JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **44**, 174–211 (1981)

Diffusions conditionnelles. I. Hypoellipticité partielle

JEAN-MICHEL BISMUT

Département de mathématiques, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

ET

DOMINIQUE MICHEL

Laboratoire associé au CNRS No. 213, Université Paris VI, Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

Communicated by the Editors

Received June 1981

This paper is devoted to the proof of certain results on conditional diffusions. By using the Malliavin calculus of variations, it is shown that, under minimal conditions on the vectors fields which define a two component diffusion (x_t, z_t) and their Lie brackets, a.s., for any $T \geqslant 0$, the conditional law of x_t $(t > 0)$, given $\mathscr{B}(z_s, s \leqslant T)$ has a C^∞ density.

L'objet de cet article est de démontrer des résultats sur la structure des diffusions conditionnelles.

Considérons le système d'équations différentielles stochastiques:

$$\begin{aligned}
dx &= X_0(x, z)\,dt + \sum_{i=1}^{m} X_i(x, z)\,dw^i + \sum_{j=1}^{d} \tilde{X}_j(x, z)(d\tilde{w}^j + l^j(x, z)\,dt),\\
x(0) &= x_0,\\
dz &= Z_0(z)\,dt + \sum_{j=1}^{d} Z_j(z)(d\tilde{w}^j + l^j(x, z)\,dt),\\
z(0) &= z_0,
\end{aligned} \tag{0.1}$$

où $w = (w^1 \cdots w^m)$ et $w = (\tilde{w}^1, ..., \tilde{w}^d)$ sont des mouvements browniens indépendants, où $X_0(x, z), ..., X_m(x, z)$, $\tilde{X}_1(x, z) \cdots \tilde{X}_d(x, z)$, $Z_0(z) \cdots Z_d(z)$ sont des champs de vecteurs suffisamment réguliers et $l^1(x, z) \cdots l^d(x, z)$ sont des fonctions suffisamment régulières.

0022-1236/81/140174–38\$02.00/0

Dans (0.1), $x_t \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, et $z_t \in \mathbb{R}^p$ est l'observation.

En utilisant les désintégrations régulières de mesures de Schwartz [17], on sait qu'il est possible de construire un processus continu τ_T^z à valeurs dans l'espace Π^n des mesures de probabilité sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ tel que pour tout T, τ_T^z est la loi conditionnelle de x relativement à la tribu $\mathscr{B}(z_s, s \leqslant T)^+$.

Dans cet article, nous allons chercher à réaliser certains objectifs énoncés dans le livre de Stratonovitch [22], en étudiant aussi complètement que possible le processus τ_T^z. Les principales questions auxquelles nous répondrons sont les suivantes:

1. *Étude de la régularité des lois de x_t pour la mesure τ_T^z*

Pour une diffusion classique, on dispose en principle de trois techniques pour étudier la régularité de la solution fondamentale de l'équation de Fokker–Planck associée:

(a) Dans le cas elliptique, on peut utiliser les résultats classiques sur les équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre et leurs extensions analytiques et probabilistes (voir par exemple Stroock et Varadhan [24]).

(b) Dans le cas hypoelliptique, on peut aussi utiliser le Théorème de Hörmander [11] qui donne des conditions de rang sur les vecteurs engendrant la diffusion et leurs crochets de Lie pour que la solution fondamentale soit régulière.

(c) Dans le cas hypoelliptique, les techniques de calcul des variations stochastique développées par Malliavin dans deux articles fondamentaux [14, 15] donnent une autre technique pour résoudre le problème de régularité sous les hypothèses de (b).

Dans [18, 19], Michel a utilisé la présentation de Stroock [23] du calcul de Malliavin pour obtenir des conditions sous lesquelles p.s., pour tout T, la loi de x_T pour τ_T^z est donnée par une densité suffisamment régulière. On considère en effet l'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck $\mathscr{A}$ qui opère comme opérateur auto-adjoint sur l'espace des variables aléatoires de carré intégrable qui sont w-mesurables et on l'étend comme opérateur auto-adjoint à l'espace L_2 tout entier. La difficulté technique essentielle est alors de montrer que certaines intégrales stochastiques relativement à $\tilde{w}$ sont dans le domaine de $\mathscr{A}$. On obtient alors dans [18, 19] une formule d'intégration par parties conditionnelle.

Une approche différente du calcul de Malliavin a été proposée par Bismut dans [4, 5]. Elle repose essentiellement sur une utilisation adéquate de la formule de Girsanov [24] qui permet d'obtenir de manière directe les formules d'intégration par parties. Cette technique est étroitement liée à des résultats de représentation de martingales de Haussmann [10].

Dans les sections 1 et 2 de ce travail, on utilise les techniques de Bismut [4, 5] pour obtenir une formule d'intégration par parties conditionnelle et des résultats de régularité pour les lois de x_t pour τ_T^z. Cette formule s'obtient comme une conséquence immédiate de la formule générale d'intégration par parties non conditionnelle, l'observation apparaissant comme un paramètre fixé pendant tout le calcul.

En utilisant un résultat de Malliavin [15] et Ikeda et Watanabe [12] sous une forme un peu modifiée, on montre en particulier au Théorème 2.13 que si le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(X_1(x_0, z_0), 0) \cdots (X_m(x_0, z_0), 0)$ et tous les crochets de Lie au point (x_0, z_0) de $(X_1, 0) \cdots (X_m, 0)$, $(\tilde{X}_1, Z_1) \cdots (\tilde{X}_d, Z_d)$ où apparaît au moins une fois l'un des champs $(X_1, 0) \cdots (X_m, 0)$ est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier, alors p.s., pour tout $T \geqslant 0$, $t > 0$, la loi de x_t pour τ_T^z est de la forme $q_{t,T}^z(x)\,dx$ où $q_{t,T}^z(x)$ est continue en (t, T, x), C^∞ en x à dérivées en x continues en (t, T, x).

La condition donnée est probablement la "meilleure." En effet dans le cas—sans intérêt "pratique"—où $l^1 = \cdots l^d = 0$ et où les filtrations engendrées par z et $\tilde{w}$ sont identiques, conditionner par z_s $(0 \leqslant s \leqslant T)$ revient à geler $\tilde{w}_s$ $(0 \leqslant s \leqslant T)$ et z_s $(0 \leqslant s \leqslant T)$. Heuristiquement x_t est alors une diffusion généralisée (ce n'est en général pas une semi-martingale!); le "drift" est $X_0(x, z) + \sum_{j=1}^d \tilde{X}_j(x, z)(d\tilde{w}^j/dt)$ et le terme de diffusion s'écrit $\sum_{i=1}^m X_i(x, z)\,dw^i$. On voit alors que la condition est une extension "naturelle" de l'hypothèse de Hörmander [11] pour le cas non conditionné.

Pour mieux comprendre la nature probabiliste du résultat, considérons le système (0.1) avec $X_1 = X_2 \cdots = X_m = 0$, $l^1 = l^2 \cdots l^d = 0$. En utilisant les résultats de Malliavin [14] et Bismut [1–3], si $\tilde{\omega}$ est la trajectoire de $\tilde{w}$, on peut associer à ce système un flot continu de difféomorphismes $\psi_t(\tilde{\omega}, \cdot)$. Si $y_t = (x_t, z_t)$ est solution de (0.1), on montre, en utilisant la formule de Ito et Stratanovitch généralisée de Bismut [1–3] que si $\bar{y}_t = \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, y_t)$, alors $\bar{y}_t$ est une diffusion telle que

$$\begin{aligned} d\bar{y} &= (\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, \cdot)\, Y_i)(\bar{y}_t)\, dw^i \\ \bar{y}(0) &= (x_0, z_0), \qquad \text{où } Y_i = (X_i, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant m. \end{aligned} \tag{0.2}$$

En fixant $\tilde{\omega}$, on obtient ainsi une équation différentielle stochastique classique où le seul aléa est $\omega = (w.)$.

(a) Dans le cas partiellement elliptique, i.e., si $X_1(x_0, z_0) \cdots X_m(x_0, z_0)$ engendrent tout $\mathbb{R}^n$, on peut appliquer à (0.2) les résultats de Malliavin [15] ou des résultats classiques sur les équations elliptiques pour obtenir un résultat du type du Théorème 2.13 dans le cas où $l^1 = \cdots l^d = 0$.

(b) Dans le cas général où l'hypothèse du Théorème 2.13 est vérifiée, la dépendance en t des champs $(\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .Y_i))$ est essentielle, et la structure probabiliste de l'observation z devient cruciale. On ne peut donc plus utiliser de résultats "classiques" même dans le cas où $l^1 = \cdots = l^d = 0$!

Notons que si les champs

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_j(x, z) \\ Z_j(z) \end{pmatrix}$$

commutent, la construction du flot $\psi.(\tilde{\omega}, .)$ devient essentiellement non probabiliste par les résultats de Doss [8] et Sussmann [25], et la formule (0.2) est aussi de caractère non probabiliste (voir Davis [6], Eliott et Kohlmann [9]).

Dans [20, 21] Pardoux a utilisé des équations aux dérivées partielles stochastiques pour étudier le problème de régularité des lois conditionnelles. Il étudie en effet dans le cas partiellement elliptique l'équation du filtrage, qui est une équation aux dérivées partielles stochastique. La partie stochastique de l'équation est traitée comme une perturbation du premier ordre dans une équation parabolique en temps et elliptique en espace. Quand la loi d'entrée de x a une densité, il montre que la loi de x_T pour τ_T^z est suffisamment régulière. Pour étudier la loi de x_t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ pour τ_T^z, il résoud une équation différentielle stochastique backward [21] et montre que pour tout T, p.s. la loi de x_t pour τ_T^z a une densité régulière. Nous améliorons donc les résultats de Pardoux sur trois points.

(a) Nous n'avons pas d'hypothèse d'ellipticité partielle.

(b) Nous n'imposons aucune condition sur la loi d'entrée de x.

(c) Nous pouvons travailler p.s. simultanément en (t, T).

Notons enfin que, même dans le formalisme de Pardoux [20, 21], la théorie des flots nous permet de nous ramener à des équations aux dérivées partielles ordinaires (voir la section 4).

2. *Structure des lois* τ_T^z

En supposant pour simplifier que $d = p$ et que $Z_1(z) \cdots Z_d(z)$ engendrent $\mathbb{R}^d$ en tout point $z \in \mathbb{R}^d$, on montre au Théorème 3.13 que p.s., pour tout $T \geqslant 0$, la loi pour τ_T^z de x_s $(s \leqslant T)$ est la loi d'un processus de Markov fort non homogène. Plus exactement on montre que p.s., pour tout $T \geqslant 0$, la loi pour τ_T^z du processus $\psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, y_t)$ $(t \leqslant T)$ est une diffusion Markovienne non homogène, dont la loi est équivalente à la loi de la diffusion (0.2), et dont on calcule explicitement le générateur infinitésimal. Notons que la flot $\psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, .)$ est naturellement connu pour $t \leqslant T$ quand on conditionne par $\mathscr{B}(z_s, s \leqslant T)$.

La technique utilisée consiste essentiellement à établir une formule d'intégration par parties dans une densité de Girsanov basée sur la formule de changement de variables de Bismut [1–3] et à représenter cette densité de Girsanov en temps que martingale conditionnelle.

Notons que dans [20, 21], pour résoudre le problème du lissage, Pardoux a construit, sous des conditions d'ellipticité partielle et en imposant que x ait une loi d'entrée ayant une densité, une équation aux dérivées partielles backward. Ici, en utilisant la théorie des flots, nous n'avons besoin d'aucune hypothèse puisque la fonction cherchée est construite directement.

3. *Équations aux dérivées partielles du filtrage*

Sous les conditions du Théorème 2.13, on sait que p.s., pour tout $T > 0$, la loi de x_T est de la forme $\bar{q}_T^z(x)\,dx$, où $\bar{q}_T^z(x)$ est continue en (T, x), C^∞ en x et à dérivées continues en (T, x). On montre alors que la loi non normalisée de $\psi_T^{-1}(\tilde{\omega}, y_T)$ pour τ_T^z est solution d'une équation aux dérivées partielles. Sous les hypothèses du théorème 2.13, il n'est en général pas possible de montrer par des techniques "classiques" d'équations aux dérivées partielles qu'elle a effectivement des solutions régulières, puisque la dépendance en temps des coefficients de cette équation est très "irrégulière." Ceci n'est possible que dans le cas "partiellement elliptique," où on peut alors appliquer les techniques de Pardoux [20]. Il semble que là encore, les méthodes de calcul des variations puissent seules fournir les résultats souhaités.

L'article est divisé en quatre sections. Dans la section 1, on examine le problème d'existence et de régularité des lois conditionnelles dans le cas où $l = 0$. Dans la section 2, on examine le même processus dans le cas où l est quelconque, et on construit le processus de prédiction τ_T^z. Dans la Section 3, on calcule la structure du processus de prédiction à partir de certains problèmes de martingale. Enfin dans la section 4, on calcule l'équation du filtrage.

Les résultats donnés ici ont été annoncés dans [28].

1. Diffusions conditionnelles et mouvement Brownien

Dans cette section, on va considérer le système (0.1) avec $l^1 = \cdots l^d = 0$ et démontrer des résultats de régularité des lois conditionnelles de x relativement aux tribus $\mathscr{B}(z_s, s \leqslant T)$. Naturellement, du point de vue de la théorie du filtrage, il s'agit d'un cas "trivial." Les techniques développées dans cette section nous seront toutefois très utiles dans la Section 2, où l n'est pas nécessairement nul.

Dans la paragraphe (a), on définit les principales hypothèses et notations. En (b) on construit les flots de difféomorphismes dont nous nous servirons dans la suite et on énonce un résultat de factorisation de la diffusion (0.1) qui permet de traiter convenablement le problème du conditionnement. Dans le paragraphe (c) on montre rapidement l'existence de densités pour les lois conditionnelles sous des hypothèses d'ellipticité partielle en x du système (0.1). Au paragraphe (d) en suivant Bismut [4], on montre une formule d'intégration par parties conditionnelle, qui explicite les résultats de Michel [18, 19]. En (e) on montre l'existence de densités conditionnelles sous des hypothèses d'hypoellipticité partielle, qui font intervenir les crochets de Lie des champs de vecteurs apparaissant dans (0.1). Enfin en (f), on montre des résultats de régularité sous le même type d'hypothèse.

