JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 7, 386–446 (1971)

Problèmes de Cauchy Abstraits et Applications à Quelques Problèmes Mixtes

J. CHAZARAIN

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Nice

Received January 20, 1970

Table des Matières

Chapitre I. Équations d'Évolution Abstraites

1. PROBLÈMES DE CAUCHY AU SENS DES DISTRIBUTIONS

0. Notations 390
1. Problèmes de Cauchy Bien Posés dans les Distributions 391
2. Démonstration de la Condition Nécessaire 394
3. Démonstration de la Condition Suffisante 397
4. Extensions aux Dérivations d'Ordre Fractionnaire 400
5. Applications aux Semi-Groupes Distributions 402
6. Applications aux Opérateurs de la Forme $D_t^k - A$ 405

2. PROBLÈMES DE CAUCHY AU SENS DES DISTRIBUTIONS DE GEVREY

1. Distributions de Gevrey 411
2. Convolution dans $\mathscr{D}_+'(d)$ 414
3. Distributions de Gevrey à Valeurs Vectorielles 416
4. Problèmes de Cauchy Bien Posés dans les Distributions de Gevrey . . 417
5. Démonstration du Théorème 4.4 418
6. Un Théorème de Perturbation 422

Chapitre II. Applications à Quelques Problèmes Mixtes

1. PERTURBATION DE CERTAINS PROBLÈMES CORRECTS

2. ÉQUATIONS DU TYPE DES ONDES ITÉRÉES AVEC LES CONDITIONS DE DIRICHLET AU BORD

1. Énoncé du Théorème 427
2. Cas où $\Omega = R_n^+$ et $P = (D_t^2 - \Delta)^2$ 429
3. Cas où A et B Sont à Coefficients Variables dans R_n^+ 435
4. Fin de la Démonstration du Théorème 1.2 436
5. Un Contre-Exemple 440

3. ÉQUATIONS DU TYPE DES ONDES AVEC CONDITION DE DÉRIVÉE OBLIQUE NULLE AU BORD

1. Énoncé du Théorème 441
2. Cas où $\Omega = R_n^+$ et $A = \Delta$ 443

BIBLIOGRAPHIE

Introduction

Ce travail est divisé en deux parties : le chapitre I où l'on étudie le problème de Cauchy pour des équations d'évolution abstraites et le chapitre II où l'on applique ces résultats à l'étude de certains problèmes mixtes.

Chapitre I

On considère des équations d'évolution de la forme

$$Pu = \left(\sum_{k=0}^{m} A_k D_t^k\right) u = f \qquad \left(\text{on pose } D_t = \frac{d}{dt}\right)$$

où les A_k désignent des opérateurs appartenant à un même espace $\mathscr{L}(D; X)$ avec D et X désignant des espaces de Banach. Le résultat essentiel de ce chapitre est la caractérisation par leurs propriétés spectrales des opérateurs A_k pour que le problème de Cauchy associé à P soit bien posé. Bien entendu cette caractérisation dépend des propriétées de régularité que l'on exige pour la solution u de l'équation. Dans ce travail on étudiera successivement le cas des solutions au sens des distributions puis, car cela sera indispensable dans certaines applications, le cas des solutions appartenant à des espaces du type "distributions de Gevrey." De facon plus précise, on dit que le problème de Cauchy est bien posé pour P au sens des distributions (resp. des distributions de Gevrey) si la distribution à valeurs opérateurs

$$P = \sum A_k \otimes \delta_0^{(k)}$$

admet une solution élémentaire E qui soit une distribution (resp. une distribution de Gevrey) à support dans $[0, +\infty[$. Avec cette définition on démontre que le problème de Cauchy est bien posé si et seulement si l'opérateur

$$P_\lambda = \sum A_k \lambda^k$$

est inversible quand le nombre complexe λ appartient à une certaine classe de région Λ du plan et que $\| P_\lambda^{-1} \|$ vérifie une majoration de croissance dans Λ. Dans le cas des distributions (Théorème 1.6, §1) on trouve pour Λ des régions de la forme

$$\Lambda = \{\lambda;\ \operatorname{Re} \lambda \geqslant a \log(1 + |\lambda|) + b\} \qquad (\operatorname{Re} = \text{partie reelle})$$

que l'on appelera "régions logarithmiques." Dans le cas des distributions de Gevrey d'ordre d on trouve (Théorème 4.4, §2) des d-régions, c'est à dire de la forme

$$\Lambda = \{\lambda;\ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant a \mid \lambda \mid^{1/d} + b\}$$

où a et b désignent des constants positives ou nulles.

On montre ensuite que dans le cas des distributions cette caractérisation reste encore valable mot pour mot quand on permet des dérivations d'ordre fractionnaire en t dans P.

Dans le cas particulier où $P = D_t - A$ ces résultats sont à rapprocher du théorème d'Hille et Yosida, qui concerne en gros le cas où la solution élémentaire E est une fonction fortement continue de t. Dans notre cas, la solution élémentaire E est une distribution qui définit un semi groupe distribution régulier au sens de Lions [13]. Ainsi l'application du critère général permet d'obtenir la caractérisation spectrale du générateur A d'un semi groupe distribution régulier, c'est d'ailleurs la recherche de cette caractérisation qui est à l'origine du travail exposé dans ce chapitre.

Pour les opérateurs de la forme $P = D_t^k - A$ on montre que pour $k > 2$ le problème de Cauchy est mal posé en dehors du cas trivial où A est un opérateur borné (Théorème 6.1, §1).

On commence le §2 par une étude rapide des espaces de distributions de Gevrey dont on aura besoin. On définit l'espace des distributions de Gevrey d'ordre d $\mathscr{D}'(d)$ comme le dual de l'espace $\mathscr{D}(d)$ des fonctions C^∞ qui vérifient une suite d'inégalités analogues à celles vérifiées par les fonctions du type de Gevrey d'ordre d proprement dites. On définit également les distributions de Gevrey à valeurs dans un espace de Banach Y par $\mathscr{D}'(d, Y) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(d); Y)$, et l'on montre que l'on a une théorie tout à fait semblable à celle de Schwartz [23] pour les distributions vectorielles.

On termine ce chapitre par un théorème de perturbation (Théorème 6.2, §2) où l'on montre en particulier qu'en ajoutant au générateur d'un semi groupe fortement continu un opérateur d'ordre inférieur (en un certain sens) on obtient un problème de Cauchy bien posé seulement en général au sens des distributions de Gevrey.

Dans le cas particulier de l'opérateur $P = D_t - A$, la caractérisation des opérateurs non bornés A pour lesquels le problème de Cauchy est bien posé au sens des distributions à d'abord été trouvé par Lions [13] en supposant que la solution élémentaire E est à croissance exponentielle. Sans hypothèse de croissance la caractérisation n'était connue que dans le cas particulier où A est un opérateur normal dans un espace d'Hilbert et est due à Foias [6], puis généralisée par Larsson [12] dans le cas des distributions de Gevrey.

D'autre part Fattorini [5] vient d'étendre partiellement certains de nos résultats relatifs aux opérateurs $D_t^k - A$ (avec $k > 2$) au cas où l'on se place dans des espaces vectoriels topologiques généraux.

Chapitre II

On étudie dans ce chapitre des problèmes mixtes qui ont ceci de commun: on ne peut en général obtenir pour ces problèmes les résultats de régularité en la variable t que l'on démontre habituellement pour des problèmes mixtes analogues (ondes, chaleur,...). C'est pour cette raison que l'on a développé une théorie abstraite dans les distributions de Gevrey. En effet on trouvera, dans l'étude spectrale, des régions Λ qui sont en général seulement des d-régions et non des demi plans $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$; par contre la condition sur la croissance de $\| P_\lambda^{-1} \|$ n'apporte pas de difficultés.

On donne dans le §1 une application du théorème de perturbation aux équations du type des plaques vibrantes. De façon plus précise, on considère un opérateur elliptique d'ordre $2m$ $A(x, D_x)$ tel qu'il définit un opérateur autoadjoint dans $L^2(\Omega)$, et on le perturbe par un opérateur $B_k(x, D_x)$ d'ordre $k < 2m$. Alors on trouve que le problème de Cauchy est bien posé pour l'opérateur

$$P = D_t^2 - (A(x, D_x) + B_k(x, D_x))$$

si on se place dans les distributions de Gevrey d'ordre d avec $1/d = k - m/m$.

Dans le §2 on considère les équations du type des ondes itérées

$$(D_t^4 - 2D_t^2 A(x, D) + B(x, D))u = f$$

avec les conditions aux limites

$$u\,|_{\delta\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\delta\Omega} = 0,$$

où $A(x, D)$ est un laplacien sur l'ouvert Ω et $B(x, D)$ un opérateur ayant même partie principale que $(A(x, D)^2)$. On montre que ce type de problème est bien posé dans les distributions de Gevrey.

Dans le dernier paragraphe, on étudie l'équation des ondes

$$(D_t^2 - A(x, D))u = f$$

mais avec la condition au bord

$$b(x, D)u\,|_{\partial\Omega} = 0$$

où $b(x, D)$ est un champ de dérivation qui n'est jamais tangentiel sur le bord de Ω. On trouve encore que ce problème est bien posé dans les distributions de Gevrey.

Les résultats relatifs à l'étude du problème de Cauchy pour les opérateurs de ce chapitre semblent nouveaux. On pourra trouver d'autres types de problèmes mixtes étudiés dans un esprit analogue dans Lions [14].

Certains de nos résultats ont été annoncé dans des notes aux C.R.A.S. [2]. Je ne saurais terminer sans témoigner ma reconnaissance à M. J. L. Lions pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués au cours de ce travail.

Chapitre I: Équations d'Évolution Abstraites

1. Problèmes de Cauchy au sens des Distributions

0. *Notations*

On note $\mathscr{L}(X; Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y, normé par $\| \|_{X\to Y}$ quand X et Y sont des espaces normés; I_X désigne l'application identique de X.

Pour les distributions on utilise les notations de Schwartz [22] auquel on renvoie pour tout ce qui concerne ce sujet. Rappelons cependant que l'on note par $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}_-$) l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur R à valeurs complexes dont le support est compact (est limité à droite) avec les topologies de Schwartz. Les espaces de distributions associés sont notés $\mathscr{D}'$ (resp. $\mathscr{D}_+'$). On désigne par $\mathscr{D}_a'$ le sous espaces de $\mathscr{D}_+'$ des distributions à support dans $[a, +\infty[$ et $\mathscr{D}_a$ le sous espace de $\mathscr{D}_-$ des fonctions à support dans $]-\infty, a]$. Soit I un intervalle de la droite reelle R, on note $C^m(I, X)$ l'espace des fonctions m fois continument dérivables à valeurs dans l'espace de Banach X.

Pour les distributions à valeurs vectorielles on aura besoin dans ce travail que du cas relativement simple des distributions à valeurs dans des espaces de Banach, on renvoie également aux travaux de Schwartz [23 et 24] pour les détails. Rappelons briévement la définition des espaces de distributions, à valeurs dans le Banach Y, qui nous seront utiles:

$$\mathscr{D}'(Y) = \mathscr{L}(\mathscr{D}; Y), \qquad \mathscr{D}_+'(Y) = \mathscr{L}(\mathscr{D}_- ; Y).$$

Rappelons que, si T est une distribution scalaire et y un vecteur de Y, $T \otimes y$ désigne la distribution de $\mathscr{D}'(Y)$ définie par

$$\langle T \otimes y, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \cdot y \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}$$

exemple:

$$\langle \delta_0 \otimes I_X , \varphi \rangle = \varphi(0) I_X .$$

La dérivée d'une distribution vectorielle T est définie comme dans le cas scalaire par l'égalité

$$\langle T', \varphi \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

On note indifféremment $\langle T, \varphi \rangle$ ou $T(\varphi)$ la valeur d'une distribution T sur une fonction φ. On désigne par supp T le support de T, l'inégalité supp $T \geqslant$ supp S signifie que si S est nulle sur un intervalle du type $]-\infty, a[$ alors T l'est aussi.

1. *Problèmes de Cauchy Bien Posés dans les Distributions*

On se donne des espaces de Banach complexes D et X et des opérateurs $A_k \in \mathscr{L}(D; X)$ $k = 0, \ldots, m$ (dans les applications on aura le plus souvent $D \subset X$ avec injection continue, et les A_k seront des opérateurs non bornés dans X admettant D pour domaine commun de définition). On considère l'opérateur différentiel à valeurs vectorielles

$$P = \sum_{k=0}^{k=m} A_k \otimes D_t^k \qquad \left(D_t^k = \frac{d^k}{dt^k}\right),$$

et pour simplifier les notations on ne le distinguera pas de la distribution vectorielle

$$\sum_{k=0}^{k=m} A_k \otimes \delta_0^{(k)}.$$

On se propose d'étudier le problème de Cauchy au sens des distributions en t pour cet opérateur, de façon plus précise on pose la

DÉFINITION 1.1. On dit que le problème de Cauchy est bien posé pour P, sous entendu au sens des distributions, (en abrégé: P satisfait à la condition C) si et seulement si la distribution P admet une solution élémentaire $E \in \mathscr{D}_+'(\mathscr{L}(X; D))$ ayant son support dans $[0, +\infty[$:

$$P * E = \delta_0 \otimes I_X, \qquad E * P = \delta_0 \otimes I_D. \tag{1.1}$$

Donnons une définition équivalente qui justifie l'emploi de l'expression problème de Cauchy.

PROPOSITION 1.2. *L'opérateur P satisfait à la condition C si et seulement si pour toute $f \in \mathscr{D}_+'(X)$ il existe une solution $u \in \mathscr{D}_+'(D)$ unique de $P * u = f$ avec* supp $u \geqslant$ supp f *et si l'application*

$$f \in \mathscr{D}_+'(X) \to u \in \mathscr{D}_+'(D)$$

est continue.

La démonstration est facile, donnons la pour être complet.

La condition nécessaire est conséquence immédiate des propriétés de la convolution des distributions vectorielles [23, Chap. II, p. 154].

Pour démontrer que la condition est suffisante on va construire une solution élémentaire de P. Pour tout $x \in X$ il existe par hypothèse une solution unique $E_x = u$ de

$$P * u = \delta_0 \otimes x \qquad \operatorname{supp} u \subset [0, +\infty[,$$

et l'application ainsi définie

$$x \in X \to E_x \in \mathscr{D}_+'(D)$$

est continue par hypothèse. En particular pour $\varphi \in \mathscr{D}_-$ fixé, l'application

$$x \in X \to \langle E_x, \varphi\rangle \in D$$

est un élément de $\mathscr{L}(X; D)$ que l'on note $E(\varphi)$. Pour prouver que $E \in \mathscr{D}_+'(\mathscr{L}(X; D))$, il faut démontrer la continuité de l'application

$$\varphi \in \mathscr{D}_- \to E(\varphi) \in \mathscr{L}(X; D).$$

Pour cela on remarque que la continuité de l'application $x \to E_x$ se traduit par: pour tout $a \in R$ et toute semi-norme continue p sur $\mathscr{D}_a$ il existe un nombre $r > 0$ tel que

$$\|\langle E_x, \varphi\rangle\|_D \leqslant p(\varphi) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}_a \quad \text{et} \quad \|x\|_X \leqslant r$$

et par conséquent

$$\|\langle E, \varphi\rangle\|_{X\to D} \leqslant \frac{1}{r} p(\varphi) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}_a$$

ce qui démontre la continuité de E sur $\mathscr{D}_a$ quelque soit a. Il reste à vérifier que E est solution élémentaire. C'est une solution élémentaire à droite, car pour tout $x \in X$ on a par contruction

$$(P * E)x = P * E_x = \delta_0 \otimes x$$

soit

$$P * E = \delta_0 \otimes I_X .$$

Ce sera aussi une solution élémentaire à gauche si on démontre le

LEMME 1.3. *Pour tout $x \in D$ on a*

$$(P * E)x = (E * P)x.$$

Démonstration. On se donne une fonction $\varphi \in \mathscr{D}$ et $x \in D$ et on définit la distribution f par

$$P * (\varphi \otimes x) = f,$$

on peut aussi dire que $\varphi \otimes x$ est l'unique solution de cette équation donc

$$\varphi \otimes x = E * f = E * P * (\varphi \otimes x).$$

Et comme E est solution élémentaire à droite on a aussi

$$\varphi \otimes x = P * E * (\varphi \otimes x),$$

des deux dernières égalités on tire

$$E * P * (\varphi \otimes x) = P * E * (\varphi \otimes x)$$

ceci quelque soit φ, ce qui démontre le lemme.

Remarque 1.4. Il n'est pas explicitement question de conditions initiales dans cette formulation du problème de Cauchy car, selon une technique classique avec les distributions, on fait intervenir les conditions initiales dans le second membre de l'équation (cf par exemple [14]).

Le résultat essentiel de ce paragraphe est la caractérisation des opérateurs P qui satisfont à la condition C au moyen des propriétés spectrales des A_k, ou plus précisémment par l'intermédiaire de l'application P_λ définit par

$$\lambda \in \mathbf{C} \to P_\lambda = \sum_{k=0}^{m} \lambda^k A_k \in \mathscr{L}(D; X).$$

L'étude des régions du plan complexe $\mathbf{C}$ où P_λ est inversible conduit à poser la

DÉFINITION 1.5. On dit qu'une partie Λ du plan complexe est une région logarithmique[1] si elle est de la forme

$$\Lambda = \{\lambda;\ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant a \log(1 + |\lambda|) + b\} \tag{1.2}$$

où a et b sont des constantes $\geqslant 0$.

On peut alors énoncer le critère cherché:

THÉORÈME 1.6. *Le problème de Cauchy est bien posé pour l'opérateur P si et seulement si il existe une région logarithmique Λ où P_λ est inversible et satisfait à*

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D} \leqslant \mathrm{pol}(|\lambda|).^2 \tag{1.3}$$

La démonstration de ce théorème occupe les deux numéros qui suivent.

