propriétés d'équivariances de (i). Pour avoir les autres propriétés, il suffit de regarder ce qui se passe avec des modèles de Fock. On note Z^+(resp. Z^-) un espace vectoriel muni d'une forme orthogonale définie positive (resp. négative) de dimension z. Désignant par $\mathbb{C}[\ ]$ l'espace des polynômes sur l'espace vectoriel qui se trouve entre crochets, on prend comme modèles de Fock (soient X, E, F comme en I.1):

$$\text{pour} \qquad \mathcal{S}_{n,p,q}: \mathbb{C}[(X^*\otimes E)\oplus(X\otimes F)],$$

$$\text{pour } \mathcal{S}_{n,p+z,q+z}: \mathbb{C}[(X^*\otimes(E\oplus Z^+))\oplus(X\otimes(F\oplus Z^-))],$$

$$\text{pour} \qquad \mathcal{S}_{n,z,z}: \mathbb{C}[(X^*\otimes Z^+)\oplus(X\otimes Z^-)],$$

et pour x_0, on prend le polynôme constant sur $(X^*\otimes Z^+)\oplus(X\otimes Z^-)$. L'application décrite plus haut est alors le comorphisme de la projection naturelle de $(X^*\otimes(E\oplus Z^+))\oplus(X\otimes(F\oplus Z^-))$ sur $(X^*\otimes E)\oplus(X\otimes F)$. L'assertion sur les harmoniques résulte alors des descriptions explicites données dans [K-V] et de I.4.

III.7. *Homomorphismes entre représentations métaplectiques* (2^e *partie*). On fixe une décomposition lagrangienne $\mathcal{X}=X'\oplus(X')^*$ de l'espace symplectique, un drapeau isotrope: $0\subset X'_0 \subsetneq X'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X'_v$ de X' (où $v\in\mathbb{N}$) et un drapeau isotrope: $0\subset Y'_0 \subsetneq Y'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y'_v$ de l'espace orthogonal $\mathcal{Y}$. Pour tout $1\leqslant i\leqslant v$, on pose $\bar{X}_i := X'_i/X'_{i-1}$ et $\bar{Y}_i := Y'_i/Y'_{i-1}$, $x_i := \dim \bar{X}_i$, $y_i := \dim \bar{Y}_i$ et pour tout $0\leqslant i\leqslant v$, $x'_i := \dim X'_i$ et $y'_i := \dim Y'_i$, $x'_0 =: x_0$, $y'_0 =: y_0$. On pose encore $\bar{\mathcal{X}} := X'^{\perp}_v/X'_v$ et $\bar{\mathcal{Y}} := Y'^{\perp}_v/Y'_v$. Ce sont des espaces symplectique et orthogonal ou nuls.

On note $\mathcal{S}_i$, pour $1\leqslant i\leqslant v$, la représentation métaplectique pour la paire réductive duale $GL(\bar{X}_i)\times GL(\bar{Y}_i)$; on peut la réaliser dans l'espace de Schwartz sur $(\bar{X}_i^*\otimes\bar{Y}_i)$ en faisant opérer $GL(\bar{X}_i)$ (resp. $GL(\bar{Y}_i)$) par le produit tensoriel de l'action naturelle par le caractère $|\det|^{y_i/2}$ (resp. $|\det|^{-x_i/2}$). On note $\bar{\mathcal{S}}$ la représentation métaplectique pour la paire réductive duale $Sp(\bar{\mathcal{X}})\times O(\bar{\mathcal{Y}})$, ou la représentation triviale si $\bar{\mathcal{X}}$ ou $\bar{\mathcal{Y}}$ est nul.

LEMME (Avec les hypothèses et notations précédentes). *On note P et P' les sous-groupes paraboliques de $Sp(\mathcal{X})$ et $O(\mathcal{Y})$ stabilisateurs des drapeaux décrits ci-dessus. Il existe un homomorphisme surjectif $P\times P'$-équivariant* (*au sens des* "$\mathfrak{g}-K$"*-modules*) *de $\mathcal{S}$ sur $\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant v}\mathcal{S}_i\otimes\bar{\mathcal{S}}$, le deuxième espace étant muni de l'action de $P\times P'$ triviale sur les radicaux unipotents, produit tensoriel sur les Levi des représentations décrites ci-dessus tordues par les caractères suivants*:

$$(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_v)\in GL(X'_0)\times\cdots\times GL(\bar{X}_v)$$

$$\mapsto \text{signe}(\det\gamma_0\cdots\gamma_v)^{p-q}\,|\det\gamma_0|^{p+q-y_0}\prod_{j=1}^{v}|\det\gamma_j|^{p+q-y'_{j-1}-y_j/2}$$

$$(\text{où } y'_0=y_0),$$

$$(\gamma'_0,\gamma'_1,\ldots,\gamma'_v)\in GL(Y'_0)\times\cdots\times GL(\bar{Y}_v)$$

$$\mapsto |\det\gamma'_0|^{n-x_0}\prod_{j=1}|\det\gamma'_j|^{n-x'_{j-1}-x_j/2} \qquad (\text{où } x'_0=x_0).$$

Ici on travaille évidemment avec des modèles de Schrödinger. On réalise $\mathscr{S}_{n,p,q}$ dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(X'^* \otimes \mathscr{Y})$; rappelons que $O(\mathscr{Y})$ y agit naturellement et $GL(X')$ ($\subsetneq Sp(\mathscr{X})$) y agit par le produit tensoriel de son action naturelle par le caractère $|\det|^{p+q}$ signe $\det^{p-q}$. L'homomorphisme est l'intégrale sur l'espace décrit ci-dessous:

$$(X'^* \cap X_v'^{\perp}) \otimes Y_v' \oplus \bar{X}_v^* \otimes Y_{v-1}' \oplus \cdots \oplus \bar{X}_1^* \otimes Y_0'$$

où $\bar{X}_i^*$ est un supplémentaire de $X_i'^{\perp}$ dans $X_{i-1}'^{\perp}$ pris dans X'^*.

La surjectivité de cette application au niveau des fonctions de Schwartz est claire mais au niveau des représentations métaplectiques il faut utiliser les descriptions explicites des éléments $\mathscr{K}$-finis (pour $\mathscr{K}$ convenable) comme produit de polynômes par une exponentionelle que l'on peut écrire explicitement.

III.8. Corollaire (Notations et hypothèses de III.7; l'induction est normalisée et se fait à droite).

(i) *Soient pour* $1 \leqslant i \leqslant v$, π_i, π_i' *des modules de Harish-Chandra irréductibles pour* $GL(\bar{X}_i)$ *et* $GL(\bar{Y}_i)$ *et* $\bar{\pi} \in Hch_{Sp(\mathscr{X})}$, $\bar{\pi}' \in Hch_{O(\mathscr{Y})}$. *On suppose que* (*pour tout* $1 \leqslant i \leqslant v$) $\pi_i \otimes \pi_i'$ *est un quotient de* $\mathscr{S}_i$ *et qu'il en est de même pour* $\bar{\pi} \otimes \bar{\pi}'$ *avec* $\bar{\mathscr{S}}$. *On note, pour* $0 \leqslant i \leqslant v$, ψ_i *et* ψ_i' *les caractères de* $GL(\bar{X}_i)$ *et* $GL(\bar{Y}_i)$ *suivants*:

$$\psi_i := |\det|^{p+q-n-y_{i-1}'-y_i/2+x_{i-1}'+x_i/2-1/2}\,\mathrm{signe}(\det)^{p-q}$$

$$=: \psi_i'^{-1}\,\mathrm{signe}(\det)^{p-q},$$

$$\psi_0 := |\det|^{p+q-n+(x_0-1)/2-y_0}(\mathrm{signe}\,\det)^{p-q};$$

$$\psi_0' := |\det|^{n-(p+q)+y_0/2+1/2-x_0}.$$

Alors $\mathscr{S}_{n,p,q}$ *admet comme quotient le produit tensoriel d'un sous-quotient de l'induite de* P *à* $Sp(2n)$ *de la représentation* $\psi_0 \otimes_{1 \leqslant i \leqslant v} \psi_i \pi_i \otimes \bar{\pi}$ *avec un sous-quotient de l'induite de* P' *à* $O(2p, 2q)$ *de la représentation* $\psi_0' \otimes_{1 \leqslant i \leqslant v} \psi_i' \pi_i' \otimes \bar{\pi}'$.

(ii) (*Hypothèses et notations de* III.5(i)). $\mathscr{V}$ *est dans le domaine de définition de* $\Phi_{n,p(\mathscr{V})+z,q(\mathscr{V})+z}$ *pour tout* $z \in \mathbb{N}$ *et notant* P_z' *un sous-groupe parabolique de* $O(2(p(\mathscr{V})+z), 2(q(\mathscr{V})+z))$ *ayant ses Levi isomorphes à* $GL(2z) \times O(2p, 2q)$, *la représentation* $\Phi_{n,p(\mathscr{V})+z,q(\mathscr{V})+z}(\mathscr{V})$ *est un sous-quotient de l'induite de la représentation* $|\det|^m \otimes \Phi_{n,p(\mathscr{V}),q(\mathscr{V})}(\mathscr{V})$ *de* P_z' (*triviale sur le radical unipotent de* P_z') *où* $m := n - p(\mathscr{V}) - q((\mathscr{V}) - z + \frac{1}{2}$. *On a une généralisation évidente en remplaçant* $p(\mathscr{V})$ *et* $q(\mathscr{V})$ *par des entiers* p' *et* q' *vérifiant* $p' - q' = p - q$ (*cf.* III.5) *et* $p' \geqslant p(\mathscr{V})$, $q' \geqslant q(\mathscr{V})$.

(iii) (*Hypothèses et notations de* III.5(ii)). *On a un résultat analogue à*

(ii) *avec ici* P_z *de Levi isomorphe à* $GL(z) \times Sp(2n)$ *et en induisant* $|\det|^m$ signe $\det^{p-q} \otimes \psi_{n(\mathscr{W}), p, q}(\mathscr{W})$ *où* $m := p+q-n(\mathscr{W})-(z+1)/2$. *On peut aussi remplacer* $n(\mathscr{W})$ *par un entier qui lui est supérieur.*

(i) Est un calcul de fonctions modules.

(ii) Se déduit de (i) en faisant $v=0$, $X_0=0$, $\dim Y_0=2z$, $\bar{\pi}=\mathscr{V}$ et $\bar{\pi}' = \Phi_{n, p(\mathscr{V}), q(\mathscr{V})}(\mathscr{V})$, $p+q=p(\mathscr{V})+q(\mathscr{V})+2z$.

(iii) Se déduit de (i) en faisant $v=0$, $X_0=z$, $Y_0=0$, $\bar{\pi}=\Psi_{n(\mathscr{W}), p, q}(\mathscr{W})$ et $\bar{\pi}'=\mathscr{W}$. (Le n de l'énoncé de (i) devient ici $n(\mathscr{W})+z$.)

III.9. *La correspondence de Howe pour les paires de type* II, *i.e.* $(GL(n), GL(m))$. On note ici $Hch_{GL(n)}$ et $Hch_{GL(m)}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de modules de Harish-Chandra irréductibles pour $GL(n)$ et $GL(m)$. Le corollaire III.8 indique que l'on va utiliser la correspondance de Howe pour les paires de type II (en fait uniquement dans des cas très particuliers $n=m=1$ ou 2). Mais comme cette correspondance est facile à décrire et vraisemblablement déjà connue, on va la donner rapidement. On va admettre les résultats suivants: on suppose $n \leqslant m$:

- tout éléments de $Hch_{GL(n)}$ apparait comme quotient de la représentation métaplectique. (1)
- si $n=m$ la correspondance de Howe est donnée par le passage à la contragrédiente. On note avec * la contragrédiente. (2)

Le premier résultat est dans [Vi]; on pourrait le redémontrer de façon beaucoup plus technique mais plus élémentaire par les méthodes de ce travail. Le deuxième résultat est facile. On va donner une esquisse de démonstration du résultat suivant:

PROPOSITION ($n \leqslant m$). *Soit* $\mathscr{V} \in Hch_{GL(n)}$. *On note* V *l'unique* $O(n)$*-type minimal de* $\mathscr{V}$. *On note* P *un sous-groupe parabolique de* $Gl(m)$ *dont les sous-groupes de Levi sont isomorphes à* $Gl(m-n) \times Gl(n)$. *Alors l'induite de* P *à* $GL(m)$ *de la représentation* (triviale $\otimes \mathscr{V}^*$) *a un unique* $O(m)$*-type minimal, noté* W; *il y intervient avec multiplicité un et l'image par la correspondance de Howe de* $\mathscr{V}$, *notée* $\mathscr{W}$, *est l'unique sous-quotient de cette induite contenant* W.