(a) *Hypothèses et notations*

On note Ω (resp. $\tilde{\Omega}$) l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^m)$ (resp. $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^d)$). Un point de Ω (resp. $\tilde{\Omega}$) est noté ω (resp. $\tilde{\omega}$) et sa trajectoire est notée $w_t = (w_t^1,..., w_t^m)$ (resp. $\tilde{w}_t = (\tilde{w}_t^1,..., \tilde{w}_t^d)$).

On désigne par P (resp. $\tilde{P}$) la mesure Brownienne sur Ω (resp. $\tilde{\Omega}$) avec $P(w_0 = 0) = 1$ (resp. $\tilde{P}(\tilde{w}_0 = 0) = 1$).

Si X_t est un processus stochastique défini sur l'un quelconque des espaces de probabilité considérés, $\mathscr{B}_t^X$ est la tribu $\mathscr{B}(X_s, s \leqslant t)$. $\{\mathscr{B}_{t+}^X\}_{t \geqslant 0}$ désigne la régularisation à droite de la filtration $\{\mathscr{B}_t^X\}_{t \geqslant 0}$, i.e.,

$$\mathscr{B}_{t+}^X = \bigcap_{t' > t} \mathscr{B}_{t'}^X.$$

On note $\{\mathscr{B}_{t+}^{X*}\}_{t \geqslant 0}$ la filtration $\{\mathscr{B}_{t+}^X\}_{t \geqslant 0}$ complétée par les négligeables de $\mathscr{B}_\infty^X$ relativement à la mesure de probabilité qu'on considère. Pour toutes ces opérations, on se réfèrera à Dellacherie et Meyer [7].

Si X_t est une semi-martingale continue définie sur un espace de probabilité filtré, δX_t désigne sa différentielle au sens de Ito, (i.e., sa différentielle au sens de la théorie classique des intégrales stochastiques (voir Meyer [16]) et dX_t sa différentielle au sens de Stratonovitch ([16, p. 354]).

Dans toute la suite on considèrera que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont canoniquement plongés dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. π^1 et π^2 désignent les opérateurs de projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^p$.

$X_0(x, z),..., X_m(x, z)$, $\tilde{X}_1(x, z) \cdots \tilde{X}_d(x, z)$ désignent $m + d + 1$ champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qu'on suppose C^∞, bornés à dérivées de tous les ordres bornées. $Z_0(z)$, $Z_1(z),..., Z_d(z)$ sont $d + 1$ champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, C^∞ bornés à dérivées de tous les ordres bornées.

On définit les champs de vecteurs $Y_0(x, z) \cdots Y_m(x, z)$, $\tilde{Y}_1(x, z) \cdots \tilde{Y}_d(x, z)$, définis sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par les formules

$$\begin{gathered} Y_0(x, z) = \begin{pmatrix} X_0(x, z) \\ Z_0(z) \end{pmatrix}, \qquad Y_k = \begin{pmatrix} X_k(x, z) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m, \\ \tilde{Y}_k(x, z) = \begin{pmatrix} \tilde{X}_k(x, z) \\ Z_k(z) \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant d. \end{gathered} \tag{1.1}$$

(b) *Équations différentielles stochastiques et flots*

Sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{P})$ muni de sa filtration canonique $\{\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}}\}_{t \geqslant 0}$, on considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dz &= Z_0(z)\, dt + Z_j(z)\, d\tilde{w}^j, \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

où z_0 est donné dans $\mathbb{R}^p$. (1.2) a clairement une solution essentiellement unique.

On a alors le résultat de [1, 3]:

THÉORÈME 1.1. *Il existe une application* $h_t(\tilde{\omega}, z_0)$ *définie sur* $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$ *ayant les propriétés suivantes*:

(a) *Pour tout* $(t, z_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$, $h_t(\tilde{\omega}, z_0)$ *est* $\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}*}$*-mesurable*

(b) $\tilde{P}$ *p.s.*, $h_t(\tilde{\omega}, .)$ *est une famille de difféomorphismes* C^∞ *de* $\mathbb{R}^p$ *sur* $\mathbb{R}^p$, *dépendant continûment de* $t \in \mathbb{R}^+$ *pour la topologie de la convergence compacte* C_K^∞.

(c) *Pour tout* $z_0 \in \mathbb{R}^p$, $h_t(\tilde{\omega}, z_0)$ *est la solution essentiellement unique de l'équation différentielle stochastique* (1.2).

Preuve. C'est le théorème 1-2.1 de [1] (voir aussi [2] et [3]). ∎

On va maintenant construire deux flots au dessus du flot $h_t(\tilde{\omega}, .)$ en agrandissant l'espace d'états et l'espace de probabilité.

Sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{P})$ muni de la filtration canonique $\{\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}}\}_{t \geqslant 0}$ on considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx &= X_0(x, z)\, dt + \tilde{X}_j(x, z)\, d\tilde{w}^j, \\ x(0) &= x_0, \\ dz &= Z_0(z)\, dt + Z_j(z)\, d\tilde{w}^j, \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

où (x_0, z_0) est donné dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. (1.3) s'écrit aussi

$$\begin{aligned} dy &= Y_0(y)\, dt + \sum_{j=1}^{d} \tilde{Y}_j(y)\, d\tilde{w}^j, \\ y(0) &= (x_0, z_0). \end{aligned} \tag{1.4}$$

De même, sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$ muni de la filtration canonique $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}}\}_{t \geqslant 0}$, on considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx &= X_0(x, z)\, dt + X_i(x, z)\, dw^i + \tilde{X}_j(x, z)\, d\tilde{w}^j, \\ x(0) &= x_0, \\ dz &= Z_0(z)\, dt + Z_j(z)\, d\tilde{w}^j, \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} dy &= Y_0(y)\, dt + \sum_{i=1}^{m} Y_i(y)\, dw^i + \sum_{i=1}^{d} \tilde{Y}_j(y)\, d\tilde{w}^j, \\ y(0) &= (x_0, z_0). \end{aligned} \tag{1.6}$$

On peut naturellement appliquer le Théorème 1.1 aux systèmes (1.3) et (1.5). On va toutefois le préciser, dans la mesure où les flots associés sont des relèvements du flot $h.(\tilde{\omega}, .)$.

On a en effet

THÉORÈME 1.2. *Il existe une application* $\psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0)$ (*resp.* $\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0)$) *définie sur* $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ (*resp.* $\Omega \times \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$) *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ *telle que*

(a) *pour tout* $(t, x_0, z_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $\psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0)$ (*resp.* $\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0)$) *est* $\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}*}$-*mesurable* (*resp.* $\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}*}$-*measurable*).

(b) $\tilde{P}$ *p.s.* (*resp.* $P \otimes \tilde{P}$ *p.s.*) $\psi_t(\tilde{\omega}, .)$ (*resp.* $\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, .)$) *est une famille de difféomorphismes* C^∞ *de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ *sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, *dépendant continûment de* $t \in \mathbb{R}^+$ *pour la topologie de la convergence compacte* C_K^∞.

(c) $\tilde{P}$ *p.s.* (*resp.* $P \otimes \tilde{P}$ *p.s.*), *pour tout* $(t, x_0, z_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ *on a*

$$\pi^2 \psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0) = h_t(\tilde{\omega}, z_0), \tag{1.7}$$

resp.

$$\pi^2 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0) = h_t(\tilde{\omega}, z_0). \tag{1.8}$$

(d) *Pour tout* $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $\psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0)$ (*resp.* $\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0)$) *est la solution essentiellement unique de l'équation différentielle stochastique* (1.4) (*resp.* (1.6)).

Preuve. Les points (a), (b) et (d) sont des conséquences immédiates du

Théorème 1.1 appliqué aux systèmes (1.4) et (1.6). De plus, du point (d), on tire que pour tout (x_0, z_0), on a

$$\pi^2\psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0) = h_t(\tilde{\omega}, z_0)\, \tilde{P} \text{ p.s.} \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.9}$$

resp.

$$\pi^2\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0) = h_t(\tilde{\omega}, z_0)\, P \otimes \tilde{P} \text{ p.s.} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.10}$$

De la continuité p.s. des deux membres de (1.9) (resp. (1.10)) en (t, x_0, z_0), on tire bien le point (c).

On suppose désormais que sur l'ensemble négligeable de $\tilde{\Omega}$ où le point (b) du Théorème 1.1 n'est pas vérifié, on pose pour tout $(t, z_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$

$$h_t(\tilde{\omega}, z_0) = z_0 \tag{1.11}$$

de telle sorte que la propriété (b) du Théorème 1.1 est vérifiée pour tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$.

On fait de même pour $\psi.(\tilde{\omega}, .)$ et $\varphi.(\omega, \tilde{\omega}, .)$, en imposant de plus que pour tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ (resp. $(\omega, \tilde{\omega}) \in \Omega \times \tilde{\Omega}$), on ait pour tout $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ (1.7) (resp. (1.8)).

Remarquons alors que pour tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ (resp. tout $(\omega, \tilde{\omega}) \in \Omega \times \tilde{\Omega}$), pour $t \in \mathbb{R}^+$, $y_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(\partial\psi_t/\partial y)(\tilde{\omega}, y_0)$ (resp. $(\partial\varphi_t/\partial y)(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$) applique $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, ce qui traduit le fait que l'équation donnant z ne contient pas x. De plus, pour tout $(\omega, \tilde{\omega}) \in \Omega \times \tilde{\Omega}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on a clairement

$$\pi^2\psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0)) = z_0. \tag{1.12}$$

DÉFINITION 1.3. Si f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et si $T(y)$ est un champ de vecteurs à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(f^{*-1}T)(y)$ est le champ de vecteurs défini par

$$(f^{*-1}T)(y) = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y)\right]^{-1} T(f(y)). \tag{1.13}$$

Notons alors que pour tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $(\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)Y_i)(y)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ est un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, i.e., toutes ses composantes suivant $\mathbb{R}^p$ sont nulles.

On a alors le résultat de factorisation suivant:

THÉORÈME 1.4. *Sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$ muni de la filtration canonique $\{\mathscr{B}_{t+}^{w, \tilde{w}*}\}_{t \geqslant 0}$, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, le processus*

$$\bar{y}_t = \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \tag{1.14}$$

est une semi-martingale continue qui est la solution unique de l'équation différentielle stochastique de Stratonovitch

$$d\bar{y} = \psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i(\bar{y})\, dw^i, \qquad y(0) = y_0 \tag{1.15}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} d\bar{y} = {} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_k} (\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_j)(\bar{y}) [\psi_t^{*-1} Y_j(\bar{y})]^k\, dt \\ & + \psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i(\bar{y})\, \delta w^i, \\ \bar{y}(0) = {} & y_0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 4.1 de [3] (voir aussi [2]) à la semi-martingale continue $\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0)$ et au flot $\psi_t(\tilde{\omega}, .)$. ∎

Remarque 1. La nullité des composantes des champs $\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ suivant $\mathbb{R}^p$ est trivialement liée à la relation (1.12).

On va maintenant montrer que pour résoudre l'équation différentielle stochastique (1.15) (ou sa forme équivalente (1.16)), on peut effectivement fixer $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ et résoudre (1.15) sur Ω.

On a en effet

LEMME 1.5. *Soit $H_t(\omega, \tilde{\omega})$ un processus défini sur $\Omega \times \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, qu'on suppose prévisible et localement borné relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_t^w \otimes \mathscr{B}_\infty^{\tilde{w}}\}_{t \geqslant 0}$. Alors il existe une fonction universellement mesurable J sur $\Omega \times \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute mesure de probabilité Q sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$ pour laquelle w est une semi-martingale continue (relativement à la famille de tribus $\{(\mathscr{B}_t^w \otimes \mathscr{B}_\infty^{\tilde{w}})_+\}_{t \geqslant 0}$), $J_t(\omega, \tilde{\omega})$ est une version p.s. continue de l'intégrale stochastique $\int_0^t H_s(\omega, \tilde{\omega})\, \delta w_s$.*

Preuve. C'est le théorème dans Doléans-Dade [26, p. 144] (voir aussi Meyer [27]). ∎

Par le lemme 1.5, on va maintenant préciser l'énoncé du Théorème 1.4. On a en effet:

THÉORÈME 1.6. *Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, si $\bar{y}_t$ est le processus donné par*

$$\bar{y}_t = \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0, z_0)) \tag{1.17}$$

alors $\tilde{P}$ p.s., $\bar{y}_t$ est la solution essentiellement unique sur (Ω, P) muni de la filtration canonique $\{\mathscr{B}_{t+}^{w*}\}_{t\geqslant 0}$ de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} d\bar{y}_t &= \psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i(\bar{y}_t)\, dw^i, \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

qui s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} d\bar{y}_t = {} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_k} [\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_j(\bar{y}_t)][\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_j(\bar{y}_t)]^k\, dt \\ & + \psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i(\bar{y}_t)\, \delta w^i \\ \bar{y}_0 = {} & y_0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Preuve. Par [7, IV, T 78], on peut modifier, à une indistinguabilité près, le processus $\bar{y}_t(\omega, \tilde{\omega})$ sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$ de telle sorte qu'il soit prévisible relativement à la famille de tribus $\{\mathscr{B}_t^{w,\tilde{w}}\}_{t\geqslant 0}$. Alors, pour tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, la mesure $P \otimes \delta_{\tilde{\omega}}$ est telle que w_t est une semi-martingale relativement à la famille de tribus $\{\mathscr{B}_t^{w} \otimes \mathscr{B}_{\infty}^{\tilde{w}}\}_{t\geqslant 0}$. En appliquant le lemme 1.5, on en déduit que $\tilde{P}$ p.s. l'intégrale stochastique $\int_0^t \psi_s^{*-1} Y_i(\bar{y}_s)\, \delta w^i$ est un représentant de l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \psi_s^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i(\bar{y}_s)\, \delta w^i$$

calculée sur Ω en fixant $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$. Or, pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé, l'équation différentielle stochastique (1.19) a au plus une solution au sens de l'unicité essentielle. Le théorème en résulte. ∎

Remarque 2. Du théorème 1.6, on déduit en particulier que $\tilde{P}$ p.s., le problème des martingales au sens de Stroock et Varadhan [24] associé à l'opérateur différentiel du second ordre:

$$\mathscr{L}_t^{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{d} [(\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .))\, Y_i(\bar{y})]^2 \tag{1.20}$$

est bien posé au sens de [24], i.e., a une seule solution pour chaque condition initiale (x_0, z_0). Les informations qu'on possède [1, 2] sur la croissance à l'infini des coefficients de (1.20) sont insuffisantes pour donner un caractère trivial à la non explosion de ces diffusions.