2. *Démonstration de la Condition Nécessaire*

Pour démontrer l'existence d'une région où P_λ est inversible on commence par construire une sorte d'inverse approché que l'on note E_λ. Pour cela on se fixe des nombres $0 < c < c'$ et une fonction $\theta \in \mathscr{D}$ identique à 1 sur $[0, c]$ et nulle en dehors de $[-1, c']$, on pose pour $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\theta_\lambda(t) = e^{-\lambda t}\theta(t)$$

et on définit l'opérateur

$$E_\lambda = E(\theta_\lambda) \in \mathscr{L}(X; D).$$

[1] Dans [6] Foias appelle région logarithmique le complémentaire de Λ.

[2] La notation pol( ) désigne un polynôme à coefficients positifs.

Comme E est solution élémentaire à droite il vient

$$(P * E)(\theta_\lambda) = \theta_\lambda(0) I_X ,$$

c'est à dire, en posant $\check{D}_t^k = (-1)^k D_t^k$,

$$\sum_{k=0}^{k=m} A_k E(\check{D}_t^k \theta_\lambda) = I_X . \tag{2.1}$$

Par ailleurs, la formule de Leibnitz donne

$$\check{D}_t^k(\theta(t) e^{-\lambda t}) = \lambda^k \theta_\lambda(t) + \psi_{k,\lambda}(t) \tag{2.2}$$

avec

$$\psi_{k,\lambda}(t) = (-1)^k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \theta^{(j)}(t)(-\lambda)^{k-j} e^{-\lambda t}.$$

On reporte alors (2.2) dans (2.1)

$$\sum_k \lambda^k A_k E(\theta_\lambda) = I_X - \sum_k A_k E(\psi_{k,\lambda})$$

et en posant

$$H_\lambda = \sum_{k=0}^{k=m} A_k E(\psi_{k,\lambda})$$

il vient

$$P_\lambda o E_\lambda = I_X - H_\lambda . \tag{2.4}$$

Par conséquent on aura l'existence de P_λ^{-1} dans une région où par exemple $\| H_\lambda \|_{X \to X} \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui conduit à étudier le comportement en λ de $\| H_\lambda \|$, c'est la

PROPOSITION 2.1. *Il existe une constante C et un entier n tels que*

$$\| H_\lambda \|_{X \to X} \leqslant C(1 + |\lambda|)^n e^{-c \mathrm{Re} \lambda} \qquad \textit{quand} \quad \mathrm{Re}\, \lambda \geqslant 0.^3 \tag{2.5}$$

Démonstration. De la définition de H_λ on tire

$$\| H_\lambda \|_{X \to X} \leqslant \sum_k \| A_k \|_{D \to X} \cdot \| E(\psi_{k,\lambda}) \|_{X \to D}$$
$$\leqslant C \sup_k \| E(\psi_{k,\lambda}) \|.$$

[3] Dans tout ce travail on désigne par C diverses constantes indépendantes du paramètre λ.

Pour majorer ce terme utilise le

LEMME 2.2. *Avec les notations précédentes, on a* $\psi_{k,\lambda} \in \mathscr{D}_{c'}$ *et pour tout entier p il existe une constante C telle que*

$$\| \psi_{k,\lambda} \|_{p,+} \leqslant C(1 + |\lambda|)^{p+k-1} e^{-c\operatorname{Re}\lambda} \qquad \textit{pour} \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0.$$

Précisons les notations: soit I un intervalle on pose

$$\| \psi \|_{p,I} = \sum_{k=0}^{k=p} \sup_{t \in I} | \psi^{(k)}(t)|$$

et on écrit $\| \ \|_{p,+}$ si $I = [0, +\infty[$ et $\| \ \|_p$ si $I = R$.

La démonstration du lemme est évidente d'après l'expression de $\psi_{k,\lambda}$ en fonction de θ et l'hypothèse sur le support de θ.

Revenons à la démonstration de la proposition; pour majorer $\| E(\psi_{k,\lambda})\|$ on utilise la continuité de $E \in \mathscr{L}(\mathscr{D}_- : \mathscr{L}(X; D))$, elle se traduit par l'existence d'un entier p d'une constante C et d'un compact K de R tels que

$$\| E(\varphi)\| \leqslant C \| \varphi \|_{p,K} \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}_{c'},$$

mais comme le support de E est inclus dans $[0, +\infty[$ on peut supposer, d'après une propriété des supports réguliers des distributions (voir [22, p. 99]), que K est inclus dans $[0, +\infty[$, il vient

$$\| E(\varphi)\|_{X \to D} \leqslant C \| \varphi \|_{p,+} \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}_{c'} . \tag{2.6}$$

En appliquant cette inégalité à $\psi_{k,\lambda}$ on trouve compte tenu du Lemme 2.2

$$\| E(\psi_{k,\lambda})\|_{X \to D} \leqslant C(1 + |\lambda|)^{p+k-1} e^{-c\operatorname{Re}\lambda} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,$$

ce qui démontre la proposition en prenant $n = p + m - 1$.

En combinant (2.4) et (2.5) on en déduit que P_λ admet un inverse à droite quand λ vérifie

$$C(1 + |\lambda|)^n e^{-c\operatorname{Re}\lambda} \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,$$

ou encore quand λ appartient à une région définie par une inégalité de la forme

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant a \log(1 + |\lambda|) + b.$$

Bien entendu on procède de façon analogue pour démontrer l'existence d'un inverse à gauche de P_λ, on s'appuie alors sur le fait que E est une solution élémentaire à gauche. Donc finalement P_λ est inversible dans une région logarithmique Λ.

Il reste à majorer la fonction $\lambda \to \| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D}$, de (2.4) on tire

$$P_\lambda^{-1} = E_\lambda o (I - H_\lambda)^{-1},$$

par conséquent dans Λ on a

$$\| P_\lambda^{-1} \| \leqslant 2 \| E_\lambda \|.$$

Alors en utilisant l'inégalité (2.6) avec $\varphi = \theta_\lambda$ on trouve immédiatement

$$\| E_\lambda \| \leqslant C(1 + | \lambda |)^p$$

soit finalement

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D} \leqslant \mathrm{pol}(| \lambda |) \qquad \text{dans } \Lambda.$$

3. *Démonstration de la Condition Suffisante*

Il s'agit de montrer que la distribution P admet une solution élémentaire vérifiant (1.1), pour cela on va vérifier que l'application E définit ci-après satisfait aux conditions requises. On définit l'application

$$\varphi \in \mathscr{D} \to E(\varphi) = \int_\Gamma P_\lambda^{-1} \hat{\varphi}(-\lambda)\, d\lambda\!\!\!{}^{-}, \tag{3.1}$$

avec les notations suivantes:

$$d\lambda\!\!\!{}^{-} = \frac{1}{2i\pi}\, d\lambda, \qquad \hat{\varphi}(\lambda) = \int_R e^{-\lambda t} \varphi(t)\, dt,$$

et Γ désigne le bord (orienté dans le sens des parties imaginaires croissantes) de la région Λ où l'on a par hypothèse

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D} \leqslant C(1 + | \lambda |)^n \tag{3.2}$$

c'est à dire que Γ est de la forme

$$\Gamma = \left\{ \lambda;\ \frac{(1 + | \lambda |)^c}{e^{\mathrm{Re}\lambda}} = d \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}\, \lambda \geqslant 0 \right\}.$$

Avant de démontrer que $E(\varphi)$ a un sens on

Remarque 3.1. Ce qui importe dans toutes ces questions c'est seulement l'allure à l'infini de Γ, en particulier on utilisera constamment que pour λ assez grand sur Γ on a évidemment

$$\begin{gathered} |\operatorname{Im}\lambda|^c \sim |\lambda|^c \sim e^{\operatorname{Re}\lambda} \\ \int_\Gamma \frac{d|\lambda|}{(1+|\lambda|)^s} < +\infty \qquad \text{quand} \quad s > 1. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Pour vérifier la convergence de l'intégrale (3.1) on a besoin de préciser le comportement à l'infini de $\emptyset(\lambda)$, c'est le

LEMME 3.2. *Pour tout intervalle* $[d', d]$ *il existe une constante* C *telle que*

$$|\emptyset(-\lambda)| \leqslant C \|\varphi\|_q |\lambda|^{-q} e^{d\operatorname{Re}\lambda} \tag{3.4}$$

pour $\varphi \in \mathscr{D}_{[d',d]}$, q *entier* $\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Démonstration. Cette inégalité découle trivialement de l'expression

$$\emptyset(-\lambda) = (-\lambda)^{-q} \int_{d'}^{d} \varphi^{(q)}(t)\, e^{\lambda t}\, dt.$$

Maintenant on est en mesure de démontrer le

LEMME 3.3. *L'application* $E(\ )$ *définie par* (3.3) *détermine un élément de* $\mathscr{D}'(\mathscr{L}(X; D))$.

Démonstration. En combinant les inégalités (3.2) et (3.4) on a

$$\| P_\lambda^{-1}\emptyset(-\lambda)\|_{X\to D} \leqslant C(1+|\lambda|)^n |\lambda|^{-q} e^{d\operatorname{Re}\lambda} \|\varphi\|_q \qquad \text{où} \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0 \tag{3.5}$$

soit encore grâce à (3.3) pour $\lambda \in \Gamma$

$$\| P_\lambda^{-1}\emptyset(-\lambda)\|_{X\to D} \leqslant C \|\varphi\|_q (1+|\lambda|)^{n+c\cdot d-q},$$

donc il suffit de choisir q assez grand, de façon précise $q > n + c \cdot d + 1$, pour obtenir

$$\| E(\varphi)\|_{X\to D} \leqslant C \|\varphi\|_q \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}_{[d',d]},$$

ce qui prouve la continuité de E sur tout espace $\mathscr{D}_K$.

Vérifions maintenant la condition sur le support :

LEMME 3.4. *On a* $\operatorname{supp} E \subset [0, +\infty[$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a $E(\varphi) = 0$ quand $\varphi \in \mathscr{D}$ et supp $\varphi \subset]-\infty, -\epsilon[$. Pour cela on considère la famille de contours $\Gamma_k = \Gamma + k$ obtenue en translatant Γ d'une longueur $k \geqslant 0$. Alors, en utilisant de façon classique la technique de déformation des contours pour les intégrales de formes holomorphes, on vérifie grace à (3.4) que l'on a pour tout $k \geqslant 0$

$$E(\varphi) = \int_{\Gamma_k} P_\lambda^{-1}\emptyset(-\lambda)\, d\lambda.$$

Mais d'autre part pour $\lambda \in \Gamma_k$ l'inégalité (3.5) s'écrit, compte tenu du support de φ et de (3.4),

$$\| P_\lambda^{-1}\emptyset(-\lambda)\| \leqslant C(1 + |\lambda|)^n \|\varphi\|_q |\lambda|^{-q} e^{-\epsilon k} \qquad \text{pour tout } k \geqslant 0$$

et en prenant $q > n + 1$ il vient

$$\| E(\varphi)\| \leqslant C \|\varphi\|_q e^{-\epsilon k} \qquad \text{pour tout } k \geqslant 0$$

ce qui entraine que $E(\varphi) = 0$.

Il ne reste plus qu'à démontrer le

LEMME 3.5. *La distribution E est solution élémentaire de P.*

Démonstration. Prenons $\varphi \in \mathscr{D}$ et calculons

$$(P * E)(\varphi) = \sum A_k E(\check{D}_t{}^k \varphi)$$

et en utilisant la définition de E on trouve aisément

$$(P * E)(\varphi) = \int_\Gamma \left(\sum \lambda^k A_k\right) P_\lambda^{-1}\emptyset(-\lambda)\, d\lambda$$

$$(P * E)(\varphi) = I_X \cdot \int_\Gamma \emptyset(-\lambda)\, d\lambda$$

et par déformation de contour, facile à justifier avec (3.4), il vient

$$= I_X \int_{-i\infty}^{+i\infty} \emptyset(-\lambda)\, d\lambda$$

$$= I_X \cdot \varphi(0)$$

$$= (\delta_0 \otimes I_X)(\varphi).$$

On vérifie de même que $E * P = \delta_0 \otimes I_D$ puisque P_λ^{-1} est aussi inverse à gauche de P. Ce qui termine la démonstration du Théorème 1.6.

Remarque 3.6. Au cours de la démonstration on a prouvé que l'existence d'une solution élémentaire à droite (resp. à gauche) équivaut à l'existence d'un inverse à droite (resp. à gauche) de P_λ, et que cela implique l'existence (resp. l'unicité) dans le problème de Cauchy.

4. *Extension aux Dérivations d'Ordre Fractionnaire*

On désigne par D_t^k la dérivation fractionnaire d'ordre k en t, définie pour k non entier par

$$D_t^k \varphi = Y_{-k} * \varphi$$

où Y_{-k} désigne la distribution $1/\Gamma(-k)\, Pf\,(1/t^{k+1})$ (cf [22]).

On va généraliser ce qui précède aux opérateurs P de la forme

$$P = \sum_{\text{fini}} A_k D_t^k$$

où maintenant k peut être un nombre réel $\geqslant 0$. On pose encore, avec $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\operatorname{Re} \lambda > 0$,

$$P_\lambda = \sum_{\text{fini}} A_k \lambda^k$$

où la détermination de λ^k est >0 pour $\lambda > 0$.

Comme les Y_{-k} sont des distributions à support dans $[0, +\infty[$, il est clair que la Définition 1.1 garde un sens. Alors on a le

THÉORÈME 4.1. *Le Théorème* 1.6 *reste valable mot pour mot dans le cas où P contient des dérivations fractionnaires.*

Démonstration. Il suffit de constater que dans la démonstration du Théorème 1.6 on a seulement utilisé que les D_t^k sont des distributions à support dans $[0, +\infty[$ ayant pour transformées de Laplace λ^k et que les assertions du Lemme 2.2 restent vraies bien que l'on n'ait pas de formule de Leibnitz pour les dérivations fractionnaires, il s'agit donc de démontrer le

LEMME 4.2. *Soit k un nombre $\geqslant 0$ et une fonction θ comme au numéro* 1. *Alors la fonction $\psi_{k\cdot}$ définie par l'égalité*

$$\check{D}_t^k(\theta(t)\, e^{-\lambda t}) = \lambda^k \theta(t)\, e^{-\lambda t} + \psi_{k,\lambda}(t) \qquad \textit{avec} \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

vérifie: supp $\psi_{k,\lambda} \subset]-\infty, c'[$ *et pour tout entier* $p \geqslant 0$ *il existe un constante* C *telle que*

$$\| \psi_{k,\lambda} \|_{p,+} \leqslant C(1 + |\lambda|)^{p+k} e^{-c\mathrm{Re}\lambda} \qquad pour \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0. \tag{4.1}$$

Démonstration. Lorsque k est entier c'est le Lemme 2.2, et comme $D_t^k = D_t^{[k]} * D_t^{k-[k]}$ il est clair qu'il suffit de se restreindre au cas $0 < k < 1$. Dans ces conditions on a par définition

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{s^{k+1}}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{k+1}}\, ds - \frac{\varphi(0)}{k\epsilon^k} \right]$$

ce qui donne (on pose $\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$ avec $\check{\varphi}(t) = (\varphi(-t))$

$$D_t^k(\theta_\lambda(t)) = \langle Y_{-k}(s), \theta_\lambda(t-s) \rangle$$

$$\check{D}_t^k(\theta_\lambda(t)) = \langle Y_{-k}(s), \theta_\lambda(t+s) \rangle$$

soit explicitement

$$\Gamma(-k)\, \check{D}_t^k \theta_\lambda(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\theta(t+s)\, e^{-\lambda t - \lambda s}}{s^{k+1}}\, ds - \frac{\theta(t)\, e^{-\lambda t}}{k\epsilon^k} \right]; \tag{4.2}$$

on peut écrire

$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\theta(t+s)\, e^{-\lambda t - \lambda s}}{s^{k+1}}\, ds = \theta_\lambda(t) \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s}}{s^{k+1}}\, ds + e^{-\lambda t} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\theta(t+s) - \theta(t)}{s^{k+1}}\, ds$$

et comme

$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s}}{s^{k+1}}\, ds = \frac{e^{-\lambda\epsilon}}{k\epsilon^k} - \lambda \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s}}{k\epsilon^k}\, ds,$$

il vient en reportant dans (4.2)

$$\Gamma(-k)\, \check{D}_t^k \theta_\lambda(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\theta_\lambda(t) \frac{e^{-\lambda s} - 1}{k\epsilon^k} - \frac{\lambda}{k} \theta_\lambda(t) \int_\epsilon^{+\infty} s^{-k} e^{-\lambda s}\, ds \right.$$
$$\left. + e^{-\lambda t} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\theta(t+s) - \theta(t)}{s^{k+1}} e^{-\lambda s}\, ds \right]$$

et sous cette forme chaque terme du crochet admet une limite quand $\epsilon \to 0$ car $0 < k < 1$, d'où

$$= \theta_\lambda(t) \frac{\lambda^k}{-k} \Gamma(1-k) + e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(t+s) - \theta(t)}{s^{k+1}} e^{-\lambda s}\, ds$$

$$= \Gamma(-k)\, \theta_\lambda(t) + \psi_\lambda(t)$$

avec

$$\psi_\lambda(t) = e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(t+s) - \theta(t)}{s^{k+1}} e^{-\lambda s}\, ds. \tag{4.3}$$

Il est clair sur l'expression de ψ_λ que cette fonction est nulle pour $t \geqslant c'$ car alors $\theta(t+s) = \theta(t) = 0$ et de plus elle est évidemment C^∞. Démontrons l'inégalité (4.1) pour $p = 0$. On pose $u = t + s$ dans (4.3) qui s'écrit alors

$$\psi_\lambda(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\theta(u) - \theta(t)}{(u-t)^{k+1}} e^{-\lambda u}\, du$$

et on peut remplacer la borne inférieure d'intégration par $\max(t, s)$ car $\theta(u) - \theta(t) = 0$ quand $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant c$, il vient puisque $\operatorname{Re} \lambda > 0$

$$|\psi_\lambda(t)| \leqslant e^{-c\operatorname{Re}\lambda} \int_R \frac{|\theta(u) - \theta(t)|}{|u-t|^{k+1}}\, du$$

d'où l'inégalité cherchée

$$|\psi_\lambda(t)| \leqslant Ce^{-c\operatorname{Re}\lambda} \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

En dérivant par rapport à t dans (4-3) on démontre de la même manière que pour $0 \leqslant j \leqslant p$ on a

$$|\psi_\lambda^{(j)}(t)| \leqslant C(1 + |\lambda|)^j e^{-c\operatorname{Re}\lambda} \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme et par conséquent celle du théorème.