Remarque. Généralisant de façon évidente la paramétrisation des représentations irréductibles des groupes orthogonaux compacts de dimension paire (cf. I.2) à tous les groupes orthogonaux compacts (cf. [V_3, § 5], dont nous n'avons pas adopté les notations), on paramétrise V par $(\lambda_1, ..., \lambda_{[n/2]})_\varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Alors la paramétrisation de W est: (on note $k := \sup\{j \mid \lambda_j > 0\}$)

$$(\lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{(1-\varepsilon)(n/2-k)}, ..., 0)_+ \qquad \text{si } k+(1-\varepsilon)(n/2-k) \leqslant [m/2],$$

$$(\lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{m-n}, 0, ..., 0)_- \qquad \text{sinon.}$$

On démontre comme en III.8 que $\mathscr{W}$ (notation de l'énoncé) doit être un sous quotient de l'induite décrite. On vérifie ensuite que V est un $O(n)$-*type* de degré minimal dans $\mathscr{V}$ (c'est infiniment plus simple que ce qui a été fait en II.3) et on en déduit que $\mathscr{W}$ doit contenir le $O(m)$-type W décrit dans la remarque à l'aide de la correspondance entre les harmoniques (comme en I.4 on se ramène à [K-V). Il reste donc à vérifier que W est un $O(m)$-type minimal de l'induite, unique avec cette propriété et intervenant avec multiplicité un, ou ce qui revient au même, à prouver les mêmes assertions en remplaçant l'induite par sa contragrédiente, ou encore l'induite par l'induite de la représentation (triviale $\otimes \mathscr{V}$). On note $\mathscr{I}$ cette dernière représentation.

On procède comme dans III.4(i); utilisant [V_3, 8.I] on commence par remplacer $\mathscr{I}$ par une induite à partir d'un parabolique cuspidal ayant ses sous-groupes de Levi isomorphes à $\underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{(m-n)} \times M_0A_0$ où M_0A_0 est isomorphe à un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique cuspidal de $GL(n)$ attaché à $\mathscr{V}$. L'unicité des $O(m)$-types de $\mathscr{I}$ résulte alors de ce que les R-groupes sont triviaux pour les groupes linéaires. Il reste donc à vérifier que W est ce $O(m)$-type minimal; on a déjà vérifié qu'il intervient puis on utilise [V_1, 7.16].

III.10. *La correspondence pour les séries discrètes vérifiant* (†) *ou* (†)'. On utilise les notations de III.2 et 3.

PROPOSITION. (i) *Soit $\mathscr{V}$ une série discrète de $Sp(2n)$ vérifiant* (†). *Alors si $n \leqslant p+q$, on a $\mathscr{V} \otimes \Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ est un quotient de la représentation métaplectique.*

(ii) *Soit $\mathscr{W}$ une série discrète pour $O(2p, 2q)$ vérifiant* (†)'. *Alors si $n \geqslant p+q$, on a $\Psi_n(\mathscr{W}) \otimes \mathscr{W}$ est un quotient de la représentation métaplectique.*

On suppose d'abord que $p+q$ soit tel que $\mathscr{V}$ soit un quotient de la représentation métaplectique (par exemple $p+q \geqslant p(\mathscr{V}) + q(\mathscr{V})$, cf. III.5). Et on démontre (i) dans ce cas. On note $\mathscr{W}$ l'image de $\mathscr{V}$ par la correspondance de Howe. Grâce à II.12, on connait un K'-type minimal de $\mathscr{W}$, noté W, dont on sait (cf. II.5 et le fait que $\mathscr{V}$ est une série discrète) que les entiers p_i, q_i, r, p', q' qui lui sont attachés vérifient $p_i+q_i=1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $p'=p-p'_{r+1}$ et $q'=q-q'_{r+1}$ et W est paramétrisé par un élément de la forme $(\lambda_1, ..., \lambda_{p'_{r+1}}, 0, ..., 0)_+$; $(\mu_1, ..., \mu_{q'_{r+1}}, 0,...,0)_+$. Grâce à [$V_1$, 5.2 et 5.8] tout élément de Hch_O admettant W comme K'-type minimal a son paramètre continue déterminé par son caractère infinitésimal. Or le caractère infinitésimal de $\mathscr{W}$ est déterminé par I.7. On a vite vérifié que $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ a W comme K'-type minimal et le bon caractère infinitésimal d'où $\mathscr{W} = \Phi_{p,q}(\mathscr{V}) = \Phi_{n,p,q}(\mathscr{V})$.

On démontre de la même façon (ii), chaque fois que l'on sait que $\mathscr{W}$ est un quotient de la représentation métaplectique.

Fixons $\mathscr{V}$ comme dans (i), il reste à démontrer que $\mathscr{V}$ intervient comme quotient de la représentation métaplectique. On pose $\mathscr{W} := \Phi_{p,q}(\mathscr{V})$, V le K-type minimal de $\mathscr{V}$, $W := \Phi^c(V)$ (cf. II.5) et on choisit $z \in \mathbb{N}$ suffisamment grand (cf. III.5) pour que $\mathscr{W}$ soit dans l'image de la correspondance de Howe $\Phi_{n+z,p,q}$. Le raisonnement fait pour démontrer (ii) quand $\mathscr{W}$ est une série discrète s'applique mots pour mots pour vérifier l'égalité: $\Psi_{n+z}(\mathscr{W}) = \Psi_{n+z,p,q}(\mathscr{W})$. On pose $\mathscr{V}' := \Psi_{n+z}(\mathscr{W})$. On remarque que l'on est dans la situation de III.4(i) en faisant $\tau \equiv p-q$ [2], $m := n-p-q+(z+1)/2$, un $U(n+z)$-type minimal étant $\Psi^c_{n+z,p,q}(W) = \Psi^c_{n+z,p,q}\Phi^c_{n,p,q}(V)$. (C'est un jeu sur les paramètrisations de Langlands-Vogan). On note φ l'homomorphisme répondant aux conditions de III.4(ii). On note α l'homorphisme répondant à III.6(ii) et on regarde la suite des morphismes suivants:

$$\mathscr{S}_{n,p,q} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{S}_{n+z,p,q} \to \mathscr{V}' \otimes \mathscr{W} \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}} \mathscr{V} \otimes \mathscr{W}. \tag{1}$$

Le composé n'est plus que $(sp(2n) \times K) \times K'$-équivariant. Mais on vérifie qu'il est non nul en regardant l'image d'un vecteur de plus haut poids de $V \otimes W$ dans les harmoniques pour K et K' (on utilise III.4(ii) et III.6(ii)). Cela permet bien évidemment de réaliser $\mathscr{V}$ comme quotient de $\mathscr{S}_{n,p,q}$; ce qui est le résultat cherché.

On termine la preuve de (ii) de la même façon.

III.11. *Continuité de la correspondance entre paramètres continus.* Soient V un K-type et W on K'-type tels que $V \otimes W$ intervient dans les harmoniques (cf. I.4). On note $Hch_{[V]}$ (resp. $Hch_{[W]}$) l'ensemble des éléments de Hch_{Sp} (resp. Hch_O) ayant les propriétés suivantes:

- être quotient de la représentation métaplectique,
- admettre V (resp. W) comme K (resp. K')-type de degré minimal et avec multiplicité un.

Si $\mathscr{V} \in Hch_{[V]}$ (resp. $\mathscr{W} \in Hch_{[W]}$), on note $I_{\mathscr{V}}$ (resp. $I'_{\mathscr{W}}$) le noyau dans $U(sp(2n))^K$ (resp. $U(o(2p, 2q))^{K'}$, $U(\ )$ est l'algèbre enveloppante) du caractère par lequel cette algèbre agit sur V (resp. W). Et on pose:

$$I = \bigcap_{\mathscr{V} \in Hch_{[V]}} I_{\mathscr{V}}, \quad I' := \bigcap_{\mathscr{W} \in Hch_{[W]}} I'_{\mathscr{W}}.$$

Alors on a le lemme suivant:

LEMME (i): *Soit* $\mathscr{V} \in Hch_{[V]}$; *on sait que* $\mathscr{V}$ *est quotient de la représentation métaplectique et on note* $\mathscr{W}$ *son image par la correspondance de Howe. Alors* $\mathscr{W} \in Hch_{[W]}$. *Et vice et versa.*

(ii) *Il existe un isomorphisme de* $U(sp(2n))^K/I$ *sur* $U(o(2p, 2q)^{K'}/I'$, *noté* α, *tel que si* $\mathscr{V}$ *et* $\mathscr{W}$ *sont comme en* (i), *on ait*:

$$\alpha(I_{\mathscr{V}}/I) = (I'_{\mathscr{W}}/I').$$

Rappelons, à cause de l'usage que nous ferons de ce lemme, qu'un module de Harish-Chandra pour un groupe connexe G de compact maximal K et d'algèbre de Lie compléxifiée notée $\mathfrak{g}$, est déterminé par la connaissance d'un K-type et de l'action de $U(\mathfrak{g})^K$ sur la composante isotypique de ce K-type. Si G n'est plus supposé connexe, cela reste vrai si l'on suppose en outre que le K-type intervient avec multiplicité un. Quand en plus ce K-type est minimal, l'action de $U(\mathfrak{g})^K$ donne le paramètre continu de la classification de Vogan-Langlands (cf. [V_1, § 8]).

On pose ici $\mathfrak{g} := sp(2n)$, $\mathfrak{g}' := o(2p, 2q)$. Suivant Howe, on note d le degré commun de V et W et $\mathscr{P}_d$ (resp. Z) le sous-$U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}') \times K \times K'$-module de la représentation métaplectique, dans un modèle de Fock, noté $\mathscr{P}$, cf. I.1, engendré par les polynômes de degré strictement inférieur à d (resp. par $V \otimes W$ considéré comme sous-espace des harmoniques $H(K, K')$). On pose: $\bar{Z} := (Z + \mathscr{P}_d)/\mathscr{P}_d$ et

$$\mathscr{J} := \mathrm{Hom}_{K \times K'}(V \otimes W, \bar{Z}/\mathscr{P}_d).$$

C'est un $U(\mathfrak{g})^K \otimes U(\mathfrak{g}')^{K'}$-module, cyclique pour $U(\mathfrak{g})^K$ et pour $U(\mathfrak{g}')^{K'}$ de même vecteur générateur, noté e, d'après [H_2, 4.8]. Prouvons (i): soient $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ comme dans l'énoncé. D'après [H_2, 4.1(c)], on sait que W intervient dans $\mathscr{W}$ et en est un K'-type de degré minimal. Il faut donc montrer que la multiplicité de W dans $\mathscr{W}$ est un. On note φ l'(unique) homomorphisme de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$; il se factorise par $\mathscr{P}/\mathscr{P}_d$ (cf. [H_2, fin du § 4]) et est alors noté $\bar{\varphi}$. On a:

$$\bar{\varphi} \circ \mathscr{J} = \mathrm{Hom}_{K \times K'}(V \otimes W, \mathscr{V} \otimes \mathscr{W}) \neq 0 \qquad \text{(cf. loc. cit.)}$$

$$\bar{\varphi}(I_{\mathscr{V}} \cdot \mathscr{J}) = 0.$$

On pose $\mathscr{J}' = \mathscr{J}/I_{\mathscr{V}}\mathscr{J}$; c'est un $U(\mathfrak{g})^K \otimes U(\mathfrak{g}')^{K'}$-module, non nul, cyclique de générateur l'image de e pour $U(\mathfrak{g})^K$ et $U(\mathfrak{g}')^{K'}$. Il est clair que le noyau de l'action de $U(\mathfrak{g})^K$ sur $\mathscr{J}'$ contient $I_{\mathscr{V}}$ et n'est pas tout $U(\mathfrak{g})^K$. Il coïncide donc avec $I_{\mathscr{V}}$ et comme $U(\mathfrak{g})^K/I_{\mathscr{V}} \simeq \mathbb{C}$, la dimension de $\mathscr{J}'$ est un. En particulier la dimension de $\mathrm{Hom}_{K \times K'}(V \otimes W, \mathscr{V} \otimes \mathscr{W})$ est aussi un ce qui prouve que W a multiplicité un dans $\mathscr{W}$. D'où $\mathscr{W} \in Hch_{[W]}$. Et aussi $I_{\mathscr{V}}\mathscr{J} = I_{\mathscr{W}}\mathscr{J}$.

(ii) Pour prouver (ii), on peut évidemment supposer (avec (i) déjà prouvé) que $Hch_{[V]}$ et $Hch_{[W]}$ sont non vides. On pose, ici (avec les notations qui précèdent celles de l'énoncé):

$$\bar{\mathscr{J}} = \mathscr{J}/I\mathscr{J}.$$

C'est encore un $U(\mathfrak{g})^K \otimes U(\mathfrak{g}')^{K'}$-module cyclique non nul admettant l'image de e, notée $\bar{e}$, comme générateur pour $U(\mathfrak{g})^K$ et pour $U(\mathfrak{g}')^{K'}$. On note $\bar{I}$ et $\bar{I}'$ les noyaux de l'action de $U(\mathfrak{g})^K$ et $U(\mathfrak{g}')^{K'}$ dans $\bar{\mathscr{J}}$. Evidemment $\bar{I} \supset I$ mais la preuve de (i) prouve que l'on a égalité. Vérifions que l'on a: $I\mathscr{J} = I'\mathscr{J}$. Grâce à la preuve de (i), on a le diagramme commutatif suivant:

$$\mathscr{J} \to \mathscr{J}/I\mathscr{J} \hookrightarrow \prod_{\mathscr{V} \in Hch_{[V]}} \mathscr{J}/I_{\mathscr{V}}\mathscr{J}$$

$$\mathscr{J}/I'\mathscr{J} \hookrightarrow \prod_{\mathscr{W} \in Hch_{[W]}} \mathscr{J}/I'_{\mathscr{W}}\mathscr{J}.$$

D'où l'assertion annoncée.

On voit alors que $I' = \bar{I}'$ comme l'on a vu que $I = \bar{I}$. Utilisant le lemme clé [H_2, 4.2], on déduit que $U(\mathfrak{g})^K/I$ et $U(\mathfrak{g}')^{K'}/I'$ sont leur commutant mutuel dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \bar{\mathscr{J}}$. Or ces algèbres sont commutatives et coïncident donc dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \bar{\mathscr{J}}$; (ii) est alors immédiat.