(c) *Le cas partiellement elliptique: existence de densités conditionnelles*

On fait tout d'abord l'hypothèse simplificatrice suivante:

H1: la projection sur $\mathbb{R}^n$ des supports dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de $\tilde{X}_1(x, z) \cdots \tilde{X}_d(x, z)$ est bornée en norme par M.

Soit K tel que pour tout (x, z), on ait $\|X_0(x, z)\| \leqslant K$. Alors il est clair que pour tout $T > 0$, si $\|x_0\| \geqslant M + KT$, pour $t \leqslant T$, $\psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0)$ est donné par la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx &= X_0(x, z)\, dt, \\ x(0) &= x_0, \\ dz &= Z_0(z)\, dt + Z_j(z)\, d\tilde{w}^j, \\ z(0) &= z_0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

$\pi^1 \psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0)$ est donc donné par la solution d'une équation différentielle ordinaire (qui dépend aussi de la variable z). Pour $t \leqslant T$, $\|x_0\| \geqslant M + KT$,

$$\left[\frac{\partial \psi_t}{\partial x}(\tilde{\omega}, x_0, z_0)\right]^{-1}$$

(qui est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dand $\mathbb{R}^n$, puisque l'équation donnant z ne dépend pas de x) est donné par la solution R_t de l'équation différentielle ordinaire:

$$\begin{aligned} dR_t &= -R_t \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_t, z_t)\, dt, \\ R(0) &= I_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

On déduit de (1.22) que pour $t \leqslant T$, $\|x_0\| \geqslant M + KT$,

$$\left[\frac{\partial \psi_t}{\partial x}(\tilde{\omega}, x_0, z_0)\right]^{-1}$$

est uniformément borné. Par continuité, on en déduit que $\tilde{P}$ p.s., pour tout $T \geqslant 0$,

$$\left[\frac{\partial \psi_t}{\partial x}(\tilde{\omega}, x_0, z_0)\right]^{-1}$$

est uniformément borné pour $(t, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. On a le même résultat pour les dérivées

$$\frac{\partial^m \psi_t}{\partial x^m}(\tilde{\omega}, x_0, z_0).$$

On peut naturellement supposer ces propriétés vérifiées pour tout $\tilde{\omega}$. Considérons alors l'équation différentielle stochastique (1.19) (pour (x_0, z_0) donné). Si $\bar{y}_t = (\bar{x}_t, \bar{z}_t)$, avec $\bar{x}_t$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\bar{z}_t$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, on sait par (1.12) et la remarque 1 que $\bar{z}_t = z_0$. Donc, on a

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \left[\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega},.)\, Y_j(\bar{x}, z_0) \right] [\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega},.)\, Y_j(\bar{x}, z_0)]^k \, dt \\ &\quad + \psi_t^{*-1}(\tilde{\omega},.)\, Y_i(\bar{x}, z_0)\, \delta w^i, \qquad (1.23) \\ \bar{x}(0) &= x. \end{aligned}$$

Or par le raisonnement précédent $\tilde{P}$ p.s. $\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega},.)\, Y_i(\bar{x}, z_0)$ et leurs dérivées en $\bar{x}$ sont uniformément bornés pour $(t, \bar{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Donc $\tilde{P}$ p.s., l'équation différentielle stochastique (1.23) a une solution sur (Ω, P) pour tout (x_0, z_0), sans qu'il soit nécessaire d'invoquer un argument probabiliste au sens de la remarque 2. Pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé, l'équation (1.23) est maintenant une équation différentielle stochastique classique.

On fait aussi une second hypothèse simplificatrice:

H 2: $p = d$, et de plus pour tout $z \in \mathbb{R}^p$, les vecteurs $Z_1(z) \cdots Z_p(z)$ engendrent $\mathbb{R}^p$.

L'hypothèse H 2 garantit que dans l'équation (1.5), les filtrations (convenablement complétées) engendrées par $\tilde{w}$ et par z sont identiques.

On fait enfin une troisième hypothèse, qui joue un rôle essentiel, sur (x_0, z_0):

H 3: (x_0, z_0) est tel que $X_1(x_0, z_0),..., X_m(x_0\ z_0)$ engendrent $\mathbb{R}^n$.

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 1.7. *Sous les hypothèses* H 1, H 2, H 3, *si* (x_t, y_t) *est la solution de l'équation différentielle stochastique* (1.5), *alors pour tout* $T > 0$, $\tilde{P}$ *p.s., pour tout* t $(0 < t \leqslant T)$, *la loi conditionnelle de* x_t *relativement à la tribu* $\mathscr{B}^z_{T+}$ *est de la forme* $p_t^{\tilde{\omega}}(x)\, dx$, *où* $p_t^{\tilde{\omega}}(x)$ *est une fonction* $\tilde{P}$ *p.s. continue sur* $]0, T] \times \mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, C^∞ *en* x *à dérivées de tous ordres en* x *continues sur* $]0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Preuve. Grâce à H2, on sait que les filtrations engendrées par z et $\tilde{w}$ sont identiques. Dans l'énoncé du théorème on peut remplacer $\mathscr{B}^z_T$ par $\mathscr{B}^{\tilde{w}}_T$. Or si $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ est donné, par application des résultats de Malliavin [14, 15] sur les équations différentielles stochastiques elliptiques (voir aussi Ikeda et Watanabe [12]) on sait que pour tout $t > 0$, la loi de $\bar{x}_t$ (qui est défini par l'équation (1.23)) est donnée par $q_t^{\tilde{\omega}}(x)\,dx$, où $q_t^{\tilde{\omega}}(x)$ est une fonction continue sur $]0, T] \times \mathbb{R}^n$, C^∞ en x à dérivées de tous ordres en x continues sur $]0, T] \times \mathbb{R}^n$. Comme $x_t = \pi^1 \psi_t(\tilde{\omega}, \bar{x}_t, z_0)$ et comme $\pi^1 \psi_t(\tilde{\omega}, \cdot, z_0)$ est un flot continu de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n R^r$, le théorème est bien démontré.

Remarque 3. Sous les hypothèses H 1, H 2 et H 3 on s'est ramené à un résultat classique sur les équations différentielles stochastiques elliptiques. Notons que dans ce cas, au lieu d'invoquer le résultat de Malliavin [14, 15], on peut utiliser des résultats bien connus sur les équations aux dérivées partielles elliptiques.

Par ailleurs la méthode du théorème 1.7 ne sera pas directement utilisable dans le cas hypoelliptique, puisque dans ce cas [4], la dépendance en t des champs $\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i$ joue un rôle fondamental, et que pour $\tilde{\omega}$ donné, les champs $(\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\, Y_i)(y)$ sont très irréguliers en t. On va donc être amené à utiliser une autre méthode dans le cas général, qui va être d'établir une formule d'intégration par parties partielle généralisant Malliavin [14] et Bismut [4]. Cette formule a été utilisée par Michel dans [19].

(d) *Intégration par parties partielle*

On va tout d'abord énoncer un résultat qui est une conséquence directe de Haussmann [10] et Bismut [4].

Soit $y_0 = (x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ fixé. T est un réel >0. Rappelons tout d'abord que, par un résultat classique (voir [1, théorème I.2.1]), on sait que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et tout m,

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right|,$$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \left[\frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right]^{-1} \right|, \qquad \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right|$$

sont dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$. h désigne alors une application continue bornée sur $\mathscr{C}([0, T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ à valeurs dans $T_{x_0}^* \mathbb{R}^n$ (qu'on peut identifier à $\mathbb{R}^n$!), fortement différentiable et uniformément Lipschitzienne, ou encore à dérivée uniformément bornée. Si $y \in \mathscr{C}([0, T];\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, la différentielle $dh(y)$ peut être identifiée à une mesure $dv^y(t)$ sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$

$$v \in \mathscr{C}([0, T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \to dh(y)(v) = \int_{[0,T]} dv^y(t)(v_t). \tag{1.24}$$

Du point de vue géométrique, $dv^y(t)$ peut être identifié à une application linéaire généralisée de $T_{y_t}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ dans $T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$. En particulier, si $l \in T_{x_0,z_0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, on définit l'action de $\int_0^T \varphi_t^{*-1}\, dv^y(t)$ sur l par

$$\int_0^T [\varphi_t^{*-1}\, dv^y(t)](l) = \int_0^T dv^y(t)\, \varphi_t^*(l) \in T^*_{x_0}(\mathbb{R}^n).$$

Notons que grâce à (1.8), $P \otimes \tilde{P}$ p.s., pour tout $(t, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, comme les composantes suivant $\mathbb{R}^p$ de $Y_1 \cdots Y_m$ sont nulles, les composantes suivant $\mathbb{R}^p$ de $\varphi_t^{*-1} Y_1 \cdots \varphi_t^{*-1} Y_m$ sont nulles, ou encore $\varphi_t^{*-1} Y_1 \cdots \varphi_t^{*-1} Y_m$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Si $l \in T^*_{\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},y_0)}(R^n)$, on note $\varphi_t^{*-1}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) l$ la forme linéaire de $T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$ définie par:

$$Y \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \to \langle \varphi_t^{*-1}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) l, Y\rangle = \langle l, \varphi_t^*(\omega, \tilde{\omega}, y_0) Y\rangle.$$

On pose alors la définition suivante:

DÉFINITION 1.8. On note $C_t(\omega, \tilde{\omega})$ le processus à valeurs dans les applications linéaires de $T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$ dans $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ défini par:

$$p \in T^*_{x_0}(\mathbb{R}^n) \to C_t(\omega, \tilde{\omega})\, p = \sum_{i=1}^m \int_0^t \langle p, \varphi_s^{*-1} Y_i(y_0)\rangle\, \varphi_s^{*-1} Y_i(y_0)\, ds. \tag{1.25}$$

On a trivialement pour $p, q \in T^*_{x_0}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle q, C_t(\omega, \tilde{\omega})\, p\rangle = \sum_{i=1}^m \int_0^t \langle p, \varphi_s^{*-1} Y_i(y_0)\rangle \langle q, \varphi_s^{*-1} Y_i(y_0)\rangle\, ds, \tag{1.26}$$

i.e., $C_t(\omega, \tilde{\omega})$ définit une forme quadratique symétrique positive sur $T^*_{x_0}(\mathbb{R}^n)$. On a alors un résultat qui est une conséquence de Bismut [4].

THÉORÈME 1.9. *Si $f(x)$ est une fonction C^∞ bornée à dérivées de tous ordres bornées définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, si $U(\tilde{\omega})$ est une fonction mesurable bornée définie sur $\tilde{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors on a*:

$$\begin{aligned} E&\left[U(\tilde{\omega}) f(\pi^1 \varphi_T(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \left\langle h(\varphi_\cdot(\omega, \tilde{\omega}, y_0)), \int_0^T \varphi_s^{*-1} Y_i(y_0)\, \delta w^i \right\rangle\right] \\ &= E\left[U(\tilde{\omega}) \langle h(\varphi_\cdot(\omega, \tilde{\omega}, y_0)), C_T(\omega, \tilde{\omega})(\varphi_T^{*-1}\, df\circ\pi^1)(y_0)\rangle\right] \\ &\quad + E\left[U(\tilde{\omega}) f(\pi^1 \varphi_T(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \sum_{i=1}^m \int_0^T \left\langle \varphi_s^{*-1} Y_i(y_0), \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. \int_{]s,T]} [\varphi_v^{*-1}\, dv_{(v)}^{\varphi_\cdot(\omega,\tilde{\omega},y_0)}]\, \varphi_s^{*-1} Y_i(y_0) \right\rangle ds\right]. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Preuve. On peut sans difficulté refaire tout le raisonnement de [4] pour obtenir (1.27). On va en fait l'obtenir comme une conséquence de [4]. Supposons en effet que $U(\tilde{\omega})$ est de la forme

$$U(\tilde{\omega}) = g_1(\tilde{w}_{t_1})\, g_2(\tilde{w}_{t_2}) \cdots g_l(\tilde{w}_{t_l}) \qquad 0 \leqslant t_1 \cdots \leqslant t_l$$

où $g_1 \cdots g_l$ sont des fonctions C^∞ bornées définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, à dérivées de tous ordres bornées. Alors (1.27) est une conséquence immédiate du théorème 3.1 de [4]. On applique alors le théorème des classes monotones pour obtenir le cas général. ∎

Remarque 4. Notons que (1.27) permet d'obtenir une égalité entre espérances conditionnelles relativement à la tribu $\mathscr{B}^{\tilde{w}}_\infty$. Cette formule est une formule d'intégration par parties conditionnelle, qui est en fait une conséquence directe de la formule d'intégration par parties générale de [4, 14].

(e) *Le cas partiellement hypoelliptique: existence de densités conditionnelles*

Dans l'étude de la régularité des semi-groupes associés à des diffusions [14, 15], Malliavin a montré que le point clé pour montrer l'existence de densités ou la régularité du semi-groupe est l'inversibilité p.s. ou l'appartenance à tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ d'une certaine matrice aléatoire.

On va retrouver le même type de problèmes dans l'étude des lois conditionnelles, lié à l'inversibilité de l'opérateur $C_T(\omega, \tilde{\omega})$.