5. *Applications aux Semi-Groupes Distribution*

On va déduire du Théorème 1.6, la caractérisation spectrale du générateur d'un semi-groupe distribution régulier (en abrégé: S.G.D.) au sens de Lions [13]. Rappelons la définition d'un S.G.D.:

DÉFINITION [13]. On appelle semi-groupe distribution G sur l'espace de Banach X la donnée d'une distribution $G \in \mathscr{D}_+'(\mathscr{L}(X; X))$ qui vérifie

(1) $\operatorname{supp} G \subset [0, +\infty[$;

(2) $G(\varphi * \psi) = G(\varphi)\, G(\psi)$ pour $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ à supports dans $[0, +\infty[$ (ce que l'on notera par $\varphi, \psi \in \mathscr{D}_{0+}$);

(3) L'espace

$$\operatorname{Im} G = \bigcup_{\varphi \in \mathscr{D}_{0^+}} \operatorname{Im} G(\varphi)$$

est dense dans X et

$$\ker G = \bigcap_{\varphi \in \mathscr{D}_{0^+}} \ker G(\varphi) = \{0\};$$

(4) pour tout $x \in \operatorname{Im} G$ la distribution Gx est égale à une fonction continue de $t \geqslant 0$ dans X.

On associe à G un générateur A de domaine D qui est la fermeture de l'opérateur $G(-\delta')$ défini sur $\operatorname{Im} G$ par

$$G(-\delta')x = G(-\varphi')y \qquad \text{si} \quad x = G(\varphi)y$$

on renvoie à Lions [13] et à Peetre [20] pour les détails.

Le lien entre le problème de Cauchy et les S.G.D. provient du

THÉORÈME 13. *Un opérateur fermé A de domaine D dense dans X est générateur d'un* S.G.D. *si et seulement si l'opérateur $P = D_t \otimes I - \delta_0 \otimes A$ satisfait à la condition C. La solution élémentaire G de P est précisemment le semi-group de générateur A.*

Sauf indication contraire, le domaine D d'un opérateur fermé sera toujours muni de la topologie du graphe. On note I l'injection continue de D dans X. Alors compte tenu du théorème ci-dessus, l'application du Théorème 1.6 à l'opérateur P donne immédiatement la caractérisation cherchée:

THÉORÈME 5.1. *Un opérateur fermé A de domaine D dense dans X est générateur d'un* S.G.D. *si et seulement si il existe une région logarithme Λ où la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$ existe et satisfait à*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X \to X} \leqslant \operatorname{pol}(|\lambda|).$$

Remarque 5.2. Si la région Λ contient un demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$ alors le S.G.D. G associé à A est à croissance exponentielle dans le sens que $e^{-\gamma t} G \in \mathscr{S}'(\mathscr{L}(X; X))$.

En effet en prenant pour Γ une verticale $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$ dans la formule (3.1), on trouve que G est la transformée de Laplace inverse au sens des distributions de la fonction holomorphe $(\lambda - A)^{-1}$. On retrouve ainsi la caractérisation obtenue par Lions dans le cas où G est supposé à priori être à croissance exponentielle.

On a de façon analogue une caractérisation des générateurs de groupes distributions (voir les définitions dans [13]), c'est le

COROLLAIRE 5.3. *Un opérateur fermé A de domaine dense D dans X est générateur d'un groupe distribution si et seulement si il existe une région logarithmique Λ où $(\pm\lambda - A)^{-1}$ existe et satisfait à*

$$\|(\pm\lambda - A)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \mathrm{pol}(|\lambda|).$$

Démonstration. Ce corollaire se déduit immédiatement de Théorème 5.1 en utilisant le résultat suivant:

THÉORÈME [13]. *L'opérateur A est générateur d'un groupe distribution si et seulement si les opérateurs $+A$ et $-A$ sont générateurs de* S.G.D.

Terminons ce numéro par une application à une classe particulière de S.G.D.: les semi-groupes distributions holomorphes au sens de Da Prato & Mosco [3] et Fujiwara [7]. On rappelle la définition donnée dans [3]. Pour $\varphi \in \mathscr{D}$ on pose $\varphi_s(t) = (1/s)\,\varphi(t/s)$ et $G_s(\varphi) = G(\varphi_s)$. Avec ces notations on pose la

DÉFINITION [3]. Un semi groupe distribution G est dit holomorphe dans un secteur $S_\alpha = \{z;\ |\arg z| < \alpha < \frac{1}{2}\pi\}$ si pour toute $\varphi \in \mathscr{D}$ l'application

$$s \in R^+ \to G_s(\varphi) \in \mathscr{L}(X;X)$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans S_α que l'on notera encore G_s.

Les auteurs de [3] et [7] ont caractérisé les générateurs des semi groupes distributions holomorphes dans le cas particulier où l'on suppose à priori que le semi groupe est à croissance exponentielle, le résultat suivant montre qu'en réalité cette caractérisation est valable sans restriction.

THÉORÈME 5.4. *Tout semi groupe distribution holomorphe dans un secteur S_α est nécessairement à croissance exponentielle.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.3.2 de [3] on sait pour $s \in S_\alpha$ l'application G_s est aussi un S.G.D. de générateur $s \cdot A$ où A désigne le générateur de G. En appliquant le Théorème 5.1 à G_s on trouve que la résolvante de l'opérateur $s \cdot A$ existe dans une région logarithmique Λ et y vérifie

$$\|(\lambda - s \cdot A)^{-1}\| \leqslant \text{pol}(|\lambda|).$$

Et comme

$$(\lambda - s \cdot A)^{-1} = \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda}{s} - A\right)^{-1}$$

on en déduit que la résolvante de A existe et est à croissance polynomiale dans la région

$$\frac{1}{s} \cdot \Lambda = \left(\frac{\lambda}{s}\,;\, \lambda \in \Lambda\right).$$

En prenant par exemple $s = e^{\pm i\alpha/2}$ cela montre que $(\lambda - A)^{-1}$ existe dans la réunion $V = s \cdot \Lambda \cup \bar{s} \cdot \Lambda$ et y est à croissance polynomiale. Et enfin, puisque cette région V contient un demi plan $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$, on en déduit d'après la Remarque 5.2 que G est un S.G.D. à croissance exponentielle.

6. *Applications aux Opérateurs de La Forme $D_t^k - A$*

Dans ce numéro A désignera toujours un opérateur fermé à domaine D dense dans X sans qu'il soit besoin de le rappeler. Naturellement le Théorème 4.1 s'applique en particulier à l'opérateur $P = D_t^k \otimes I - \delta_0 \otimes A$, mais il se produit un phénomène particulier pour $k > 2$.

THÉORÈME 6.1. *Si k n'est pas entier on suppose en plus que D_{A^∞} est dense dans X. Alors pour $k > 2$ le problème de Cauchy est bien posé pour P si et seulement si l'opérateur A est borné dans X.*

Démonstration. Il découle du théorème 4.1 que $(\lambda^k - A)^{-1}$ existe pour λ dans une région logarithmique Λ, mais lorsque $k > 2$ l'ensemble $\{\lambda^k; \lambda \in \Lambda\}$ contient une région de la forme $\{\lambda; |\lambda| \geqslant r\}$, ce qui prouve que le spectre de A est borné et que l'on a

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X \to X} \leqslant \text{pol}(|\lambda|) \qquad \text{pour} \quad |\lambda| \geqslant r.$$

Alors le théorème résulte des deux lemmes qui suivent.

LEMME 6.2. *Soit A un opérateur tel que $R = (\lambda - A)^{-1}$ existe dans une couronne $|\lambda| \geqslant r$ et y vérifie pour un certain entier $n \geqslant 0$ la majoration*

$$|R_\lambda\| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{n-1}.$$

On suppose de plus que $D_{A^{n+1}}$ est dense dans X, alors le spectre de A est non vide et A est un opérateur borné dans X.

Démonstration. Le spectre de A étant inclus dans le disque $|\lambda| < r$ on peut definir un opérateur borné $\hat{A}$ en posant

$$x \in X \to \hat{A}x = \int_{|\lambda|=r} R_\lambda x \, d\lambda.$$

Pour démontrer que $\hat{A}$ prolonge A il suffit de vérifier qu'ils coincident sur $D_{A^{n+1}}$ car A est fermé et cet espace est dense. Pour cela il revient au même de montrer que pour un certain μ de l'ensemble résolvant de A on a

$$R_\mu Ax = R_\mu \hat{A}x \qquad \text{avec} \quad x \in D_{A_{n+1}}.$$

En utilisant l'identité de la résolvante on trouve

$$R_\mu \hat{A}x = \int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda R_\mu x}{\lambda - \mu} \, d\lambda - \int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda R_\lambda x}{\lambda - \mu} \, d\lambda$$

et en fixant un μ tel que $|\mu| < r$, il vient

$$R_\mu \hat{A}x = \mu R_\mu x - \int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda R_\lambda x}{\lambda - \mu} \, d\lambda.$$

Mais par définition de R_μ on a $R_\mu Ax = \mu R_\mu x - x$, il suffit donc de prouver que

$$\int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda R_\lambda x}{\lambda - \mu} \, d\lambda - x = 0$$

c'est à dire

$$\int_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda Ax}{\lambda - \mu} \, d\lambda = 0$$

car $x \in D$. Or pour $x \in D_{A^n}$ on a l'identité classique

$$R_\lambda x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k x}{\lambda^{k+1}} + \frac{R_\lambda A^n x}{\lambda^n} \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 1, \tag{6.1}$$

d'où l'on déduit compte tenu des hypothèses sur A

$$\| R_\lambda Ax \| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

et par conséquent on a bien

$$\int_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda A x}{\lambda - \mu}\, d\bar{\lambda} = 0.$$

En particulier le spectre de A n'est pas vide, car sinon on aurait $\hat{A} = 0$, ce qui est contradictoire car 0 appartient au spectre de l'opérateur nul.

Enfin la démonstration du théorème sera complête si on prouve que D_{A^∞} est toujours dense quand k est entier.

LEMME 6.3. *Soit k un entier $\geqslant 1$, on suppose que le problème de Cauchy est bien posé pour l'opérateur $D_t^k \otimes I - \delta_0 \otimes A$ alors l'espace $\mathscr{I} = \bigcup_{\varphi \in \mathscr{D}_0^+} \operatorname{Im} E(\varphi)$ est dense dans X et est inclus dans D_{A^∞} (E désigne la solution élémentaire de l'opérateur).*

La démonstration est une extension immédiate du cas $k = 1$ qui est démontré dans [13], aussi on ne la fera pas.

Donnons plutôt une application du Théorème 6.1 au problème de Cauchy ordinaire c'est à dire dans les espaces de fonctions dérivables. On peut définir de nombreuses façons la notion de problème de Cauchy bien posé dans ces espaces, nous utiliserons ici une définition assez générale de Fattorini [4] que l'on rappelle.

DÉFINITION 4. Le problème de Cauchy d'ordre n (entier $\geqslant 1$) est uniformément bien posé dans $\bar{R}^+ = [0, +\infty[$ si:

(a) il existe un sous espace dense J de X tel que pour des conditions initiales $u_0, \ldots, u_{n-1} \in J$ il existe une solution unique $u(\ )$, c'est à dire

$$u(\ ) \in C^n(\bar{R}^+, X), \qquad u(t) \in D \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$

$$u^{(n)}(t) - Au(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$

$$u^{(k)}(0) = u_k \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

(b) Si $u_m(\ )$ est une suite de solutions telles que $u_m^{(k)}(0) \underset{m\infty}{\longrightarrow} 0$, $k = 0, \ldots, n-1$ alors $u_m(t) \underset{m\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur tout compact de $\bar{R}^+$ c'est à dire pour la topologie de $C^0(\bar{R}^+, X)$.

On va montrer que si le problème de Cauchy est bien posé au sens de cette définition alors il l'est à fortiori au sens des distributions, ce qui qui permettra d'appliquer les théorèmes précédents aux problèmes de Cauchy au sens usuel.

PROPOSITION 6.4. *Soit un opérateur A dont on suppose, en plus des hypothèses faites au début de ce numéro, que l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est non vide. Alors si le problème de Cauchy est uniformément bien posé dans $\bar{R}^+$, l'opérateur $P = D_t^n \otimes I - \delta_0 \otimes A$ satisfait à la condition C.*

Démonstration. Il s'agit de construire une solution élémentaire pour P. Pour $x \in J$ on note $E(t)x$ la solution relative aux données initiales $u_0 = \cdots = u_{n-2} = 0$, $u_{n-1} = x$. D'après les hypothèses (a) et (b) l'application

$$x \in J \to E(\ )x \in C^0(\bar{R}^+, X)$$

est continue, donc elle se prolonge en une application définie sur tout X. Ce qui permet de définir une distribution E par

$$\varphi \in \mathscr{D}, \qquad x \in X \to E(\varphi)x = \int_0^{+\infty} E(t)\, x\varphi(t)\, dt,$$

et on a par construction supp $E \subset [0, +\infty[$. Vérifions que la distribution E est solution élémentaire à droite. On a par définition pour $x \in J$

$$E^{(n)}(\varphi)x = (-1)^n\, E(\varphi^{(n)})x = (-1)^n \int_0^{+\infty} E(t)\, x\varphi^{(n)}(t)\, dt$$

et en intégrant par parties, il vient compte tenu des conditions initiales

$$= \int_0^{+\infty} E^{(n)}(t)\, x\varphi(t)\, dt + \varphi(0)x$$

or $E^{(n)}(t)\, x = AE(t)\, x$ et A est fermé, on a

$$= A \int_0^{+\infty} E(t)\, x\varphi(t)\, dt + \varphi(0)x$$

soit

$$E^{(n)}(\varphi)x = AE(\varphi)x + \varphi(0)x.$$

En utilisant que J est dense et A fermé, on déduit de cette égalité que

$$E(\varphi)x \in D \qquad \text{et} \qquad E^{(n)}(\varphi)x = AE + \varphi(0)x \qquad \text{quand } x \in X.$$

Ce qui prouve que

$$E \in \mathscr{D}_+'(\mathscr{L}(X;\, D)) \qquad \text{et} \qquad (D_t^n - A) * E = \delta_0 \otimes I_X\, .$$

Il reste à démontrer que E est aussi solution élémentaire à gauche, il suffit pour cela de prouver le

LEMME [4]. *Soit un opérateur A satisfaisant aux hypothèses de la Proposition* 6.4, *alors on a (avec les notations précédentes)*: $E(t)\,Ax = AE(t)x$ *pour* $t \geqslant 0$ *et* $x \in D$.

Démonstration. Comme $\rho(A)$ est non vide soit $\lambda \in \rho(A)$ et $y \in J$, on pose $v(t) = R_\lambda E(t)\, y$, c'est évidemment une solution du problème de Cauchy relatif aux conditions initiales $v^{(k)}(0) = 0$, $k = 0,..., n-2$, $v^{(n-1)}(0) = R_\lambda\, y$. De l'unicité on déduit que $E(t)\, R_\lambda\, y = R_\lambda E(t)\, y$, et par continuité cette égalité est vraie pour $y \in X$, d'où l'égalité du lemme en prenant $y = (\lambda - A)\, x$ avec $x \in D$.

On retrouve ainsi par une méthode complètement differente un résultat de Fattorini [4]:

THÉORÈME 6.5. *Soit A un opérateur dont l'ensemble résolvant n'est vide. Alors le problème de Cauchy d'ordre $n \geqslant 3$ est uniformément bien posé dans $\bar{R}^+$ si et seulement si A est un opérateur borné de X.*

Démonstration. Il suffit de combiner le Théorème 6.1 avec la Proposition 6.4.

Terminons ce numéro par un résultat de régularité concernant les semi groupes distributions

THÉORÈME 6.6. *On suppose que l'opérateur $D_t - A$ satisfait à la condition C (ou encore: A est générateur d'un* S.G.D.). *On se donne* $u_0 \in D_{A^\infty}$ *et* $f \in C^\infty(R, X)$ *avec* $\operatorname{supp} f \subset [0, +\infty[$, *alors la solution u de l'équation*

$$(D_t - A)u = f + \delta_0 \otimes u_0$$

est une fonction appartenant à $C^\infty(\bar{R}^+, D)$ qui vérifie au sens ordinaire

$$(D_t - A)\, u(t) = f(t) \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u(0) = u_0\,.^4$$

Démonstration. On note G la solution élémentaire de $D_t - A$, alors la solution u est donnée par

$$u = G * f + Gu_0\,.$$

On pose $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 = G * f$ et $u_2 = Gu_0$. D'après la propriété de régularisation (qui est encore valable pour les distributions à valeurs dans un espace de Banach) on déduit que: $u_1 \in C^\infty(R, D)$ avec

[4] Un résultat analogue vient d'être annoncé indépendamment par Ushijima [26].

supp $u_1 \subset [0, +\infty[$ et $(D_t - A)\, u_1(t) = f(t)$ pour $t \geqslant 0$ avec $u_1(0) = 0$. Tout le problème est de prouver que $u_2 \in C^\infty(\bar{R}^+, D)$, pour cela il suffit de démontrer que pour tout intervalle $I = [0, b[$ et tout entier m on a $u_2 \in C^m(I, D)$.