III.12. *La correspondance de Howe pour certaines induites.*

LEMME. (i) *Soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ admettant un K-type minimal, noté V. On suppose que $(\mathscr{V}, V)$ vérifie* (†) *et on suppose en plus que le paramètre continu de $\mathscr{V}$, noté v, est générique, c'est-à-dire que $\mathscr{V}$ est une induite à partir d'un parabolique cuspidal de $Sp(2n)$. On suppose aussi que l'on a: $n \leqslant p+q$. Alors $\mathscr{V} \otimes \Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ est un quotient de la représentation métaplectique.*

(ii) *Soit $\mathscr{W} \in Hch_O$ admettant un K'-type minimal, noté W. On suppose que $(\mathscr{W}, W)$ vérifie* (†)′ *et comme dans* (i) *que $\mathscr{W}$ est une induite irréductible à partir d'un parabolique cuspidal, un de ceux qui lui est attaché par Langlands. On suppose en outre que l'on a: $n \geqslant p+q$. Alors $\Psi_n(\mathscr{W}) \otimes \mathscr{W}$ est un quotient de la représentation métaplectique.*

(i) Soient P un parabolique cuspidal associé à $\mathscr{V}$, $X_0 = 0 \subsetneq X'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X'_v \subset X'$ (cf. III.7) un drapeau isotrope dont P est le stabilisateur. On adopte les notations de III.7 et on note $\bar{\pi}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant v$, $\bar{\pi}$ les représentations de $Gl(\bar{X}_i)$ et $Sp(\bar{\mathscr{X}})$ (ou plutôt les modules de Harish-Chandra) tels que $\mathscr{V}$ soit l'induite du produit tensoriel de ces représentations. On a pour $1 \leqslant j \leqslant v$, $x_j = 1$ ou 2; adoptons aussi les notations p_i, q_i, r, s de II.4 relativement à V et on a: (cf. III.1(2))'

$$\# \{ j \mid 1 \leqslant j \leqslant v,\ x_j = 1 \} = s,$$

$$\# \{ j \mid 1 \leqslant j \leqslant v,\ x_j = 2 \} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \inf(p_i, q_i),$$

$$\dim \bar{\mathscr{X}} = 2 \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |p_i - q_i| \right).$$

La condition (†) assure, entre autre, que l'on peut définir $W = \Phi^c(V)$ et trouver un drapeau isotrope de $\mathscr{Y}$, l'espace orthogonal, noté $0 \subset Y_0 \subsetneqq Y'_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Y'_v$ tel que l'on ait:

- $\dim \bar{Y}_i = \dim \bar{X}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant v$,
- $\dim Y_0 = p + q - n$ si $p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 0$,
  $= p + q - n - 1$ sinon,
- $\dim \bar{\mathscr{Y}} = \dim \bar{\mathscr{X}}$ si $p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = 0$,
  $= \dim \bar{\mathscr{X}} + 2$ sinon,
- la signature de la forme orthogonale de $\bar{\mathscr{Y}}$ est (avec les notations de II.2 pour W, cf. aussi II.5, $p' = p - p'_{r+1}$, $q' = q - q'_{r+1}$):

$$2 \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \sup(0, p_i - q_i) + \sup(0, p' - q') \right) =: 2\bar{p} \qquad \text{(comme signe } +\text{)},$$

$$2 \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \sup(0, q_i - p_i) + \sup(0, q' - p') \right) =: 2\bar{q} \qquad \text{(comme signe } -\text{)}.$$

Remarquons que $\dim \bar{\mathscr{X}} \leqslant \dim \bar{\mathscr{Y}}$ et on a défini en III.3, $\Phi_{\bar{p},\bar{q}}(\bar{\pi})$ que l'on note ici $\bar{\pi}'$. On note pour $1 \leqslant i \leqslant v$, $\bar{\pi}'_1$ la représentation contragrédiente de $\bar{\pi}_i$. On peut appliquer III.8, où l'on fait $\pi_i := \psi_i^{-1} \bar{\pi}_i$, π'_i la contragrédiente de π_i signe$(\det)^{p-q}$ (qui vaut aussi $\psi_i'^{-1} \bar{\pi}'_i$) et $\bar{\pi}$, $\bar{\pi}'$ comme plus haut (cf. III.9 et III.10, pour vérifier les hypothèses de III.8). On voit donc que la représentation métaplectique admet comme quotient le produit tensoriel de $\mathscr{V}$ par un sous-quotient noté, ici, $\mathscr{W}$, de l'induite de P' à $O(2p, 2q)$ du produit tensoriel $\psi'_0 \otimes (\bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant v} \bar{\pi}'_i) \otimes \bar{\pi}'$ (ψ'_0 est défini en III.8 et est le caractère de $GL(Y_0)$: $|\det|^{n-p-q+y_0/2+1/2}$). Grâce à II.12, on sait que $\mathscr{W}$ doit admettre W comme K'-type minimal; on retrouve quasiment la construction de $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ faite en III.3 sauf qu'à cet endroit $Gl(Y_0)$ est remplacé par $\underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{p+q-n-\sigma}$ et ψ'_0 par le caractère $t_1 \cdots t_{p+q-n-\sigma} \mapsto |t_1| \cdots |t_{p+q-n-1}|^{p+q-n-1}$. Il n'y a aucune différence dès que l'on a remarqué que $p + q - n - \sigma = \dim Y_0$ et que $\psi_0'^{-1}$ est sous-quotient de l'induite du caractère qui vient d'être décrit, à $GL(Y_0)$ (cf. alors aussi la remarque III.2.(8) qui vaut aussi pour $O(2p, 2q)$).

(ii) se prouve de la même façon que (i).

III.13. *La correspondance de Howe pour les représentations vérifiant* (†) *et* (†)′.

THÉORÈME (Notations de III.2 et III.3). (i) *Soit* $\mathscr{V}$ *un élément de* Hch_{Sp} *vérifiant* (†) *et on suppose que l'on a*: $n \leqslant p+q$. *Alors* $\mathscr{V} \otimes \Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ *est un quotient de la représentation métaplectique.*

(ii) *Soit* $\mathscr{W}$ *un élément de* Hch_O *vérifiant* (†)′ *et on suppose que l'on a*: $n \geqslant p+q$. *Alors* $\Psi_n(\mathscr{W}) \otimes \mathscr{W}$ *est un quotient de la représentation métaplectique. Rappelons que l'on a caractérisé les images de* $\Phi_{p,q}$ *et* Ψ_n *en* III.2 *et* III.3.

(i) Admettons d'abord que $\mathscr{V}$ est un quotient de la représentation métaplectique (par exemple que $p+q$ est grand par rapport à n cf. III.5) et montrons que:

$$\text{son image dans la correspondance de Howe, notée } \mathscr{W}, \text{ est } \phi_{p,q}(\mathscr{V}). \quad (1)$$

On fixe un K-type minimal, noté V de $\mathscr{V}$ tel que $(\mathscr{V}, V)$ vérifie (†) et $\Phi_{p,q}$ est défini grâce à V. On pose $W := \Phi^c(V)$ (cf. II.5). Grâce à II.12, on sait que W est un K'-type minimal de $\mathscr{W}$. Il reste donc à déterminer la paramètre continu de $\mathscr{W}$. Or $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ admet aussi W comme K'-type minimal et l'égalité de $\mathscr{W}$ et $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ résulterait donc de l'égalité des paramètres continus. Or les formules donnant le paramètre continu de $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ (cf. III.3) et $\mathscr{W}$ (cf. III.11(ii)) en fonction du paramètre continu de $\mathscr{V}$ (pour V fixé) sont algébriques. Pour démontrer que ces formules coïncident, il suffit donc de montrer l'égalité de $\mathscr{W}$ et $\Phi_{p,q}(\mathscr{V})$ quand le paramètre continu de $\mathscr{V}$ est générique; cela a été fait en III.12. D'où (1).

On démontre la version symétrique de (1), en se plaçant dans la situation de (ii) et en supposant que $\mathscr{W}$ est quotient de la représentation métaplectique, de la même façon que (1).

Puis on termine la démonstration de III.13 exactement comme l'on a terminé celle de III.10.

IV. CORRESPONDANCE DE HOWE, RESULTATS ET CONJECTURES

IV.1. *Introduction.* Le résultat essentiel de cette partie montre que pour connaitre explicitement la correspondance de Howe, il suffit de la connaitre (en terme de paramétrisation de Vogan-Langlands) quand n et

$p+q$ sont très différents; c'est ce que Howe appelle le cas de petit rang. Il a donné des méthodes pour traiter ce cas, mais ces méthodes introduisent plutôt des modèles de Whittaker et il y a un problème pour revenir à la classification de Vogan-Langlands; nous n'avons pas exploré cette direction bien qu'elle donnerait sûrement des résultats. On montre que III.13 calcule la correspondance si $n=p+q$ ou $p+q-1$. On donne ensuite des exemples, où on peut effectivement, en se ramenant à n et $p+q$ très différents, calculer la correspondance de Howe; il s'agit des séries discrètes de $O(2p, 2q)$ ne vériant pas $(\dagger)'$ et de certaines séries discrètes de $Sp(2n)$ généralisant un peu les cas traités par Adams (cf. [A]). Signalons que dans tous ces cas, les représentations considérées contiennent un "K"-type minimal de degré minimal ce qui est extrêmement particulier.

Pour terminer, on donne des conjectures exprimant la correspondance de Howe dans le cas où $n \geqslant p+q$.

On utilisera plusieurs fois la remarque suivante due à Rallis:

- soit $\mathscr{W} \in Hch_O$, on adopte la notation $n(\mathscr{W})$ de III.5 et l'on a:

$$n(\mathscr{W})+n(\mathscr{W} \otimes \det) \geqslant 2(p+q). \tag{1}$$

Je ne connais d'ailleurs pas d'exemples où l'inégalité est stricte en (1).

IV.2. Lemme. (i) *On suppose que* $n \leqslant p+q$. *Soit* $\mathscr{W} \in Hch_O$, *on suppose que* $\mathscr{W}$ *est quotient de la représentation métaplectique. Alors* $\mathscr{W}$ *vérifie* $(\dagger)'$. *En outre si* $n=p+q-1$, *alors* $\mathscr{W}$ *vérifie aussi* $(*)'$.

(ii) *On suppose que* $n \geqslant p+q$. *Soit* $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$; *on suppose que* $\mathscr{V}$ *est quotient de la représentation métaplectique. Alors* $\mathscr{V}$ *vérifie* $(\ddagger)$ (*cf.* II.1) *et* $(\dagger)$ *si* $n=p+q$.

(i) Soit $\mathscr{W}' \in Hch_O$; on choisit un K'-type minimal de $\mathscr{W}'$, noté W' et on suppose que $(\mathscr{W}', W')$ ne vérifie pas $(\dagger)'$. On pose $\mathscr{W} := \mathscr{W}' \otimes \det$, $W := W' \otimes \det$. Il est clair que W est un K'-type minimal de $\mathscr{W}$ qui vérifie $(\dagger)'$; remarquons que l'on peut quand même avoir $\mathscr{W} \simeq \mathscr{W}'$. On utilise les entiers p_i, q_i, r, p', q' introduits en II.2 qui sont identiques pour W et W'. Distinguons plusieurs cas:

1^e cas: $p' \neq q'$. Posons $\bar{n}=p+q-1$; $\mathscr{W}$ vérifie $(\dagger)'$ et $(*)'$ (pour $(*)'$ c'est une trivialité étant donnée la définition dans ce cas, cf. III.1) et grâce à III.13 (remarque finale de l'énoncé qui renvoit à III.2) on sait que $\mathscr{W}$ est alors quotient de la représentation métaplectique pour la paire $Sp(2\bar{n})$, $O(2p, 2q)$. C'est-à-dire: (avec la notation $n(\mathscr{W})$ de III.5):

$$n(\mathscr{W}) \leqslant p+q-1.$$

Et avec IV.1(1), on a:

$$n(\mathscr{W}')\geqslant p+q+1.$$

Cela démontre (i) dans ce cas.

2^e cas: $p'=q'$. Clairement si $\mathscr{W}\simeq\mathscr{W}'$, alors $\mathscr{W}'$ vérifie $(\dagger)'$ et avec IV.1(1), on a $n(\mathscr{W})=n(\mathscr{W})'\geqslant p+q$, d'où (i) dans ce cas aussi.

