JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 58, 254–266 (1984)

Problème des moments sur un compact de $\mathbb{R}^n$ et décomposition de polynômes a plusieurs variables

GILLES CASSIER

Department of Mathematics, Université Lyon 1, Lyon 69622, France

Communicated by A. Connes

Received September 20, 1983

INTRODUCTION

Dès que l'on dépasse le cadre de la dimension un, le problème des moments n'est plus considéré dans toute sa généralité. On trouvera toutefois diverses solutions dans [4–6, 9] pour des compacts particuliers. Nous donnons ici la solution du problème des moments pour un compact d'intérieur non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$. Nous utilisons ensuite cette résolution pour obtenir un résultat de décomposition des polynômes strictement positifs sur un compact d'intérieur non vide.

Dans [3] Berg et Maserick montrent que si P est un polynôme d'une variable tel que l'ensemble $K = P^{-1}(\mathbb{R})$ soit compact, alors une suite de réels (s_n), $n \in \mathbb{N}$, est une suite de moments sur K si et seulement si les suites (s_n), $n \in \mathbb{N}$, et $P(s)_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont des suites de type positif. Pour cela ils utilisent la propriété de toute suite de type positif d'être une suite de moments sur $\mathbb{R}$, mais ceci n'est plus vrai en dimension supérieure.

Le résultat devient en adoptant la notation multi-indicielle: (s_k), $k \in \mathbb{N}^n$, est une suite de moments sur K si et seulement si (s_k), $k \in \mathbb{N}^n$, et $(P(s)_k)$, $k \in \mathbb{N}^n$, sont des suites de moments sur $\mathbb{R}^n$. Berg and Maserick posent alors la question de savoir si le résultat demeure si l'on remplace les conditions d'être des suites de moments sur $\mathbb{R}^n$ par les conditions beaucoup plus faibles d'être seulement des suites de type positif. Ce problème est aussi exposé par Fuglede dans [6]. Nous le démontrons au cours de la troisième partie dans le cas de polynômes de deux variables dont la partie homogène de plus haut degré est strictement négative sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et des polynômes à n variables dont la partie homogène de plus haut degré est de la forme: $-(a_1 X_1^{2p} + \cdots + a_n X_n^{2p}) - H_{2p}$, avec $p \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}_+^*$ pour $k = 1$, n et H_{2p} une somme de carrés. En s'appuyant sur la méthode utilisée nous résolvons le problème dans le cadre des p-boules de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire avec $K = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leqslant 1\}$ généralisant un résultat de Mac Gregor [10]. Enfin nous établissons un théorème de représentation des polynômes strictement positifs sur K dans les cas précédents.

0022-1236/84 $3.00

1. Problème des moments sur un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$

Le point de départ est la donnée d'un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. On peut trouver une famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes de degré inférieur ou égal à deux telle que $K = \bigcap_{i\in I} P_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$. On désigne alors par $E(K)$ l'espace engendré par les polynômes de degré au plus un et les polynômes $(P_i)_{i\in I}$, ainsi $E(K)$ est continu dans l'espace $\mathbb{R}_2[X_1,..., X_n]$ des polynômes de degré au plus deux. On définit le cône convexe saillant $E_+(K)$ formé des éléments T de $E(K)$ qui restent positifs sur K et enfin on désigne par $G(K)$ l'ensemble des $T \in E_+(K)$ qui engendrent une génératrice extrémale de $E_+(K)$. Cela étant dit, l'ensemble qui va jouer un rôle prédominant dans la théorie est l'ensemble

$$G_1(K) = \{T \in G(K); \|T\|_K = 1\}.$$

Lorsque K est convexe, on peut évidemment prendre pour $E(K)$ l'espace $\mathbb{R}_1[X_1,..., X_n]$ des polynômes de degré au plus un. Avec $n = 1$ et $K = [0, 1]$ il est facile de voir que $G_1(K)$ est formé des deux polynômes X et $1 - X$. Il suit de là que l'ensemble des polynômes $X^p(1 - X)^q$; $p, q \in \mathbb{N}$, qui interviennent sans cesse dans la théorie classique du problème des moments de Hausdorff doit naturellement être remplacé, dans le cas général, par l'ensemble $\Delta(K)$ des polynômes qui sont produits finis d'éléments de $G_1(K)$, la constante 1 correspondant au produit "vide." Enfin comme $\Delta(K)$ n'a qu'une structure multiplicative unitaire, introduisons encore le cône convexe $\Gamma = \Gamma(K)$ formé des combinaisons linéaires à coefficients positifs d'éléments de $\Delta(K)$.

Le convexe compact $\pi(K)$. Le point intéressant est l'introduction de l'ensemble $\pi(K)$ des formes linéaires sur l'espace $\mathbb{R}[X_1,..., X_n]$ telles que $L(\mathbb{1}) = 1$ et $L(T) \geqslant 0$ pour tout $T \in \Delta(K)$. On a alors les trois lemmes suivants qui constituent la clé du travail:

LEMME 1. *Le cône convexe $m(K)$ est générateur dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X_1,..., X_n]$, autrement dit $E = \Gamma - \Gamma$ et $G_1(K)$ sépare les points de K.*