On pose tout d'abord la définition suivante

DÉFINITION 1.10. Si $y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$, on note T'_y le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $Y_1(y) \cdots Y_m(y)$ et par les crochets de Lie en y des champs de vecteurs $Y_i(y)$, $0 \leqslant i \leqslant m$, et $\tilde{Y}_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant d$, où apparaît au moins une fois l'un des champs $Y_1(y) \cdots Y_m(y)$.

Notons que comme les composantes de $Y_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, suivant $\mathbb{R}^p$ sont nulles, T'_y est bien un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

On fait alors l'hypothèse d'hypoellipticité partielle suivante:

$$\text{H 4:}\quad T'_{y_0} \text{ est égal à } \mathbb{R}^n.$$

Le terme "hypoellipticité partielle" n'est évidemment pas encore justifié. Toutefois on peut noter que si dans l'équation (1.5), on considère $\tilde{w}$ comme fixé, alors $X_0(x, z) + \sum_{j=1}^m \tilde{Y}_j(x, z)(d\tilde{w}^j/dt)$ devient le drift généralisé de la diffusion donnant x. L'hypothèse H 4 est exactement le prolongement de l'hypothèse de Hörmander [11] (dans le cas sans observation) qui garantit l'existence de densités C^∞, avec naturellement la difficulté que ce drift se décompose suivant des directions "indépendantes" $dt, d\tilde{w}^1 \cdots d\tilde{w}^m$.

On a alors le résultat suivant qui étend Malliavin [14].

PROPOSITION 1.11. *Sous l'hypothèse* H 4, $P \otimes \tilde{P}$ *p.s. pour tout* $t > 0$ *l'opérateur* $C_t(\omega, \tilde{\omega})$ *est inversible.*

Preuve. On raisonne comme en [4]—Proposition 4.1. Soit U_s le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(\varphi_s^{*-1} Y_i)(y_0)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et V_s le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\bigcup_{s' \leqslant s} U_s$. On pose

$$V_{s+} = \bigcap_{s' > s} V_{s'}. \tag{1.28}$$

Par la loi 0–1, on sait que V_{0+} est un espace vectoriel p.s. constant. Supposons que $V_{0+} \neq R^n$ p.s. Soit S le temps d'arrêt

$$S = \inf\{t > 0;\ V_t \neq V_{0+}\}. \tag{1.29}$$

Alors S est p.s. >0. Soit f un élément non nul de $T_{x_0}^* \mathbb{R}^n$ orthogonal à V_{0+}. Alors on sait qu'on a [4]:

$$\begin{aligned} \varphi_t^{*-1} Y_i(y_0) &= Y_i(y_0) + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[Y_0, Y_i](y_0)\, ds \\ &\quad + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[Y_j, Y_i](y_0)\, dw^j + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[\tilde{Y}_k, Y_i](y_0)\, d\tilde{w}^k. \end{aligned} \tag{1.30}$$

En raisonnant comme en [4], par une application élémentaire du calcul de Ito, on montre très facilement que f est orthogonal à T'_{y_0}. Comme $T'_{y_0} = \mathbb{R}^n$, f est nul. Il y a contradiction. La proposition est démontrée. ∎

Soit ρ une fonction C^∞ définie sur $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée à dérivées bornées, telle que

(a) $0 \leqslant \rho \leqslant 1$,

(b) ρ est égale à 1 sur les éléments inversibles A de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ tels que $\|A^{-1}\| \leqslant M$ $(M > 0)$ et est nulle sur les éléments inversibles A tels que $\|A^{-1}\| \geqslant 2M$ et sur les éléments non inversibles de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

Pour simplifier les notations, on écrit $\varphi_s^{*-1} Y_i$ au lieu de $\varphi_s^{*-1} Y_i(y_0)$ (rappelons que y_0 est fixé). On a alors le résultat suivant, qui étend le théorème 4.2 de [4].

THÉORÈME 1.12. *Soit* $V(x)$ *un champ de vecteurs sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, C^∞ *borné à dérivées de tous ordres bornées. Si* $B_t^{\rho, V}$ *est le processus continu*

$$B_t^{\rho,V} = \rho(C_t) \Bigg\{ \Big\langle \varphi_t^{*-1} V, C_t^{-1} \int_0^t \varphi_s^{*-1} Y_i \,\delta w^i \Big\rangle$$

$$- \int_0^t \langle C_t^{-1} [\varphi_s^{*-1} Y_i, \varphi_t^{*-1} V], \varphi_s^{*-1} Y_i \rangle \, ds$$

$$+ \int_0^t ds \langle C_t^{-1} \varphi_s^{*-1} Y_i, \varphi_t^{*-1} V \rangle \int_0^s \langle C_t^{-1} [\varphi_v^{*-1} Y_j, \varphi_s^{*-1} Y_i], \varphi_v^{*-1} Y_j \rangle \, dv$$

$$+ \int_0^t ds \Big\langle C_t^{-1} \varphi_s^{*-1} Y_i, \int_0^s \langle [\varphi_v^{*-1} Y_j, \varphi_s^{*-1} Y_i], C_t^{-1} \varphi_t^{*-1} V \rangle \varphi_v^{*-1} Y_j \Big\rangle \, dv \Bigg\}$$

$$- \Big\langle \frac{\partial \rho}{\partial C}(C_t), \int_0^t ds \, \varphi_s^{*-1} Y_i \Big\langle \int_0^s [\varphi_v^{*-1} Y_j, \varphi_s^{*-1} Y_i],$$

$$(\langle C_t^{-1} \varphi_t^{*-1} V, \varphi_v^{*-1} Y_j \rangle) \, dv$$

$$+ \int_0^t ds \int_0^s \langle C_t^{-1} \varphi_t^{*-1} V, \varphi_v^{*-1} Y_j \rangle [\varphi_v^{*-1} Y_j, \varphi_s^{*-1} Y_i] \, dv \langle \varphi_s^{*-1} Y_i, . \rangle \quad (1.31)$$

(où dans (1.31), on somme sur les indices $1 \leqslant i, j \leqslant m$), *alors pour tout* $T > 0$ $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |B_t^{\rho,V}|$ *est dans tous les* L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$. *De plus, si f est une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *qu'on suppose* C^∞ *bornée à dérivées de tous ordres bornées, si* $U(\tilde{\omega})$ *est une fonction mesurable bornée sur* $\tilde{\Omega}$ *à valeurs réelles, pour tout* $t > 0$, *on a*

$$E[\rho(C_t(\omega, \tilde{\omega})) \, U(\tilde{\omega})(Vf)(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))]$$
$$= E[U(\tilde{\omega}) \, f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \, B_t^{\rho,V}]. \quad (1.32)$$

Preuve. On sait déjà par[1], théorème I.2.1 que

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right|, \qquad \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \left[\frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right]^{-1} \right|,$$
$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{\partial^m \varphi_t}{\partial y^m}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right|$$

sont dans tous L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$. En notant que $\rho(C_t(\omega, \tilde{\omega}))$ et $(\partial \rho / \partial C)(C_t(\omega, \tilde{\omega}))$ s'annulent dès que $\|C_t^{-1}(\omega, \tilde{\omega})\| \geqslant 2M$ ou que $C_t(\omega, \omega')$ n'est pas inversible, la première partie du théorème est bien démontrée. Pour démontrer l'égalité (1.31) il suffit alors de montrer que la formule (1.27) est applicable à la fonction h définie par

$$h = \rho(C_t(\omega, \tilde{\omega})) \, C_t^{-1} \varphi_t^{*-1} Y.$$

Notons que h n'est pas seulement fonction de la trajectoire $\varphi.(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ comme en (1.27) mais aussi de la trajectoire de $(\partial \varphi / \partial y).(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$. On peut toutefois raisonner exactement comme en [4], Théorème 4.2 pour obtenir une formule du type (1.27) pour un tel h. Le calcul explicite du membre de droite de (1.32) s'effectue exactement comme pour le théorème 4.2 de [4].

On va maintenant désintégrer la formule (1.32).

DÉFINITION 1.13. Si $z_t = \pi^2 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$, on note Q la loi de z sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$. R^z désigne une famille régulière de lois de probabilité conditionnelles sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$ relativement à la tribu $\mathscr{B}^z_\infty$.

$z \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p) \to R^z$ est donc une famille mesurable de lois de probabilité sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$. On note E^{R^z} l'opérateur d'espérance relativement à R^z.

On a alors le résultat élémentaire suivant:

PROPOSITION 1.14. *Q p.s., pour tout $T > 0$,*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right| \quad \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \left[\frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right]^{-1} \right|$$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{\partial^m \varphi_t}{\partial y^m}(\omega, \tilde{\omega}, y_0) \right|$$

sont dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à la mesure R^z.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini.

On en déduit le résultat suivant

THÉORÈME 1.15. *Il existe un Q-négligeable $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ tel que si $z \notin \mathscr{N}$, pour tout $T > 0$, pour tout champ de vecteurs $V(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, C^∞ borné à dérivées bornées, $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |B_t^{\rho, V}|$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à la mesure R^z.*

Preuve. Supposons tout d'abord que $V(x) = (\partial/\partial x^k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Alors par la proposition 1.14, Q p.s. $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |B_t^{\rho, V}|$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à R^z. En écrivant V sous la forme:

$$V(x) = \sum_{k=1}^{n} V^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1.33}$$

où $V^1(x) \cdots V^n(x)$ sont des fonctions C^∞ bornées à dérivées bornées, en utilisant la forme explicite de $B_t^{\rho, V}$, on en tire le résultat.

Remarque 5. En fait pour la suite, nous n'avons besoin du résultat que pour les champs $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$.

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 1.16. *Il existe un Q-négligeable* $\mathcal{N}'$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ *contenant* $\mathcal{N}$ *tel que si* $z \notin \mathcal{N}'$, *pour toute fonction* $f(x)$ *sur* $\mathbb{R}^n$, C^∞ *bornée à dérivées de tous ordres bornées, pour tout* $k = 1 \cdots n$, *pour tout* $t > 0$

$$E^{R^z}\left[\rho(C_t(\omega, \tilde{\omega}))\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f\right)(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\right] = E^{R^z} f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) B_t^{\rho, \partial/\partial x^k}]. \tag{1.34}$$

Preuve. Comme z est $\tilde{w}$-mesurable, de (1.32), on tire que pour tout f vérifiant les hypothèses du théorème, pour $t \in R^+$

$$E^{R^z} \rho(C_t(\omega, \tilde{\omega}))\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f\right)(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$$
$$= E^{R^z} f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) B_t^{\rho, \partial/\partial x^k} Q \text{ p.s.} \tag{1.35}$$

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $\mathscr{D}$ (qui est l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^n$) qui est dense dans $\mathscr{D}$. De (1.35), on tire qu'il existe un Q-négligeable $\mathcal{N}'$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$, qu'on peut supposer contenir $\mathcal{N}$, tel que si $z \notin \mathcal{N}'$, pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{Q}^+$:

$$E^{R^z} \rho(C_t(\omega, \tilde{\omega}))\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f_n\right)(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$$
$$= E^{R^z} f_n(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\, B_t^{\rho, \partial/\partial x^k}. \tag{1.36}$$

En utilisant le théorème 1.15, on voit par le théorème de Lebesgue que pour $z \notin \mathcal{N}'$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$E^{R^z} \rho(C_t(\omega, \tilde{\omega}))\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f_n\right)(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$$
$$= E^{R^z} f_n(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) B_t^{\rho, \partial/\partial x^k}. \tag{1.37}$$

Or pour $z \notin \mathcal{N}'$, les deux membres de (1.37) sont trivialement continus pour la topologie de $\mathscr{D}$ (puisqu'en particulier $B_t^{\rho, \partial/\partial x^k}$ est R^z-intégrable). On en déduit donc (1.34) pour tout f dans $\mathscr{D}$. L'extension à n'importe quelle f vérifiant les hypothèses du théorème est alors immédiate. ∎

Remarque 6. En utilisant la continuité de $B_t^{\rho, V}$ pour la topologie de la convergence C^1 des V, il n'y a aucune difficulté pour obtenir (1.34) pour tous les V et pas seulement pour les $\partial/\partial x^k$. Un tel résultat n'aurait toutefois qu'un intérêt secondaire, puisqu'en écrivant V sous la forme (1.33), on peut appliquer (1.34) à fV^k et obtenir encore une formule du type (1.34), i.e., une formule d'intégration par parties.

Du théorème 1.16, on déduit maintenant le résultat essentiel de cette sous-section:

THÉORÈME 1.17. *Sous l'hypothèse* H 4, *il existe un* Q*-négligeable* $\mathcal{N}''$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ *tel que pour tout* $z \notin \mathcal{N}''$, *pour* $t > 0$, *pour* R^z, *la loi de* $\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ *soit de la forme* $p_t^z(x)\, dx$.

Preuve. Par la théorème 1.16, on sait que pour tout z hors d'un Q-négligeable $\mathcal{N}'$ (qui dépend de ρ), pour tout f C^∞ bornée à dérivées bornées, on a (1.34). Par application d'un résultat d'analyse harmonique (voir Malliavin [14]) on en déduit que pour $z \notin \mathcal{N}'$, $t > 0$, la loi image de la mesure $\rho(C_t(\omega, \tilde{\omega}))\, dR^z$ par l'application $(\omega, \tilde{\omega}) \to \pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ est donnée par une densité, i.e., est de la forme $p_t^{z,\rho}(x)\, dx$.