On suppose donc que $\mathscr{W}$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{W}'$ ce qui est équivalent à dire que les restriction de $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}'$ à $SO(2p, 2q)$ sont irréductibles et coïncident, la restriction de $\mathscr{W}$ à $SO(2p, 2q)$ étant stable par l'automorphisme extérieur induit par un élément de K' non dans $SO(2p, 2q)$. On fixe un tel automorphisme laissant stable un sous-groupe parabolique cuspidal fixé de $O(2p, 2q)$ associé à $\mathscr{W}$ par Langlands. (C'est toujours possible.) On peut alors facilement traduire cette condition mais fixons auparavant quelques notations:

paramétrisons W par $(\lambda_1, ..., \lambda_k,\ 0, ..., 0)_\varepsilon$; $(\mu_1, ..., \mu_v,\ 0, ..., 0)_\eta$ avec $\lambda_k\mu_v\neq 0$; comme W vérifie $(\dagger)'$, on suppose par symétrie que $\varepsilon=+1$. En outre les hypothèses $p'=q'$ et $(\dagger)'$ assurent (cf. II.2) que l'on a: $p-k=q'\geqslant q-v$ si $\eta=-1$ et, par symétrie, si $\eta=+1$ on le suppose. On pose:

$$w:=p-k-q+v. \tag{1}$$

Et l'on a: $\mu_{v-w+1}=\cdots=\mu_v=1$ (condition vide si $w=0$). Les paraboliques cuspidaux attachés par Langlands à $\mathscr{W}$ ont donc $2p'$ facteurs en $GL(1)$ (cf. III.1(2)), notés $(\mathbb{R}^*)^{2p'}=:M_1A_1$. Langlands attache aussi à $\mathscr{W}$ un caractère de M_1A_1 (cf. III.1), noté $\delta_1\otimes\nu_1$. Avec des notations évidentes, on décompose encore plus:

$$\delta_1\otimes\nu_1=\bigotimes_{1\leqslant j\leqslant 2p'}\delta_1^j\otimes\nu_1^j,$$

et on pose:

$$\mathscr{J}_0:=\{1\leqslant j\leqslant 2p' \mid \delta_1^j \text{ est trivial}\},$$

$$\mathscr{J}_1:=\{1\leqslant j\leqslant 2p' \mid \delta_1^j \text{ est non trivial}\}.$$

On a, parce que $\mathscr{J}_1$ se calcule à l'aide de W:

$$\begin{aligned}\#\mathscr{J}_1&=w+(1-\eta)(q-v),\\ \#\mathscr{J}_0&=2(q-v)+w-(1-\eta)(q-v).\end{aligned} \tag{2}$$

La condition sur la restriction de $\mathscr{W}$ à $SO(2p, 2q)$ s'exprime en disant que l'ensemble des indices j, compris entre 1 et $2p'$ tels que $\nu_1^j=0$ est non vide. Supposons d'abord que cet ensemble coupe $\mathscr{J}_0$; alors $(*)'$ est satisfait pour

$n=p+q-1$. On obtient alors facilement (i) comme dans le cas où $p' \neq q'$. On suppose donc que l'on a:

$$\nu_1^j \neq 0 \text{ pour tout } j \in \mathscr{J}_0 \text{ et il existe } j \in \mathscr{J}_1 \text{ tel que } \nu_1^j = 0. \tag{3}$$

Comme $\mathscr{W}$ vérifie $(\dagger)'$, on sait (cf. III.13) que $n(\mathscr{W}) \leqslant p+q$. On suppose que $n=p+q$ et on pose $\mathscr{V} := \Psi_{p+q}(\mathscr{W})$ (cf. III.2). Alors $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ est un quotient de la représentation métaplectique (cf. III.13). En outre $V := \Psi^c(W)$ (cf. II.7) est un K-type minimal de $\mathscr{V}$. Rappelons (cf. I.4) que V est paramétrisé par:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_k, 0, ..., 0, \underbrace{-1, ..., -1}_{w+(1-\eta)(q-v)}, -\mu_{v-w}, ..., -\mu_1) + p - q.$$

(on a utilisé aussi ce qui suit (1).

On note $\bar{V}$ le K-type paramétrisé par:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{w+(1-\eta)(q-v)}, 0, ..., 0, -\mu_{v-w}, ..., -\mu_1) + p - q.$$

On va démontrer que l'on a:

$$\bar{V} \text{ n'est pas un } K\text{-type de } \mathscr{V}. \tag{4}$$

Grâce à II.4, on vérifie que les données θ-stables (discrètes) associées à $\bar{V}$ et V coïncident et avec [V_2, 6.5.9(b)] que V et $\bar{V}$ sont conjugués par l'action du dual du R-groupe attaché à V, noté ici R_V. On calcule R_V en se ramenant à L (notation de II.4) et à un $L \cap K$-type gentil (traduction de "fine") grâce à [V_2, 6.5.4(d)]. On voit d'ailleurs facilement que tout se passe dans $Sp(2s)$ (notation de II.4) relativement aux $U(s)$-types:

- $(0, ..., 0, \underbrace{-1, ..., -1}_{w+(1-\eta)(q-v)}) \overset{\text{def.}}{\longleftrightarrow} \Delta$ (qui provient de V),
- $(\underbrace{1, ..., 1}_{w+(1-\eta)(q-v)}, 0, ..., 0) \overset{\text{def.}}{\longleftrightarrow} \bar{\Delta}$ (qui provient de $\bar{V}$).

C'est donc en fait $R_V \cap Sp(2s)$, noté R_Δ, qui nous intéresse et R_Δ est le R-groupe de Δ. Utilisant les définitions de [V_2, 4.3.13], on a $R_\Delta = W_\Delta / W_\Delta^\circ$ où W_Δ (resp. W_Δ°) est le produit d'un groupe de Weyl de type C_m (où $m := s - w - (1-\eta)(q-v)$) avec un groupe de Weyl de type $C_{w+(1-\eta)(q-v)}$ (resp. $D_{w+(1-\eta)(q-v)}$). D'où $R_\Delta \simeq Z/2Z$. Il faut maintenant calculer $R_\Delta(\nu)$ (cf. [V_2, 4.4.9]), i.e., les éléments de R_Δ qui stabilisent le paramètre continu. Pour nous le paramètre continu est ici ν_1 déjà considéré, grâce à la définition de $\mathscr{V}$ (cf. III.2). L'hypothèse (3) assure alors que $R_\Delta = R_\Delta(\nu)$. Il est maintenant immédiat que Δ et $\bar{\Delta}$ ne peuvent être conjugués par $R_\Delta(v)^\perp$ puisque ce groupe est trivial. Grâce à [V_2, 6.5.12], on en déduit (4).

Une conséquence immédiate de (4) est que $\mathscr{W}$ ne contient pas $\Phi^c(\bar{V})$, car $\bar{W} := \Phi^c(\bar{V})$ serait de degré minimal dans $\mathscr{W}$, vérifiant (†)', (car $(\lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{w}, 0, ..., 0)_\eta$; $(\mu_1, ..., \mu_{v-w}, 0, ..., 0)_+ \leftrightarrow \bar{W}$) et étant nécessairement minimal. Alors $\mathscr{V}$ contiendrait $\bar{V}$. D'où:

$$\bar{W} \text{ n'intervient pas dans } \mathscr{W}. \tag{5}$$

Montrons que l'on a:

$$\bar{W} \text{ est un } K'\text{-type (minimal est alors automatique) de } \mathscr{W}'. \tag{6}$$

Pour montrer (6), il faut encore faire un calcul de R-groupe. Mais ici il faut faire attention car on ne peut appliquer les résultats les plus fins de [V_2] à $O(2p, 2q)$ qui ne vérifie pas [V_2, 0.1(b)] (i.e., n'est pas dans la classe de Harish-Chandra) ni [V_2, 0.1(f)] (i.e., n'a pas ses sousgroupes de Cartan commutatifs).

De même $SO(2p, 2q)$ ne vérifie pas [V_2, 0.1(f)] mais cette restriction n'intervient pas ici, car p' étant égal à q' le sous-groupe de Cartan qui nous intéresse (un sous-groupe maximalement déployé de L ou plutôt de $SO(2p', 2q')$, cf. plus bas, avec les notations de II.2) est commutatif. On note encore $\bar{W}$ la restriction de $\bar{W}$ à $K' \cap SO(2p, 2q)$ (elle est irréductible parce que $\lambda_p = \mu_q = 0$) et on montre que l'on a:

$$\bar{W} \text{ est un } K' \cap SO(2p, 2q)\text{-type de } \mathscr{W} \text{ "restreint" à } SO(2p, 2q). \tag{7}$$

On procède comme dans le cas du groupe symplectique déjà traité, en remplaçant:

$$\Delta \text{ par } (0, ..., 0)_+ ; (\underbrace{1, ..., 1}_{w}, 0, ..., .0)_\eta \text{ (restreint à } K' \cap SO(2p', 2q')$$

$$\bar{\Delta} \text{ par } (\underbrace{1, ..., 1}_{w}, 0, ..., 0)_\eta; (0, ..., 0)_+ \text{ (restreint à } K' \cap SO(2p', 2q').$$

Mais ici $R_\Delta \neq R_\Delta(v)$ (c'est $R_\Delta(v)$ qui est trivial à cause de (3)) ce qui fait la différence et prouve que les deux $K' \cap SO(2p', 2q')$ sont conjugués par l'acion de $R_\Delta(v)^\perp$. Cela démontre (7).

On déduit de (7) qu'il existe un K'-type, noté $\bar{W}'$ de $\mathscr{W}$ vérifiant:

$$\bar{W}' \text{ et } \bar{W} \text{ ont même restriction à } K' \cap SO(2p, 2q).$$

Comme $\mathscr{W}$ ne contient pas $\bar{W}$ (cf. (5), on a nécessairement $\bar{W}' = \bar{W} \otimes \det$ et cela démontre immédiatement (6).

Il résulte de (6) que $\mathscr{W}'$ vérifie $(\dagger)'$, d'où $n(\mathscr{W}') \leqslant p+q$ (cf. III.13) et comme $n(\mathscr{W})$ vérifie aussi cette inégalité, on tire de IV.1(1) que l'on a: $n(\mathscr{W}') = n(\mathscr{W}) = p+q$. Et cela prouve la totalité de (i).

(ii) Soit $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$; on suppose que $\mathscr{V}$ est un quotient de la représentation métaplectique et que $n \geqslant p+q$. On choisit z minimum avec la propriété que $p+z+q+z \geqslant n$. On a $p+z+q+z=n$ ou $n+1$. Grâce à III.8(ii), on sait que $\mathscr{V}$ est quotient de la représentation métaplectique pour la paire $(\mathrm{Sp}(2n), O(2(p+z), (2(q+z))$. On note $\mathscr{W}_z$ l'élément de $Hch_{O(2(p+z), 2(q+z))}$ image de $\mathscr{V}$ par la correspondance de Howe. D'après (i), on sait que $\mathscr{W}_z$ vérifie $(\dagger)'$ et $(*)'$. D'après III.13, $\mathscr{V}$ vérifie $(\dagger)$ (pour $(p+z)$, $(q+z))$ et donc, par définition (cf. II.1), vérifie $(\ddagger)$. La fin de (ii) résulte de (i) et III.13.

IV.3. *La correspondance de Howe quand $n=p+q$ ou $p+q-1$.*

THÉORÈME. *On suppose que $n=p+q$ ou $p+q-1$. Soient $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$, $\mathscr{W} \in Hch_O$; alors $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ est quotient de la représentation métaplectique si et seulement si $\mathscr{V}$ vérifie $(\dagger)$, $\mathscr{W}$ vérifie $(\dagger)'$ et (avec les notations de* III.1, 2, 3), *$\mathscr{V} = \psi_n(\mathscr{W})$ et $\mathscr{W} = \Phi_{p,q}(\mathscr{V})$.*

C'est un corollaire immédiat de IV.2(i) et III.13.

IV.4. *Adjonction de plans hyperboliques et quelques liens entre "K"-types minimaux et de degré minimal.*

PROPOSITION. *Soient $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ et $\mathscr{W} \in Hch_O$; on suppose que $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ est un quotient de la représentation métaplectique.*

(i) *On suppose que $n \leqslant p+q$, alors $\mathscr{W}$ vérifie $(\dagger)'$ et en particulier contient un K-type minimal, noté W, qui est aussi de degré minimal et qui intervient dans les harmoniques. On pose $V' := \Psi^c\,(W)$ et pour tout $z \in \mathbb{N}$, $W_z := \Phi^c_{n,\, p+z,\, q+z}(V')$. Alors $\mathscr{V}$ est dans le domaine de définition de la correspondance de Howe pour la paire $(Sp(2n), O(2p+2z, 2q+2z))$ et son image dans cette correspondance est le sous-quotient de l'induite précisée en* III.8(ii) *qui contient le $O(2p+2z) \times O(2q+2z)$-type minimal W_z.*

(ii) *On suppose que $n \geqslant p+q$; on a un résultat symétrique de* (i) *i.e. $\mathscr{V}$ a un K-type minimal et de degré minimal qui permet de calculer l'antécédent de $\mathscr{W}$ dans la correspondance de Howe pour les paires $(Sp(2n+2z), O(2p, 2q))$ où $z \in \mathbb{N}$.*

On ne prouve que (i): on sait que $\mathscr{W}$ vérifie $(\dagger)'$ par IV.2(i) et en particulier contient donc un K'-type minimal de degré minimal (cf. II.3). D'après [H_2, 4.1(c)] W, ce K'-type, intervient dans les harmoniques. Comme dans l'énoncé, on pose: $V' := \Psi^c(W)$, c'est un K-type de degré minimal (même référence que précédemment). On sait, grâce à III.8(ii), que $\mathscr{V}$ est dans le domaine de définition de la correspondance de Howe $\Phi_{n,p+z,q+z}$; d'autre part, toujours avec la même référence, on sait aussi que $\Phi_{n,p+z,q+z}(\mathscr{V})$ contient $\Phi^c_{n,p+z,q+z}(V')$ comme $O(2p+2z)\times O(2q+2z)$-type (de degré minimal). Ensuite, il ne reste plus qu'à appliquer III.8(ii) et III.4(iii).