Comme $u_0 \in D_{A^\infty}$, on peut définir pour $p \geqslant 1$ la fonction

$$t \in R \to V_p(t)u_0 = \sum_{h=1}^{p} Y_h(t)\, A^{h-1}u_0$$

avec $Y_h(t) = t^{h-1}/(h-1)!$ pour $t \geqslant 0$ et $Y_h(t) = 0$ pour $t < 0$. Il est clair que $V_p(\ )\, u_0 \in C^\infty(\bar{R}^+, D)$ et $V_p(0)\, u_0 = u_0$. On définit aussi, pour $t \leqslant b$ et p assez grand, la fonction

$$t \leqslant b \to W_p(t)u_0 = \int_\Gamma e^{\lambda t} R_\lambda \frac{A^p u_0}{\lambda^p}\, d\lambda \tag{6.2}$$

où Γ désigne le bord orienté d'une région logarithmique où $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ existe et est à croissance polynomiale. En utilisant l'inégalité (3.5) on vérifie qu'en choisissant p assez grand on a $W_p(\ )\, u_0 \in C^m(]-\infty, b], D)$. Montrons qu'avec p ainsi choisi on a

$$u_2 = V_p(\ )u_0 + W_p(\ )u_0 \qquad \text{sur} \quad]-\infty, b[$$

c'est à dire que pour $\varphi \in \mathcal{D}$ avec supp $\varphi \subset]-\infty, b[$ a t-on

$$\langle u_2, \varphi\rangle = \int_R V_p(t)\, u_0\varphi(t)\, dt + \int_R W_p(t)\, u_0\varphi(t)\, dt\, ? \tag{6.3}$$

Explicitons chaque terme: pour $u_2 = Gu_0$ il vient en utilisant (3.1)

$$\langle u_2, \varphi\rangle = \int_\Gamma R_\lambda \emptyset(-\lambda) u_0\, d\lambda,$$

de (6.2) on déduit

$$\int_R W_p(t)\, u_0\varphi(t)\, dt = \int_\Gamma R_\lambda \emptyset(-\lambda) \frac{A^p u_0}{\lambda^p}\, d\lambda,$$

et d'autre part en utilisant la transformation de Laplace suivie d'une déformation de contour, on trouve que

$$\int_R Y_h(t)\, \varphi(t)\, dt = \int_\Gamma \frac{\emptyset(-\lambda)}{\lambda^h}\, d\lambda.$$

Alors l'inégalité (6.3) s'obtient en combinant les trois égalités précédentes et l'identité (6.1). On en déduit en particulier que, $W_p(t)\, u_0 = 0$ pour $t < 0$ car supp $u_2 \subset [0, +\infty[$, et par continuité $W_p(0)\, u_0 = 0$, ce qui montre que

$$u_2(0) = V_p(0)u_0 + W_p(0)u_0 = u_0 .$$

Enfin grace à la régularité de u_2, on a au sens ordinaire

$$(D_t - A)\, u_2(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u_2(0) = u_0 ,$$

ce qui démontre le théorème pour $u = u_1 + u_2$.

2. Problèmes de Cauchy dans des Espaces de Distributions de Gevrey

Pour les applications du Chapitre II, on a besoin d'étendre les résultats du §1 à une classe plus vaste de distributions. On considère, en gros, les fonctionnelles sur des espaces analogues aux classes de Gevrey. L'étude de ces espaces ou d'espaces voisins et faite dans des papiers assez dispersés et qui ne recouvrent pas tous nos besoins. Aussi on indiquera les principales propriétés qui nos serons utiles, mais pour ne pas alourdir ce travail on donnera seulement la démonstration des plus représentatives dans la mesure où elles sont pas les extentions immédiates de leurs analogues dans les distributions ordinaires. Pour compléter certains points on renvoie à Geymonat [9], Larsson [12], Lions et Magénes [19], et Roumieu [21].

1. *Distribution de Gevrey*

Soit d un reel >1, on associe à la suite $M_k = k^{kd}$ un espace de fonctions C^∞:

Définition 1.1. On note $\mathscr{T}(d)$ l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(R, \mathbf{C})$ qui vérifient pour tout compact $K \subset R$ et tout nombre $L > 0$

$$p_{L,K}(\varphi) = \sup_{\substack{t\in K\\ k\geqslant 0}} \left| \frac{\varphi^{(k)}(t)}{M_k L^k} \right| < +\infty.^{5} \tag{1.1}$$

[5] On note $p_{L.K}$ respectivement par $p_{L,+}$, p_L quand on remplace K respectivement par $\bar{R}^+$ ou par R.

Il est immédiat de vérifier que l'espace $\mathscr{T}(d)$ muni de la topologie définie par les semi normes $p_{L,K}$ est un espace de Fréchet.

Remarque 1.2. La plupart des résultats de ce paragraphe s'étendent à des espaces associés à des suites M_k plus générales (cf [19] ou [21]). Mais pour simplifier on se restreint au cas des suites du type de Gevrey, ce qui d'ailleurs est suffisant pour les applications.

Notons qu'avec cette définition l'espace $\mathscr{T}(d)$ est inclus dans l'espace des fonctions de Gevrey d'ordre d, en effet on exige que $p_{L,K}(\varphi)$ soit fini non seulement pour au moins un L mais pour tous. Néanmoins pour simplifier le langage on appelera distributions de Gevrey les fonctionnelles sur cet espace. On aurait pu aussi considérer les classes de Gevrey proprement dites mais les théorèmes correspondants sont moins commodes à utiliser dans les applications.

A partir de l'espace $\mathscr{T}(d)$ on construit les espaces suivants.

DÉFINITION 1.3. On désigne par:

$\mathscr{D}_K(d)$ = le sous espace fermé de $\mathscr{T}(d)$ constitué des fonctions à support dans le compact K de R.

$\mathscr{D}_a(d)$ = le sous espace fermé de $\mathscr{T}(d)$ constitué des fonctions à support inclus dans $]-\infty, a]$.

$\mathscr{D}(d) = \varinjlim_K \mathscr{D}_K(d)$ = l'espace des fonctions de $\mathscr{T}(d)$ à support compact muni de la topologie limite inductive (stricte ici).

$\mathscr{D}_-(d) = \varinjlim_a \mathscr{D}_a(d)$ = l'espace des fonctions de $\mathscr{T}(d)$ à support limité à droite muni de la topologie limite inductive (stricte).

Ces espaces sont stables pour les opérations usuelles:

PROPOSITION [10]. *Pour $d > 1$, l'espace $\mathscr{D}(d)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et est une algèbre pour la multiplication et est stable pour la convolution.*[6]

L'espace $\mathscr{D}(d)$ est aussi stable par dérivation grace au lemme évident

LEMME 1.4. *Il existe des constantes α et β telles que*

$$M_{k+1} \leqslant \alpha\beta^k M_k \qquad \text{pour} \quad k \geqslant 0. \tag{1.2}$$

On aura besoin pour l'étude des distributions de Gevrey vectorielles de quelques résultats sur la topologie de ces espaces.

[6] Cet espace est noté $\gamma_0^{(d)}$ dans Hörmander [10, p. 146].

PROPOSITION 1.5. *Les espaces $\mathscr{D}_K(d)$, $\mathscr{D}_a(d)$ sont nucléaires.*

Les deux démonstrations sont analogues, aussi on la fera seulement pour $\mathscr{D}_K(d)$. On va démontrer la nucléarité en utilisant le critère de Pietsh sous la forme donnée dans ([8], p. 296). Il suffit de vérifier le

LEMME 1.6. *Pour toute semi norme $p_{L,K}$ de $\mathscr{D}_K(d)$ il existe une partie équicontinue V du dual fort, une application $T_{x,k}$ de $R \times \mathbf{N}$ dans V et une mesure bornée μ sur $R \times \mathbf{N}$ tels que*

$$p_{L,K}(\varphi) \leqslant \int_{R\times N} | T_{x,k}(\varphi)| \, d\mu(x, k) \qquad \textit{pour} \quad \varphi \in \mathscr{D}_K(d)$$

et l'application

$$(x, k) \in R \times \mathbf{N} \to T_{x,k}(\varphi) \in \mathbf{C}$$

est mesurable.

Démonstration. Pour $\varphi \in \mathscr{D}_K(d)$ on peut écrire

$$\varphi^{(k-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi^{(k)}(s) \, ds$$

en utilisant (1.2)

$$\sup_{t\in K} \frac{| \varphi^{(k-1)}(t)|}{M_{k-1}L^{k-1}} \leqslant \frac{C}{2^k} \int_K \frac{| \varphi^{(k)}(s)|}{M_k(L/2\beta)^k} \, ds$$

avec une constante C indépendante de k et φ, d'où en additionnant et en posant $L' = L/2\beta$ il vient

$$p_{L,K}(\varphi) \leqslant C \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k} \int_K \frac{| \varphi^{(k)}(s)|}{M_k L'^k} \, ds.$$

Par conséquent le lemme est vérifié en prenant pour V le polaire de la semiboule unité relative à $p_{L',K}$, pour mesure

$$\mu = \sum_{k\geqslant 1} \frac{\delta(k)}{2^k} \otimes ds \qquad \text{sur} \quad \mathbf{N} \times K$$

et l'application

$$T_{x,k}(\varphi) = \frac{\varphi^{(k)}(s)}{M_k L'^k} .$$

COROLLAIRE 1.7. *Les espaces $\mathscr{D}(d)$ et $\mathscr{D}_-(d)$ sont nucléaires, complets, de Montel et réflexifs.*

Démonstration. L'espace $\mathscr{D}(d)$ est limite inductive stricte d'espaces de Fréchet nucléaires $\mathscr{D}_{K_n}(d)$, donc il est tonnelé complet et nucléaire par conséquent de Montel et en particulier réflexif (pour tout ceci, voir par exemple Schaefer [25]).

Les espaces de distributions de Gevrey sont par définition les duals forts des espaces précédents. Comme pour les distributions on a une notion de support et on montre que le dual de $\mathscr{D}_-(d)$ est constitué des éléments à support limité à gauche aussi on le note $\mathscr{D}_+'(d)$.

COROLLAIRE 1.8. *Les espaces $\mathscr{D}'(d)$ et $\mathscr{D}_+'(d)$ sont nucléaires.*

Démonstration. On sait que le dual fort d'une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet est la limite projective des duals forts (cf [24, Exp. 18) d'où le corollaire en utilisant le fait que le dual fort d'un Fréchet nucléaire est nucléaire et que la propriété de nucléarité est stable par limite projective.

2. *Convolution dans $\mathscr{D}_+'(d)$*

On a la propriété de régularisation:

PROPOSITION 2.1. *Soient $T \in \mathscr{D}_+'(d)$ avec* $\operatorname{supp} T \subset [a, +\infty[$ *et* $\varphi \in \mathscr{D}_+(d)$ *avec* $\operatorname{supp} \varphi \subset [b, +\infty[$, *alors la fonction $\theta = T * \varphi$ définie par*

$$\theta(t) = \langle T(s), \varphi(t-s)\rangle$$

appartient à $\mathscr{D}_+(d)$ et $\operatorname{supp} \theta \subset [c, +\infty[$ *où $c = a + b$. De plus l'application bilinéaire*

$$\mathscr{D}_+'(d) \times \mathscr{D}_+(d) \equiv (T, \varphi) \to T * \varphi \in \mathscr{D}_+(d)$$

est hypocontinue.

Démonstration. Avec les hypothèses sur les supports on vérifie facilement que $\theta(t) = 0$ pour $t \leqslant a + b$. Il reste à montrer que pour toute semi norme on a $p_{L,K}(\theta) < +\infty$. Par définition on a

$$p_{L,K}(\theta) = \sup_{\substack{t \in K \\ k \geqslant 0}} \left| \frac{\langle T(s), \varphi^{(k)}(t-s)\rangle}{M_k L^k} \right|. \tag{2.1}$$

Quand t reste dans K la fonction $s \to \varphi(t-s)$ reste à support dans un certain intervalle du type $]-\infty, g]$, par ailleurs la continuité de T sur

$\mathscr{D}_g(d)$ se traduit par l'existence d'une semi norme $p_{L',K'}$ telle que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C p_{L',K'}(\varphi) \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathscr{D}_g(d).$$

Cette dernière inégalité permet de déduire de (2.1) la majoration

$$p_{L,K}(\theta) \leqslant C \sup_{\substack{t\in K\\ s\in K'\\ k,j\geqslant 0}} \frac{|\varphi^{(k+j)}(t-s)|}{M_k L^k M_j L'^j}.$$

Posons $L_0 = \inf(L, L')$, $K_0 = \{t - s; t \in K, s \in K'\}$ et admettons provisoirement le

LEMME 2.2. *Il existe une constante C telle que*

$$M_{j+k} \leqslant C^{j+k} M_j M_k \qquad \textit{pour tout } j, k \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Alors en combinant (2.2) et (2.3) il vient

$$p_{L,K}(\theta) \leqslant C \sup_{\substack{u\in K_0\\ p\geqslant 0}} \frac{|\varphi^{(p)}(u)|}{M_p L_0{}^p}$$

c'est à dire

$$p_{L,K}(\theta) \leqslant C p_{L_0,K_0}(\varphi) < +\infty.$$

Enfin, comme les espaces sont tonnelés, l'hypocontinuité découle de la continuité séparée qui est immédiate en reprenant les inégalités précédentes.

Revenons à la démonstration du Lemme 2.2. On vérifie aisémment que

$$\inf_{0\leqslant x\leqslant p} [x^{xd}(p-x)^{(p-x)d}] = \frac{p^{pd}}{(2^d)^p},$$

d'où découle l'inégalité (2.3) en posant $p = j + k$ et $C = 2^d$.

Enfin, pour la convolution des distributions de Gevrey, on démontre par une technique analogue à celle de la proposition précédente la

PROPOSITION 2.3. *L'application bilinéaire*

$$\mathscr{D}_+'(d) \times \mathscr{D}_+(d) \ni (T, \varphi) \to T * \varphi \in \mathscr{D}_+'(d)$$

se prolonge par continuité en une application bilinéaire hypocontinue de $\mathscr{D}_+'(d) \times \mathscr{D}_+'(d)$ *dans* $\mathscr{D}_+'(d)$ *qui fait de* $\mathscr{D}_+'(d)$ *une algèbre commutative.*

3. *Distributions de Gevrey à Valeurs Vectorielles*

La définition des distributions de Gevrey à valeurs dans un espace de Banach Y suit le même schéma que dans le cas des distributions vectorielles de Schwartz [23].

DÉFINITION 3.1. On définit les espaces

$$\mathscr{D}'(d, Y) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(d); Y)$$

et

$$\mathscr{D}_+'(d, Y) = \mathscr{L}(\mathscr{D}_-(d); Y)$$

avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées.

On vérifie facilement que par exemple

$$\mathscr{D}_+'(d, Y) = \varprojlim_a \mathscr{L}(\mathscr{D}_a(d); Y).$$

Les propriétés de nucléarité énoncées dans le corollaire 1.8 permettent d'écrire

$$\mathscr{D}'(d, Y) = \mathscr{D}'(d) \mathbin{\hat{\otimes}} Y$$

et

$$\mathscr{D}_+'(d, Y) = \mathscr{D}_-'(d) \mathbin{\hat{\otimes}} Y$$

où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel topologique complété pour l'une des topologies π ou ϵ sans qu'il soit besoin de préciser car ici elles coincident (cf [25]).

Pour les fonctions à valeurs vectorielles on peut définir les espaces $\mathscr{D}(d, Y)$ et $\mathscr{D}_+(d, Y)$ en étendant de façon évidente les Définitions 1.1 et 1.2 au cas vectoriel.

Enfin, terminons ces préliminaires par la convolution des distributions de Gevrey vectorielles. Comme dans le cas des distributions ordinaires, l'extension au cas vectoriel, des applications bilinéaires telles que la convolution, est basée sur la Proposition 3 de Schwartz, [23, p. 37, Tome 2], que l'on ne reprend pas ici car cela obligerai à faire encore beaucoup de rappels. Indiquons seulement que pour utiliser cette proposition on doit vérifier que les espaces $\mathscr{D}_+(d)$, $\mathscr{D}'(d)$ $\mathscr{D}_+'(d)$ possèdent la propriété "d'approximation stricte" (cf [23]), ce que l'on vérifie en recopiant presque mot pour mot le cas des distributions ([23] T.I. préliminaires). Ceci fait, on peut alors énoncer les extensions des Propositions 2.3 et 2.1 au cas vectoriel. On considère trois espaces de Banach Y_i $i = 1, 2, 3$ et on se donne une application bilinéaire continue de $Y_1 \times Y_2$ dans Y_3 que l'on note $(x, y) \to x \cdot y$, alors pour la convolution dans $\mathscr{D}_+'(d, Y)$ on a la

PROPOSITION 3.2. *On peut définir une et une seule convolution*

$$(T, S) \to T * S$$

qui soit une application bilinéaire séparément continue de

$$\mathscr{D}_+'(d, Y_1) \times \mathscr{D}_+'(d, Y_2) \qquad \textit{dans} \quad \mathscr{D}_+'(d, Y_3)$$

et qui vérifie pour $T, S \in \mathscr{D}_+'(d)$ $x_i \in Y_i$

$$(T \otimes x_1) * (S \otimes x_2) = (T * S) \otimes (x_1 \cdot x_2).$$

Remarque 3.3. Dans les applications l'application bilinéaire est souvent du type

$$A \in Y_1 = \mathscr{L}(Y_2\,;\, Y_3), \qquad x \in Y_2 \to Ax \in Y_3$$

ou du type

$$A \in \mathscr{L}(X_2\,;\, X_3) = Y_1\,, \qquad B \in \mathscr{L}(X_1\,;\, X_2) = Y_2 \to AB \in \mathscr{L}(X_1\,;\, X_3) = Y_3\,.$$

On trouvera des exemples de telles situations dans [14].