Preuve. L'espace vectoriel $\Gamma - \Gamma$ étant en fait une algèbre unitaire, il suffit de prouver qu'il contient le sous-espace $\mathbb{R}_1[X_1,..., X_n]$, identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$. Par translation on peut supposer que $0 \in K$. Notons que par le théorème de Krein-Milman $E_+(K) \subset \Gamma(K)$ et introduisons alors le sous-espace de $\mathbb{R}_1[X_1,..., X_n]$ engendré par l'ensemble $E_+(K) \cap \mathbb{R}_1[X_1,..., X_n]$. Si cet espace n'est pas $\mathbb{R}_1[X_1,..., X_n]$ il existe dans $\mathbb{R}^{n+1}$ un vecteur $b = (b_0,..., b_n)$ qui lui est orthogonal. Comme le polynôme $\mathbb{1}$ correspond dans $\mathbb{R}^{n+1}$ au vecteur $(1, 0,..., 0)$ on a nécessairement $b_0 = 0$. Soit alors $x = (b_1,..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $T = a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ un élément quelconque de $E_+(K) \cap$

$\mathbb{R}_1[X_1,..., X_n]$. Comme b est orthogonal à T dans R^{n+1} on a l'égalité $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0$, ce qui implique $T(\lambda x) = a_0 = T(0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. L'hypothèse $0 \in K$ garantit alors la condition $a_0 \geqslant 0$, d'où $T(\lambda x) \geqslant 0$ et $\lambda x \in \overline{\text{conv}}(K)$ puisque:

$$\overline{\text{conv}}(K) = \bigcap_{T \in E_+(K) \cap \mathbb{R}_1[X_1,...,X_n]} T^{-1}(\mathbb{R}_+).$$

Mais la compacité de K garantit encore celle de son enveloppe convexe fermée et on aboutit à une contradiction.

Fixons x, $y \in K$ tels que $T(x) = T(y)$ pour tout $T \in G_1(K)$. On a alors $T(x) = T(y)$ pour tout $T \in \Gamma(K)$ et par suite avec ce qui précède $T(x) = T(y)$ pour tout $T \in \mathbb{R}[X_1,..., X_n]$. Ainsi $x_k = y_k$ avec $T = X_k$ et $x = y$, donc $G_1(K)$ sépare les points de K. ∎

LEMME 2. *Pour toute $L \in G_1(K)$ et tout polynôme $T \in \Delta(K)$, on a* $0 \leqslant L(T) \leqslant 1$.

Preuve. Soit $T = T_1 \cdots T_p$ avec $T_k \in G_1(K)$. Alors $\|T_k\|_K = 1$, donc $1 - T_k \in E_+(K)$. Si on écrit:

$$1 - T = \prod_{k=1}^{p} [(1 - T_k) + T_k] - T_1 T_2 \cdots T_p$$

et si on développe le produit en remarquant que le terme $T_1 T_2 \cdots T_p$ s'élimine, on voit que $1 - T$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de produits d'éléments de $E_+(K)$. Ces produits peuvent s'écrire à leur tour grâce au théorème de Krein-Milman comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de $\Delta(K)$. On tire de là, compte tenu de la positivité de L sur $\Delta(K)$, que $L(1 - T) \geqslant 0$, donc que $0 \leqslant L(T) \leqslant 1$ puisque $L \in \pi(K)$. ∎

On munit maintenant le convexe $\pi(K)$ de la topologie faible $\sigma(\pi(K), \Delta(K))$. Avec les deux lemmes précédents, on voit que $\pi(K)$ s'identifie topologiquement à une partie du compact $I^{\Delta(K)}$, où $I = [0, 1]$. Mais cette partie est fermée car si $L_i \to L$ avec $L_i \in \pi(K)$, alors L est linéaire sur E et positive sur $\Delta(K)$, et bien entendu on a $L(\mathbb{1}) = 1$, donc $L \in \pi(K)$.

Le convexe $\pi(K)$ étant maintenant structuré en convexe compact, un pas important va être franchi avec la détermination de ses points extrémaux.

LEMME 3. *Soit L un point extrémal de $\pi(K)$. Alors L est multiplicative sur $E = \mathbb{R}[X_1,..., X_n]$.*

Preuve. Il suffit de vérifier l'égalité $L(ST) = L(S) L(T)$ pour S et T éléments de $\Delta(K)$ et d'utiliser ensuite le Lemme 1 qui exprime que E est l'espace vectoriel engendré par $\Delta(K)$. Distinguons trois cas suivant la valeur $\alpha = L(S)$, telle, a priori, que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, d'après le Lemme 2.

(a) $0 < \alpha < 1$. On définit alors les formes linéaires L_1 et L_2 sur E, par:

$$L_1(R) = \frac{1}{\alpha} L(SR) \qquad \text{et} \qquad L_2(R) = \frac{1}{1-\alpha} L((1-S)R).$$

Il est clair que $L_1 \in \pi(K)$, $L_2(\mathbb{1}) = 1$ et pour voir que L_2 est positive sur $\Delta(K)$ il suffit de raisonner comme dans la preuve du Lemme 2 en montrant que si $R \in \Delta(K)$ $(1-S)R$ est combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de $\Delta(K)$. Ainsi L_1 et L_2 sont deux éléments de $\pi(K)$ tels que $L = \alpha L_1 + (1-\alpha) L_2$. Par extrémalité de L on a donc $L = L_1$, d'où la formule $L(SR) = L(S) L(R)$ pour tout $R \in E$.