IV.5. COROLLAIRE (Hypothèses de IV.4(i)). (i) *Les données de Langlands de $\Phi_{n,p+z,q+z}(\mathscr{V})$ s'obtiennent à partir de celles de $\Phi_{n,p,q}(\mathscr{V})$ $(=: \mathscr{W})$ en ajoutant $2z$ facteurs en $GL(1)$ avec comme caractère*:

$$t_1, \cdots, t_{2z} \mapsto |t_1|^{p+q-n} \cdots |t_{2z}|^{p+q-n-1+2z}.$$

(Hypothèses de IV.4(ii)). (ii) *les données de Langlands de $\Psi_{n+z,p,q}(\mathscr{W})$ s'obtiennent à partir de celles de $\Psi_{n,p,q}(\mathscr{W})$ en ajoutant z facteurs en $GL(1)$ avec comme caractère*:

$$t_1, \cdots, t_z \mapsto |t_1|^{n-p-q+1} \cdots |t_z|^{n-p-q+z}\, \mathrm{signe}(t_1 \cdots t_z)^{p-q}.$$

C'est un corollaire immédiat de IV.4.

IV.6. *Soustraction de plans hyperboliques et "calcul" de $n(\mathscr{W})$ et $p(\mathscr{V})$, $q(\mathscr{V})$ quand (†) ou (†)′ ne sont pas satisfaits.*

COROLLAIRE. (i) *Soit $\mathscr{W} \in Hch_O$; si $\mathscr{W}$ vérifie (†)′ on a évidemment* (*cf.* III.13(ii)) *$n(\mathscr{W}) \leqslant p+q$. Supposons que $\mathscr{W}$ ne vérifie pas (†)′ mais que $\mathscr{W}$ est l'image, par la correspondance de Howe, d'un élément noté $\mathscr{V}$, de Hch_{Sp}. Alors on a $n(\mathscr{W}) = n-j$ où j est le plus grand entier tel que la condition suivante soit satisfaite*: (*cela remplace* (*) *cf.* III.1). *Les paraboliques* (*uniques à association près*) *attachés par Langlands à $\mathscr{W}$ contiennent des Levi avec au moins j facteurs $GL(1)$ et comme caractère associé*:

$$t_1, ..., t_j \mapsto |t_1|^{n-p-q-j+1} \cdots |t_j|^{n-p-q}\, \mathrm{signe}(t_1 \cdots t_j)^{p-q}$$

(*on autorise évidemment aussi des inversions et conjugaison*)

(ii) *Soit $\mathscr{W} \in Hch_O$ on suppose que $n \geqslant p+q$ et que $\mathscr{W}$ est l'image, par la correspondance de Howe, d'un élément, noté $\mathscr{V}$, de Hch_{Sp}. Soit V un K-type minimal et de degré minimal de $\mathscr{V}$* (*cf.* IV.4). *Pour tout $z \in \mathbb{N}$, tel que $n-z \geqslant \sup(n(\mathscr{W}), p+q)$, $\Phi^c_{n-z,p,q}(\Psi^c_{n,p,q}(V))$ est défini et est un $U(n-z)$-type minimal de $\Psi_{n-z,p,q}(\mathscr{W}) := \mathscr{V}'_z$ et les paramètres de Vogan-Langlands de $\mathscr{V}'_z$ sont alors uniquement determinés par le fait que* IV.5(ii) *où l'on fait $n+z=n$ et $n=n-z$, doit être satisfait.*

(iii) *On a un résultat symétrique de* (i) *et* (ii) *quand on fixe $\mathscr{V} \in Hch_{Sp}$ échangeant l'inégalité $n \geqslant p+q$ en $n \leqslant p+q$, pour l'analogue de* (ii) *et en tenant compte de* IV.5(i) *pour l'analogue de* (i).

On ne fait que la preuve de (i) et (ii). Tenant compte de IV.2, on sait déjà que si $\mathscr{W}$ ne vérifie pas $(\dagger)'$ alors on a: $n(\mathscr{W}) > p+q$. Tenant compte cette fois de IV.5(ii) et IV.2 on sait que si $n > \sup(n(\mathscr{W}), \mathrm{p}+q)$ $(=$(ici) $n(\mathscr{W}))$, alors, en posant $\mathscr{V} := \Psi_{n,p,q}(\mathscr{W})$, $\mathscr{V}$ vérifie la condition suivante:

(1) les paraboliques cuspidaux attachés à $\mathscr{V}$, ont des Levi contenant un facteur de type $GL(1)$ avec le caractère: $t \mapsto |t|^{n-p+q}$ signe t^{p-q}.

On suppose maintenant que l'on a: $n > p+q$, $n \geqslant n(\mathscr{W})$ et que $\mathscr{V}$, qui est bien défini, vérifie (1). Si l'on prouve que cela entraine que $n > n(\mathscr{W})$, que $W' := \Phi^c_{n,p,q}(V)$ (V est comme dans l'énoncé de (ii)) est dans l'image de la correspondance $\Phi^c_{n-1,p,q}$ et que $\Psi^c_{n-1,p,q}(W')$ est un $U(n-1)$-type minimal de $\Psi_{n-1,p,q}(\mathscr{W})$ on obtiendra (i) et (ii) de proche en proche, en tenant compte de IV.5(ii) pour la fin de (ii).

Prouvons ces trois assertions. On paramétrise V par $(\lambda_1, ..., \lambda_n)+p-q$. On adopte les notations p_i, q_i, r, s de II.4 relatives à V. L'hypothèse (1) assure que l'on a: $s \neq 0$ et il existe j compris entre $p'_{r+1}+1$ et $n-q'_{r+1}$ (au sens large) tel que $\lambda_j = 0$. On pose $V_1 \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \hat{\lambda}_j, ..., \lambda_n)+p-q$ (i.e. on oublie λ_j). On est dans la situation de III.4(i) avec $\tau = p-q$, $m = n-p-q$, V' de III.4 valant ici V et V de III.4 valant ici V_1. On note $\mathscr{V}_1$ l'élément de $Hch_{Sp}(2n-2)$ admettant les mêmes données de Langlands que $\mathscr{V}$ sauf un facteur en $GL(1)$ avec le caractère précisé en (1) et contenant le $U(2n-2)$-type minimal V_1 (on vérifie aisément que cela a un sens, c'est toujours le passage du point de vue de Vogan à celui de Langlands expliqué dans [V_2, 6, 6]). Alors en faisant $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1$ dans III.4, le $\mathscr{V}'$ de III.4 est ici $\mathscr{V}$. On peut ensuite procéder comme dans la preuve de III.10 (cf. III.10(1)), pour vérifier que $\mathscr{V}_1$ est dans le domaine de définition de $\Phi_{n-1,p,q}$. On pose $\mathscr{W}_1 := \Phi_{n-1,p,q}(\mathscr{V}_1)$. A l'aide de IV.4(ii), on vérifie que l'on a $\Psi_{n,p,q}(\mathscr{W}_1) = \mathscr{V}$. Puisque $\Psi_{n,p,q}$ est injectif (c'est le résultat principal de [H_2]), on a $\mathscr{W} = \mathscr{W}_1$ ce qui prouve toutes les assertions cherchées.

IV.7. *Correspondance de Howe pour certaines séries discrètes de $Sp(2n)$ ne vérifiant pas* $(\dagger)$. Soit $\mathscr{V}$ une série discrète pour $Sp(2n)$; on note $(\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_n)$ son paramètre de Harish-Chandra et $V \leftrightarrow (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ son K-type minimal. Le rapport entre les $\tilde{\Lambda}_j$ et Λ_j est donné par II.4, plus précisément avec les notations p_i, q_i, r, s de II.4 relatives à V, on a:

- $s=0$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, $p_i+q_i=1$ (en particulier $p'_{r+1}+q'_{r+1}=n$),
- soit $1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1}$, on définit i compris entre 1 et r par $p'_i < j \leqslant p'_{i+1}$ et l'on a: $\tilde{\Lambda}_j = \Lambda_j + q'_i - p'_i - 1$ $(= \Lambda_j + q'_{i+1} - p'_{i+1})$,
- soit $1 \leqslant j \leqslant q'_{r+1}$, on définit i compris entre 1 et r par $q'_i < j \leqslant q'_{i+1}$ et l'on a: $\tilde{\Lambda}_{n-j+1} = \Lambda_{n-j+1} + q'_i - p'_i + 1$ $(= \Lambda_{n-j+1} + q'_{i+1} - p'_{i+1})$.

Adams a étudié (cf. [A]) l'image de $\mathscr{V}$ par la correspondance de Howe en imposant des restrictions au paramètre de Harish-Chandra et en imposant l'inégalité $\inf(p, q) > 2n$. La première hypothèse lui assure en fait que V est un K-type de degré minimal (mais son hypothèse est plus forte que cela) et la deuxième lui assure, grâce à un résultat de Howe, que $\mathscr{V}$ est dans le domaine de définition de la correspondance de Howe. Dans ce paragraphe nous allons améliorer la première hypothèse d'Adams pour la rendre essentiellement équivalent à ce que V soit un K-type de degré minimal et nous allons complètement éliminer la deuxième hypothèse d'Adams. Nos méthodes sont assez différentes de celle de [A] et nous n'utiliserons donc pas [A]. On fixe dans tout ce paragraphe: $m := p - q$. Et on fera varier p et q astreint à cette condition. On pose aussi: $\tau := p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} = m - p'_{r+1} + q'_{r+1}$.

(1) LEMME. *V est un K-type de degré minimal de $\mathscr{V}$ si l'on a*:

(a) $\Lambda_{p'_{r+1}} \geqslant \tau - (q'_{r+1} - q'_{i^\circ+1})$ *où* $i^\circ := \inf\{1 \leqslant i \leqslant r \mid p'_{i+1} = p'_{r+1}\}$,

(b) $\tilde{\Lambda}_{n-q'_{r+1}+1} \leqslant \tau + (p'_{r+1} - p'_{i'^\circ+1})$ *où* $i'^\circ := \inf\{1 \leqslant i \leqslant r \mid q'_{i+1} = q'_{r+1}\}$.

On ne fera pas la preuve de ce lemme qui se démontre de façon beaucoup plus simple que II.6(β); ce qu'il faut essentiellement remarquer c'est que les hypothèses (a) et (b) sont équivalentes aux hypothèses suivantes:

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1}, \qquad \Lambda_j + q - p \geqslant 0,$$
$$\forall 1 \leqslant j \leqslant q'_{r+1}, \qquad \Lambda_{n-j+1} + q - p \leqslant 0.$$

Remarquons que l'on a $\tilde{\Lambda}_j > 0$ si $j \leqslant p'_{r+1}$ et $\tilde{\Lambda}_{n-j+1} < 0$ si $j \leqslant q'_{r+1}$. Je pense que ces hypothèses (a) et (b) sont aussi nécéssaires, mais pour le vérifier il faut utiliser la formule de [V-Z, 6.17] qui permet d'exhiber un K-type de degré plus petit si (a) ou (b) fait défaut (c'est quand même un peu pénible et nous n'en avons pas besoin).

Les hypothèses de [A] sont du type $\tilde{\Lambda}_{p'_{r+1}} \geqslant |\tau|$ et $\tilde{\Lambda}_{n-q'_{r+1}+1} \leqslant -|\tau|$.

(2) LEMME. *On suppose que V vérifie les hypothèses* (a) *et* (b) *de* (1) *et que l'on a*: $p \geqslant p'_{r+1}$ *et* $q \geqslant q'_{r+1}$. *Alors V intervient dans les harmoniques* (*cf.* I.4) *et on note alors* $W := \Phi^c(V)$. *On a*:

$$W \leftrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)_+ ; (\mu_1, \ldots, \mu_q)_+ \qquad \textit{où l'on a}:$$

$$\lambda_j := \Lambda_j + q - p \quad \textit{pour } 1 \leqslant j \leqslant p'_{r+1}, \qquad \lambda_j := 0 \textit{ pour } p'_{r+1} \leqslant j \leqslant p,$$
$$\mu_j := -(\Lambda_{n-j+1} + q - p) \textit{ pour } 1 \leqslant j \leqslant q'_{r+1}, \qquad \mu_j := 0 \textit{ pour } q'_{r+1} \leqslant j \leqslant q.$$

C'est immédiat avec I.4 et ce qui est expliqué dans l'ébauche de preuve de (1).

Dans tout ce qui suit, on suppose que V vérifie (a) *et* (b) *dans* (1) *et que V ne vérifie pas* (†), *i.e.* $|\tau| > 1$ *et que* $p \geqslant p'_{r+1}$, $q \geqslant q'_{r+1}$ *ce qui sera justifié en* (6).

(3) $\mathscr{V}$ n'est dans le domaine de définition de la correspondance de Howe que si $p+q>n+1$. (c'est un corollaire immédiat de IV.2 et IV.3). On pose

$$p_0 := p'_{r+1} + \sup(0, \tau),$$
$$q_0 := q'_{r+1} + \sup(0, -\tau).$$

On a nécessairement soit $p_0 = p'_{r+1}$, soit $q_0 = q'_{r+1}$ et toujours l'inégalité $\geqslant$; évidemment $p_0 - q_0 = m$ et $p_0 + q_0 = p'_{r+1} + q'_{r+1} + |\tau| > n+1$.