Comme pour la convolution on déduit de la Proposition 2.1 la propriété de régularisation:

PROPOSITION 3.3. *La convolution est une application bilinéaire séparément continue de*

$$\mathscr{D}_+'(d, Y_1) \times \mathscr{D}_+(d, Y_2) \qquad \textit{dans} \quad \mathscr{D}_+(d, Y_3).$$

Remarque 3.4. Nous n'utiliserons pas ces deux dernières propositions dans la suite de ce travail, cependant elles sont indispensables quand on veut passer du point de vue solution élémentaire au point de vue problème de Cauchy avec second membre.

4. *Problèmes de Cauchy Bien Posés dans les Distributions de Gevrey*

On utilise les mêmes notations que dans le §1. Avant d'énoncer le théorème qui correspond au Théorème 1.6 §1, on doit poser les définitions suivantes.

DÉFINITION 4.1. On dit que le problème de Cauchy est bien posé au sens des distributions de Gevrey d'ordre d (en abrégé: P satisfait à la condition $C(d)$) si et seulement si la distribution P admet une solution élémentaire E appartenant à $\mathscr{D}_+'(d, \mathscr{L}(X; D))$ avec $\operatorname{supp} E \subset [0, +\infty[$:

$$E * P = \delta_0 \otimes I_D\,, \qquad P * E = \delta_0 \otimes I_X\,. \tag{4.1}$$

DÉFINITION 4.2. A la suite (M_k) on associe la fonction $M(\ )$ définie par

$$\lambda \in \mathbf{C} \to \exp M(\lambda) = \sup_{k \geqslant 0} \left(\frac{|\lambda|^k}{M_k}\right).$$

Avec $M_k = k^{kd}$ on a $M(\lambda) = d/e \mid \lambda \mid^{1/d}$.

DÉFINITION 4.3. Une région Λ du plan complexe est appelée une d-région si elle est de la forme

$$\Lambda = \{\lambda;\ \operatorname{Re} \lambda \geqslant a \mid \lambda \mid^{1/d} + b\} \tag{4.3}$$

où a et b sont des constantes $\geqslant 0$.
Avec ces définitions on a le

THÉORÈME 4.4. *L'opérateur* $P = \sum_{k=0}^{m} A_k \otimes D_t^k$ *satisfait à la condition* $C(d)$ *si et seulement si il existe une d-région* Λ *dans laquelle* P_λ^{-1} *existe et satisfait pour tout* $\epsilon > 0$ *à la majoration*

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D} \leqslant C \exp(\epsilon \operatorname{Re} \lambda + cM(\lambda)) \tag{4.4}$$

avec des constantes positives C et c qui dépendent de ϵ.

La démonstration suit les mêmes idées que celle du Théorème 1.6 §1, mais avec quelques complications techniques, aussi pour éviter de nous répéter on indiquera surtout les étapes en détaillant seulement les point nouveaux.

5. *Démonstration du Théorème* 4.4.

A. *Démonstration de la Condition Nécessaire*

On fixe comme au §1 une fonction θ qui est cette fois dans $\mathscr{D}(d)$ et on pose encore $E_\lambda = E(\theta_\lambda)$, on obtient grace à (4.1)

$$P_\lambda o E_\lambda = I_X - H_\lambda \tag{5.1}$$

où l'on rappelle que

$$H_\lambda = \sum_{k=0}^{m} A_k E(\psi_{k,\lambda})$$

et

$$\psi_{k,\lambda}(t) = (-1)^k e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-\lambda)^{k-j} \theta^{(j)}(t)$$

Le comportement en λ de H_λ est précisé par la

PROPOSITION 5.1. *Il existe une constante C, un entier n et un nombre $L > 0$ tels que*

$$\| H_\lambda \|_{X\to X} \leqslant C(1 + |\lambda|)^n e^{-c\mathrm{Re}\lambda + M(\lambda/L)} \qquad \textit{pour} \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0. \tag{5.2}$$

La démonstration va découler d'une suite de lemmes. Tout d'abord, comme

$$\| H_\lambda \| \leqslant C \sup_k \| E(\psi_{k,\lambda})\|,$$

on a besoin du

LEMME 5.2. *Avec les notations précédentes on a $\psi_{k,\lambda} \in \mathscr{D}_{c'}(d)$ et pour tout $L > 0$ il existe une constante C telle que*

$$p_{2L,K}(\psi_{k,\lambda}) \leqslant C(1 + |\lambda|)^{k-1} e^{M(\lambda/L) - c\mathrm{Re}\lambda} \qquad \textit{pour} \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0 \tag{5.3}$$

avec $K = [-1, c']$.

Démonstration. Il est clair sur l'expression de $\psi_{k,\lambda}$ que cette fonction appartient à $\mathscr{D}_{c'}(d)$, d'autre part en remarquant que θ' est nulle sur $[-1, c]$ on vérifie que l'inégalité (5.3) est conséquence du

LEMME 5.3. *Pour $K = [a, b]$ on a la majoration*

$$p_{2L,K}(e^{-\lambda t}\varphi) \leqslant p_{L,K}(\varphi) \exp(M(\lambda/L) - a \,\mathrm{Re}\,\lambda) \tag{5.4}$$

pour tout $L > 0$, $\varphi \in \mathscr{D}(d)$ et $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$.

Démonstration. Majorons l'expression

$$D_t^k(e^{-\lambda t}\varphi(t)) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-\lambda)^{k-j} \varphi^{(j)}(t)$$

en utilisant l'inégalité suivante, qui découle de la définition de $p_{L,K}$,

$$\sup_{t\in K} |\varphi^{(j)}(t)| \leqslant M_j L^j p_{L,K}(\varphi)$$

il vient pour $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$

$$\sup_{t\in K} D_t^k(e^{-\lambda t}\varphi(t)) \leqslant p_{L,K}(\varphi)\, e^{-a\operatorname{Re}\lambda} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |\lambda|^{k-j} M_j L^j$$

on écrit alors

$$|\lambda|^{k-j} = \left(\frac{|\lambda|}{L}\right)^{k-j} L^{k-j}$$

et on reporte dans l'inégalité précédente en remarquant que par définition

$$\left(\frac{|\lambda|}{L}\right)^{k-j} \leqslant e^{M(\lambda/L)} M_{k-j}$$

on trouve

$$\leqslant p_{L,K}(\varphi)\, e^{M(\lambda/L)-a\operatorname{Re}\lambda} \cdot L^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M_{k-j} M_j$$

et enfin, en utilisant la log-convexité de la suite M_k : $M_j M_{k-j} \leqslant M_k$,

$$\leqslant p_{L,K}(\varphi)\, e^{M(\lambda/L)-a\operatorname{Re}\lambda} \cdot (2L)^k M_k$$

d'où l'on déduit l'inégalité (5.4).

Terminons la démonstration de la Proposition 5.1. On majore $\| E(\psi_{k,\lambda})\|$ en utilisant la continuité de $E \in \mathscr{L}(\mathscr{D}_-(d); \mathscr{L}(X; D))$ qui se traduit par: pour tout $\epsilon > 0$ il existe des constantes C et $2L > 0$ telles que

$$\| E(\psi)\|_{X\to D} \leqslant C p_{2L,[-\epsilon,c']}(\psi) \qquad \text{pour} \quad \psi \in \mathscr{D}_{c'}(d). \tag{5.5}$$

Finalement on obtient l'inégalité (5.2) en appliquant (5.5) avec $\epsilon = 1$ à $\psi = \psi_{k,\lambda}$ et en tenant compte de (5.3).

Remarque 5.4. Bien que $\operatorname{supp} E \subset [0, +\infty[$ on ignore si on peut prendre $\epsilon = 0$ dans (5.5) car contrairement aux distributions les distributions de Gevrey ne sont pas en général localement d'ordre fini.

En combinant (5.1) et (5.2) on trouve que l'opérateur P_λ est inversible dans une région de la forme

$$\Lambda = \{\lambda;\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant a\,|\lambda|^{1/d} + b\}.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer la majoration (4.4). Dans la région Λ on a l'expression de l'inverse

$$P_\lambda^{-1} = E(\theta_\lambda)\, o(I - H_\lambda)^{-1}$$

d'où la majoration de P_λ^{-1} en utilisant (5.4) et (5.5) avec $\psi = \theta_\lambda$, on a pour tout $\epsilon > 0$

$$\| P_\lambda^{-1} \| \leqslant C \exp(\epsilon \operatorname{Re} \lambda + C' \mid \lambda \mid^{1/d}) \tag{5.6}$$

avec des constantes positives C et C' qui dépendent de ϵ.

B. *Démonstration de la Condition Suffisante*

La construction d'une solution élémentaire E se fait formellement comme au N°3 §1. On pose

$$\varphi \in \mathscr{D}(d) \to E(\varphi) = \int_\Gamma P_\lambda^{-1} \hat{\varphi}(-\lambda)\, d\lambda \tag{5.7}$$

où Γ est le bord orienté d'une d-région où l'on a (5.6). Pour démontrer que (5.7) défini bien un élément de $\mathscr{D}'(d, \mathscr{L}(X; D))$ on a besoin d'estimer le comportement de $\hat{\varphi}(-\lambda)$, c'est le

LEMME 5.5. *Pour tout intervalle $I = [g', g]$ il existe une constante C telle que*

$$| \hat{\varphi}(-\lambda)| \leqslant C p_L(\varphi) \exp(g \operatorname{Re} \lambda - M(\lambda/L))$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_I(d)$ et tout $L > 0$ et $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$.

Démonstration. On majore l'expression

$$\hat{\varphi}(-\lambda) = \frac{(-1)^k}{\lambda^k} \int_{g'}^{g} e^{\lambda t} \varphi^{(k)}(t)\, dt$$

en utilisant l'inégalité

$$\sup_{t \in I} | \varphi^{(k)}(t)| \leqslant P_L(\varphi)\, M_k L^k,$$

on trouve

$$| \hat{\varphi}(-\lambda)| \leqslant C p_L(\varphi)\, M_k L^k \mid \lambda \mid^{-k} e^{-g \operatorname{Re} \lambda}$$

d'où l'on déduit l'inégalité du lemme en remarquant que par définition on a

$$\inf_{k \geqslant 0} (M_k L^k \mid \lambda \mid^{-k}) = \exp(-M(\lambda/L)).$$

On termine la démonstration de la condition suffisante en vérifiant, de façon tout à fait semblable au cas des distributions, que E est bien la solution élémentaire cherchée.

6. *Un Théorème de Perturbation*

On dira que le problème de Cauchy est régulier pour un opérateur d'évolution si on a, en gros, une perte fixe de dérivabilité en t entre le second membre et la solution, par exemple c'est le cas des équations des ondes, de la chaleur, etc. Avec ce vocabulaire, le théorème qui suit peut s'interpréter en disant: en ajoutant des termes d'ordre inférieurs à un opérateur d'évolution régulier, on obtient un opérateur qui en général cesse d'être régulier mais qui satisfait toujours à une condition $C(d)$. On suppose que l'espace D est inclus dans X avec une injection continue I ce que l'on indique par $D \subset X$.

DÉFINITION 6.1. Le problème de Cauchy est dit régulier pour l'opérateur $P = \sum_{k=0}^{m} A_k \otimes D_t^k$, si les conditions suivantes sont satisfaites:

(a) pour un certain γ l'inverse P_λ^{-1} existe dans le demi plan $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$;

(b) et vérifie dans ce demi plan

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to X} = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{m-1} \operatorname{Re} \lambda}\right)$$

et

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D} = O\left(\frac{|\lambda|}{\operatorname{Re} \lambda}\right).$$

(On donnera des exemples de problèmes réguliers au §1 du Chap. II.)

On se donne des opérateurs de perturbation B_k $k = 0,..., m - 1$ qui vérifient l'hypothèse:

(H). *L'opérateur B_k est continu de D_k dans X avec $D_k \subset X$ et pour un certain* $0 \leqslant \theta_k \leqslant 1$ *on a*

$$D_{\theta_k} \subset D_k \qquad \textit{avec} \quad D_{\theta_k} = (D, X)_{\theta_k}.$$

On désigne par $(X_0, X_1)_\theta$ une méthode d'interpolation (il est inutile ici de préciser laquelle) qui donne lieu à une inégalité de convexité pour les normes des opérateurs. C'est à dire, si L est un opérateur continu de l'espace de Banach X_i dans Y_i avec

$$\varpi_i = \| L \|_{X_i \to Y_i} \qquad i = 1, 2,$$

alors c'est aussi un opérateur continu de $X_\theta = (X_0, X_1)_\theta$ dans $Y_\theta = (Y_0, Y_1)_\theta$ avec une norme ϖ_θ qui vérifie

$$\varpi_\theta \leqslant \varpi_0^{1-\theta} \cdot \varpi_1{}^\theta$$

(voir par exemple [17]).
Pour unifier les notations on pose $B_m = 0$, alors l'opérateur perturbé Q s'écrit

$$Q = \sum_{k=0}^{m} (A_k + B_k) D_t^k = P + B.$$

On a le

THÉORÈME 6.2. *On suppose que le problème de Cauchy est régulier pour P et que les opérateurs B_k satisfont à l'hypothèse* (H). *Alors l'opérateur perturbé Q satisfait à la condition $C(d)$ si $1/d = \sup_{k=0,,m-1}(k + 1 - m\theta_k) < 1$ et reste régulier quand $1/d \leqslant 0$.*

Démonstration. Pour utiliser le Théorème 4.4 on est amener à déterminer une région où $Q_\lambda = \sum (A_k + B_k) \lambda^k$ est inversible. Comme P est régulier on peut écrire pour $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$

$$Q_\lambda = P_\lambda + B_\lambda = (I_X + B_\lambda P_\lambda^{-1}) P_\lambda$$

par conséquent Q_λ sera inversible quand $\| B_\lambda P_\lambda^{-1} \|_{X \to X} \leqslant \frac{1}{2}$. On a

$$\| B_\lambda P_\lambda^{-1} \|_{X \to X} \leqslant \sum_{k=0}^{m} | \lambda |^k \| B_k P_\lambda^{-1} \|_{X \to X}$$

et en passant par l'intermédiaire des espaces D_{θ_k}

$$\leqslant \sum | \lambda |^k \| B_k \|_{D_{\theta_k} \to X} \| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D_{\theta_k}}$$

L'inégalité d'interpolation permet de majorer $\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D_{\theta_k}}$, en effet on a par hypothèse

$$\varpi_1 = \| P_\lambda^{-1} \|_{X \to X} \leqslant \frac{C}{| \lambda |^{m-1} | \operatorname{Re} \lambda |}$$

et

$$\bar{w}_0 = \| P_\lambda^{-1} \|_{X\to D} \leqslant \frac{C \mid \lambda \mid^m}{\mid \lambda \mid^{m-1} \mid \operatorname{Re} \lambda \mid}$$

et par conséquent

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X\to D\theta_k} \leqslant C \frac{\mid \lambda \mid^{1-m\theta_k}}{\mid \operatorname{Re} \lambda \mid} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma. \tag{6.2}$$

En combinant (6.1) et (6.2) il vient

$$\| B_\lambda P_\lambda^{-1} \|_{X\to X} \leqslant C \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mid \lambda \mid^{k+1-m\theta_k}}{\mid \operatorname{Re} \lambda \mid},$$

soit en posant $1/d = \sup_{k=0,,m-1}(k + 1 - m\theta_k)$,

$$\| B_\lambda P_\lambda^{-1} \|_{X\to X} \leqslant C \frac{\mid \lambda \mid^{1/d}}{\mid \operatorname{Re} \lambda \mid} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma.$$

Donc si $1/d < 1$ on trouve que Q_λ est inversible dans une d-région

$$C \frac{\mid \lambda \mid^{1/d}}{\mid \operatorname{Re} \lambda \mid} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$$

et y vérifie

$$\| Q_\lambda^{-1} \|_{X\to D} \leqslant C \frac{\mid \lambda \mid}{\mid \operatorname{Re} \lambda \mid}$$

et à fortiori (4.4). Si de plus $1/d \leqslant 0$ alors le problème reste régulier car Q_λ sera inversible dans un demi plan et vérifiera de façon évidente les inégalités de la Définition 6.1.

Appliquons ce théorème à l'étude de la perturbation du générateur d'un semi groupe fortement continu, on obtient le

COROLLAIRE 6.3. *Soit A le générateur d'un semi groupe fortement continu et D son domaine muni de la topologie du graphe. On se donne un opérateur B continu de $D_\theta = (D, X)_\theta$ dans X avec $0 < \theta \leqslant 1$. Alors l'opérateur $D_t \otimes I - \delta_0 \otimes (A + B)$ satisfait à la condition $C(d)$ avec $1/d = 1 - \theta$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent, il suffit donc de vérifier que le problème de Cauchy est régulier pour l'opérateur $D_t - A$. Il est bien connu (cf [27]) que la résolvante $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ existe dans un demi plan $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$ et y

vérifie les conditions

$$\| R_\lambda \|_{X \to X} = O\left(\frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}\right) \quad \text{et} \quad \| R_\lambda \|_{X \to D} = O\left(\frac{|\lambda|}{\operatorname{Re} \lambda}\right).$$

On termine par la

Remarque 6.4. L'exemple très simple qui suit montre qu'on ne peut en général améliorer les résultats précédents.