Soit $\{\rho_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ du type de la fonction ρ définie précédemment, qui converge vers la fonction caractéristique des éléments inversible de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

Par la proposition 1.11, on sait que si S est le temps d'arrêt

$$S = \operatorname{Inf}\{t \geqslant 0,\ C_t(\omega, \tilde{\omega}) \text{ est inversible}\} \tag{1.38}$$

alors $P \otimes \tilde{P}$ p.s., $S = 0$. On en déduit que si z est pris hors d'un Q-négligeable $\mathcal{N}''$, qu'on peut supposer contenir $\mathcal{N}'$, alors R^z p.s., $S = 0$. On en déduit que si $z \notin \mathcal{N}''$, R^z p.s., pour tout $t > 0$, $C_t(\omega, \tilde{\omega})$ est inversible. Donc si $z \notin \mathcal{N}''$, R^z p.s., pour $t > 0$, la suite $\rho_N(C_t(\omega, \tilde{\omega}))$ converge vers 1. La limite croissante d'une suite de mesures sur $\mathbb{R}^n$ ayant une densité a une densité. Le théorème est bien démontré. ∎

Remarque 7. Nous avons ici montré que Q p.s., pour $t > 0$ la loi conditionnelle de $\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ sachant $\mathscr{B}_\infty^z$ est donnée par une densité. Notons que si T est un réel positif et si $0 < t < T$, on a le même résultat quand on connaît la trajectoire de z entre 0 et T; en fait la loi conditionnelle de $\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ relativement à $\mathscr{B}_\infty^z$ est égale à la loi conditionnelle de $\pi_1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ relativement à $\mathscr{B}_T^z$. Ce point est de nature triviale, et sera utilisé dans la section 2.

(f) *Le cas partiellement hypoelliptique: existence de densités conditionnelles régulières*

Nous allons ici renforcer l'hypothèse H 4 de manière à pouvoir montrer "simplement" un résultat de régularité des lois conditionnelles.

DÉFINITION 1.18. Si $y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on note T_y'' le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $Y_1(y) \cdots Y_n(y)$ et par les crochets de Lie en y des champs de vecteurs $Y_i(y)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et $\tilde{Y}_i(y)$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ où apparaît au moins une fois l'un des champs $Y_1(y) \cdots Y_m(y)$.

Naturellement $T_y'' \subset T_y'$. On fait alors l'hypothèse H 5:

$$\text{H 5: } T_{y_0}'' \text{ est égal à } R^n.$$

H 5 est plus forte que H 4. Les résultats de la sous-section (e) restent donc vrais. On va en fait les renforcer.

On a tout d'abord le résultat suivant qui renforce la proposition 1.11.

THÉORÈME 1.19. *Sous l'hypothèse* H 5, $P \otimes \tilde{P}$ *p.s., pour tout* $t > 0$, $C_t(\omega, \tilde{\omega})$ *est inversible et de plus* $\|C_t^{-1}(\omega, \tilde{\omega})\|$ *est dans tous les* L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Preuve. Si $H(x, z)$ est un champ de vecteurs C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on sait que $(\varphi_t^{*-1}H)(y_0)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et que de plus [4]

$$\varphi_t^{*-1}H(y_0) = H(y_0) + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[Y_0, H]\, ds + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[Y_i, H]\, dw^i + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[\tilde{Y}_j, H]\, d\tilde{w}^j. \tag{1.39}$$

En utilisant l'hypothèse H 5, on peut raisonner exactement comme Malliavin [15] et Ikeda et Watanabe [12] et obtenir l'appartenance à tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ de $C_t^{-1}(\omega, \tilde{\omega})$ pour $t > 0$. ∎

On n'est plus maintenant obligé d'utiliser une fonction de troncation ρ dans la formule (1.32). On définit encore Q et R^z comme à la définition 1.13.

On a alors le résultat qui étend le théorème 1.12:

THÉORÈME 1.20. *Sous l'hypothèse* H 5, *soit* $V(x)$ *un champ de vecteurs sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, C^∞ *borné à dérivées de tous ordres bornées. Si* B_t^V *est le processus continu défini pour* $t > 0$ *par*:

$$\begin{aligned} B_t^V = &\left\langle \varphi_t^{*-1}V, C_t^{-1}\int_0^t \varphi_s^{*-1}Y_i\,\delta w^i\right\rangle - \int_0^t \langle C_t^{-1}[\varphi_s^{*-1}Y_i, \varphi_t^{*-1}V], \varphi_s^{*-1}Y_i\rangle\, ds \\ &+ \int_0^t ds \langle C_t^{-1}\varphi_s^{*-1}Y_i, \varphi_t^{*-1}V\rangle \int_0^s \langle C_t^{-1}[\varphi_v^{*-1}Y_j, \varphi_s^{*-1}Y_i], \varphi_v^{*-1}Y_j\rangle\, dv \\ &+ \int_0^t ds \left\langle C_t^{-1}\varphi_s^{*-1}Y_i, \int_0^s \langle [\varphi_v^{*-1}Y_j, \varphi_s^{*-1}Y_i], C_t^{-1}\varphi_t^{*-1}V\rangle\, \varphi_v^{*-1}Y_j\right\rangle dv \end{aligned} \tag{1.40}$$

(*où dans* (1.40) *on somme sur les indices* i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant m$) *alors pour tout* ε, T $(0 < \varepsilon < T)$, $\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} |B_t^V|$ *est dans tous les* L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$. *De plus si* $f(x)$ *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *qu'on suppose* C^∞ *bornée à dérivées de tous ordres bornées, si* $U(\tilde{\omega})$ *est une fonction mesurable bornée sur* $\tilde{\Omega}$ *à valeurs réelles, pour tout* $t > 0$

$$E[U(\tilde{\omega})(Vf)(\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))] = E[U(\tilde{\omega}) f(\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))B_t^V]. \tag{1.41}$$

Preuve. La première partie du théorème résulte du théorème 1.19. Il suffit en effet de remarquer que $\|C_t^{-1}(\omega, \tilde{\omega})\|$ décroît avec t et donc que $\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} \|C_t^{-1}(\omega, \tilde{\omega})\| \leqslant \|C_\varepsilon^{-1}(\omega, \tilde{\omega})\|$, ce qui permet d'appliquer le théorème 1.19. On va maintenant obtenir (1.41) par passage à la limite sur (1.32). Soit σ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\sigma(D) = 1$ si $\|D\| \leqslant 1$ et $\sigma(D) = 0$ si $\|D\| \geqslant 2$. Pour $N \geqslant 1$, on définit la fonction ρ_N sur $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} &C \text{ inversible } \rho_N(C) = \sigma\left(\frac{C^{-1}}{N}\right), \\ &C \text{ non inversible } \rho_N(C) = 0. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Alors il est clair que ρ_N est une fonction C^∞ bornée à dérivées de tous ordres bornées sur $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$. De plus sur l'ensemble des C inversibles de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, on a la majoration uniforme en N $(N \geqslant 1)$

$$\left| \frac{\partial \rho_N}{\partial C}(C) \right| \leqslant K \|C^{-1}\|. \tag{1.43}$$

Enfin quand $N \to +\infty$, ρ_N tend vers la fonction caractéristique des éléments inversibles de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$. En utilisant (1.32) relativement à ρ_N, et en faisant tendre N vers $+\infty$, grâce à (1.43) le théorème de Lebesgue nous donne bien (1.41).

Remarque 8. Au lieu de passer à la limite sur (1.32), on peut effectuer un calcul des variations direct.

On va maintenant itérer le calcul des variations comme dans [4, 15]. On énonce le résultat pour les champs de vecteurs $(\partial/\partial x^k)$, mais le résultat reste valable pour des champs de vecteurs plus généraux.

THÉORÈME 1.21. *Sous l'hypothèse* H5, *pour tout multiindice* $r = (r_1 \cdots r_n)$, *il existe un processus continu* B_t^r *tel que*

(a) *pour tout* ε, T $(0 < \varepsilon < T)$, $\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} |B_t^r|$ *est dans tous les* $L_p (1 \leqslant p < +\infty)$,

(b) *si* f *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *qu'on suppose* C^∞ *bornée à dérivées de tous ordres bornées, si* $U(\tilde{\omega})$ *est une fonction mesurable bornée sur* $\tilde{\Omega}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $t > 0$.

$$E[U(\tilde{\omega})\, \partial_r f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))] = E[U(\tilde{\omega})\, f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) B_t^r] \tag{1.44}$$

ou

$$\partial_r = \frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_m}}.$$

Preuve. Nous ne donnons que des indications rapides pour la preuve, qui est très proche de l'argument donné en [14, 15] (voir aussi [4]). En effet, par le théorème 1.20, on a:

$$E\left[U(\tilde{\omega})\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}}(\pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},y_0))\right]=E\left[U(\tilde{\omega})\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}(\pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},y_0))B_t^{v_1}\right] \tag{1.45}$$

où $v_1=\partial/\partial_{x_{i_1}}$. Il faut maintenant noter que, grâce au théorème 1.19, on peut appliquer le calcul des variations à la fonction $(\partial f/\partial x_{i_2})(\pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},y_0))B_t^{v_1}$, ce qui est une conséquence des résultats de [14, 15]. On a donc une égalité du type (1.44) dans la cas où $|r|=2$. On procède de la même manière dans le cas général.

On a alors un renforcement du théorème 1.15.

PROPOSITION 1.22. *Sous l'hypothèse* H 5, *il existe un Q-négligeable $\tilde{\mathcal{N}}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^p)$ tel que si $z\notin\tilde{\mathcal{N}}$, pour tout $r=(r_1,\ldots,r_n)$, pour tout ε, T $(0<\varepsilon<T)$ $\sup_{\varepsilon\leqslant t\leqslant T}|B_t^r|$ est dans tous les L_p $(1\leqslant p<+\infty)$ relativement à la mesure R^z.*

Preuve. Il suffit d'utiliser la partie (a) du théorème 1.21 et le théorème de Fubini.

On a alors le renforcement du théorème 1.16.

THÉORÈME 1.23. *Sous l'hypothèse* H 5 *il existe un Q-négligeable $\tilde{\mathcal{N}}'$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^p)$ contenant $\tilde{\mathcal{N}}$ tel que pour toute fonction $f(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, C^∞ bornée à dérivées de tous ordres bornées, pour tout $r=(r_1\cdots r_n)$, et tout $t>0$*

$$E^{R^z}[\partial_r f(\pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},y_0))]=E^{R^z}(f(\pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},y_0))B_t^r). \tag{1.46}$$

Preuve. En utilisant la proposition 1.22, on raisonne à partir du théorème 1.21 comme au théorème 1.16 à partir du théorème 1.12.

On déduit de la proposition 1.22 et du théorème 1.23 le résultat essentiel de cette section:

THÉORÈME 1.24. *Pour tout $z\notin\tilde{\mathcal{N}}'$, pour tout $t>0$, la loi de $\pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},x_0)$ pour R^z est donnée par une loi de type $p_t^z(x)\,dx$ où $p_t^z(x)$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, C^∞ en la variable x et à dérivées de tous ordres en x continues sur $]0,+\infty[\times R^n$.*

Preuve. Pour $z \notin \tilde{\mathcal{N}}'$, appliquons (1.46) à la fonction $f(x) = e^{i\langle\alpha, x\rangle}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^n$). En utilisant la proposition 1.22, on voit que si $0 < \varepsilon \leqslant T$, il existe $F^z_{\epsilon,T,r}$ ($0 < F^z_{\epsilon,T,r} < +\infty$) tel que pour $\varepsilon \leqslant t \leqslant T$,

$$|\alpha_1^{r_1}| \cdots |\alpha_n^{r_n}| \, E^{R^z} e^{i\langle\alpha, \pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},x_0)\rangle}| \leqslant F^z_{\epsilon,T,r}. \tag{1.47}$$

Donc pour $\varepsilon \leqslant t \leqslant T$ la loi de $\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x_0)$ est donnée par $p^z_t(x)\,dx$ où $p^z_t(x)$ est C^∞ en la variable x bornée uniformément et t, à dérivées en x bornées (uniformément en t). Or trivialement pour R^z la loi de $\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ dépend continûment de t. Par le théorème d'Ascoli, on voit immédiatement que $p^z_t(x)$ est continue sur $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n$. On raisonne de même pour démontrer la continuité sur $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n$ des dérivées. ∎

Remarque 9. Ce résultat est de nature essentiellement probabiliste en ce sens qu'il n'est pas possible de fixer z pour l'obtenir mais qu'on n'obtient le résultat qu'à un Q-négligeable près. Contrairement à ce que nous avons fait au théorème 1.7, où il était facile—moyennant l'utilisation du flot $\psi.(\tilde{\omega}, .)$—de considérer (1.19) et d'appliquer un calcul des variations classique, dans le cas partiellement hypoelliptique, il est impossible de procéder ainsi puisque la dépendance en temps des champs $\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, .)\,Y_i$ n'est étudiable correctement que par une technique probabiliste.

2. Diffusions conditionnelles et filtrage

Dans la section 1, on a supposé que x_t était un processus construit au dessus de z_t, i.e., que z_t était un processus de Markov autonome. On va maintenant introduire une dépendance de la loi de z par rapport á x.

On introduit cette dépendance par un changement de mesure, par la formule de Cameron–Martin–Girsanov.

On peut ensuite très facilement appliquer les techniques de la section 1 pour montrer des résultats sur les lois conditionnelles du processus x.

Dans le paragraphe (a), on introduit les hypothèses et notations de cette section. Au paragraphe (b), on effectue la transformation de Girsanov. Au paragraphe (c), on utilise de résultats de Théorie de la prédiction sous une forme qui nous sera utile pour la suite. Au paragraphe (d), on montre sous certaines hypothèses l'existence de densités conditionnelles. Enfin au paragraphe (e), on étudie leur régularité.

(a) *Hypothèses et notations*

On conserve les principales hypothèses et notations de la section 1.

$l^1(x, z) \cdots l^d(x, z)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui sont C^∞ bornées à dérivées de tous ordres bornées.