Pour tout couple (p, q) vérifiant $p \geqslant p_0$, $q \geqslant q_0$ et $p-q=m$, on note $W_{p,q}$ l'image de V par Φ^c (cf. (2)). On note P_i, Q_i, R, P', Q' les entiers associés à $W_{p,q}$ par II.2. Ils ne coïncident pas avec ceux définis par I.4 pour V et déjà utilisés. *Pour éviter des lourdeurs excessives dans les notations en suppose que* $\tau > 0$. Si $\tau < 0$, on a évidemment des résultats symétriques échangeant ce qui concerne p et q. Avec cette hypothèse, on a donc:

$$\text{(b) est automatique et } p_0 = p'_{r+1} + \tau,\ q_0 = q'_{r+1}. \tag{4}$$

Utilisant le fait que $\tilde{\Lambda}_{n-q'_{r+1}+1} < 0$, on déduit que l'on a: (notations de (2))

$$\mu_{q'_{r+1}} > 1 \text{ (en fait même} > 2). \tag{5}$$

On pose $i_1 := \sup\{1 \leqslant i \leqslant r \mid \tilde{\Lambda}_{n-q'_{i+1}+1} \leqslant -\tau + q'_{r+1} - q'_{i+1}\}$. On vérifie que l'on a: $i_1 \geqslant i°$. (On a $q'_{i°} = q'_{i°+1}$ et $\tilde{\Lambda}_{p'_{i°}} + \tilde{\Lambda}_{n-q'_{r+1}+1} \leqslant 0$ (cf. II.4) et (1).) On a aussi: $\tau - q'_{r+1} + q'_{i_1+1} > 0$.

Un calcul pas très difficile prouve que tout élément de Hch_O qui admet $W_{p,q}$ comme K'-type minimal est sous-quotient de Langlands à partir d'une induite par un parabolique, noté $P'_0 = M'A'N$, d'une représentation $\delta' \otimes \nu'$ de $M'A'$, où l'on a:

$$M'A' \simeq \underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{2(q-q'_{r+1})} \times \underbrace{GL(2) \times \cdots \times GL(2)}_{(q'_{r+1}-q'_{i_1+1})\,(=2-i_1)} \times O(2(m+q'_{i_1+1}), 2q'_{i_1+1})$$

avec δ' le produit tensoriel des représentations suivantes:

• la représentation triviale de chaque $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\subsetneq GL(1)$; $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = K' \cap GL(1)$),

• des séries discrètes sur chaque $Sl^{\mp}(2)$ ($\subsetneq GL(2)$) dont les paramètres de Harish-Chandra sont $\mu_{q'_{i_1+1}+1} - 1, \ldots, \mu_{q'_{r+1}} - 1$ (et cela les détermine complètement cf. (5)) (si $i_1 = r$, cas d'ailleurs de [A], ces définitions sont vides).

• une série discrète sur $O(2(m+q'_{i_1+1}), 2q'_{i_1+1})$ de $O(2(m+q'_{i_1+1})\times O(2q'_{i_1+1})$-type minimal paramétré par

$$(\lambda_1, ..., \lambda_{p'_{r+1}}, \underbrace{0, ..., 0}_{\tau-(q'_{r+1}-q'_{i_1+1})})_+ ; (\mu_1, ..., \mu_{q'_{i_1+1}})_+$$

(son paramètre de Harish-Chandra est:

$$(\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_{p'_{r+1}}, \tau-(q'_{r+1}-q'_{i_1+1})-1, ..., 1, 0); (\tilde{\Lambda}_n, ..., -\tilde{\Lambda}_{n-q'_{i_1+1}+1}).$$

On fait un choix de v': le produit tensoriel des caractères suivants:

• sur

$$A'\cap GL(1)\times \cdots \times GL(1): t_1 \cdots t_{2(q-q'_{r+1})} \mapsto t_1 \cdots t_{2(q-q'_{r+1})}^{p+q-n-1},$$

• sur

$$A'\cap GL(2)\times \cdots \times GL(2): t_1 \cdots t_{q'_{r+1}-q'_{i_1+1}} \mapsto t_1^{z_1} \cdots t_{q'_{r+1}-q'_{i_1+1}}^{z_{r-i_1}},$$

où pour $1\leqslant j\leqslant r-i_1$ on a $z_j := \tilde{\Lambda}_{n-q'_{i_1+j}}+q'_{r+1}-q'_{i_1+j}-\tau$.

On note alors $\mathscr{W}_{p,q}$ l'unique sous-quotient de l'induite à partir de ces représentations contenant le K'-type $W_{p,q}$. On va avoir besoin d'une autre caractérisation de $\mathscr{W}_{p_0,q_0}$, beaucoup plus simple (mais fausse pour $p+q$ grand):

(5)′ *$\mathscr{W}_{p_0,q_0}$ est l'unique élément de Hch_O admettant W_{p_0,q_0} comme K'-type minimal et ayant comme caractère infinitésimal: $(\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_n, 0, 1, ..., p_0+q_0-n-1)$ où on a identifié caractère infinitésimal et orbite de formes linéaires sur $\mathbb{C}^{p_0+q_0}$ sous l'action de $\mathfrak{S}_{p_0+q_0}\times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{p_0+q_0}$, agissant par permutation et changement de signes (c'est l'homorphisme de Harish-Chandra en tenant compte de ce que $O(2p_0, 2q_0)$ n'est pas connexe).*

On pose, pour la démonstration: $p := p_0$ et $q := q_0$. Pour prouver cela, on commence par s'assurer que $\mathscr{W}_{p,q}$ a le bon caractère infinitésimal, ce qui est immédiat puisque l'on sait calculer les caractères infinitésimaux des induites. Soit maintenant $\mathscr{W}'\in Hch_O$ admettant $W_{p,q}$ comme K'-type minimal. Tenant compte de ce qui suit (5), on connait déjà un bout du caractère infinitésimal de $\mathscr{W}'$, plus précisément on sait qu'il est de la forme: $(\tilde{\Lambda}_1, ..., \tilde{\Lambda}_{p'_{r+1}}, \tilde{\Lambda}_n, ..., \tilde{\Lambda}_{n-q'_{i_1}}, 0, 1, ..., \tau-q'_{r+1}+q'_{i_1}, y_1, ..., y_u)$ où $u := 2(q'_{r+1}-q'_{i_1+1})$. En écrivant cela on n'a pas tenu compte de la connaissance du paramètre de Harish-Chandra des séries discrètes des différents $SL^{\pm}(2)$.

On suppose en plus que le caractère infinitésimal de $\mathscr{W}'$ vérifie (5)′. Posons quelques notations: pour tout $1\leqslant j\leqslant r-i_1$, $x_j := \tau-q'_{r+1}+q'_{i_1+j}$ ce qui vaut aussi $\tau-r+i_1+j-1$. On a avec cette notation, pour les mêmes valeurs de j: $\mu_{q'_{i_1+j}} - 1 = -\tilde{\Lambda}_{n-q'_{i_1+j}} + x_j$. Et on pose encore $h_j := -\tilde{\Lambda}_{n-q'_{i_1+j}}$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble $\{x_1, ..., x_{r-i_1}, h_1, ..., h_{r-i_1}\}$. Par définition de i_1, on a les inégalités suivantes:

(!) $x_{r-i_1} > \cdots > x_1 \geqslant h_1 > \cdots > h_{r-i_1} > 0$ et il faut remarquer que les x_j décroissent de 1 (quand j diminue de 1) alors que les h_j décroissent d'au moins 1 (quand j augmente de 1) (cela résulte des définitions).

On pose, pour $1 \leqslant j \leqslant r - i_1$, $\alpha_j := x_j + h_j$. On sait en plus que l'on a: pour tout $1 \leqslant j \leqslant r - i_1$, α_j (qui est le caractère infinitésimal d'une des séries discrètes de $SL^{\pm}(2)$ intervenant dans la paramétrisation de $\mathscr{W}'$) doit s'écrire sous la forme $y_j + y'_j$ où y_j et y'_j sont au signe près des éléments de $\mathscr{F}$ vérifiant en plus le fait que $y_j - y'_j$ donne le paramètre continu de la représentation de $GL(2)$ prolongeant celle de $SL^{\pm}(2)$ (dont il vient d'être question). Et l'ensemble des $|y_j|$, $|y'_j|$ quand j varie coïncide avec $\mathscr{F}$. On suppose, ce qui est loisible que $y_j \geqslant y'_j$. On doit démontrer qu'il existe une permutation de $(1, ..., r - i_1)$ notée γ telle que l'on ait:

$$1 \leqslant j \leqslant r - i_1, \qquad y_j = x_{\gamma(j)} \qquad et \qquad y'_j = h_{\gamma(j)}.$$

Utilisant (!), on vérifie que l'on a:

$$\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{r-i_1}.$$

On vérifie que y_j et y'_j doivent être positifs; pour y_j cela résulte de ce que $\alpha_j > 0$ et pour y'_j de l'inégalité suivante, vraie si $y'_j < 0$:

$$\alpha_j = y_j + y'_j \leqslant x_{r-i_1} - h_{r-i_1} = \alpha_{r-i_1} - 2h_{r-i_1} < \alpha_{r-i_1} \leqslant \alpha_j.$$

On fait $j = 1$ et on déduit facilement de (!) que l'on a $y'_j < x_1$ (sinon α_1 serait trop petit), $y_j > h_1$ (sinon α_1 serait trop grand) et enfin l'existence de $\gamma(1)$. Puis on continue de proche en proche.

(6) Proposition. *Soit $\mathscr{V}$ une série discrètede $Sp(2n)$ vérifiant les hypothèses de* (1) *et on suppose par symétrie que $\tau := p - q + q'_{r+1} - p'_{r+1} > 0$. On pose $p_0 := p'_{r+1} + \tau$ et $q_0 := q'_{r+1}$ et rappelons que $p - q$ est fixé. Alors $\mathscr{V}$ est dans le domaine de définition de la correspondance de Howe si et seulement si $p \geqslant p_0$, $q \geqslant q_0$ (ces inégalites sont équivalentes) et son image est $\mathscr{W}_{p,q}$ (défini plus haut).*

Le principe de la démonstration est le suivant: on fixe d'abord p, q très grands (vérifiant $p - q = m$) et on note $\mathscr{W}'_{p,q}$ l'image de $\mathscr{V}$ dans la correspondance de Howe (cf. III.5). On montre alors que l'on a:

$$\mathscr{W}'_{p,q} \text{ a } W_{p,q} \text{ comme } K'\text{-type minimal.} \tag{7}$$

(7) se démontre comme II.12, à condition de généraliser II.13 à notre cas,

en tenant compte que les entiers p_i, q_i relatifs à V (le K-type minimal de $\mathscr{V}$) ne coïncident pas avec ceux relatifs à $W_{p,q}$. Mais ici puisque $\inf(p, q) > 2n$, tous les K'-types de $\mathscr{W}'_{p,q}$ sont paramétrisés par des éléments de la forme $(, ...,)_+ ; (, ...,)_+$, en particulier on ne se trouve jamais dans le cas de II.13(c), et les entiers relatifs à $W_{p,q}$ ne diffèrent pas trop de ceux associés à V; ceci rend la généralisation facile. On sait d'après ce qui suit (5), quel est le parabolique cuspidal associé à $\mathscr{W}'_{p,q}$. On note $\mathscr{W}'_0$ l'élément de $Hch_{O(2p_0, 2q_0)}$ ayant W_{p_0,q_0} comme $O(2p_0) \times O(2q_0)$-type minimal et même données de Langlands que $\mathscr{W}'_{p,q}$ sauf tout ce qui se passe avec les facteurs de type $GL(1)$, qui disparaissent. Une généralisation très facile de III.4 et III.10(1) (dans la preuve) montrent que $\mathscr{W}'_0$ est quotient de la représentation métaplectique pour la paire $Sp(2n)$, $O(2p_0, 2q_0)$. On note $\mathscr{V}'$ son image réciproque par la correspondance de Howe. Le point difficile est de démontrer que:

- *V est un K-type minimal de $\mathscr{V}'$.* (8)

Admettons (8) pour le moment et terminons la preuve. Il n'y a qu'un élément de Hch_{Sp} ayant V comme K-type minimal (cf. [V_1] 5.2 où dans notre cas I est un tore) et donc $\mathscr{V}' = \mathscr{V}$. Avec I.7 on connait le caractère infinitésimal de $\mathscr{W}'_0$, il coïncide avec celui de $\mathscr{W}_{p_0,q_0}$ et (5)$'$ donne l'égalité de $\mathscr{W}'_0$ avec $\mathscr{W}_{p_0,q_0}$. Le reste de la proposition résulte donc de IV.6 et IV.5.

Preuve de (8). On fait, ici $p := p_0$, $q := q_0$ et $\mathscr{W} := \mathscr{W}'_0$, $W := W_{p_0,q_0}$. On sait que W est un K'-type minimal de $\mathscr{W}$ vérifiant (†)$'$ et donc de degré minimal (cf. II.3). Ainsi (cf. [H_2, 4.1(c)] $\mathscr{V}'$ contient V comme K-type de degré minimal. On note V' un K-type minimal de $\mathscr{V}'$. On paramétrise:

$V \leftrightarrow (\Lambda_1, ..., \Lambda_n) + p - q$

(il y a une translation par $p - q$, par rapport aux notations du débuts),

$W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_{p'_{r+1}}, 0, ..., 0)_+ ; (\mu_1, ..., \mu_q)_+$

où pour $1 \leqslant j \leqslant q = q'_{r+1} \lambda_j = -\Lambda_{n-j+1}$,

$V' \leftrightarrow (\Lambda'_1, ..., \Lambda'_n) + p - q$.

On note $\bar{p}_i$, $\bar{q}_i$, $\bar{r}$, $\bar{s}$ les entiers associés à V' par II.4 et on garde la notation p_i, q_i pour V, P_i, Q_i, R pour W.