(b) Si $\alpha = 0$. On introduit alors la forme linéaire $\tilde{L}$ selon $\tilde{L}(R) = L(SR)$ pour $R \in E$. Alors $\tilde{L}$ est positive sur $\Delta(K)$ puisque $R \in \Delta(K)$ implique $RS \in \Delta(K)$, et telle que $\tilde{L}(\mathbb{1}) = 0$. Pour $T \in \Delta(K)$ on a vu que $1 - T$ est combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de $\Delta(K)$, on en tire que $-\tilde{L}(T) = \tilde{L}(1-T) \geqslant 0$, ce qui joint au fait que $\tilde{L}(T) \geqslant 0$ impose $\tilde{L}(T) = 0$ et on a encore $L(ST) = L(S) L(T)$ dans ce cas.

(c) Si $\alpha = 1$. On introduit cette fois $\tilde{L}$ selon $\tilde{L}(R) = L((1-S)R)$ pour $R \in E$. Pour $R \in \Delta(K)$ $(1-S)R$ est combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de $\Delta(K)$ donc $\tilde{L}$ est positive sur $\Delta(K)$ et de plus $\tilde{L}(\mathbb{1}) = 0$ ce qui permet de conclure comme en (b). On arrive maintenant aux énoncés de la conclusion de cette étude.

THÉORÈME 1. *Pourtoute $L \in \pi(K)$ il existe une probabilité unique μ sur K, telle que $L(T) = \int T\, d\mu$ pour tout polynôme T de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.*

Preuve. Puisque la topologie sur $\pi(K)$ est celle de la convergence simple sur $E = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, on voit que l'application $L \to |L(T)|$, où $T \in E$ est fixé, est convexe et continue sur $\pi(K)$. Or $\pi(K)$ étant convexe compact, son maximum est atteint, d'après le théorème de Bauer (voir, e.g., Phelps [11]) en un point extrémal L_0 de $\pi(K)$. La forme L_0 étant multiplicative et unitaire d'après le Lemme 3, on a immédiatement $L_0(T) = T(x)$ avec $x = (x_k)$ et $x_k = L(X_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Pour tout $T \in \Delta(K)$ on a donc $T(x) = L(T) \geqslant 0$, donc a fortiori on a $T(x) \geqslant 0$ pour tout $T \in G_1(K)$. Alors puisque

$$K = \bigcap_{T \in G_1(K)} T^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

on a nécessairement $x \in K$, et ainsi

$$|L(T)| \leqslant |L_0(T)| = |T(x)| \leqslant \|T\|_K$$

ce qui suffit. L'unicité provient de la densité de E dans l'espace de Banach $C(K)$ des fonctions continues sur le compact K.

APPLICATION AU PROBLÈME DES MOMENTS SUR K. Nous utilisons ici de façon systématique la notation contractée multi-indicielle en désignant pour tout multi-indice $k = (k_1, ..., k_n)$ par X^k le monôme $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$. Pour mesurer les degrés on introduit la longueur de k soit $|k| = k_1 + \cdots + k_n$.

Cela étant, à chaque mesure positive μ sur K, on associe la suite de ses moments, indexée sur $\mathbb{N}^n$

$$\alpha_k = \int_K X^k \, d\mu = \int_K t^k \, d\mu(t).$$

Le problème des moments sur K consiste à caractériser les suites (α_k) ainsi obtenues. On pourra, si l'on veut, se ramener au cas d'une probabilité μ en supposant de prime abord $\alpha_0 = 1$. De sorte que le Théorème 1 fournit très exactement la solution, en donnant la généralisation de la condition nécessaire et suffisante du problème des moments de Hausdorff, c'est-à-dire du cas $K = [0, 1]$.

THÉORÈME 2 (Résolution du problème des moments). *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (α_k), $k \in \mathbb{N}^n$, soit une suite de moments sur K est que la forme linéaire L, définie sur l'espace $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ par $L(X^k) = \alpha_k$, vérifie la condition $L(T) \geqslant 0$ pour tout polynôme $T \in \Delta(K)$.*

Passage à une deuxième résolution. De même que pour le cas de l'intervalle $K = [0, 1]$ du problème des moments de Hausdorff on peut formuler différemment la solution du problème des moments, obtenant ainsi une seconde condition nécessaire et suffisante en termes de matrices de type positif plus adéquate pour certaines applications. La suite (α_k) étant fixée on peut en effet associer à tout polynôme $T = \sum u_r X^r$ de $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ la matrice infinie

$$M_T(\alpha) = M_T = [m_{i,j}] \qquad \text{avec} \qquad m_{i,j} = \sum_r u_r \alpha_{i+j+r}.$$

THÉORÈME 3 (Seconde résolution du problème des moments). *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (α_k) soit une suite de moments sur K est que toutes les matrices $M_T(\alpha)$ soient de type positif lorsque T décrit $G_1(K)$.*

Preuve. La condition est nécessaire car si $L(P) = \int P \, d\mu$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ et si $\xi = (\xi_k)$, $k \in \mathbb{N}^n$, est une suite à support fini de réels. En posant $R = \sum \xi_k X^k$, il vient $\int TR^2 \, d\mu = L(TR^2) = \sum_{i,j} m_{i,j} \xi_i \xi_j \geqslant 0$, pour tout $T \in G_1(K)$ de sorte que $M_T(\alpha)$ est de type positif. Réciproquement pour $T \in G_1(K)$ on a $1 - T \in E_+(K)$; donc $1 - T$ est combinaison convexe fini d'éléments de $G_1(K)$, on en déduit que $M_{1-T}(\alpha)$ est aussi de type positif, la même remarque appliquée à $\mathbb{1} \in E_+(K)$ montre que la matrice $M_1(\alpha)$ est de type positif et permet de définir un produit préhilbertien sur l'espace des polynômes E. La multiplication par T ou $1 - T$ définit des opérateurs positifs sur E, par suite la multiplication par T définit un opérateur positif et borné sur l'espace de Hilbert associé à E. Un produit d'opérateurs positifs et bornés qui commutent, étant encore de ce type, on obtient le résultat avec le Théorème 2.