On prend $X = L^2(R)$, $A = i(d^4/dx^4)$, $D = H^4(R)$, ainsi l'opérateur $D_t - A$ est du type de Schrodinger et il est trivial de vérifier que A est générateur d'un semi groupe fortement continu dans X. Perturbons A par l'opérateur d'ordre 2 $B = -d^2/dx^2$ qui est continu de $H^2(R) = (H^4, L^2)_{1/2}$ dans L^2. Par transformation de Fourier dans $L^2(R)$ on constate que le spectre de l'opérateur $A + B$ est l'image numérique pour ξ réel du polynôme $-i\xi^4 + \xi^2$, par conséquent $(\lambda - A - B)^{-1}$ existe dans une d-région avec $d = \frac{1}{2}$ mais dans aucune d-région pour $d > \frac{1}{2}$.

Chapitre II: Applications à Quelques Problèmes Mixtes

Notations

On désigne par Ω un ouvert de R^n, son bord Γ est supposé de classe C^∞ et Ω est situé localement d'un seul coté de Γ. On note de façon classique, $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω dont les dérivées jusqu'à l'ordre s sont dans $L^2(\Omega)$ $H_0^s(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$, la norme sur $H^s(\Omega)$ est notée $\| \ \|_{s,\Omega}$ ou $\| \ \|_\Omega$ si $s = 0$, et on omettra l'indication de l'ouvert quand il n'y aura pas de confusion possible. On note par γ_k la trace sur Γ de la dérivée normale intérieure d'ordre k. Les opérateurs aux dérivées partielles seront toujours supposés à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

1. Perturbation de Certains Problèmes Corrects

Soit

$$A = A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad \left(\text{avec } D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}\right)$$

un opérateur fortement elliptique et formellement auto-adjoint sur Ω.

On suppose Ω borné, alors il est bien connu que $A(x, D)$ définit un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$ quand on prend pour domaine $D = H^{2m} \cap H_0{}^m$. Avec ces hypothèses l'opérateur d'évolution $D_t{}^2 - A(x, D)$ est correct au sens de Pétrowsky (cf [18]). On se propose d'étudier l'effet d'une perturbation de A par des termes d'ordre inférieur. On se donne un opérateur d'ordre $k < 2m$

$$B = \sum_{|\alpha| \leqslant k} b_\alpha(x) D^\alpha,$$

alors on va démontrer que si $k \leqslant m$ le problème de Cauchy reste régulier pour l'opérateur $D_t{}^2 - (A + B)$ par contre des que $k > m$ on perd en général la régularité. De façon précise on a le

THÉORÈME 1.1. *Si* $k > m$ *l'opérateur* $D_t{}^2 - (A(x, D) + B(x, D))$ *satisfait à la condition* $C(d)$ *avec* $d = m/k - m$, $X = L^2(\Omega)$ *et* $D = H^{2m} \cap H_0{}^m$. Si $k \leqslant m$ *le problème de Cauchy est régulier au sens de la Définition* 6.1, *Chap. I*, §2.

Démonstration. On applique le théorème de perturbation abstrait du Chapitre I à l'opérateur $D_t{}^2 - A$. Pour cela on doit vérifier que le problème de Cauchy est régulier pour cet opérateur. L'opérateur A est auto-adjoint et on peut le supposer négatif sans restreindre la généralité, ainsi son spectre est inclus dans $]-\infty, 0]$. D'après la théorie spectrale on a

$$\|(\mu - A)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \begin{cases} 1/|\mu| & \text{si} \quad \operatorname{Re}\mu \geqslant 0 \\ 1/|\operatorname{Im}\mu| & \text{si} \quad \operatorname{Re}\mu < 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\|(\lambda^2 - A)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \begin{cases} 1/|\lambda|^2 & \text{si} \quad |\arg\lambda| \leqslant \pi/4 \\ 1/2\,|\operatorname{Re}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda| & \text{si} \quad |\arg\lambda| > \pi/4 \end{cases}$$

soit finalement

$$\|(\lambda^2 - A)^{-1}\|_{X\to X} = O\left(\frac{1}{|\lambda| \operatorname{Re}\lambda}\right) \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{1.1}$$

D'autre part $A - I$ est un isomorphisme de D sur X, par conséquent

$$\|x\|_D \sim \|x\|_X + \|Ax\|_X \qquad \text{pour} \quad x \in D,$$

et il vient en utilisant (1.1)

$$\|(\lambda^2 - A)^{-1}\|_{X\to D} = O\left(\frac{|\lambda|^2}{|\lambda| \operatorname{Re}\lambda}\right) \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{1.2}$$

Donc le problème est régulier grâce à (1.1) et (1.2), il reste à vérifier que l'opérateur de perturbation B satisfait à la condition (H) du théorème abstrait. L'opérateur $B(x, D)$ est continu de H^k dans L^2, or (en prenant par exemple la méthode d'interpolation holomorphe (cf [17])) on a $H^k = [H^{2m}, L^2]_\theta$ avec $\theta = 1 - k/2m$ et à fortiori $D_\theta = [D, L^2]_\theta \subset H^k$. L'application du théorème abstrait montre que l'opérateur $D_t^2 - (A + B)$ satisfait à la condition $C(d)$ avec $1/d = 1 - 2\theta = k - m/m$ et en particulier que le problème reste régulier si $k \leqslant m$.

Remarque 1.2. L'étude de ce problème d'évolution est classique dans le cas $k \leqslant m$ (voir par exemple [15 et 16]) mais l'intérêt du théorème précédent est de mettre en évidence la raison pour laquelle on se limite d'habitude à une perturbation d'ordre inférieur au degré de l'opérateur divisé par deux.

Enfin profitons de cette occasion pour corriger la valeur manifestement erronée de d dans l'annonce de ce théorème dans la troisième note [2]: il faut remplacer $2m/2m - k$ par $m/k - m$.

2. Problèmes du Type des Ondes Itérées avec les Conditions de Dirichlet au Bord

1. *Enoncé du Théorème*

On se donne un opérateur différentiel linéaire du type des ondes itérées, c'est à dire de la forme:

$$P = P(D_t, D_x, x) = D_t^4 - 2D_t^2 A(x, D_x) + B(x, D_x)$$

avec la notation $D_x = (\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$ et où A et B satisfont aux hypothèses H_1 et H_2 :

(H_1) *$A(x, D_x)$ est un opérateur linéaire d'ordre 2 dont la partie principale vérifie pour une certaine constante $c > 0$*

$$A^0(x, \xi) = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi^i \xi^j > c \mid \xi \mid^2 \qquad \textit{pour} \quad \xi \in R^n \quad \textit{et} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

(H_2) *$B(x, D_x)$ est un opérateur linéaire d'ordre 4 dont la partie principale vérifie*

$$B^0(x, \xi) = (A^0(x, \xi))^2.$$

EXEMPLE. $P = (D_t^2 - \Delta)^2$ avec $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$.

De façon un peu vague, disons que l'on étudie le problème mixte suivant: Etant donnés $f(t, x)$ et les conditions initiales $v_k(x)$, trouver $u(t, x)$ "dans une classe convenable" vérifiant

$$P(D_t, D_x, x)\, u(t, x) = f(t, x) \qquad \text{dans} \quad R^+ \times \Omega,$$
$$\gamma_0 u = \gamma_1 u = 0,$$
$$D_t^k u(0, x) = v_k(x) \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

On montrera par un contre exemple que l'on ne peut avoir un problème régulier en la variable t, néanmoins on va démontrer que ce problème est bien posé dans les distributions de Gevrey, De façon précise on a le

THÉORÈME 1.1. *On suppose que les opérateurs A et B satisfont aux hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *et que l'ouvert Ω est borné. Alors l'opérateur*

$$P = D_t^4 \otimes I - 2D_t^2 \otimes A + \delta_0 \otimes B$$

satisfait à la condition $C(d)$ avec $X = L^2(\Omega)$, $D = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et $d = 6/5$.

Démonstration. En utilisant le critère du Théorème 4.4 (Chap I, §2) tout revient à étudier dans quelle région Λ l'opérateur

$$P_\lambda = \lambda^4 - 2\lambda^2 A(x, D) + B(x, D)$$

est un isomorphisme de D sur X. Remarquons pour commencer que l'on peut se limiter à étudier l'injectivité de P_λ car ce problème aux limites est d'indice nul. En effet l'opérateur B est fortement elliptique et on a les conditions aux limites de Dirichlet, donc d'après un théorème de Gärding (cf [18]) l'opérateur P_λ est d'indice nul. Par conséquent on est ramené à démontrer le

THÉORÈME 1.2. *Il existe une constante C et une d-région Λ ($d = 6/5$) dans laquelle on a*

$$c_\theta \| u \|_{4,\Omega} \leqslant C \| P_\lambda u \| \qquad \textit{pour} \quad u \in D, \tag{1.1}$$

avec $\theta = \arg \lambda$ ($|\theta| < \pi/2$), $c_\theta = \cos^3\theta$. En particulier on a

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D} = O(|\lambda|^{1/2}) \qquad \textit{dans} \quad \Lambda.$$

La démonstration de théorème est assez longue, aussi on commence par en indiquer le principe. Il s'agit de démontrer une inégalité à priori pour un opérateur elliptique qui dépend d'un paramètre complexe λ dont l'argument θ varie dans l'intervalle *ouvert* $]-\pi/2, \pi/2[$. Selon une méthode classique, on procède en trois étapes: (a) coefficients constants dans $\bar{R}_+^n$, (b) coefficients variables dans $\bar{R}_+^n$, (c) globalisation au moyen d'une partition de l'unité sur Ω. Mais, et c'est là la difficultée nouvelle, il faut évaluer à chaque étape le comportement en fonction de λ des constantes qui interviennent dans les majorations, et ceci particulièrement pour $|\arg \lambda| \to \pi/2$. Pour cette raison il est commode d'utiliser des normes qui dépendent du paramètre λ, comme dans [1], et d'autre part pour la globalisation on doit utiliser une famille de partition de l'unité sur Ω qui devient de plus en plus fine quand $|\arg \lambda| \to \pi/2$.

2. *Cas où* $\Omega = R_+^n$ *et* $P = (D_t^2 - \Delta)^2$

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de R^n, on utilise sur $H^m(\mathcal{O})$ la norme suivante qui dépend du paramètre complexe μ

$$\| u \|_{m,\mu,\mathcal{O}}^2 = \sum_{k=0}^{m} | \mu^2 |^{m-k} \| u \|_{k,\mathcal{O}}^2$$

si $m = 0$ on écrit simplement $\| \ \|_{\mathcal{O}}$ et on note $(\, , \,)$ le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{O})$. Dans ce numéro il s'agit de normes sur $R_+^n = \{x; x_n > 0\}$, aussi on omettra l'indication de l'ouvert dans la norme.

Dans le cas particulier où $A(x, D) = \Delta$ on a la proposition suivante qui est le point crucial de la démonstration du Théorème 1.2.

PROPOSITION 2.1. *Il existe une constante C pour laquelle on a*

$$\cos^6 \theta \sum_{k=0}^{2} | \lambda^4 |^k \| \Delta^{2-k} u \|^2 \leqslant C \| (\lambda^2 - \Delta)^2 u \|^2 \tag{2.1}$$

pour tout $u \in D = H^4 \cap H_0^2$ *et* λ *avec* $\operatorname{Re} \lambda > 0$ *et* $\theta = \arg \lambda$.

La démonstration découle d'une suite de lemmes. On commence par un lemme relatif à l'équation des ondes ordinaire. On désigne dans toute la suite par C diverses constantes *indépendantes du paramètre* λ.

Lemme 2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait*

$$C \cos^2 \theta(|\lambda|^4 \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2) \leqslant \|(\lambda^2 - \Delta)u\|^2 + |\lambda|^2 \cos\theta \left| \int_\Gamma \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u} \right| \tag{2.2}$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^{\,n})$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *et* $\Gamma = R^{n-1}$.

Démonstration. En dévellopant le carré scalaire, on trouve

$$\|(\lambda^2 - \Delta)u\|^2 = |\lambda|^4 \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda^2(u, \Delta u)). \tag{2.3}$$

Pour établir la majoration on doit distinguer deux cas:

1*er Cas.* $|\theta| < \pi/4$. La formule de Green s'écrit

$$(u, \Delta u) = -\sum \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 + \int_\Gamma \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u}$$

d'où en prenant la partie reelle

$$-\operatorname{Re}(\lambda^2(u, \Delta u)) = (\operatorname{Re}\lambda^2)\left(\sum \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2\right) - \operatorname{Re}\left(\lambda^2 \cdot \int_\Gamma \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u}\right)$$

mais comme dans ce 1er cas on a $\operatorname{Re}\lambda^2 > 0$, on en déduit

$$-\operatorname{Re}(\lambda^2(u, \Delta u)) \geqslant -\operatorname{Re}\left(\lambda^2 \cdot \int \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u}\right)$$

et en reportant dans (2.3) il vient

$$|\lambda|^2 \left| \int_\Gamma \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u} \right| + \|(\lambda^2 - \Delta)u\|^2 \geqslant |\lambda|^4 \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2$$

d'où découle immédiatement l'inégalité (2.2) pour $|\theta| < \pi/4$.

Mais évidemment l'utilité de l'inégalité (2.2) réside dans le

2*ème Cas.* $\pi/4 \leqslant |\theta| \leqslant \pi/2$. On peut aussi écrire la formule de Green sous la forme

$$(u, \Delta u) = (\Delta u, u) + 2i \operatorname{Im} \int_\Gamma \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u}$$

d'où

$$\operatorname{Re}(\lambda^2(u, \Delta u)) = (\operatorname{Re}\lambda^2)(u, \Delta u) + i \operatorname{Im}\lambda^2 \cdot \operatorname{Im} \int \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u}$$

en majorant en module il vient, en utilisant l'inégalité évidente

$$2\,|\operatorname{Re}\lambda^2|\,|(u, \Delta u)| \leqslant |\lambda|^2\,|\operatorname{Re}\lambda^2|\,\|u\|^2 + \frac{|\operatorname{Re}\lambda|^2}{|\lambda|^2}\|\Delta u\|^2,$$

et en reportant dans (2.3)

$$\begin{aligned}(|\lambda|^2 - |\operatorname{Re}\lambda^2|)\left(|\lambda|^2\|u\|^2 + \frac{1}{|\lambda|^2}\|\Delta u\|^2\right)& \\ \leqslant \|(\lambda^2 - \Delta)u\|^2 + 4\,|\lambda|^2\cos\theta&\left|\int \gamma_0 u\cdot\overline{\gamma_1 u}\right|,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité (2.2), en remarquant que dans ce 2éme cas

$$|\lambda|^2 - |\operatorname{Re}\lambda^2| = 2\,|\lambda|^2\cos^2\theta.$$

En itérant, on va en déduire le

LEMME 2.3. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\begin{aligned}C\cos^4\theta\left(\sum_{k=0}^{2}|\lambda^4|^k\|\Delta^{2-k}u\|^2\right)& \\ \leqslant \|(\lambda^2-\Delta)^2u\|^2 + |\lambda|^2\cos\theta&\left|\int\gamma_2 u\cdot\overline{\gamma_3 u}\right|,\end{aligned}$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^n) \cap H_0^2$ *et* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Démonstration. On applique le lemme précédent à $v = (\lambda^2 - \Delta)u$ pour $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^n) \cap H_0^2$, il vient

$$\begin{aligned}C\cos^2\theta(|\lambda|^4\|(\lambda^2-\Delta)u\|^2 + \|(\lambda^2-\Delta)\,\Delta u\|^2)& \\ \leqslant \|(\lambda^2-\Delta)^2u\| + |\lambda|^2\cos\theta&\left|\int\gamma_2 u\cdot\overline{\gamma_3 u}\right|,\end{aligned}$$

on minore chaque terme du 1er membre en utilisant encore le Lemme 2.2:

$$C\cos^2\theta(|\lambda|^2\|u\| + \|\Delta u\|^2) \leqslant \|(\lambda^2-\Delta)u\| \qquad \text{car} \quad u \in H_0^2$$

et

$$\begin{aligned}C\cos^2\theta\,(|\lambda|^2\|\Delta u\|^2 + \|\Delta^2 u\|^2)& \\ \leqslant \|(\lambda^2-\Delta)\,\Delta u\|^2 + |\lambda|^2\cos\theta&\left|\int\gamma_2 u\cdot\overline{\gamma_3 u}\right|,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité (2.4) en combinant ces trois dernières inégalités.

Pour démontrer la Proposition 2.1 il reste à majorer le terme $| \int \gamma_2 u \cdot \overline{\gamma_3 u} |$, c'est le

LEMME 2.4. *Il existe une constante C pour laquelle on a*

$$| \lambda |^2 \cos \theta \left| \int \gamma_2 u \cdot \overline{\gamma_3 u} \right| \leqslant \frac{C}{\cos^2 \theta} \|(\lambda^2 - \Delta)^2 u \|^2 \tag{2.6}$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+{}^n) \cap H_0{}^2$ *et* $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

La démonstration de ce lemme se fera au moyen de deux sous lemmes. Auparavant introduisons les notations suivantes:

On note la transformation de Fourier par

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx \qquad \text{où} \quad x \cdot \xi = \sum x_i \xi_i$$

et la transformation de Fourier partielle

$$\hat{u}(\xi', x_n) = \int_{R^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'} u(x', x_n)\, dx' \qquad \text{avec} \quad x = (x', x_n),$$

on note la transformée de Laplace par une majuscule, par exemple

$$\hat{U}(\xi', p) = \int_0^{+\infty} e^{-px_n} \hat{u}(\xi', x_n)\, dx_n .$$

Pour abréger, on pose

$$u_k(x') = \gamma_k u(x') = \frac{\partial^k}{\partial x_n{}^k} u(x', x_n) \Big|_{x_n=0} .$$

Le lemme suivant donne l'expression des traces u_2 et u_3 en fonction du 2ème membre.