(b) *Transformation de Girsanov*

On fixe une fois pour toutes $y_0 = (x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

DÉFINITION 2.1. Sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$, on note L_t le processus:

$$L_t = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t l^j(\varphi_s(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\, \delta\tilde{w}^j - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^{d} |l^j(\varphi_s(\omega, \tilde{\omega}, y_0))|^2\, ds \right\}. \quad (2.1)$$

Alors il est classique que L_t est une martingale relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_t^{w,\tilde{w}}\}_{t \geqslant 0}$, et que, de plus, pour tout $T > 0$, $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |L_t|$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$. Notons aussi que L_t est solution de l'équation différentielle de Ito:

$$dL_t = L_t \sum_{j=1}^{d} l^j(\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\, \delta\tilde{w}^j, \qquad L_0 = 1 \quad (2.2)$$

qui s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} dL_t = L_t \Bigg(\sum_{j=1}^{d} \Big\{ & l^j(\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\, d\tilde{w}^j - \tfrac{1}{2} [|l^j(\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))|^2 \\ & + \tilde{Y}_j l^j(\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))]\, dt \Big\} \Bigg). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Alors, si $(x_t, z_t) = \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$, on voit que (x_t, z_t, L_t) est solution de l'équation différentielle de Stratonovitch:

$$\begin{aligned} dx &= X_0(x, z)\, dt + X_i(x, z)\, dw^i + \tilde{X}_j(x, z)\, d\tilde{w}^j, \\ dz &= Z_0(z)\, dt + Z_j(z)\, d\tilde{w}^j, \\ dL &= -\frac{L}{2} \sum_{j=1}^{d} \{|l_j(x, z)|^2 + \tilde{Y}_j l_j(x, z)\}\, dt + L l_j(x, z)\, d\tilde{w}^j, \\ & x(0) = x_0; \qquad z(0) = z_0; \qquad L(0) = 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.4) montre qu'on peut effectuer sur (x_t, z_t, L_t) le même calcul des variations qu'on avait effectué sur (x_t, z_t), puisque (x, z, L) est solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients C^∞. Le seul point délicat est de noter que les champs de vecteurs apparaissant dans (2.4) ne sont pas bornés (L n'est pas borné) mais ceci ne pose aucune difficulté sérieuse, puisque comme au théorème 1.20, on peut raisonner par troncation.

DÉFINITION 2.2. On note P^l la mesure de probabilité sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$ qui est définie sur chaque $\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}}$ par:

$$dP^l(\omega, \tilde{\omega}) = L_t(\omega, \tilde{\omega})\, dP(\omega) \otimes d\tilde{P}(\tilde{\omega}).$$

Le résultat suivant est le résultat essentiel sur la transformation de Cameron–Martin–Girsanov définie à la définition 2.2.

THÉORÈME 2.3. *Pour la mesure* P^l, $\tilde{w}'_t = \tilde{w}_t - \int_0^t l(\varphi_s(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\, ds$ *est une martingale brownienne et* w_t *est une martingale brownienne indépendante de* $\tilde{w}'_t$.

Preuve. C'est le théorème 6.4.2 de [24].

Pour la mesure P^l, (x, z) est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned} dx &= [X_0(x,z) + l^j(x,z)\,\tilde{X}_j(x,z)]\,dt + X_i(x,z)\,dw^i + \tilde{X}_j(x,z)\,d\tilde{w}'^j, \\ dz &= [Z_0(z) + l^j(x,z)\,Z_j(z)]\,dt + Z_j(z)\,d\tilde{w}'^j, \\ & \qquad x(0) = x_0, \qquad z(0) = z_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

C'est naturellement pour l'équation différentielle stochastique (2.5) que le problème de filtrage prend son sens (puisque maintenant z dépend aussi de x).

Remarque 1. Remarquons que les mesures $P \otimes \tilde{P}$ et P^l ne sont pas nécessairement équivalentes sur $\mathscr{B}_\infty^{w,\tilde{w}}$ (elles peuvent même être singulières). Dans toute la suite, nous allons travailler simultanément avec les mesures $P \otimes \tilde{P}$ et P^l. Pour éviter toute difficulté, nous supposons que l'étude effectuée dans la suite est réalisée sur un intervalle de temps $[0, N]$, où $N \in \mathbb{N}$ est arbitrairement grand mais fini. Toutes les filtrations seront complétées par les ensembles $\mathscr{B}_N^{w,\tilde{w}}$ mesurables et $P \otimes \tilde{P}$ négligeables, qui sont aussi les ensembles $\mathscr{B}_N^{w,\tilde{w}}$ mesurables et P^l négligeables. On fait de même sur tous les espaces de probabilité où une telle situation se produit. On peut alors facilement recoller les résultats. Nous ne reviendrons plus sur ce point.

(c) *Quelques résultats de la théorie de la prédiction*

Avant de montrer l'existence de densités conditionnelles, nous allons rappeler certains résultats de la théorie de la prédiction, essentiellement liés aux résultats de Schwartz [17].

En effet, contrairement à ce qui se passait à la section 1, on étudie la loi conditionnelle de x_t relativement à la tribu $\mathscr{B}_T^z$, i.e. deux paramètres t *et* T interviennent dans la formulation du problème.

Nous allons chercher à donner un énoncé régulier en (t, T).

On pose la définition suivante:

DÉFINITION 2.4. Q^l est la mesure de probabilité sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ qui est la loi de $z_t = \pi^2\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ quand $\Omega \times \tilde{\Omega}$ est muni de la mesure P^l.

Naturellement, Q^l est équivalente à Q sur chaque $\mathscr{B}_t^z$.
On a alors le résultat très général suivant:

THÉORÈME 2.5. *Sur* $(\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p), Q^l)$, *il existe un processus* Q^l-*essentiellement unique* S_T^z *à valeurs dans l'espace* Π *des mesures de probabilité sur* $\Omega \times \tilde{\Omega}$, *optionnel relativement à la filtration* $\{\mathscr{B}_{T+}^z\}_{T \geqslant 0}$ *et tel que pour tout processus mesurable borné* $U_T(\omega, \tilde{\omega})$ *sur* $\Omega \times \tilde{\Omega}$, $V_T(z) = \int U_T(\omega, \tilde{\omega})\, dS_T^z(\omega, \tilde{\omega})$ *est le processus (essentiellement unique) projection optionnelle sur* $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P^l)$ *du processus* $U_T(\omega, \tilde{\omega})$ *relativement à la filtration* $\{\mathscr{B}_{T+}^z\}_{T \geqslant 0}$. Q^l *p.s., pour tout* $T \geqslant 0$, S_T^z *est porté par l'ensemble des* $(\omega, \tilde{\omega}) \in \Omega \times \tilde{\Omega}$ *tels que* $z_s(\omega, \tilde{\omega}) = z_s$ *pour* $s \leqslant T$. *Enfin si* τ_T^z *est la mesure image sur* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ *de la mesure* S_T^z *par l'application* $(\omega, \tilde{\omega}) \to \pi^1 \varphi.(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$, Q^l *p.s.*, τ_T^z *est un processus continu à valeurs dans l'espace* Π^n *des mesures de probabilité sur* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$.

Preuve. Par une légère extension du résultat de Schwartz énoncé dans [17] Théorème 2, on sait que sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$, il existe une famille de noyaux markoviens $N_T(T \in \mathbb{R}^+)$ telle que:

(a) Pour tout $T \in \mathbb{R}^+$, N_T applique $\mathscr{B}_\infty^{w, \tilde{w}}$ dans $\mathscr{B}_{T+}^z$.

(b) Pour tout processus mesurable $U_T(\omega, \tilde{\omega})$ sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$, le processus $V_T(\omega, \tilde{\omega}) = \int_{\Omega \times \tilde{\Omega}} U_T(\omega', \tilde{\omega}')\, N_T(\omega, \tilde{\omega}, d(\omega', \tilde{\omega}'))$ est optionnel relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{T+}^z\}_{T \geqslant 0}$ et est une projection optionnelle du processus $U_T(\omega, \tilde{\omega})$ relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{T+}^z\}_{T \geqslant 0}$.

(c) Il existe un négligeable $\mathscr{N} \subset \Omega \times \tilde{\Omega}$, $\mathscr{B}_\infty^z$-mesurable tel que si $(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}$, pour tout $T \in \mathbb{R}^+$, $N_T(\omega, \tilde{\omega}), .)$ est porté par l'ensemble des $(\omega', \tilde{\omega}') \in \Omega \times \tilde{\Omega}$ tels que $z_s(\omega', \tilde{\omega}') = z_s(\omega, \tilde{\omega})$, $s \leqslant T$.

En ramenant le processus $N_T(\omega, \tilde{\omega})$ sur l'espace $(\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p), Q^l)$, i.e., en posant $N_T(\omega, \tilde{\omega}) = S_T^{z(\omega, \tilde{\omega})}$, on obtient la première partie du théorème.

De plus, par [24]-1 Th. 1.1.2, on sait qu'il existe une famille dénombrable de fonctions continues bornées $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ qui déginissent par dualité la topologie de la convergence étroite sur Π^n. Or, par le théorème des martingales, on sait que P^l-p.s., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int f_k(x(\omega', \tilde{\omega}'))\, dS_T^{z(\omega, \tilde{\omega})}(\omega', \tilde{\omega}')$ est un processus continu. Q^l-p.s., τ_T^z est bien un processus continu. ∎

On va maintenant construire explicitement le processus τ_T^z dans ce cas particulier.

On a tout d'abord le résultat technique suivant:

PROPOSITION 2.6. *Il existe un* Q-*négligeable* $\mathscr{N}^*$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ *tel que, si* $z \notin \mathscr{N}^*$, *pour tout* $T > 0$, $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} L_t$ *appartient à tous les espaces*

L^p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à la mesure R^z et, de plus, L_t est un processus continu >0.

Preuve. Comme, pour tout $T > 0$, $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} L_t$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à la mesure $P \otimes \tilde{\tilde{P}}$, la proposition résulte du théorème de Fubini.

DÉFINITION 2.7. Pour $y_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on note $H^l_{y_0}$ la mesure de probabilité sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ qui est la loi de y défini par l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned} dy &= Y_0(y)\,dt + Y_i(y)\,dw^i + \tilde{Y}_j(y)[d\tilde{w}'^j + l^j(y)\,dt], \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $(w, \tilde{w}')$ sont des mouvements browniens indépendants.

Il est trivial de vérifier que $H^l_{y_0}$ dépend continûment de $y_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Si $y \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, on pose pour $T > 0$:

$$\theta_T y_. = y_{T+.} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \tag{2.7}$$

y est décomposé en sa trajectoire jusqu'à l'instant T et sa trajectoire après l'instant T, i.e.:

$$y = (y/T/\theta_T y). \tag{2.8}$$

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 2.8. *Si $h_T(y)$ est un processus mesurable borné sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors une projection optionnelle sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P^l)$ de $h(\varphi.(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$ relativement à la filtration $\{\mathscr{B}^z_{T+}\}_{T \geqslant 0}$* est donnée par le processus *h'_T défini pour $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}^*$ par*:

$$h'_T = \frac{1}{\mathcal{L}_T} \int_{\Omega \times \tilde{\Omega}} h_T(y(\omega', \tilde{\omega}')/T/y')\, L_T(\omega', \tilde{\omega}')\, dH^l_{y_T(\omega', \tilde{\omega}')}(y')\, dR^z(\omega', \tilde{\omega}'), \tag{2.9}$$

où

$$\mathcal{L}_T = \int_{\Omega \times \tilde{\Omega}} L_T(\omega', \tilde{\omega}')\, dR^z(\omega', \tilde{\omega}').$$

Preuve. On va tout d'abord montrer que sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$, si f est une fonction définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, $\mathscr{B}^y_{t+}$-mesurable bornée, alors

$$E^{P \otimes \tilde{P}}(f(y(\omega, \tilde{\omega})) \mid \mathscr{B}^z_\infty) = E^{P \otimes \tilde{P}}(f(y(\omega, \tilde{\omega})) \mid \mathscr{B}^z_{t+}). \tag{2.10}$$

Soient g_1 une fonction définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$, $\mathscr{B}^z_{t+}$-mesurable bornée et g_2 une fonction définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$, $\mathscr{B}^z_\infty$-mesurable bornée. Pour $z_. \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$, on pose

$$(\theta_t z_.) = (z_{t+.}) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p). \tag{2.11}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ par

$$g(z) = g_1(z)\, g_2(\theta_t z). \tag{2.12}$$

Par la propriété de Markov du processus H^0 (i.e., le processus H^l avec $l = 0$), on a

$$E^{P\otimes\tilde{P}}[g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, f(y(\omega, \tilde{\omega}))] = E^{P\otimes\tilde{P}}[g_1(z(\omega, \tilde{\omega}))\, f(y(\omega, \tilde{\omega}))\, E^{H^0_{y_t}} g_2(z)]. \tag{2.13}$$

Or pour H^0, la composante z est elle-même un processus de Markov autonome, i.e., si Q^0_z est la loi de $z_{..}$, pour tout (x, z), on a:

$$E^{H^0_{(x,z)}} g_2(z) = E^{Q^0_z} g_2(z). \tag{2.14}$$

Donc

$$\begin{aligned} E^{P\otimes\tilde{P}}[g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, f(y(\omega, \tilde{\omega}))] &= E^{P\otimes\tilde{P}}[g_1(z(\omega, \tilde{\omega}))\, f(y(\omega, \tilde{\omega}))\, E^{Q^0_{z_t}} g_2(z)] \\ &= E^{P\otimes\tilde{P}}[g_1(z(\omega, \tilde{\omega}))\, E^{P\otimes\tilde{P}}(f(y(\omega, \tilde{\omega})) \mid \mathscr{B}^z_{t+})\, E^{Q^0_{z_t}} g_2(z)] \\ &= E^{P\otimes\tilde{P}}[g_1(z(\omega, \tilde{\omega}))\, g_2(\theta_t z(\omega, \tilde{\omega}))\, E^{P\otimes\tilde{P}}(f(y(\omega, \tilde{\omega})) \mid \mathscr{B}^z_{t+})] \\ &= E^{P\otimes\tilde{P}}[g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, E^{P\otimes\tilde{P}}(f(y(\omega, \tilde{\omega})) \mid \mathscr{B}^z_{t+})]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Les fonctions g du type (2.12) engendrant la tribu $\mathscr{B}^z_\infty$, l'égalité (2.10) résulte du théorème des classes monotones et de (2.15).