2. Décomposition de polynômes a plusieurs variables

On montre directement dans [5], en utilisant des techniques basées sur les polynômes de Bernstein lorsque $K = [0, 1]$, que tout polynôme strictement positif sur K est combinaison linéaire à coefficients positifs des polynômes $X^p(1 - X)^q$ où $p, q \in \mathbb{N}$, ce qui permet de répondre à la question posée par Atzmon dans [1] qui était de relier directement les deux conditions nécessaires et suffisantes de résolution du problème des moments de Hausdorff. On peut se demander si ce résultat subsiste pour des polynômes à plusieurs variables sur un compact quelconque d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. La réponse est positive et nécessite l'utilisation de la théorie précédente.

Théorème 4 (de décomposition). *Tout polynôme strictement positif sur un compact K d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ est mélange positif d'éléments de $\Delta(K)$.*

Preuve. On désigne par $E_m = \mathbb{R}_m[X_1, ..., X_n]$ l'espace des polynômes de degré au plus m, par $\Gamma_m = \Gamma(K) \cap E_m$ la trace du cône convexe saillant $\Gamma(K)$ sur E_m (on prendra garde que Γ_m est mélange positif de polynômes de $\Delta(K)$ de degré en général strictement supérieur à m) et enfin par $\mathring{\Gamma}_m$ l'intérieur de Γ_m relativement à E_m. On montre déjà comme dans la preuve du Lemme 1 qui se fait par limitation des degrés puisqu'on se ramène au degré un que $E_m = \Gamma_m - \Gamma_m$, ce qui implique $\mathring{\Gamma}_m \neq \varnothing$. Soit alors un polynôme P de degré p, tel que $P \notin \mathring{\Gamma}_p$. Avec le théorème de Hahn–Banach en dimension finie, on voit qu'il existe ne forme linéaire L_p sur E_p telle que $L_p(P) \leqslant 0$ et $L_p > 0$ sur $\mathring{\Gamma}_p$. On a alors

$$L_p(\mathbb{1}) > 0. \tag{1}$$

Par convexité $\overline{\Gamma}_p = \overline{\mathring{\Gamma}}_p$, et puisqu'on se trouve en dimension finie il vient $L_p \geqslant 0$ sur $\overline{\Gamma}_p$. Pour p égale à 0 ou 1, la propriété (1) est évidente, pour $p \geqslant 2$ on observe que $L_p(1 - T) \geqslant 0$ pour tout $T \in \Delta(K)$, de degré inférieur ou égal à p puisque comme on l'a vu au cours de la preuve du Lemme 2. $1-T\in \Gamma(K)$ donc ici $1-T\in\Gamma_p$. La condition $L_p(\mathbb{1})=0$ impliquerait $L_p(T)=0$. Mais on peut voir, comme pour le Lemme 1, que tous ces polynômes engendrent E_p (puisque $E_+(K)\subseteq\Gamma_p$ car $p\geqslant 2$), d'où $L_p=0$, ce qui est absurde. On construit ensuite par récurrence une suite $(L_m)_{m\geqslant p}$, où L_m est une forme linéaire sur E_m, vérifiant $L_m|_{E_{m-1}}=L_{m-1}$ et $L_m>0$ sur $\mathring{\Gamma}_m$. Il suffit pour cela d'introduire $H_{m-1}=\operatorname{Ker} L_{m-1}\subseteq E_{m-1}$ on a $H_{m-1}\cap\mathring{\Gamma}_m=\varnothing$ dans E_m, sinon il existe $Q\in H_{m-1}\cap\mathring{\Gamma}_m$ donc $Q\in\mathring{\Gamma}_{m-1}$ et $L_{m-1}(Q)=0$, ce qui est absurde par hypothèse de récurrence. Avec le théorème de Hahn–Banach dans E_m, on construit une forme linéaire $\tilde{L}_m$ sur E_m telle que $H_{m-1}\subseteq\operatorname{Ker}\tilde{L}_m$ et $\tilde{L}_m>0$ sur $\mathring{\Gamma}_m$. La condition $H_{m-1}\subseteq\operatorname{Ker}\tilde{L}_m$ donne $\tilde{L}_m|_{E_{m-1}}=\alpha L_{m-1}$ et évidemment $\alpha>0$. Alors $L_m=(1/\alpha)\tilde{L}_m$ convient. La suite $(L_m)_{m\geqslant p}$ étant construite, on définit la forme linéaire L sur $E=\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ par $L(Q)=L_k(Q)$ si $Q\in E_k$. Cette forme linéaire est positive sur $\Delta(K)$ car pour tout $m\geqslant p$, $L|_{\Gamma_m}=L_m|_{\Gamma_m}\geqslant 0$. Avec le théorème 2, il existe une mesure positive μ sur K telle que $L(Q)=\int Q\,d\mu$ pour tout polynôme Q et μ est non nulle car $\int_K d\mu=L(P)=L_p(P)>0$. En particulier $\int_K P\,d\mu=L(P)=L_p(P)\leqslant 0$, donc il existe $x\in K$ tel que $P(x)\leqslant 0$. On en déduit donc que si P est un polynôme strictement positif sur K, il appartient nécessairement à $\mathring{\Gamma}_p$, donc à Γ_p et est mélange positif d'éléments de $\Delta(K)$. ∎