Supposons que $i_1 \neq 0$ et regardons le cas où $q_1 \neq 0$. Ici on a $q_1 = Q_1$ et $p_1 = P_1 = 0$. Grâce à II.3(β) (pour $i = 1$) et I.6, on vérifie que l'on doit avoir $-\Lambda'_n \geqslant -\Lambda_n$. En outre on a $-\Lambda_n + q - p = -\tilde{\Lambda}_n + 1 \geqslant 2$. D'où $\Lambda'_n + p - q \leqslant -2$ et (cf. II.4) nécessairement $\bar{r} \neq 0$. Distinguons encore plusieurs cas:

$\bar{q}_1 = 0$; puisque $q_1 \neq 0$, il faut $\Lambda_1 < \Lambda'_1$ mais on a une contradiction avec II.6.(α) (pour $i = 1$).

$\bar{q}_1 \neq 0$; si $\bar{p}_1 \neq 0$, on trouve une contradiction comme dans le cas précédent. Ainsi $\bar{p}_1 = 0$, la seule possibilité pour ne pas contredire II.6(α) (pour $i = 1$) est $\Lambda'_n = \Lambda_n$.

Si $p_1 \neq 0$, ce qui avec nos hypothèses assure $i_1 \neq 0$, on obtient de la même façon $\bar{p}_1 = p_1$ ($= 1$) et $\Lambda'_1 = \Lambda_1$.

On se ramène maintenant au cas où $i_1 = 0$, i.e. $p'_{r+1} = 0$, $q = n = q'_{r+1}$. Se ramener veut dire qu'on simplifie les notations, mais en fait si on veut travailler plus joliment on peut faire une induction cohomologique [V_3, 6.6] pour être vraiment dans cette situation.

(9) On commence par vérifier que $\Lambda'_1 \leqslant 0$. Le cas contraire assure que $\bar{r} \neq 0$. On a soit $\bar{p}_1 = 1$ et $\bar{q}_1 = 0$, soit $-\Lambda'_n > -\Lambda_n$. L'hypothèse $i_1 = 0$, assure entre autre que $\Lambda_1 \leqslant 0$; ainsi le cas $\bar{q}_1 = 0$ est contradictoire avec II.6(α) (pour $i = 1$), si $\Lambda_1 > 0$. Supposons donc que $\bar{q}_i \neq 0$ et donc $-\Lambda'_n > -\Lambda_n$. Il est encore clair que cela contredit II.6, ici on utilise les égalités $\Lambda'_1 = \cdots = \Lambda'_{\bar{p}_1}$ (vide si $\bar{p}_1 = 0$) et $\Lambda'_{n-\bar{q}_1+1} = \cdots = \Lambda'_n$.

On pose $i^\circ := \inf\{1 \leqslant i \leqslant R \mid Q_{i^\circ} \neq 0\}$. On tire de II.3($\beta$) pour $i = i^\circ$ et de I.5, grâce à (9), que l'on a:

$$-\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant Q_1} \Lambda'_{n-j+1}\right) \geqslant -\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant Q_1} \Lambda_{n-j+1}\right) = -Q_1 \Lambda_n.$$

D'où $\Lambda'_n \leqslant \Lambda_n$. On en déduit d'abord que $\bar{r} \neq 0$, puis on termine comme en (9) mais avec ici la possibilité $\bar{q}_1 = q_1 = 1$ et $\Lambda'_n = \Lambda_n$. On termine la preuve de (8), de proche en proche.

IV.8. *Remarque.* Avec les notations de III.7, le cas où $i_1 = r$ est simple et il n'y a pas de facteurs en $GL(2)$. Comme l'a remarqué Adams, les représentations $\mathscr{W}_{p,q}$ s'expriment très bien à l'aide du foncteur d'induction cohomologique à partir d'un caractère d'une sous-algèbre parabolique complexe de $Sp(2n, \mathbb{C})$. Il n'en est déjà plus de même pour les $\mathscr{W}_{p,q}$ que nous avons introduits. Et il me semble, que certaines séries discrètes de $Sp(2n)$ peuvent avoir comme image dans la correspondance de Howe des représentations contenant un K'-type "presque gentil" i.e. de la forme $(0, ..., 0)_+$; $(1, ..., 1, 0, ..., 0)_+$ ce qui est un peu l'opposé du cas de [A].

IV.9. *Correspondance de Howe pour les séries discrètes de $O(2p, 2q)$ ne vérifiant pas* ($\dagger$)$'$. Soit $\mathscr{W}$ une série discrète pour $O(2p, 2q)$, admettant un K'-type minimal, noté W. On suppose que W ne vérifie pas ($\dagger$)$'$.

Paramétrisons $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon$; $(\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$. Comme W ne vérifie pas ($\dagger$)$'$, on peut par symétrie supposer que l'on a:

$$\varepsilon = -1, \qquad \text{d'où } \lambda_p = 0. \tag{1}$$

On pose $k := \sup\{j \mid \lambda_j > 0\}$. On adopte les notations de II.2. Puisque $\mathscr{W}$ est une série discrète, on sait que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ $p_i q_i = 0$. On en déduit qu'il existe i (compris entre 1 et r) tel que $q'_{i+1} = q$ et $q_i \neq 0$; si pour cette valeur de i on a $p'_{i+1}\,(=p'_i) > k$, on vérifie que $q_i > 1$ d'où en fait $p'_{i+1} \leqslant k$. On calcule alors aisément les $\tilde{\lambda}_j$ pour $j > k$ et on trouve $p - j$. Ainsi le paramètre de Harish-Chandra de $\mathscr{W}$ (c'est le $(\tilde{\lambda}; \tilde{\mu})$ de II.2) est de la forme suivante:

$$(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, p-k+1, ..., 0); (\tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_q). \tag{2}$$

Comme il est régulier, on a $\tilde{\mu}_q \geqslant p-k$ et pour simplifier on va supposer que l'on a:

$$\tilde{\mu}_q > p-k \qquad \text{(c'est équivalent à: } \mu_q > 2(p-k)\text{), d'où } \eta = +1. \tag{3}$$

Sans l'hypothèse (3), on a:

$$W \textit{ est un } K'\textit{-type de degré minimal de } \mathscr{W}. \tag{4}$$

La preuve de (4) est reportée en IV.10. On pose: $n_0 := p + q + (p-k)$ et on vérifie à l'aide de I.4, que pour tout $n \geqslant n_0$, W intervient dans les harmoniques; on pose alors $V_n := \Psi^c(W)$. La paramétrisation de V_n est facile à écrire:

$$V_n \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{2(p-k)}, \underbrace{0, .., 0}_{n-n_0}, -\mu_q, ..., -\mu_1) + p - q. \tag{5}$$

On note P_i, Q_i, R, s les entiers relatifs à V_n définis en II.4, et p_i, q_i, r, p', q' les entiers associés à W par II.2. On a, puisque $\mathscr{W}$ est une série discrète: $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$, $p_i + q_i = 1$, et $p' = 1$, (c'est l'hypothèse $\lambda_p = 0$), $q' = 0$. Avec l'hypothèse (3), on obtient:

$$R = r+1,\ 1 \leqslant i \leqslant r,\ p_i = P_i,\ q_i = Q_i,\ P_{r+1} = 1,\ Q_{r+1} = 0,$$

$$s = n - (p+q) = n - n_0 + p - k.$$

Soit $\mathscr{V}'$ un élément de Hch_{Sp} admettant V_n comme K-type minimal. Il est facile d'écrire la partie des données de Langlands qui lui sont attachées et qui dépendent de V_n (cf. V_2, 6 § 5 déjà utilisé en III.3). Plus précisément $\mathscr{V}'$ est un sous-quotient de Langlands d'une induite à partir d'un parabolique, noté $P = MAN$, et d'une représentation $\delta \otimes v$ de MA (prolongée trivialement à N) où δ est une série discrète de M et v un caractère de A, dit le paramètre continu; et on a:

- $MA \simeq \underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{n-(p+q)} \times Sp(2(p+q))$,

- $\delta \otimes \nu$ est le produit tensoriel des représentations suivantes:
- $(\delta_1 \otimes \nu_1)$:

$$GL(1) \times \cdots \times GL(1) \ni t_1, ..., t_{n-(p+q)} \mapsto |t_1|^{z_1} \cdots |t_{n-(p+q)}|^{z_{n-(p+q)}}$$
$$\times \operatorname{signe}(t_1 \cdots t_{p-k})^{1+p-q} \operatorname{signe}(t_{p-k+1} \cdots t_{n-p-q})^{p-q},$$

où $z_1, ..., z_{n-(p+q)}$ sont des nombres complexes dépendant de ν et non déterminés par V_n.

- δ: la série discrète de $Sp(2(p+q))$ de paramètre de Harish-Chandra $(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k,\ p-k, ..., 1,\ -\tilde{\mu}_q, ..., -\tilde{\mu}_1)$. (Ici on utilise encore l'hypotèse (3), pour que δ soit bien définie.)

Pour n fixé supérieur ou égal à n_0, on définit $\mathscr{V}_n \in Hch_{Sp}$ en disant que $\mathscr{V}_n$ est l'élément de Hch_{Sp} admettant V_n comme K-type minimal et (avec les notations précédentes) ayant un paramètre continu tel que:

$$\begin{aligned} &\forall 1 \leqslant j \leqslant p-k, && z_j = j-1, \\ &\forall p-k < j \leqslant n-(p+q), && z_j = j. \end{aligned} \tag{6}$$

Remarquons qu'il est ici immédiat que $\mathscr{V}_{n_0}$ est l'unique élément de Hch_{Sp} admettant V_n comme K-type minimal et ayant comme caractère infinitésimal:

$$(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, p-k-1, ..., 0, \tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_q, 1, ..., n_0-(p+q)\ (=p-k)) \tag{7}$$

(cf. I.7 pour l'identification d'un caractère infinitésimal). On peut maintenant énoncer la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soit $\mathscr{W}$ une série discrète ne vérifiant pas $(\dagger)'$ et vérifiant (3). Alors on a*:

$\mathscr{W}$ est dans l'image de la correspondance de Howe si et seulement si $n \geqslant 2p-k+q\ (=n_0)$ et si cette situation est réalisée, $\mathscr{W}$ correspond à $\mathscr{V}_n$ (défini en (6)).

La preuve de cette proposition est symétrique de celle de la proposition de IV.7(6). On fixe d'abord n grand tel que $\mathscr{W}$ soit dans l'image de la correspondance de Howe et on pose $\mathscr{V}'_n := \Psi_{n,p,q}(\mathscr{W})$. On démontrera en IV.10, le résultat suivant:

$$\mathscr{V}'_n \text{ admet } V_n \text{ comme } K\text{-type minimal.} \tag{8}$$

Admettant cela, on a des indications sur $\mathscr{V}'_n$ grâce à ce qui précède (6). On note $\mathscr{V}'_0$ l'élément de $Hch_{Sp(2n_0)}$ ayant comme $U(n_0)$-type minimal V_{n_0} et les mêmes données de Langlands que $\mathscr{V}'_n$ sauf les $n-n_0$ derniers facteurs en $GL(1)$. Une généralisation facile de III.4 montre comme en III.10(1) que

$\mathscr{V}'_0$ est quotient de la représentation métaplectique et on note $\mathscr{W}'$ son image. Tenant compte de (8), comme dans la preuve de la proposition de IV.7, il suffit de démontrer que:

$$\mathscr{W}' \text{ admet } W \text{ comme } K'\text{-type minimal.} \tag{9}$$

On reporte la preuve de IV.9(9) en IV.10 et cela termine la démonstration.

IV.10. *Preuve de* IV.9(4), (8) *et* (9). On commence par la preuve de IV.9(4) et (8) qui se fait simultanément. On fixe n suffisamment grand pour que W intervienne dans les harmoniques (i.e., $n \geqslant n_0$) et pour que $\mathscr{W}$ soit dans l'image de la correspondance de Howe. On adopte les notations $\mathscr{W}'_n$, $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_k, 0, ..., 0)_-$; $(\mu_1, ..., \mu_q)_+$ de IV.9. On pose ici, $V := \Psi^c(W)$, $\mathscr{V}' := \mathscr{V}'_n$.

La preuve consiste à montrer d'abord que V est un K-type de $\mathscr{V}'$ puis de montrer que V en est un K-type minimal; ensuite on sait que V est de degré minimal, car il vérifie (†) (on a calculé les entiers qui lui sont associés). Il en résulte alors que W est de degré minimal (cf. [H_2, 4.1(c)]). On sait a priori (cf. I.6) que $\mathscr{V}'$ contient un K-type, noté $X \otimes \det^{p-q}$ (ou V') où $X \leftrightarrow (x_1, ..., x_n)$ est sous-module d'un certain produit tensoriel et vérifie les inégalités suivantes (cf. I.6):

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant k, \qquad 0 \leqslant x_j \leqslant \lambda_j, \tag{1}$$

$$\forall k < j \leqslant 2p-k, \qquad 0 \leqslant x_j \leqslant 1, \tag{2}$$

$$\forall 2p-k < j \leqslant n-q, \qquad x_j = 0, \tag{3}$$

$$\forall n-q < j \leqslant n, \qquad -\mu_{n-j+1} \leqslant x_j \leqslant 0. \tag{4}$$

On pose $k' := \sup\{j \mid x_j > 0\}$, $v' := \sup\{j \mid x_{n-j+1} < 0\}$.