LEMME 2.5. *On définit la fonction f par* $f(x', x_n) = (\lambda^2 - \Delta)^2\, u(x, x_n)$ *si* $x_n \geqslant 0$ *et* $f = 0$ *si* $x_n < 0$. *Alors pour* $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+{}^n) \cap H_0{}^2$ *on a avec les notations précédentes*

$$\hat{u}_2(\xi') = \frac{\partial \hat{F}}{\partial p} (\xi', \zeta)$$

et

$$\hat{u}_3(\xi') = \hat{F}(\xi', \zeta) - \zeta \frac{\partial \hat{F}}{\partial p} (\xi', \zeta)$$

où ζ *désigne la racine carrée de* $\lambda^2 + | \xi' |^2$ *vérifiant* $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

Démonstration. On note encore u le prolongement par 0 pour $x_n < 0$ de $u(x', x_n)$. On a au sens des distributions sur R^n

$$(\lambda^2 - \Delta)^2 u = f - u_3 \otimes \delta_{(x_n=0)} - u_2 \otimes \delta'_{(x_n=0)} ,$$

et par transformation de Fourier en x' et de Laplace en x_n il vient

$$(\lambda^2 + |\xi'|^2 - p^2)^2 \hat{u}(\xi', p) = \hat{F}(\xi', p) - \hat{u}_3(\xi') - p\hat{u}_2(\xi').$$

Les deux membres sont des fonctions holomorphes de p pour $\operatorname{Re} p > 0$, le premier membre ayant un zéro d'ordre $\geqslant 2$ pour $p = \zeta$ on a donc aussi

$$\hat{u}_3(\xi') + \zeta\hat{u}_2(\xi') = \hat{F}(\xi', \zeta)$$

et

$$\hat{u}_2(\xi') = \frac{\partial \hat{F}}{\partial p}(\xi', \zeta)$$

d'où l'on tire les expressions cherchées de $\hat{u}_2$ et $\hat{u}_3$.

Revenons à la démonstration du Lemme 2.4. L'égalité de Parseval s'écrit

$$(2\pi)^{n-1} \int u_2(x') \overline{u_3(x')}\, dx' = \int \hat{u}_2(\xi') \overline{\hat{u}_3(\xi')}\, d\xi',$$

on majore cette dernière intégrale en utilisant les expressions trouvées pour $\hat{u}_2$ et $\hat{u}_3$ il vient

$$(2\pi)^{n-1} \left| \int u_2 \bar{u}_3 \right| \leqslant \int |\zeta| \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial p} \right|^2 d\xi' + \int \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial p} \cdot \hat{F} \right| d\xi'. \tag{2.7}$$

Or par définition on a

$$\hat{F}(\xi', \zeta) = \int_{R_+} e^{-\zeta x_n} \hat{f}(\xi', x_n)\, dx_n$$

et

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial p}(\xi', \zeta) = \int_{R_+} -x_n e^{-\zeta x_n} \hat{f}(\xi', x_n)\, dx_n$$

d'où l'on déduit en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$|\hat{F}(\xi', \zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Re} \zeta|} \int_{R_+} |\hat{f}(\xi', x_n)|^2\, dx_n \tag{2.8}$$

et

$$\left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial p}(\xi', \zeta) \right|^2 \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Re} \zeta|^3} \int_{R_+} |\hat{f}(\xi', x_n)|^2 \, dx_n \,. \tag{2.9}$$

En reportant (2.8) et (2.9) dans (2.7) on trouve

$$\left| \int_\Gamma u_2 \overline{u_3} \right| \leqslant C \iint \left(\frac{|\zeta|}{|\operatorname{Re} \zeta|^3} + \frac{1}{|\operatorname{Re} \zeta|^2} \right) |\hat{f}(\xi', x_n)|^2 \, d\xi' \, dx_n \,. \tag{2.10}$$

On est donc conduit à préciser le comportement de Re ζ en fonction de λ, c'est le

LEMME 2.6. *Soit* ζ *la racine carrée de* $\lambda^2 + |\xi'|^2$ *vérifiant* $\operatorname{Re} \zeta > 0$, *alors pour* $\operatorname{Re} \lambda > 0$ *on a*

$$|\operatorname{Re} \zeta| \geqslant \cos \theta (|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{1/2} \tag{2.11}$$

et évidemment

$$|\zeta| \leqslant (|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{1/2}.$$

Admettons provisoirement ce lemme et finissons la démonstration de la Proposition 2.1. En combinant (2.10) et (2.11) il vient

$$\int |u_2 \overline{u_3}| \leqslant C \iint \frac{|\hat{f}(\xi', x_n)|^2}{\cos^3 \theta (|\lambda|^2 + |\xi'|^2)} \, d\xi' \, dx_n$$

d'où

$$|\lambda|^2 \cos \theta \left| \int u_2 \overline{u_3} \right| \leqslant C \frac{1}{\cos^2 \theta} \iint \frac{|\lambda|^2}{(|\lambda|^2 + |\xi'|^2)} |\hat{f}(\xi', x_n)|^2 \, d\xi' \, dx_n$$

soit encore

$$\leqslant C \frac{1}{\cos^2 \theta} \| f \|^2,$$

ce qui démontre le Lemme 2.4 et en reportant (2.6) dans (2.4) on obtient finalement l'inégalité (2.1).

Il reste à démontrer le Lemme 2.6, ce qui est un simple exercice de trigonométrie. Par raison d'homogénéité il suffit de prouver (2.11) quand $|\lambda|^2 + |\xi'|^2 = 1$ et on peut aussi supposer que $0 \leqslant \theta < \pi/2$. Posons alors $r = |\lambda|^2$, dans ces conditions on a

$$\zeta^2 = \lambda^2 + |\xi'|^2 = re^{2i\theta} + 1 - r,$$

et en posant $\zeta = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 0$, il vient

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1 - r + r\cos 2\theta = 1 - 2r\sin^2\theta \tag{2.12}$$

et

$$2\alpha\beta = r\sin 2\theta = 2r\sin\theta\cos\theta.$$

Raisonnons par l'absurde, si on a $\alpha < \cos\theta$ alors l'égalité précédente implique

$$r\sin\theta < \beta$$

et par conséquent

$$\alpha^2 - \beta^2 < \cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1 - (1 + r^2)\sin^2\theta$$

d'où

$$< 1 - 2r\sin^2\theta$$

ce qui contredit l'égalité (2.12), on a donc nécessairement $\operatorname{Re}\zeta = \alpha \geqslant \cos\theta$.

3. *Cas où A et B Sont à Coefficients Variables dans* $\overline{R}_+^n$

En utilisant le procédé de Korn, on passe au cas des opérateurs à coefficients variables:

$$P_\lambda = \lambda^4 - 2\lambda^2 A(x, D) + B(x, D).$$

PROPOSITION 3.1. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$C\cos^3\theta \,\| u \|_{4,\lambda} \leqslant \| P_\lambda u \| + | \lambda |^2 r \| u \|_{2,1/r} + r \| u \|_{4,1/r} \tag{3.1}$$

pour $u \in \mathscr{D}(\overline{R}_+^n) \cap H_0^2$, supp $u \subset B(0, r)$ *et* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 1$.

Démonstration. On note les parties principales à l'origine par

$$A_0^0 = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(0)D^\alpha, \qquad B_0^0 = \sum_{|\alpha|=4} b_\alpha(0)D^\alpha = (A_0^0)^2.$$

On peut toujours se ramener au cas $A_0^0 = \Delta$ et $B_0^0 = \Delta^2$ par un changement de variables linéaire qui conserve l'hyperplan $x_n = 0$. On suppose que la fonction u à son support dans la boule $B(0, r)$ de rayon r centrée à l'origine.

Commençons par un lemme sur l'équivalence des normes dans la boule $B(0, 1)$.

Lemme 3.2. *Il existe des constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que*

$$C_2 \| u \|^2_{4,\lambda} \leqslant \sum_{k=0}^{2} | \lambda^4 |^{2-k} \| \Delta^k u \| \leqslant C_1 \| u \|^2_{4,\lambda} \tag{3.2}$$

pour tout $u \in \mathscr{D}(R_+^n) \cap H_0^2$ avec supp $u \subset B(0, 1)$ *et* $| \lambda | \geqslant 1$.

Démonstration. On désigne par V l'ouvert borné $B(0, 1) \cap R_+^n$, il est bien connu que pour un c assez grand l'opérateur $\Delta^2 + c$ est un isomorphisme de $H^4(V) \cap H_0^2(V)$ sur $L^2(V)$. On en déduit, en utilisant les inégalités d'interpolation dans les espaces H^s, que l'on a bien (3.2).

Récrivons l'inégalité de la Proposition 2.1 en tenant compte de (3.2)

$$C \cos^3 \theta \| u \|_{4,\lambda} \leqslant \|(\lambda^2 - \Delta)^2 u \|. \tag{3.3}$$

Alors l'inégalité (3.1) découle immédiatement de (3.3) et du

Lemme 3.3. *Il existe une constante C pour laquelle*

$$\| P_\lambda u - (\lambda^2 - \Delta)^2 u \| \leqslant C | \lambda |^2 r \| u \|_{2,1/r} + Cr \| u \|_{4,1/r}$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^n)$ avec supp $u \subset B(0, r)$ *où* $0 < r \leqslant 1$ *et* $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$.

Démonstration. On a

$$\| P_\lambda u - (\lambda^2 - \Delta)^2 u \| \leqslant | \lambda^2 | \|(A(x, D) - A_0^0) u \| + \|(B(x, D) - B_0^0) u \|$$

et grace à la régularité des coefficients de A et B

$$\leqslant C | \lambda |^2 (r \| u \|_2 + \| u \|_1) + C(r \| u \|_4 + \| u \|_3)$$

ce qui peut encore s'écrire avec les normes dépendant du paramètre $1/r$

$$\leqslant C | \lambda |^2 r \| u \|_{2,1/r} + Cr \| u \|_{4,1/r} .$$

La Proposition 3.1 est complètement démontrée.

4. *Fin de la Démonstration du Théorème* 1.2

On se place maintenant dans l'ouvert borné Ω, commençons par construire une famille de partitions de l'unité dépendant d'un paramètre r.

Tout d'abord on aura besoin de la

Remarque 4.1. Il est possible de construire un recouvrement de Ω par des domaines de cartes locales, de façon à ce que toute boule $B(x, r) \cap \Omega$ soit incluse dans le domaine d'au moins une carte dès que le rayon r est assez petit mais indépendant du centre x.

Par exemple on recouvre R^n par le réseau de tous les cubes ouverts de cotés de longueur 2 et dont les sommets ont des coordonnées entières. Par une homothétie de centre 0 et de rapport suffisamment petit h, on transforme ce recouvrement en un recouvrement par des domaines de cartes locales de Ω et par construction toute boule $B(x, h/2)$ est incluse dans l'un de ces domaines. On fixe pour la suite un tel système de cartes et on peut toujours supposer que les difféomorphismes associés transportent toute boule $B(x, r) \cap \Omega$ à l'intérieur de $B(0, r) \cap R_+^n$ pour $r \leqslant h/2$.

Construisons maintenant une famille de partitions de l'unité "uniformes" sur R^n. On fixe une fonction $\beta \in \mathscr{D}(R^n)$ avec $\beta(x) > 0$ si $|x| \leqslant 1$ et $\beta(x) = 0$ si $|x| \geqslant 3/2$, et on pose

$$\gamma(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}^n} \beta(x - j).$$

Il est clair que $\gamma(x) > 0$, $\gamma \in C^\infty(R^n)$ et $\gamma(x + j) = \gamma(x)$ pour $x \in R^n$ et $j \in Z^n$. On définit $\alpha(x) = \beta(x)/\gamma(x)$ et on vérifie immédiatement que les fonctions $\alpha_j(x) = \alpha(x - j)$ $j \in Z^n$ réalisent une partition de l'unité de R^n relative au recouvrement par les boules $B(j, 3/2)$. Finalement on définit par homothétie la famille de partitions dépendant du paramètre r

$$\alpha_{j,r}(x) = \alpha\left(\frac{3}{2r}\left(x - \frac{2r}{3} j\right)\right) \qquad j \in \mathbf{Z}^n$$

subordonnée au recouvrement de R^n par les boules de rayons r: $B(2r/3\, j, r)$. Grace à l'invariance par translation, il existe une constante C telle que

$$\sup_{x \in R^n} |D^p \alpha_{j,r}(x)| \leqslant \frac{C}{r^{|p|}} \qquad \text{pour} \quad |p| \leqslant 4 \quad \text{et} \quad 0 < r \leqslant \frac{h}{2}.$$

Pour alléger les notations on note dans la suite par α_j la fonction $\alpha_{j,r}$ et on supposera toujours que $r \leqslant h/2$ de façon à ce que chaque boule $B_j = B(2r/3\, j, r) \cap \Omega$ soit incluse dans le domaine d'une carte.

On pose $u_j = \alpha_j \cdot u$, ainsi $u = \sum_j u_j$, avec ces notations on a le

LEMME 4.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$C \cos^3 \theta \| u_j \|_{4,\lambda} \leqslant \| P_\lambda u \|_{B_j} + r \| u \|_{4,1/r,B_j}$$

$$+ | \lambda |^2 \left(r \| u \|_{2,1/r\ B_j} + \frac{1}{r} \| u \|_{1,1/r,B_j} \right) \tag{4.1}$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)$, $j \in \mathbf{Z}^n$, $r > 0$, $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 1$.

Démonstration. La fonction u_j à son support dans B_j qui est incluse dans une carte, on peut ainsi lui appliquer l'inégalité (3.1):

$$C \cos^3 \theta \| u_j \|_{4,\lambda} \leqslant \| P_\lambda u_j \| + | \lambda |^2 r \| u_j \|_{2,1/r} + r \| u_j \|_{4,1/r} . \tag{4.2}$$

D'autre part, puisque $u_j = \alpha_j \cdot u$, on vérifie aisément que

$$\| u_j \|_{k,1/r} \leqslant C \| u \|_{k,1/r,B_j} \qquad k = 0,..., 4$$

et

$$\| P_\lambda \alpha_j u - \alpha_j P_\lambda u \| \leqslant C | \lambda |^2 \frac{1}{r} \| u \|_{1,1/r,B_j} + C \frac{1}{r} \| u \|_{3,1/r,B_j} .$$

En combinant ces deux dernières inégalités avec (4.2) on trouve (4.1).

Revenons à la démonstration du Théorème 1.2. Pour obtenir une inégalité sur Ω, on fait la somme en j des inégalités (4.1) en remarquant que chaque boule B_j en rencontre au plus 2^n autres et que

$$\| u \|_{4,\lambda,\Omega} \leqslant \sum_j \| u_j \|_{4,\lambda,\Omega} .$$

On trouve avec une constante $C > 0$ telle que

$$C \cos^3 \theta \| u \|_{4,\lambda} \leqslant \| P_\lambda u \| + r \| u \|_{4,1/r} + \frac{1}{r} \| u \|_{3,1/r}$$

$$+ | \lambda |^2 \left(r \| u \|_{2,1/r} + \frac{1}{r} \| u \|_{1,1/r} \right) \tag{4.3}$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{\Omega}) \cap H_0^2$ et $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 1$.

Pour obtenir l'inégalité (1.1), il reste à déterminer pour quelles valeurs de λ on peut faire passer au premier membre de (4.3) les termes de perturbation. En comparant les coefficients des normes $\| \ \|_k$ $k = 0,..., 4$

on trouve les cinq conditions suivantes, où l'on pose pour abréger $c_\theta = \cos^3 \theta$,

$$Cc_\theta - r \geqslant \tfrac{1}{2} Cc_\theta\,,$$

$$Cc_\theta \mid \lambda \mid - 1 - \frac{1}{r} \geqslant \tfrac{1}{2} C \mid \lambda \mid c_\theta\,,$$

$$Cc_\theta \mid \lambda \mid^2 - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \mid \lambda \mid^2 r \geqslant \tfrac{1}{2} C \mid \lambda \mid^2 c_\theta\,,$$

$$Cc_\theta \mid \lambda \mid^3 - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \mid \lambda \mid^2 - \frac{\mid \lambda \mid^2}{r} \geqslant \tfrac{1}{2} C \mid \lambda \mid^3 c_\theta\,,$$

$$Cc_\theta \mid \lambda \mid^4 - \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^4} - \frac{\mid \lambda \mid^2}{r} - \frac{\mid \lambda \mid^2}{r^2} \geqslant \tfrac{1}{2} C \mid \lambda \mid^4 c_\theta\,.$$

On est donc conduit à prendre $r = \frac{1}{2} Cc_\theta$ et il vient pour λ la condition:

$$\mid \lambda \mid \geqslant \frac{C}{c_\theta^2}$$

pour une certaine constante $C > 0$, et comme $c_\theta = \cos^3 \theta = \mid \operatorname{Re} \lambda / \lambda \mid^3$, on trouve finalement que λ doit satisfaire à une inégalité de la forme

$$\operatorname{Re} \lambda \geqslant a \mid \lambda \mid^{5/6} + b$$

qui définie une d-région Λ ($d = 6/5$) où l'on a

$$\cos^3 \theta \, \| u \|_{4,\lambda,\Omega} \leqslant C \, \| P_\lambda u \|_\Omega$$

pour $u \in D$ et $\lambda \in \Lambda$. Ce qui démontre en particulier l'inégalité (1.1), de plus, pour $\lambda \in \Omega$ on a

$$\| P_\lambda^{-1} \|_{X \to D} = O(\mid \lambda \mid^{1/2})$$

car

$$\frac{1}{\cos^3 \theta} = \frac{\mid \lambda \mid^3}{\mid \operatorname{Re} \lambda \mid^3} = O(\mid \lambda \mid^{1/2}) \qquad \text{dans} \quad \Lambda.$$

Remarque 4.3. On ignore si la valeur trouvée pour d (6/5) est optimum, par contre on montrera au numéro suivant que l'on ne peut améliorer de façon qualitative les résultats de régularité en t des solutions.