3. Compacts algébriques

Nous allons maintenant répondre dans le cadre précisé lors de l'introduction à la question posée par Berg et Maserick qui concerne la validité du Théorème 3 de [3] si on remplace suites de moments par suites de type positif. La difficulté essentielle étant bien entendu qu'en dimension n supérieur ou égal à deux, une suite de type positif n'est pas nécessairement une suite de moments sur $\mathbb{R}^n$, consulter [2]. On part donc avec un polynôme R de $\mathbb{R}[X,Y]$ dont la partie homogène de plus haut degré est strictement négative sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ ou un polynôme R de $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ dont la partie homogène de plus haut degré est de la forme $-(a_1X_1^{2p}+\cdots+a_nX_n^{2p})-H_{2p}$ avec $p\in\mathbb{N}$, $a_k\in\mathbb{R}_+^*$ pour $k=1, n$ et H_{2p} une somme de carrés. On introduit le cône convexe saillant ∇ des sommes de carrés de polynômes et on définit le cône convexe $\langle R\rangle=\nabla+R\nabla$ pour $R\in\mathbb{R}[X,Y]$, (resp. $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$). On désigne pour $q\in\mathbb{N}$ par $\langle R\rangle_q$ la trace de $\langle R\rangle$ sur l'espace $\mathbb{R}_q[X_1,\dots,X_n]$ des polynômes de degré au plus égal à q, c'est-à-dire: $\langle R\rangle_q=\langle R\rangle\cap\mathbb{R}_q[X,Y]$ (resp. $\langle R\rangle\cap\mathbb{R}_q[X_1,\dots,X_n]$). On a alors:

Lemme Fondamental. *Soit R un polynôme ayant la forme indiquée ci-dessus. Si on désigne par $\langle R\rangle_{2p}^0$ le polaire de $\langle R\rangle_{2p}$ dans le dual E_{2p}^* de $E_{2p}=$*

$\mathbb{R}_{2p}[X, Y]$ (*resp.* $E_{2p} = \mathbb{R}_{2p}[X_1, ..., X_n]$). *Alors* $\langle R\rangle_{2p}^0 \cap H = \{0\}$. *H étant l'hyperplan de* E_{2p}^* *des formes linéaires nulles au point* $\mathbb{1}$.

Preuve. On part donc avec une forme linéaire positive sur le cône $\langle R\rangle_{2q}$ et nulle au point $\mathbb{1}$. On remarque ensuite que L satisfait la propriété suivante:

$$\text{Pour } P, Q \in E_p \text{ on a } |L(PQ)|^2 \leqslant L(P^2)\, L(Q^2). \tag{2}$$

Cette propriété provient du fait que la trace du cône ∇ sur E_{2p} est contenue dans $\langle R\rangle_{2p}$ et par suite que $L([tP+Q]^2) \geqslant 0$ pour tout réel t. De $L(\mathbb{1}) = 0$ on tire déjà que L est nulle sur E_p. On montre ensuite par récurrence que L est en fait nulle sur E_{2p-1}. On considère donc un monôme de la forme X^i avec $i \in \mathbb{N}^n$ et $|i| < 2p$, on écrit $|i| = 2k + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{1, 2\}$ et $i = j + j'$ avec $|j| = p$, $(j, j') \in (\mathbb{N}^n)^2$, alors $|j'| \leqslant k$ sinon $|j'| > k$ impliquerait $k + \varepsilon > p$, ce qui est absurde car on a toujours $k + \varepsilon \leqslant p$. Le monôme X^i se met sous la forme $X^j X^{j'}$ et on est en droit d'appliquer la propriété (2) qui donne $L(X^i) = 0$ car $L(X^{2j'}) = 0$ par hypothèse de récurrence puisque $|j'| \leqslant k$. On va maintenant distinguer les deux cas cités dans le lemme:

(1) $R \in \mathbb{R}[X, Y]$ et R se met sous la forme:
$R = R_1 - H_{2p}$ avec $R_1 \in \mathbb{R}_{2p-1}[X, Y]$ et H_{2p} homogène de degré $2p$ et strictement positif sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. De cette dernière propriété on tire que H_{2p} peut s'écrire $H_{2p} = aX^{2p} + F_{2p}$ avec $a > 0$ et F_{2p} homogène de degré $2p$ et positif sur $\mathbb{R}^2$. Tout polynôme homogène de deux variables et positif sur $\mathbb{R}^2$ étant une somme de carrés on a $L(F_{2p}) \geqslant 0$. Finalement il vient:

$$0 \leqslant L(R) = L(R_1) - aL(X^{2p}) - L(F_{2p}) = -aL(X^{2p}) - L(F_{2p})$$

car L est nulle sur $\mathbb{R}_{2p-1}[X, Y]$. On en déduit que $L(X^{2p}) = 0$ et de la même manière on montre que $L(Y^{2p}) = 0$. Enfin on considère un monôme de la forme $X^{i_1}Y^{i_2}$ avec $i_1 + i_2 = 2p$, donc soit $i_1 \geqslant p$, soit $i_2 \geqslant p$, par exemple $i_1 \geqslant p$, on écrit alors $X^{i_1}Y^{i_2} = X^p[X^{i_1-p}Y^{i_2}]$ et en appliquant la propriété (2) il vient $L(X^{i_1}Y^{i_2}) = 0$ et finalement $L = 0$.