Utilisant encore I.6, on sait maintenant que $\mathscr{W}$ contient un K'-type, noté W', inclus dans la représentation irréductible de $U(2p) \times U(2q)$:

$$(x_1, ..., x_{k'}, 0, ..., 0) \times (0, ..., 0, x_{n-v'+1}, ..., x_n).$$

On paramètrise $W' \leftrightarrow (\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_{\varepsilon'}$; $(\mu'_1, ..., \mu'_q)_{\eta'}$. Et on a encore les inégalités suivantes (cf. I.6): (ce ne sont pas les meilleures inégalités possibles)

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant p, \qquad \sum_{1 \leqslant j' \leqslant j} (\lambda'_{j'} - x_{j'}) \leqslant 0, \tag{5}$$

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant q, \qquad \sum_{1 \leqslant j' \leqslant j} (\mu'_{j'} + x_{n-j'+1}) \leqslant 0. \tag{6}$$

Grâce à II.3(β), on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} (\lambda_j - x_j) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} (\mu_j - \mu'_j) \leqslant 0. \tag{7}$$

De (7), (5) et (6), on obtient:

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad \sum_{1 \leqslant j \leqslant p'_{i+1}} (\lambda_j - x_j) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q'_{i+1}} (\mu_j + x_{n-j+1}) \leqslant 0.$$

Comme il existe i° compris entre 1 et r (au sens large) (cf. IV.9, ce qui suit (3)) tel que l'on ait: $p'_{i^\circ+1} = k$ et $q'_{i^\circ+1} = q$, en utilisant (1) et (4), on obtient:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= x_j && \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant k, \\ \mu_j &= -x_{n-j+1} && \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant q. \end{aligned} \tag{8}$$

Au passage, on a aussi montré que l'on a:

$$\lambda'_j = \lambda_j \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant q \qquad \text{et} \qquad \mu'_j = \mu_j \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant k.$$

De [V_2, 6.5.9(d)], il résulte alors que $\lambda'_j = 0$ pour tout $k < j \leqslant p$ (c'est la structure très particulière des K'-types d'une série discrète que l'on utilise ici). Ainsi W' est un K'-type minimal de $\mathscr{W}$. Par unicité du K'-type dans $\mathscr{W}$, on a $W' = W$. De plus (cf. I.5) on a $d^\circ V' \geqslant d^\circ W' = d^\circ(W)$ et clairement (cf. (2) et (8)) on a $d^\circ V' \leqslant d^\circ W$. D'où l'égalité $d^\circ V' = d^\circ W$, égalité qui force en plus: $x_j = 1$ pour tout $k < j \leqslant 2p - k$, i.e., $V' = V$.

Il faut maintenant démontrer que V est un K-type minimal de $\mathscr{V}'$. On fixe V' un K-type minimal et de degré minimal de $\mathscr{V}'$ (cf. IV.2).

$$V' \leftrightarrow (x'_1, ..., x'_n) + (p - q).$$

On pose ici $W' := \Phi^c(V') \leftrightarrow (\lambda'_1, ..., \lambda'_p)_{\varepsilon'}; (\mu'_1, ..., \mu'_q)_{\eta'}$. C'est un K'-type de $\mathscr{W}$. On va démontrer que $W' = W$. Remarquons que l'on cherche à démontrer que $\mathscr{V}_n = \mathscr{V}'$; or par un calcul de R-groupe, on vérifie que V est l'unique K-type minimal de $\mathscr{V}'_n$. Cela justifie le fait que l'on cherche à démontrer que $W' = W$.

Pour démontrer cela, on procède comme dans la preuve de IV.7(8) obtenant les égalités suivantes:

$$1 \leqslant j \leqslant k,\ \lambda'_j = \lambda_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant q,\ \mu'_j = \mu_j. \tag{9}$$

On obtient ensuite l'égalité de W' et de W en utilisant la structure particulière des K'-types des séries discrètes (cf. [V_2, 6.5.9(e)]).

Preuve de IV.9(9). On procède comme pour prouver IV.7(8); on note ici W' un K'-type minimal de $\mathscr{W}'$. On commence par vérifier que W est un K'-type de $\mathscr{W}'$ ce qui résulte de ce que V_{n_0} est un $U(n_0)$-type minimal de $\mathscr{V}'_0$ vérifiant (†) et donc de degré minimal (cf. II.6) et de ce que

$W = \Phi^c(V_{n_0})$. On obtient ensuite, dans cette nouvelle situation, les égalités (9). Les égalités suivantes:

$$k < j \leqslant p, \qquad \lambda'_j = 0 = \lambda_j,$$

résultent de la définition même de minimalité, sachant que W est un K'-type de $\mathscr{W}'$. Il reste à vérifier que $\varepsilon' = -1$, ce qui résulte de ce que W est de degré minimal (cf. I.3).

IV.11. *Conjectures.* Commençons par un cas simple: Soit $\mathscr{W} \in Hch_O$. On note W un K'-type minimal de $\mathscr{W}$ et on suppose que W est de la forme suivante:

$$W \leftrightarrow (0, ..., 0)_- ; \, (\underbrace{1, ..., 1,}_{w} 0, ..., 0)_\eta \qquad \text{où } 0 \leqslant w \leqslant q.$$

On suppose en outre que $p \geqslant q$. Un tel K'-type ne vérifie pas (†)′. On vérifie aisément que les données de Langlands attachées à $\mathscr{W}$ sont un parabolique cuspidal $P := M'A'N'$ avec:

- $M'A' \simeq \underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{2q} \times O(2q - 2q)$,

- une série discrète de M' qui est multiple de la représentation det sur $O(2p - 2q)$, et on note $\delta' \otimes \nu'$ la représentation de $M'A'$ attachée à $\mathscr{W}$.

On note y_1 le plus grand entier tel que $\delta' \otimes \nu'$ soit sur y_1 facteurs du type

$$GL(1)\colon t_1, ..., t_{y_1} \mapsto |t_1|^{p-q} \cdots |t_{y_1}|^{p-q+y_1-1}$$
$$(\text{on a: } y_1 \leqslant (1+\eta)(q-w)+w). \tag{1}$$

CONJECTURE 1. $n(\mathscr{W}) = p + q + p - q + y_1 \, (= 2p + y_1)$ *et pour tout* $n \geqslant 2p + y_1$, *l'image réciproque de* $\mathscr{W}$ *par la correspondance de Howe, notée* $\mathscr{V}$, *a pour K-type minimal*:

$$V \leftrightarrow (\underbrace{1, ..., 1,}_{z_+} \underbrace{0, ..., 0,}_{z_0} \underbrace{-1, ..., -1}_{z_-}) + p - q,$$

$$\textit{où } z_+ := 2p + y_1 - ((1+\eta)(q-w)+w),$$

$z_0 := 2p - y_1 + (1+\eta)(q-w) + w - y_1$ *et* $z_- := y_1$. *Ainsi* $\mathscr{V}$ *est sous-quotient de Langlands à partir d'un parabolique cuspidal dont la classe de conjugaison de ses sous-groupes de Levi est isomorphe à*:

$$\underbrace{GL(1) \times \cdots \times GL(1)}_{z_1} \times \underbrace{GL(2) \times \cdots \times GL(2)}_{z_2} \times Sp(2p-2q),$$

$$\textit{où } z_2 := y_1 \textit{ et } z_1 = n - p + q - 2y_1.$$

On note $\delta \otimes v$ la représentation attachée à $\mathscr{V}$ et on a:
$\delta \otimes v$ est le produit tensoriel des représentations suivantes:

- *sur $n-2p-y_1$ facteurs de type $GL(1)$:* $t_1, ..., t_{n-2p-y_1} \mapsto \prod_{1 \leqslant j \leqslant n-2p-y_1} |t_j|^{p-q+y_1+j}$ signe t_j^{p-q},
- *sur $2q-y_1$ facteurs de type $GL(1)$ le caractère défini par $\delta' \otimes v'$ sur les $2q-y_1$ facteurs qui n'interviennent pas en* (1),
- *sur $p-q$ facteurs de type $GL(1)$ le caractère:* $t_1, ..., t_{p-q} \mapsto \prod_{1 \leqslant j \leqslant p-q} |t_j|^{j-1}$ signe t_j^{1+p-q},
- *sur les facteurs de type $GL(2)$, le produit tensoriel des séries discrètes de paramètre de Harish-Chandra* 1 *et de caractère central* $2(p-q+j-1)+1$ *(quand j varie de* 1 *à $p-q$),*
- *la série discrète de paramètre de Harish-Chandra:* $(p-q, ..., 1)$ *sur* $Sp(2p-2q)$.

Un cas particulier de cette conjecture est le cas où $\mathscr{W}$ est le caractère non trivial de $O(2p, 2q)$, noté det. Dans ce cas il est facile de vérifier que $n(\mathscr{W}) = 2p+2q$: $\mathscr{W}$ ayant un unique K'-type, l'a nécessairement en degré minimal et on obtient $n(\mathscr{W}) \geqslant 2p+2q$; supposant $n = 2p+2q$, on construit une application de la représentation métaplectique dans un modèle de Schrödinger sur la représentation det grâce à l'opérateur: $f \mapsto \Delta(f)(0)$ où Δ est le déterminant de la matrice $(\partial/\partial(x_{-i} \otimes y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2p+2q}$ avec (x_{-i}) une base de l'espace Lagrangien de l'espace symplectique et (y_j) une base de l'espace orthogonal. Dans ce cas on vérifie donc facilement la première partie de la conjecture, i.e., le calcul de V, mais par contre celui du caractère continu de l'image réciproque de det par la correspondance de Howe est plus difficile et je ne l'ai pas fait. Remarquons que si la conjecture pour $\mathscr{W} := \det$ est vraie, elle l'est pour "presque tous" les éléments de Hch_O du type considéré (i.e. le paramètre continu générique hormis les conditions imposées).

Plus généralement, soit $\mathscr{W} \in Hch_O$ et supposons que $\mathscr{W}$ ne vérifie pas $(\dagger)'$. Soit W un K'-type minimal de $\mathscr{W}$. On paramétrise $W \leftrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_p)_\varepsilon$; $(\mu_1, ..., \mu_q)_\eta$ et on pose $k := \sup\{j \mid \lambda_j > 0\}$. On adopte les notations de II.2 relativement à W. Par symétrie on suppose que $\varepsilon = -1$ et donc $k \leqslant p'_{r+1}$ (car W ne vérifie pas $(\dagger)'$). Avec cette hypothèse:

CONJECTURE 2. *Si $k = p'_{r+1}$, on note n° le plus petit entier tel que $\mathscr{W} \otimes \det$ vérifie $(*)'$ (cf. III.1) et on a $n(\mathscr{W}) = p+q+n^\circ$, $n(\mathscr{W} \otimes \det) = n^\circ$. On pourrait alors décrire l'image réciproque de $\mathscr{W}$ par la correspondance de Howe dès que $n > n(\mathscr{W})$ de façon très similaire à la conjecture* 1 *(avec ici $y_1 := p+q-n^\circ$).*

CONJECTURE 3. *On suppose ici que $n \geqslant n(\mathscr{W})$ et on note $\mathscr{V}$ l'élément de*

Hch_{Sp} correspondant à $\mathscr{W}$. On note aussi $H(K')_W$ la composante isotypique de $H(K')$, les harmoniques pour K' (cf. [H_1]*), alors $\mathscr{V}$ admet comme K-type minimal un sous-K-module irréductible de $H(K')_W$.*

La conjecture 3a une version symétrique en remplaçant $O(2p, 2q)$ par $Sp(2n)$. Mais alors que j'ai un candidat pour préciser le K-type minimal dans la conjecture 3 (il est un peu technique à écrire) et donc pour $n(\mathscr{W})$ et décrire $\mathscr{V}$, je n'en ai pas dans la version symétrique.

BIBLIOGRAPHIE

[A] J. A. ADAMS, Discrete spectrum of the reductive dual pair, *Invent. Math.* **74** (1983). 449–475.

[A_2] J. D. ADAMS, *L*-functoriality for dual pairs, A paraitre aux comptes rendus de la période spéciale "orbites unipotentes..," Paris, juin/juillet, 1987.

[C] J. CARMONA, Sur la classification des modules admissibles irréductibles, *in* "Non Commutative Harmonci Analysis and Lie Groups," Comptes rendus Marseille, Luminy, 1982, LN 1020, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo.

[Co] M. COGNET, Représentation de Weil et changement de base quadratique dans le cas archimédien, II, *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), 325–354.

[H_1] R. HOWE, Remarks on classical invariant theory, prépublication.

[H_2] R. HOWE, Transcending classical invariant theory, prépublication.

[K-V] M. KASHIWARA AND M. VERGNE, On the Segal–Shale–Weil representations and harmonic polynomials, *Inv. Math.* **44** (1978), 1–47.

[K] S. KUDLA, On the local theta correspondence, *Inv. Math.* **83** (1986), 229–255.

[R] S. RALLIS, On the Howe duality conjecture, *Compositio Math.* **51** (1984), 469–515.

[R-S] S. RALLIS AND G. SHIFFMANN, Discrete spectrum of Weil representation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 267–270.

[Vi] M. F. VIGNERAS, "Correspondance de Howe et induction," LN 1291, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1987.

[V_1] D. A. VOGAN, The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups I, *Ann. of Math.* **109** (1979), 1–60.

[V_2] D. A. VOGAN, Representations of real reductive Lie groups, *in* "Progress in Math.," Vol. 15, Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart, 1981.

[V_3] D. A. VOGAN, The unitary dual of $GL(n)$ over an archimedean field, *Inv. Math.* **83** (1986), 449–505.

[V-Z] D. A. VOGAN AND G. J. ZUCKERMAN, Unitary representations with non-zero cohomology, *Composito Math.* **53** (1984), 51–90.

[W] J. L. WALDSPURGER, "Représentation métaplectique et conjecture de Howe," LN 1291, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1987.