Remarque 4.4. On aurait pu étudier avec les mêmes méthodes, le cas plus général des opérateurs du type des ondes itérées m fois

$((D_t^2 - \Delta)^m)$ avec les conditions aux limites de Dirichlet $\gamma_k u = 0$ $k = 0, \ldots, m - 1$. On s'est limité au cas $m = 2$ car le cas général conduit à des développements techniques fastidieux qui n'utilisent rien de nouveaux du point de vue des idées.

5. *Un Contre Exemple*

On peut se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir, en améliorant ces résultats, des résultats de régularité en t analogues à ceux que l'on a pour l'équation des ondes ordinaires (cf. par exemple [15, 16]). En particulier, on pourrait espérer que l'opérateur P_λ réalise un isomorphisme de D sur X, non seulement quand λ appartient à une d-région, mais pour λ dans un demi plan $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma$. Car il doit en être ainsi si l'on veut traiter ce problème mixte par la méthode de la transformation de Laplace en t ou par la technique des semi-groupes fortement continus. La réponse est négative, en effet l'étude du cas particulier le plus simple montre déjà que l'on ne peut pas obtenir mieux qu'un région logarithmique pour Λ. En réalité ceci n'est pas surprenant car la partie principale de l'opérateur $P(D_t, D_x, x)$ est hyperbolique mais non strictement hyperbolique. D'ailleurs une situation analogue, mais relative au cas du problème de Cauchy dans R^n pour un opérateur à coefficients constants, a déjà été étudiée par Hörmander [10, p. 147] qui démontre des résultats de régularité en se plaçant dans des espaces du type $\mathscr{D}(d)$.

Le contre exemple est le suivant: on prend $\Omega =]-1, +1[$, $P = (D_t^2 - d^2/dx^2)^2$, $X = L^2(\Omega)$, $D = H^4 \cap H_0^2$. Dans ce cas très simple on peut déterminer explicitement pour quels λ l'opérateur $P_\lambda = (\lambda^2 - d^2/dx^2)^2$ n'est pas un isomorphisme de D sur X, c'est la

Proposition 5.1. *Les nombres complexes λ pour lesquels P_λ n'est pas un isomorphisme, sont les solutions de*

$$2\lambda + \operatorname{sh} 2\lambda = 0 \qquad \textit{ou de} \qquad 2\lambda - \operatorname{sh} 2\lambda = 0.$$

Démonstration. Il s'agit de déterminer les λ pour lesquels le problème suivant admet une solution non identiquement nulle:

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - d^2/dx^2)^2\, u(x) &= 0 \qquad -1 \leqslant x \leqslant +1, \\ u(\pm 1) &= 0, \\ \frac{du}{dx}(\pm 1) &= 0. \end{aligned}$$

On remarque que si u est solution alors $u(-x)$ l'est aussi, par conséquent il suffit de chercher les solutions paires ou impaires.

Les solutions paires sont nécessairement de la forme

$$u(x) = a \operatorname{ch} \lambda x + bx \operatorname{sh} \lambda x,$$

on détermine les constantes a et b en écrivant que u satisfait aux conditions aux limites en $x = +1$. On obtient le système

$$\begin{aligned} a \operatorname{ch} \lambda + b \operatorname{sh} \lambda &= 0 \\ a \operatorname{sh} \lambda + b(\operatorname{sh} \lambda + \lambda \operatorname{ch} \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

qui admet une solution non nulle si et seulement si $2\lambda + \operatorname{sh} 2\lambda = 0$.

De même, on trouve des solutions impaires non nulles si et seulement si vérifie $2\lambda - \operatorname{sh} 2\lambda = 0$. Ce qui démontre la proposition.

On a alors besoin d'un résultat élémentaire sur la localisation des zéros de ces équations.

Lemme 5.2. *Les fonctions* $2\lambda + \operatorname{sh} 2\lambda$ *et* $2\lambda - \operatorname{sh} 2\lambda$ *admettent une infinité de zéros, qui vérifient pour* $|\lambda|$ *assez grand*

$$4 |\lambda| \sim e^{2|\mathrm{Re}\lambda|}.$$

Démonstration. En comparant les zéros de la fonction $2\lambda + \operatorname{sh} 2\lambda$ à ceux de $\operatorname{sh} 2\lambda$ on vérifie facilement que cela montre que $2\lambda + \operatorname{sh} 2\lambda$ admet une infinité de zéros. Alors par raison de parité il y a une infinité de zéros à parties réelles positives, et en utilisant l'équation qu'ils vérifient on trouve que ceux ci satisfont à

$$4 |\lambda| e^{-2\mathrm{Re}\lambda} \xrightarrow[|\lambda|\infty]{} 1.$$

De même, pour $2\lambda - \operatorname{sh} 2\lambda$, ce qui démontre le lemme.

Finalement on déduit que l'opérateur P_λ est un isomorphisme quand λ est dans une région logarithmique de la forme

$$\{\lambda;\ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant a \log(1 + |\lambda|) + b\} \qquad \text{avec} \quad a > 0$$

et par conséquent dans aucun demi plan $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \gamma$.

3. Equations des Ondes avec Conditions de Dérivée Oblique Nulle au Bord

1. *Enoncé du Théorème*

On considère un opérateur du type des ondes

$$P = D_t^2 - A(x, D_x)$$

où A est un opérateur d'ordre 2 vérifiant l'hypothèse H_1 du §2. On se donne un opérateur $b(x, D_x)$ de dérivation d'ordre 1 à coefficients reels qui n'est jamais tangentiel sur le bord de Ω, c'est à dire de la forme

$$b(x, D) = \beta(x) \frac{\partial}{\partial n_A} + T(x, D_x)$$

où $T(x, D)$ est un opérateur de dérivation tangentielle sur $\Gamma = \partial\Omega$, β une fonction qui ne s'annule pas sur Γ, et $\partial/\partial n_A$ désigne de façon habituelle la dérivation selon la direction conormale relative à A:

$$\frac{\partial}{\partial n_A} = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \cos(n, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

En gros, on étudie le problème suivant: étant données $f(t, x)$, $v_k(x)$ $k = 0, 1$ trouver u dans une "classe convenable" vérifiant

$$\begin{aligned} (D_t^2 - A(x, D))\, u(t, x) &= f(t, x) \qquad \text{dans} \quad R_+ \times \Omega, \\ b(x, D)u &= 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma, \\ D_t^k u(0, x) &= v_k(x) \qquad \text{pour} \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Pour ce problème on va démontrer le

THÉORÈME 1.1. *On se donne un opérateur différentiel $A(x, D_x)$ dans un ouvert Ω borné et on suppose qu'il satisfait à l'hypothèse H_1 du §2. On lui associe un opérateur non borné A dans $L^2(\Omega) = X$ en prenant pour domaine l'espace $D = \{u;\, u \in H^2(\Omega)$ et $bu = 0$ sur $\Gamma\}$. Alors l'opérateur*

$$D_t^2 \otimes I - \delta_0 \otimes A$$

satisfait à la condition $C(d)$ avec $d = 5/4$.

La démonstration suit les mêmes idées que celle du Théorème 1.1 §2, aussi on va seulement insister sur les points nouveaux.

D'après le critère abstrait on est ramené à l'étude du spectre de l'opérateur A de domaine D. Il suffit encore ici d'étudier l'injectivité de $P_\lambda = (\lambda^2 - A)$ car ce problème aux limites est d'indice nul comme étant homotope au problème de Neumann (cf. [10, p. 265]). Par conséquent le Théorème 1.1 découlera du

THÉORÈME 1.2. *Il existe une constante C et une d-région Λ ($d = 5/4$) telles que*

$$(\cos\theta)^{4/5} \| u \|_{2,\lambda} \leqslant C \|(\lambda^2 - A)u\| \tag{1.2}$$

pour $u \in D$, $\lambda \in \Lambda$ et $\theta = \arg \lambda$.

C'est l'analogue du Théorème 1.2 §2 et la démonstration en est semblable, aussi on n'indique que la 1ère étape de sa démonstration: le cas des coefficients constants et homogènes dans $\bar{R}_+^n$, qui est d'ailleurs le point crucial dans ces questions.

2. *Cas où $\Omega = R_+^n$ et $A = \Delta$*

On pose aussi $\Gamma = R^{n-1}$,

$$b = \frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où les t_j sont des constantes reelles.

Le but de ce numéro est de démontrer la

PROPOSITION 2.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$C \cos^4 \theta(|\lambda|^4 \| u \|^2 + \| \Delta u \|^2)$$
$$\leqslant \|(\lambda^2 - \Delta)u\|^2 + \cos\theta \| bu \|^2_{1/2,\lambda,\Gamma} + \cos^2\theta \| bu \|_{1/2,\Gamma} \qquad (2.1)$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^n)$ *et* $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Où la notation $\| \ \|_{\frac{1}{2},\lambda,\Gamma}$ désigne la norme sur $H^{\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ qui dépend de λ et qui est définie par

$$\| u \|^2_{1/2,\lambda,\Gamma} = \int_{R^{n-1}} (|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{1/2} |\hat{u}(\xi')|^2 \, d\xi'.$$

La démonstration de cette proposition se fera au moyen d'une succession de lemmes. On part de l'inégalité (2.2) §2 que l'on récrit ici

$$C \cos^2 \theta(|\lambda|^4 \| u \|^2 + \| \Delta u \|^2)$$
$$\leqslant \|(\lambda^2 - \Delta)u\|^2 + |\lambda|^2 \cos\theta \left| \int \gamma_0 u \cdot \overline{\gamma_1 u} \right| \qquad (2.2)$$

pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$ et $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^n)$.

On est donc conduit à exprimer les traces $\gamma_i u = u_i$ $(i = 0, 1)$ en fonction de

$$f(x', x_n) = (\lambda^2 - \Delta)\, u(x', x_n) \qquad \text{si } x_n \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

et de

$$\varphi(x') = (bu)(x', 0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{1}^{n-1} t_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) u(x', x_n) \Big|_{x_n = 0},$$

c'est le

LEMME 2.2. *Avec des notations analogues à celles du Lemme* 2.5 §2, *on a pour* $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^n)$

$$\hat{u}_0(\xi') = \frac{\hat{F}(\xi', \zeta) - \hat{\varphi}(\xi')}{\zeta + iT(\xi')}$$

$$\hat{u}_1(\xi') = iT(\xi')\, \hat{u}_0(\xi') + \hat{\varphi}(\xi')$$

où ζ *est la racine carrée de* $\lambda^2 + |\xi'|^2$ *vérifiant* $\operatorname{Re} \zeta > 0$ *et* $T(\xi') = \sum_{k=1}^{n-1} t_k \xi_k$.

Démonstration. On a au sens des distributions

$$(\lambda^2 - \Delta)u = f - u_1 \otimes \delta_{(x_n=0)} - u_0 \otimes \delta'_{(x_n=0)},$$

d'où par transformation de Fourier–Laplace

$$(\lambda^2 + |\xi'|^2 - p^2)\, \hat{U}(\xi', p) = \hat{F}(\xi', p) - \hat{u}_1(\xi') - p\hat{u}_0(\xi').$$

Alors en faisant $p = \zeta$ on trouve la relation

$$\hat{u}_1(\xi') + \zeta\hat{u}_0(\xi') = \hat{F}(\xi', \zeta)$$

et par hypothèse on a

$$\hat{u}_1(\xi') - iT(\xi')\, \hat{u}_0(\xi') = \hat{\varphi}(\xi')$$

d'où l'on tire $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$.

On est maintenant en mesure de majorer $|\int \gamma_0 u\, \overline{\gamma_1 u}|$, c'est le

LEMME 2.3. *Il existe une constante* $C > 0$ *pour laquelle on a*

$$C\,|\lambda|^2 \cos\theta \left| \int_\Gamma \gamma_0 u \overline{\gamma_1 u} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\cos^2\theta} \left(\|(\lambda^2 - \Delta)u\|^2 + \cos^2\theta\, \|bu\|^2_{1/2,\lambda,\Gamma} + \cos\theta\, \|bu\|^2_{1/2,\Gamma}\right) \quad (2.3)$$

pour $u \in \mathscr{D}(\bar{R}_+^n)$ *et* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Démonstration. En utilisant les valeurs trouvées pour $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$ et l'inégalité de Schwarz, il vient

$$\left| \int_\Gamma u_0 \overline{u_1} \right| \leqslant C \int \frac{|T|\,(|\hat{F}|^2 + |\hat{\varphi}|^2)}{|\zeta + ib|^2}\, d\xi' + C \int \frac{|\hat{\varphi}|^2 + |\hat{F}|^2}{|\zeta + ib|}\, d\xi'. \quad (2.4)$$

Comme $T(\xi')$ est reel, on a $|\zeta + iT| \geqslant |\operatorname{Re} \zeta|$, et en utilisant l'inégalité (2.11) §2

$$|\zeta + iT| \geqslant \cos\theta(|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{1/2}.$$

En reportant dans (2.4), on trouve avec une constante positive $C > 0$

$$C\left|\int u_0 \cdot \overline{u_1}\right| \leqslant \int \frac{|\xi'|(|\hat{F}|^2 + |\hat{\varphi}|^2)}{\cos^2\theta(|\lambda|^2 + |\xi'|^2)}\, d\xi' + \int \frac{|\hat{\varphi}|^2 + |\hat{F}|^2}{\cos\theta(|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{1/2}}\, d\xi'$$

et en utilisant l'inégalité (2.8) §2 il vient facilement

$$\begin{aligned} C|\lambda|^2\cos\theta\left|\int u_0 \cdot \overline{u_1}\right| \leqslant \frac{1}{\cos^2\theta}\Big[\iint |\hat{f}(\xi', x_n)|^2\, d\xi'\, dx_n \\ + \cos\theta \int (1 + |\xi'|)\, |\hat{\varphi}|^2\, d\xi' \\ + \cos^2\theta \int (|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{1/2}\, |\hat{\varphi}|^2\, d\xi'\Big] \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. Enfin l'inégalité de la Proposition 2.1 s'obtient en combinant (2.2) et (2.3).

On termine ensuite la démonstration du Théorème 2.1 avec le même technique de perturbation que celle utilisée pour son analogue au §2.

Remarque 2.4. Nous n'avons pas de contre exemple montrant que l'opérateur $(\lambda^2 - A)$ n'est pas un isomorphisme de D sur L^2 quand λ parcourt un demi plan $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \gamma$. Néanmoins il y a un contre exemple de Ikawa [11], qui montre que l'on ne peut avoir en général des résultats de régularité analogues à ceux que l'on obtient pour l'équation des ondes avec les conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet. En effet cet auteur démontre que l'inégalité d'énergie associée à ce problème n'est plus satisfaite.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. S. AGRANOVITCH ET I. M. VISCHIK, Problèmes elliptiques avec paramètre et problèmes paraboliques de type général, *Russian Math. Surveys* **19** (1964), 53–157.
2. J. CHAZARAIN, *C.R Acad. Sci. Ser. A* **266** (1968), 10–13, 564–566; **267** (1968), 13–15; **268** (1969), 1197–1199.
3. G. DA PRATO ET U. MOSCO, Semi gruppi distribuzioni analitici, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **19** (1965), 367–396.
4. H. O. FATTORINI, Ordinary differential equations in linear topological spaces I, *J. Differential Equations* **5** (1969), 72–105.
5. H. O. FATTORINI, *C.R. Acad. Sci. Ser. A* **268** (1969), 707–709.

6. C. Foias, Remarques sur les semi groupes distributions d'opérateurs normaux, *Portugal. Math.* **19** (1960), 227–242.
7. D. Fujiwara, A characterisation of exponential distribution semi groups, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 267–274.
8. H. G. Garnir, M. De Wilde, et J. Schmets, "Analyse Fonctionnelle. Théorie Constructive," Vol. 1, Birkhauser, Basel, 1968.
9. G. Geymonat, Proprieta di alcuni spazi, *Ann. Mat. Pura Appl.* **76** (1967), 203–231.
10. L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators," Grundlehren B 116, Springer, Berlin, 1963.
11. M. Ikawa, *Proc. Jap. Acad.* **44** (1968), 1033–1037.
12. E. Larsson, Generalised distribution semi groups of bounded linear operators, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (1967), 137–159.
13. J. L. Lions, Les semi groupes distributions, *Portugal. Math.* **19** (1960), 141–164.
14. J. L. Lions, Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta Math.* **94** (1955), 13–153.
15. J. L. Lions, Une remarque sur les applications du théorème de Hille et Yosida, *J. Math. Soc. Japan* **9** (1957), 62–70.
16. J. L. Lions, "Équations Différentielles Opérationnelles," Grundlehren B 111, Springer, Berlin, 1961.
17. J. L. Lions et E. Magènes, "Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications," Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
18. Ref. [17], Vol. 2, 1968.
19. Ref. [17], Vol. 3, à paraître.
20. J. Peetre, Sur la théorie des semi groupes distributions, *Sem. Leray Collège de France* (1963/64), 79–98.
21. C. Roumieu, Sur quelques extensions de la notion de distributions, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **77** (1960), 41–121.
22. L. Schwartz, "Théorie des Distributions," Hermann, Paris, 1968.
23. L. Schwartz, Distributions à valeurs vectorielles I et II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **7** (1957), 1–141; **8** (1958), 1–209.
24. L. Schwartz, Séminaire 1953/54, Secrétariat Mathématiques, Paris.
25. H. Schaefer, "Topological Vector Spaces," Macmillan, New York, 1967.
26. T. Ushijima, *Proc. Jap. Acad.* **45** (1969), 224–227.
27. K. Yosida, "Functional Analysis," Grundlehren B 123, Springer, Berlin, 1966.