(2) $R \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ et R de la forme:
$R = R_1 - (a_1X_1^{2p} + \cdots + a_nX_n^{2p}) - H_{2p}$, avec $a_k > 0$, $k = 1$, n, $R_1 \in \mathbb{R}_{2p-1}[X_1, ..., X_n]$ et H_{2p} homogène de degré $2p$ et élément de ∇, donc $L(H_{2p}) \geqslant 0$. L étant comme nous l'avons vu nulle sur $\mathbb{R}_{2p-1}[X_1, ..., X_n]$ il vient $L(X_1^{2p}) = \cdots = L(X_n^{2p}) = 0$. On considère ensuite un monôme X^i avec $|i| = 2p$ et on raisonne par récurrence sur le nombre m de variables d'exposant non nul dans X^i. Pour $m = 1$ on a vu que $L(X^i) = 0$, soit $1 \leqslant m < n$, on suppose $L(X^{i'}) = 0$ si $m' \leqslant m$, soit alors X^i un monôme dont exactement $m + 1$ variables sont d'exposant non nul. Si il existe $r \in \{1, ..., n\}$ tel que $i_r \geqslant p$ on écrit $X^i = X_r^p[(\prod_{k \neq r} X_k^{i_k})\, X_r^{i_r - p}]$ et avec la propriété (2) on a $L(X^i) = 0$. Si pour tout $r \in \{1, ..., n\}$, $i_r < p$, en notant pour $l \in \{1, ..., n\}$; $s_l =$

$i_1 + \cdots + i_l$ et $s_l' = i_{l+1} + \cdots + i_n$ avec la convention $s_0 = 0$, on voit qu'il existe $k \in \{1,..., n-1\}$ tel que $s_{k-1} < p$ et $s_k \geqslant p$, on écrit alors X^i sous la forme:

$$X^i = [X_1^{i_1} \cdots X_{k-1}^{i_{k-1}} X_k^{p-s_{k-1}}][X_k^{s_k - p} X_{k+1}^{i_{k+1}} \cdots X_n^{i_n}].$$

On applique de nouveau la propriété (2) qui, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, nous donne $L(X^i) = 0$ et finalement $L = 0$. ∎

Remarque. Si on appelle compact algébrique de $\mathbb{R}^n$ un compact K pouvant s'écrire $K = \bigcap_{i=1}^m P_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ pour une famille finie de polynômes de $\mathbb{R}[X_1,..., X_n]$. Alors nous pensons que le lemme précédent caractérise complètement ces familles de polynômes en ce sens que $\bigcap_{i=1}^m R_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est compact, équivaut à $\langle R_1,..., R_m\rangle_{2p}^0 \cap H = \{0\}$, où p est tel que $p \geqslant \max\{2d^0 R_i; i = 1, m\}$ et $\langle R_1,..., R_m\rangle = \nabla + R_1\nabla + \cdots + R_m\nabla$. Cette caractérisation constitue compte tenu de la méthode qui va suivre le point crucial de la résolution du problème des moments sur un compact algébrique de $\mathbb{R}^n$ en vue d'obtenir des conditions optimales en termes de suites de type positif.

LEMME 5. *Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X_1,..., X_n]$ positive sur le cône $\langle R\rangle$ et un polynôme $P \in \nabla$, il existe une constante $M_p > 0$ indépendante de L telle que $0 \leqslant L(P) \leqslant M_p L(\mathbb{1})$.*

Preuve. Soit $P \in \nabla$, soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $2q \geqslant \max(d^0 R, 2d^0 P)$. On introduit le cône convexe affine $C = P + \langle R\rangle_{2q}$ contenu dans $R_{2q}[X_1,..., X_n]$. On prouve tout d'abord que $C \cap \mathbb{R}\mathbb{1} \neq \varnothing$. Supposons le contraire, $\mathring{C} \neq \varnothing$ car $\langle R\rangle_{2q}$ contient le cône convexe $\nabla \cap \mathbb{R}_{2q}[X_1,..., X_n]$ qui engendre $R_{2q}[X_1,..., X_n]$. Avec le théorème de Hahn–Banach dans l'espace de dimension finie $R_{2q}[X_1,..., X_n]$ on voit qu'il existe une forme linéaire $\tilde{L}$ sur $\mathbb{R}_{2q}[X_1,..., X_n]$ positive sur C et telle que $\tilde{L}(\mathbb{1}) = 0$. On remarque ensuite que $\tilde{L}$ vérifie la propriété suivante

$$\text{Si } Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_q[X_1,..., X_n] \qquad \text{on a} \quad \tilde{L}(Q_1 Q_2)^2 \leqslant \tilde{L}(Q_1^2)\, \tilde{L}(P + Q_2^2). \quad (3)$$