On va maintenant montrer (2.9) quand $h_T(y)$ est un processus constant $h(y)$ qui s'écrit:

$$h(y) = h_1(y_{t_1}) \cdots h_k(y_{t_k}), \qquad t_1 < t_2 \cdots < t_k, \tag{2.16}$$

où $h_1 \cdots h_k$ sont des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. La projection optionnelle de $h(y(\omega, \tilde{\omega}))$ sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P^l)$ relativement à la filtration $\{\mathscr{B}^z_{t+}\}_{T\geqslant 0}$ est alors la martingale continue $E^{P^l}[h(y(\omega, \tilde{\omega})) \mid \mathscr{B}^z_{T+}]$. On va d'abord montrer que, si h'_t est le processus défini par la formule (2.9) associé à h, i.e., si h'_T est donné, pour $z \notin \mathscr{N}^*$, par:

$$\begin{aligned} h'_T = \frac{1}{\hat{L}_T} \int_{\Omega\times\tilde{\Omega}} & h_1(y_{t_1}(\omega', \tilde{\omega}')) \cdots h_i(y_{t_i}(\omega', \tilde{\omega}'))\, h_{i+1}(y'_{t_{i+1}-T}) \cdots \\ & h_k(y'_{t_k-T})\, L_T(\omega', \tilde{\omega}')\, dH^l_{y_T(\omega', \tilde{\omega}')}(y')\, dR^z(\omega', \tilde{\omega}') \qquad \text{si } t_i \leqslant T < t_{i+1}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

alors pour tout $T > 0$, on a:

$$h'_T = E^{P^l}(h(y(\omega, \tilde{\omega})) \mid \mathscr{B}^z_{T+}) \qquad \text{p.s.} \tag{2.18}$$

En effet soit g une fonction $\mathscr{B}^z_{T+}$-mesurable bornée sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$. Par la propriété de Markov du processus H^l, on a, pour $t_i \leqslant T < t_{i+1}$,

$$\begin{aligned} &E^{P^l}[g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, h(y(\omega, \tilde{\omega}))] \\ &\quad = E^{P^l}(g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, h_1(y_{t_1}(\omega, \tilde{\omega})) \cdots h_i(y_{t_i}(\omega, \tilde{\omega})) \\ &\qquad \times E^{H^l_{y_T}}(h_{i+1}(y'_{t_{i+1}-T}) \cdots h_k(y'_{t_k-T}))]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Par la définition de P^l, on a donc, pour $t_i \leqslant T < t_{i+1}$,

$$\begin{aligned} &E^{P^l}[g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, h(y(\omega, \tilde{\omega}))] \\ &\quad = E^{P \otimes \tilde{P}}[g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, L_T(\omega, \tilde{\omega})\, h_1(y_{t_1}(\omega, \tilde{\omega})) \cdots h_i(y_{t_i}(\omega, \tilde{\omega})) \\ &\qquad \times E^{H^l_{y_T}}(h_{i+1}(y'_{t_{i+1}-T}) \cdots h_k(y'_{t_k-T}))] \\ &\quad = E^{P \otimes \tilde{P}} \Big\{ g(z(\omega, \tilde{\omega}))\, E^{P \otimes \tilde{P}}[L_T \mid \mathscr{B}^z_{T+}]\, \frac{1}{E^{P \otimes \tilde{P}}[L_T \mid \mathscr{B}^z_{T+}]} \\ &\qquad \times E^{P \otimes \tilde{P}}[L_T h_1(y_{t_1}(\omega, \tilde{\omega})) \cdots h_i(y_{t_i}(\omega, \tilde{\omega})) \\ &\qquad \times E^{H^l_{y_T}}(h_{i+1}(y'_{t_{i+1}-T}) \cdots h_k(y'_{t_k-T})) \mid \mathscr{B}^z_{T+}] \Big\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Or par (2.10), dans le dernier membre de (2.20), les espérances conditionnelles relativement à $\mathscr{B}^z_{T+}$ sont p.s. égales aux espérances conditionnelles correspondantes relativement à $\mathscr{B}^z_\infty$, qu'on peut construire grâce à la désintégration R^z. Grâce à (2.20), on tire immédiatement (2.18).

Or, la martingale du membre de droite de (2.18) est p.s. continue. Pour montrer le Théorème dans ce cas particulier, il suffit de montrer que h'_T est un processus p.s. continu à droite. Or H^l_y dépend continûment de y. Pour $t_i \leqslant T < t_{i+1}$, $\int h_{i+1}(y'_{t_{i+1}} - T) \cdots h_k(y_{t_k - T})\, dH^l_y(y')$ est une fonction continue bornée de (T, y). De plus, grâce à la Proposition 2.6, pour $z \notin \mathscr{N}^*$, L_T est un processus continu tel que pour tout $T' > 0$, $\sup_{T \leqslant T'} L_T$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à R^z. Pour $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}^*$ la continuité à droite de (2.17) est alors immédiate.

On a démontré le Théorème dans le cas particulier où h s'écrit sous la forme (2.16). Le membre de droite de (2.17) étant p.s. donné par l'action de noyaux mesures de probabilité, par le Théorème des classes monotones, il est immédiat d'étendre le résultat au cas où h est mesurable bornée sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$. Si h_T est de la forme

$$h_T(y) = a(T)\, b(y) \tag{2.21}$$

où a est mesurable bornée sur R^+ et b est mesurable bornée sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, le Théorème reste trivialement vrai. Une réapplication du Théorème des classes monotones donne le résultat dans le cas général. ∎

Remarque 2. Le Théorème 2.5 nous disait d'avance qu'il est possible de construire un processus de noyaux de Markov optionnel relativement à $\{\mathscr{B}^z_{T+}\}_{T\geqslant 0}$ permettant d'obtenir la projection optionnelle de tout processus mesurable borné. Nous avons pu ici construire explicitement un processus de prédicteurs qui convient. Notons toutefois les points suivants:

(a) Le point clé est que dans le cas où $l=0$, un processus de prédiction (optionnel relativement à la filtration complétée $\{\mathscr{B}^{z*}_{T+}\}_{T\geqslant 0}$!) peut être construit de manière triviale à l'aide de la seule désintégration R^z. L'application de la transformation de Girsanov permet d'en déduire le processus de prédiction pour l quelconque à l'aide d'une transformation élémentaire du prédiction initial.

(b) La condition de support donnée au théorème 2.5 est trivialement vérifiée par le système de prédicteurs définis par (2.9), puisque Q-p.s., R^z est portée par l'ensemble des $(\omega, \tilde{\omega})$ tels que, pour tout $s \geqslant 0$, $z_s(\omega, \tilde{\omega}) = z_s$.

Grâce au théorème 2.8, on peut, sans inconvénient, définir le processus $\tau_T^{z(\omega,\tilde{\omega})}$ des lois conditionnelles de $\pi_1\varphi.(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ relativement à $\mathscr{B}^z_{T+}$ par la propriété que, si f est une fonction mesurable bornée sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$, alors si $x_t = \pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$

$$\int_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^n)} f(x)\, d\tau_T^z(x) = \frac{1}{\tilde{L}_T}\int_{\Omega\times\tilde{\Omega}} f(x(\omega', \tilde{\omega}')/T/x')$$
$$\times L_T(\omega', \tilde{\omega}')\, dH^l_{y_T(\omega',\tilde{\omega}')}(y')\, dR^z(\omega', \tilde{\omega}'). \quad (2.22)$$

Par le théorème 2.5, on sait à priori que le processus $\tau_T^{z(\omega,\tilde{\omega})}$ est P^l-p.s. continu à valeurs dans Π^n. On va en fait vérifier directement sur (2.22) que τ_T^z donné par (2.22) est effectivement continu. On a en effet:

THÉORÈME 2.9. *Si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}^*$, alors $\tau_T^{z(\omega,\tilde{\omega})}$ est continu à valeurs dans l'espace Π^n.*

Preuve. Considérons l'équation différentielle (2.6). Comme aux théorèmes 1.1 et 1.2, on peut définir un flot associé $\varphi^l_.(\omega, \tilde{\omega}, .)$ sur l'espace $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$. H^l_y est ainsi la loi de $\varphi^l_.(\omega, \tilde{\omega}, y)$. Grâce la formule (2.22), on voit sans difficulté que, si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}^*$, alors:

$$\int_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^n)} f(x)\, d\tau_T^z(x)$$
$$= \frac{1}{\tilde{L}_T}\int_{\Omega\times\tilde{\Omega}\times\Omega\times\tilde{\Omega}} f(x(\omega', \tilde{\omega}')/T/\pi^1\varphi^l_.(\omega'', \tilde{\omega}'', y_T(\omega', \tilde{\omega}')))$$
$$\times L_T(\omega', \tilde{\omega}')\, dR^z(\omega', \tilde{\omega}')\, dP(\omega'')\, d\tilde{P}(\tilde{\omega}''). \quad (2.23)$$

Or, pour $(\omega', \tilde{\omega}', \omega'', \tilde{\omega}'')$ fixé, la trajectoire $(x(\omega', \tilde{\omega}')/T/\pi^1\varphi^l_\cdot(\omega'', \tilde{\omega}'', y_T(\omega', \tilde{\omega}'))$ dépend continûment de T (pour la topologie de la convergence compacte). Donc $f(x(\omega', \tilde{\omega}')/T/\pi^1\varphi^l_\cdot(\omega'', \tilde{\omega}'', y_T(\omega', \tilde{\omega}'))$ dépend continûment de T (en restant uniformément borné). Si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathcal{N}^*$, par la proposition 2.6, on peut appliquer le Théorème de Lebesgue au membre de droite de (2.23) et en déduire le résultat.

Remarque 3. Compte tenu de la dernière partie du Théorème 2.5, ce résultat n'a rien de surprenant. Il nous dit cependant que le processus τ^z_T défini par (2.22) a effectivement toutes les propriétés souhaitées d'un processus de prédiction hors d'un négligeable parfaitement connu. Toutes les propriétés que nous allons démontrer dans la suite vont porter sur ce processus de prédiction.

(d) *Le cas partiellement hypoelliptique: existence de densités conditionnelles*

On suppose vérifiée l'hypothèse H 4 (enoncée à la section 1, c). Rappelons que l'ensemble Q-négligeable $\mathcal{N}''$ a été défini au théorème 1.17. On a alors un premier résultat "élémentaire" sur les lois conditionnelles.

THÉORÈME 2.10. *Sous l'hypothèse* H 4, *si* $(\omega, \tilde{\omega})$ *est pris en dehors du* $P \otimes \tilde{P}$ *négligeable* $\{(\omega', \tilde{\omega}'), z(\omega', \tilde{\omega}') \in \mathcal{N}'' \cup \mathcal{N}^*\}$ *alors, pour tout* $T > 0$, *pour la mesure de probabilité* $\tau^{z(\omega,\tilde{\omega})}_T$ *sur* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$, *pour tout* $t > 0$, *la loi de* x_t *est du type* $q^{z(\omega,\tilde{\omega})}_{t,T}(x)\, dx$.

Preuve. Par le théorème 1.17, on sait que si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathcal{N}''$, pour la mesure $R^{z(\omega,\tilde{\omega})}$ sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$, la loi de $\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ est de la forme $p_t(x)\, dx$. Or, pour $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathcal{N}^*$, $t \leqslant T$, par (2.22), la loi de x_t pour $\tau^{z(\omega,\tilde{\omega})}_T$ est la loi de $\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ pour une mesure sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$ équivalente à R^z. Donc, pour $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathcal{N}'' \cup \mathcal{N}^*$, pour la mesure $\tau^{z(\omega,\tilde{\omega})}_T$, pour $t \leqslant T$, la loi de x_t est du type $q^{z(\omega,\tilde{\omega})}_{t,T}(x)\, dx$.

Reprenons alors le flot $\varphi^l_\cdot(\omega'', \tilde{\omega}'')$ défini dans la preuve du théorème 2.9. Par la formule (2.23), si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathcal{N}'' \cup \mathcal{N}^*$, pour $t \geqslant T$, on a, si g est une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^n)} g(x_t)\, d\tau^z_T(x) = \frac{1}{\tilde{L}_T} \int_{\Omega \times \tilde{\Omega} \times \Omega \times \tilde{\Omega}} g(\pi^1\varphi^l_{t-T}(\omega'', \tilde{\omega}'', y_T(\omega', \tilde{\omega}'))) \times L_T(\omega', \tilde{\omega}')\, dR^z(\omega', \tilde{\omega}')\, dP(\omega'')\, d\tilde{P}(\tilde{\omega}''). \quad (2.24)$$

ou encore

$$\int_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^n)} g(x_t)\, d\tau^z_T(x) = \int_{\Omega \times \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^n} g(\pi^1\varphi^l_{t-T}(\omega'', \tilde{\omega}'', x, z_T)) \times q^z_{T,T}(x)\, dx\, dP(\omega'')\, d\tilde{P}(\tilde{\omega}''). \quad (2.25)$$

Par le théorème 2.3, si on pose:

$$\bar{L}_s(\omega'', \tilde{\omega}'', y) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{d} \int_0^s l^j(\varphi_u(\omega'', \tilde{\omega}'', y))\, \delta\tilde{w}^j - \frac{1}{2}\int_0^s \sum_{j=1}^{d} |l^j(\varphi_u(\omega'', \tilde{\omega}'', y))|^2\, du\right\} \tag{2.26}$$

alors:

$$\int_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^n)} g(x_t)\, d\tau_T^z(x) = \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega\times\tilde{\Omega}} g(\pi^1\varphi_{t-T}(\omega'', \tilde{\omega}'', x, z_T))\, q_{T,T}^z(x)\, dx \times \bar{L}_{t-T}(\omega'', \tilde{\omega}'', x, z_T)\, dP(\omega'')\, d\tilde{P}(\tilde{\omega}''). \tag{2.27}$$

Or par le Théorème 1.2 et la remarque qui le suit, $P\otimes\tilde{P}$ p.s., pour tout $(u, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$, $x \to \pi^1\varphi_u(\omega, \tilde{\omega}, x, z)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. Par (2.27), il est alors clair que la loi de x_t pour τ_T^z a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

(e) *Le cas partiellement hypoelliptique: régularité des densités conditionnelles*

On va tout d'abord montrer une formule d'intégration par parties conditionnelle pour la mesure P^l.