En particulier $\tilde{L}(P)^2 \leqslant \tilde{L}(\mathbb{1})\, \tilde{L}(P + P^2)$ d'où $\tilde{L}(P) = 0$. En déduit que $\tilde{L}$ vérifie la propriété (2) en remplaçant p par q et que $\tilde{L} \in \langle R\rangle_{2q}^0$. Avec le même raisonnement qu'au début de la preuve du lemme précédent on montre que $\tilde{L}|_{R_{2q-1}}[X_1,..., X_n] = 0$. On définit ensuite pour $k = 1, n$ la forme linéaire $\tilde{L}_k$ sur $\mathbb{R}_{2p}[X_1,..., X_n]$ par $\tilde{L}_k(S) = \tilde{L}(X_k^{2(q-p)} S)$; $\tilde{L}_k(\mathbb{1}) = \tilde{L}(X_k^{2(q-p)}) = 0$ car $2(p-q) < 2q$, donc $\tilde{L}_k \in \langle R\rangle_{2p}^0 \cap H = \{0\}$ d'après le Lemme Fondamental. On tire de là que $\tilde{L}(X_k^{2q}) = 0$ pour $k = 1, n$ et on montre que $\tilde{L} = 0$ en terminant comme pour le lemme précédent. On arrive donc à une contradiction, il s'en suit que $C \cap \mathbb{R}\mathbb{1} \neq \varnothing$. Il existe donc une constante λ telle que $\lambda = P + Q$ avec $Q \in \langle R\rangle_{2q}$, il vient $L(\lambda - P) = L(Q) \geqslant 0$, donc

$L(P) \leqslant L(\lambda)$. On peut donc bien choisir une constante $M_p > 0$ indépendante de L telle que $0 \leqslant L(P) \leqslant M_p L(\mathbb{1})$. ∎

On introduit de nouveau le convexe $\pi_1(K)$ défini par $\pi_1(K) = \{L \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]^*;\ L|_{\langle R \rangle} \geqslant 0$ et $L(\mathbb{1}) = 1\}$. On munit ensuite $\pi_1(K)$ de la topologie faible $\sigma(\pi_1(K), \nabla)$, avec les deux lemmes précédents et le fait que ∇ sépare les points de $\pi_1(K)$ on voit que $\pi_1(K)$ s'identifie à une partie du compact $\prod_{P \in \nabla} [0, M_p]$ et on vérifie aisément qu'elle est fermée donc compacte. Le convexe $\pi_1(K)$ étant maintenant structuré en convexe compact, l'étape suivante consiste à déterminer ses points extrémaux. On a:

$$\text{Si } L \in \mathrm{ex}(\pi_1(K)), \qquad L \text{ est multiplicative.} \tag{4}$$

En effet, soit $P \in \nabla$, on pose $\alpha = L(P)/M_p \in [0, 1]$.

(1) $0 < \alpha < 1$. On définit alors les formes linéaires L_1 et L_2 selon:

$$L_1(S) = \frac{L(PS)}{L(P)} \qquad \text{et} \qquad L_2(S) = \frac{L(M_p - P)S)}{L(M_p - P)}.$$

Avec ce qui précède et la stabilité de $\langle R \rangle$ pour le produit, on voit que L_1 et L_2 sont eux éléments de $\pi_1(K)$ tels que $L = \alpha L_1 + (1 - \alpha) L_2$. On en déduit alors par extrémalité de L que $L = L_1$ et par suite que $L(PS) = L(P) L(S)$ pour tout S de $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$.

(2) Si $\alpha = 0$ c'est-à-dire si $L(P) = 0$, alors la forme linéaire $\tilde{L}$ définie par $\tilde{L}(S) = L(PS)$ est telle que $\tilde{L}(\mathbb{1}) = 0$ et $L|_{\langle R \rangle} \geqslant 0$ avec le Lemme 5 il vient $\tilde{L} = 0$ et par suite $L(PS) = L(P) L(S)$ pour tout S de $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$.

(3) Si $\alpha = 1$, on raisonne comme précédemment avec $\tilde{L}(S) = L((M_p - P)S)$. On a donc dans tous les cas $L(PS) = L(P) L(S)$ pour tout $P \in \nabla$ et $S \in E = \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, ce qui suffit pour assurer que L est multiplicative.

On continue alors comme dans la partie relative au compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Le seul point à vérifier est l'appartenance de $x = (x_k)$ avec $x_k = L(X_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ à $K = R^-(\mathbb{R}_+)$, or ceci provient de ce que $R(x) = L_0(R) \geqslant 0$.

Nous pouvons maintenant donner le théorème de résolution du problème des moments sur $K = R^-(\mathbb{R}_+)$ en termes de suites de type positif.

THÉORÈME 5. *Soit R un polynôme de plusieurs variables ayant la forme indiquée au lemme fondamental et soit $K = R^-(\mathbb{R}_+)$. Alors la suite (m_k), $k \in \mathbb{N}^n$, est la suite des moments d'une unique mesure positive sur K si et seulement si (m_k), $k \in \mathbb{N}^n$, et $(R(m)_k)$, $k \in \mathbb{N}^n$ sont deux suites de type positif.*

Cas des p boules de $\mathbb{R}^n$. Ici $K = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leqslant 1\}$ avec $p \in \mathbb{N}$. Si p est pair la question est réglée par le Théorème 5. Si p est impair on introduit les polynômes

$$R_\varepsilon = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k X_k^p \qquad \text{où} \qquad \varepsilon = (\varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^n.$$