On fait en effet l'hypothèse H 5 définie à la section 1f).

On alors, en utilisant les notations du Théorème 1.20.

THÉORÈME 2.11. *Sous l'hypothèse* H 5, *soit* $V(x)$ *un champ de vecteurs sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, C^∞ *borné à dérivées de tous ordres bornées. Alors si* $f(x)$ *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *qu'on suppose* C^∞ *bornée à dérivées de tous ordres bornées, si* $U(\tilde{\omega})$ *est une fonction mesurable bornée sur* $\tilde{\Omega}$ *à valeurs réelles, alors pour tout* $t > 0$, $T > 0$

$$\begin{aligned} &E^{P\otimes\tilde{P}} L_T(\omega, \tilde{\omega})\, U(\tilde{\omega})(Vf)(\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \\ &= E^{P\otimes\tilde{P}} L_T(\omega, \tilde{\omega})\, U(\tilde{\omega})\, f(\pi^1\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \\ &\times \left(B_t^V - \left\langle C_t^{-1}\varphi_t^{*-1}V, \sum_{j=1}^{d}\int_0^T C_{u\wedge t}\varphi_u^{*-1}\frac{\partial l^j}{\partial x}\,(\delta\tilde{w}^j - l^j(\varphi_u(\omega, \tilde{\omega}, y_0)))\, du\right\rangle\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Preuve. Notons que L_t est solution de l'équation différentielle de Stratonovitch écrite en (2.4). On peut alors raisonner comme au théorème 1.12 sur le flot associé à (2.4) pour obtenir une formule du type (1.32) en appliquant (1.27) avec:

$$h = \rho\left(\frac{L_T(\omega, \tilde{\omega})\, C_t^{-1} \varphi_t^{*-1} V)}{N}\right) L_T(\omega, \tilde{\omega})\, C_t^{-1} \varphi_t^{*-1} V, \tag{2.29}$$

où ρ est une fonction C^∞ bornée à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\rho(x) = 1$ pour $\|x\| \leqslant 1$, $\rho(x) = 0$ pour $\|x\| \geqslant 2$. On obtient le théorème en faisant tendre N vers l'infini et en utilisant le fait que

$$L_T, |C_t^{-1}|, \sup_{0 \leqslant u \leqslant t \vee T} \left|\frac{\partial \varphi_u}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0)\right|, \sup_{0 \leqslant u \leqslant t \vee T} \left|\left[\frac{\partial \varphi_u}{\partial y}(\omega, \tilde{\omega}, y_0)\right]^{-1}\right|$$

sont dans tous les $L_p(1 \leqslant p < +\infty)$, ainsi que le théorème de Lebesgue.

Le calcul explicite du deuxième membre de (2.28) est élémentaire à partir du théorème 1.9 et du théorème4.2 de [4].

Remarque 4. Notons que pour la mesure P^l, $\tilde{w}_t^j - \int_0^t l_j(\varphi_s(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\, ds$ est une martingale brownienne indépendante de w.

On va maintenant renforcer l'énoncé du théorème 1.21.

THÉORÈME 2.12. *Sous l'hypothèse* H 5, *pour tout multiindice* $r = (r_1 \cdots r_n)$, *il existe un processus continu sur* $(\mathbb{R}^+)^2$, $D_{t,T}^r$ *tel que*:

(a) *Pour tout* ε', T' $(0 < \varepsilon < T')$,

$$\sup_{\substack{\varepsilon' \leqslant t \leqslant T \\ 0 \leqslant T \leqslant T'}} |D_{t,T}^r|$$

est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$.

(b) *Si* f *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *qu'on suppose* C^∞, *bornée, à dérivées de tous ordres bornées, si* U *est une fonction mesurable bornée sur* $\tilde{\Omega}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $T \geqslant 0$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} &E^{P \otimes \tilde{P}}[L_T(\omega, \tilde{\omega})\, U(\tilde{\omega})\, \partial_r f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))] \\ &\qquad = E^{P \otimes \tilde{P}}[L_T(\omega, \tilde{\omega})\, U(\tilde{\omega})\, f(\pi^1(\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) D_{t,T}^r]. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Preuve. On raisonne comme au théorème 1.21. En utilisant, en particulier, le théorème 4.2 de [4] et la théorème 1.19, il est très facile de voir qu'on peut "itérer" la formule (2.28) de manière à obtenir (2.30). ∎

On a alors le résultat fondamental de cette section.

THÉORÈME 2.13. *Il existe un ensemble* Q^l*-négligeable* $\tilde{\mathcal{N}}^*$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ *tel que, si* $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \tilde{\mathcal{N}}^*$, *pour tout* $T \geqslant 0$, $t > 0$, *la loi de* x_t *pour* *la mesure τ_T^z est de la forme $q_{t,T}^z(x)\,dx$, où $q_{t,T}^z(x)$ est une fonction C^∞ en $x \in \mathbb{R}^n$, continue en $(t, T, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, à dérivées de tous ordres continues en (t, T, x). De plus pour tout compact K de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^+$, pour tout multiindice $r = (r_1 \cdots r_n)$,*

$$\sup_{(t,T) \in K, x \in \mathbb{R}^n} |\partial_r q_{t,T}^z(x)|$$

est fini et appartient à tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ pour $P \otimes \tilde{P}$ et pour P^l.

Preuve. Pour $t \leqslant T$, on pourrait utiliser le Théorème 2.10 mais pour le cas où $t > T$, la technique utilisée au Théorème 2.10 semble insuffisante. Aussi préférons-nous raisonner directement.

Notons tout d'abord que si $H(\omega, \tilde{\omega})$ est une variable aléatoire $\mathscr{B}_{T'+}^{w,\tilde{w}}$-mesurable $(T' < +\infty)$, alors elle appartient à tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à $P \otimes \tilde{P}$ si et seulement si elle appartient à tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à P^l: en effet $L_{T'}$ appartient à tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à $P \otimes \tilde{P}$, et il est très facile de vérifier que $L_{T'}^{-1}$ appartient à tous les $L_p (1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à P^l. Pour $T > 0$, soit $U(\tilde{\omega})$ une fonction $\mathscr{B}_{T+}^{\tilde{w}}$-measurable bornée sur $\tilde{\Omega}$. Grâce à la formule (2.30), on sait que pour $r = (r_1 \cdots r_n)$, et $t > 0$:

$$E^{P^l}[U(\tilde{\omega})\,\partial_r f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))] = E^{P^l}[U(\tilde{\omega})\, f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) D_{t,T \vee t}^r]. \tag{2.31}$$

De (2.31), on tire immédiatement que

$$\int \partial_r f(x_t)\, d\tau_T^z(x) = E^{P^l}[f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) D_{t,T \vee t}^r \mid \mathscr{B}_{T+}^z] \qquad \text{p.s.} \tag{2.32}$$

Alors pour $0 < \varepsilon' < T'$,

$$H^{\varepsilon', T', r} = \sup_{\substack{T \leqslant T' \\ \varepsilon' \leqslant t \leqslant T'}} |D_{t,T}^r|$$

est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à P^l. Soit $\hat{D}_t^{\varepsilon', T', r}$ la martingale continue

$$\hat{D}_t^{\varepsilon', T', r} = E^{P^l}[H^{\varepsilon', T', r} \mid \mathscr{B}_{t+}^z]. \tag{2.33}$$

De (2.32), on tire immédiatement que pour $\varepsilon' \leqslant t \leqslant T'$, $T \leqslant T'$

$$\left| \int \partial_r f(x_t)\, d\tau_T^z(x) \right| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|\, \hat{D}_T^{\varepsilon', T', r} \qquad \text{p.s.} \tag{2.34}$$

Les deux membres de (2.34) étant P^l p.s. continus en (t, T) on voit donc que P^l p.s. pour tout (t, T) tels que $\varepsilon' \leqslant t \leqslant T'$, $T \leqslant T'$

$$\left| \int \partial_r f(x_t)\, d\tau_T^z(x) \right| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|\, \hat{D}_T^{\varepsilon', T', r}. \tag{2.35}$$

Soit $\{f_k\} k \in \mathbb{N}$ une famille dénombrable de fonctions de $\mathscr{D}$ qui est dense dans $\mathscr{D}$. P.s., pour tout $k \in \mathbb{N}$, (t, T) tels que $\varepsilon' \leqslant t \leqslant T'$, $T \leqslant T'$

$$\left| \int \partial_r f_k(x_t)\, d\tau_T^z(x) \right| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_k(x)|\, \hat{D}_T^{\varepsilon', T', r}. \tag{2.36}$$

Par densité, il résulte immédiatement que p.s., pour tout $f \in \mathscr{D}$, (t, T) tels que $\varepsilon' \leqslant t \leqslant T'$, $T \leqslant T'$

$$\left| \int \partial_r f(x_t)\, d\tau_T^z(x) \right| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|\, \hat{D}_T^{\varepsilon', T', r}. \tag{2.37}$$

(2.37) s'étend immédiatement à tout f C^∞ bornée à dérivées de tous ordres bornées. A partir de (2.37), on raisonne comme au Théorème 1.24 pour obtenir la première partie du Théorème. De plus, par l'inégalité de Doob, on sait que $\sup_{0 \leqslant T \leqslant T'} |\hat{D}_T^{\varepsilon', T', r}|$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à P^l. La seconde partie du Théorème résulte immédiatement de l'inégalité (2.37).

Remarque 5. Il est trivial de vérifier que pour tout $T > 0$, $i = 1 \cdots n$, $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \exp \pm [\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)]^i$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ relativement à $P \otimes \tilde{P}$. En appliquant le calcul des variations à $f(\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \exp \pm [\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)]^i$, il n'est pas difficile de conclure que $\exp(\pm x^i)\, q_{t,T}^z(x)$ a les mêmes propriétés que $q_{t,T}^z(x)$, et donc que $q_{t,T}^z \in \mathscr{S}$.

Bibliographie

1. J. M. Bismut, "Mécanique aléatoire," Lecture Notes in Mathematics No. 866, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.
2. J. M. Bismut, Flots stochastique et formule de Ito-Stratonovitch généralisée, *C. R. Acad. Sci.* **290** (1980), 483–486.
3. J. M. Bismut, A generalized formula of Ito and some other properties of stochastic flows, *Z. Wahrsch.* **55** (1981), 331–350.
4. J. M. Bismut, Martingales, the Malliavin claculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions, *Z. Wahrsch.* **56** (1981), 469–505.
5. J. M. Bismut, Martingales, the Malliavin calculus and Hörmander's theorem, *in* "Stochastic Integrals" (D. Williams, Ed.), Lecture Notes in Mathematics No. 851, pp. 85–109, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.
6. M. H. A. Davis, Pathwise non linear filtering, "Stochastic Systems" (M. Hazewinkel, Ed.), Reidel, Dordrecht, a paraître.

7. C. DELLACHERIE ET P. A. MEYER, "Probabilités et potentiels," 2ᵉ éd. Chaps. I–IV, Hermann, Paris, 1975; Chaps. V–VIII, Hermann, Paris, 1980.
8. H. DOSS, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, *Ann. Inst. H. Poincaré* **13** (1977), 99–125.
9. R. J. ELIOTT AND M. KOHLMANN, Robust filtering for correlated multidimensional observations, preprint 1981.
10. U. HAUSSMANN, On the integral representation of Ito processes, *Stochastic* **3** (1979), 17–27.
11. L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* **119** (1967), 147–171.
12. N. IKEDA ET S. WATANABE, Diffusion on manifolds, a paraître.
13. N. V. KRYLOV AND B. L. ROZOVSKII, On conditional distributions of diffusion processes, *Math. USSR Izv.* **12** (1978), 336–356.
14. P. MALLIAVIN, Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, *in* "Proceedings of the International Conference on Stochastic Differential Equations of Kyoto (1976)," pp. 195–263, Kinokuniya, Tokyo, and Wiley, New York, 1978.
15. P. MALLIAVIN, C^k-hypoellipticity with degeneracy, *in* "Stochastic Analysis" (A. Friedman et M. Pinsky, Eds.), pp. 199–214, Academic Press, New York/London, 1978.
16. P. A. MEYER, Un cours sur les intégrales stochastiques, *in* "Séminaire de probabilités No. 10," pp. 245–400, Lecture Notes in Mathematics No. 511, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1976.
17. P. A. MEYER, Sur les désintégrations régulières de L. Schwartz, "Séminaire de Probabilités No. 7," pp. 217–222, Lecture Notes in Mathematics No. 321, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
18. D. MICHEL, Régularité des lois conditionnelles en théorie du filtrage, *C.R. Acad. Sci. A* **387** (1980).
19. D. MICHEL, Régularité des lois conditionnelles en théorie du filtrage non linéaire et calcul des variations stochastique, *J. Funct. Anal.* **41** (1981), 8–36.
20. E. PARDOUX, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics* **3** (1979), 127–167.
21. E. PARDOUX, Équations du filtrage non linéaire, de la prédiction et du lissage, prépublication de l'Université de Provence, 1980.
22. R. L. STRATONOVITCH, "Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control," Elsevier, New York, 1968.
23. D. W. STROOCK, The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic differential equations, I, *Math. Systems Theory* **14** (1981), 25–65; Part II, a paraître.
24. D. W. STROOCK AND S. R. S. VARADHAN, "Multidimensional Diffusion Processes," Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 233. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.
25. H. J. SUSSMANN, On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations, *Ann. Probab.* **6** (1978), 19–41.
26. C. DOLÉANS-DADE, Intégrales stochastiques par rapport à une famille de probabilités, *in* "Séminaire de probabilités No. 5," pp. 141–146, Lecture Notes in Mathematics No. 191, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
27. P. A. MEYER, Sur un théorème de C. Stricker, *in* "Séminaire de probabilités No. 11," pp. 482–489, Lecture Notes in Mathematics No. 581, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.
28. J. M. BISMUT ET D. MICHEL, Structure des diffusions conditionnelles et calcul des variations, *Acad. Sci.* **292**, série I, (1981), 731–734.