On a $K = \bigcap_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} R^-(\mathbb{R}_+)$ est donc un compact algébrique. Le seul point à vérifier comme nous l'avons déjà remarqué est le Lemme Fondamental en prenant le cône $\langle (R_\varepsilon) \rangle = \nabla + \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} (R_\varepsilon \nabla)$. Soit donc $L \in \langle (R_\varepsilon) \rangle_{2p}^0$ telle que $L(\mathbb{1}) = 0$. Déjà L vérifie la propriété (2) et on montre comme précédemment que $L|_{\mathbb{R}_{2p-1}[X_1,\ldots,X_n]} = 0$. Soit $k_0 \in \{1,\ldots, n\}$, on définit ε, ε', η, et η' par $\varepsilon = (-1,\ldots,-1)$, $\varepsilon' = (\varepsilon'_k)$ avec $\varepsilon'_{k_0} = -1$ et $\varepsilon'_k = 1$ si $k \neq k_0$, $\eta = (1,\ldots, 1)$, $\eta' = (\eta'_k)$ avec $\eta'_{k_0} = 1$ et $\eta'_k = -1$ si $k \neq k_0$, on a alors $\mathbb{1} - X_{k_0}^{2p} = \frac{1}{4}[(\mathbb{1} + X_{k_0}^p)^2 (R_\varepsilon + R_{\varepsilon'}) + (\mathbb{1} - X_{k_0}^p)^2 (R_\eta + R_{\eta'})]$, d'où $0 \leqslant L(\mathbb{1} - X_{k_0}^{2p}) = -L(X_{k_0}^{2p})$ et par suite $L(X_{k_0}^{2p}) = 0$ pour $k_0 = 1, n$. On termine encore comme pour le Lemme Fondamental. On peut maintenant énoncer la résolution concernant les p boules généralisant ainsi un résultat de Mac Gregor établi dans [10] pour $p = 2$.

THÉORÈME 6. *Soit* $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leqslant 1\}$ *avec* $p \in \mathbb{N}$, *on distingue deux cas*:

(a) *Si p est pair, une suite* (m_k), $k \in \mathbb{N}^n$, *est une suite de moments sur* B_p *si et seulement si les deux suites* (m_k) *et* $(m_0 - \sum_{k=1}^n m_{k+pe_k})$ *sont de type positif, où* e_k *désigne* $k^{\text{ième}}$ *vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

(b) *Si p est impair une suite* (m_k), $k \in \mathbb{N}^n$, *est une suite de moments sur* B_p *si et seulement si les suites* (m_k) *et* $(R_\varepsilon(m)_k)$ *pour* $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ *sont de type positif.*

En utilisant une méthode analogue à celle du théorème de décomposition, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 4 (de représentation). *Soit R un polynôme de la forme indiquée dans le lemme fondamental et* $K = R^-(\mathbb{R}_+)$. *Alors tout polynôme strictement positif sur K s'écrit* $P + RQ$ *avec P et* $Q \in \nabla$.

Preuve. Soit T un polynôme strictement positif sur K et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $2q \geqslant d^0 T$. $\langle R \rangle_{2q}$ est d'intérieur non vide car il contient le cône convexe $\nabla \cap \mathbb{R}_{2q}[X_1,\ldots, X_n]$ qui engendre $R_{2q}[X_1,\ldots, X_n]$. Si $T \notin \langle R \rangle_{2q}$ avec le théorème de Hahn–Banach en dimension finie on voit qu'il existe une forme linéaire L_{2q} sur $\mathbb{R}_{2q}[X_1,\ldots, X_n]$ telle que $L_{2q}(T) \leqslant 0$ et $L_{2q} \langle \mathring{\bar{R}} \rangle_{2q} > 0$, $\overline{\langle R \rangle_{2q}} = \overline{\langle \mathring{\bar{R}} \rangle}_{2q}$ par convexité, d'où $L_{2q} | \langle R \rangle_{2q} \geqslant 0$. On remarque ensuite que $L_{2q}(\mathbb{1}) > 0$, sinon de $L_{2q}(\mathbb{1}) = 0$ et de la positivité de L_{2q} sur $\langle R \rangle_{2q}$ on en tirerait en raisonnant comme pour le lemme fondamental que $L_{2q}=0$, ce qui est absurde. On procède ensuite d'une manière analogue à celle du théorème de décomposition pour construire une suite $(L_m)_{m \geqslant 2q}$ d'éléments de $\mathbb{R}_m[X_1,\ldots,X_m]^*$ vérifiant $L_m \mid \mathbb{R}_{m-1}[X_1,\ldots,X_m]=L_{m-1}$ et $L_m \mid \langle \mathring{R} \rangle_m > 0$. De là on définit une forme linéaire L sur tout $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ telle que $L \mid \mathbb{R}_m[X_1,\ldots,X_m]=L_m$, d'où L est positive sur $\langle R \rangle$ et avec le théorème de résolution du problème des moments sur $K=R^{-1}(\mathbb{R}_+)$ on voit qu'il existe une mesure positive sur K telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ $L(P)=\int_K P\,d\mu$. En particulier $\int_K \mathbb{1}\,d\mu = L(\mathbb{1})=L_{2q}(\mathbb{1})>0$ donc $\mu \neq 0$ et $\int_K T\,d\mu = L(T)=L_{2q}(T) \leqslant 0$ donc il existe $x \in K$ tel que $T(x) \leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse $T|_K > 0$. ∎

Remarque. (1) Contrairement au théorème de décomposition il est fort probable que dans le théorème précédent on puisse représenter tous les polynômes positifs sur K sous la forme $P+RQ$ avec P et Q dans ∇.

(2) Soit P un polynôme strictement positif sur $\mathbb{R}^n$. Si $n=2$, on suppose que la partie homogène de plus haut degré est strictement positive sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et si $n>2$, on suppose que la partie homogène de plus haut degré est de la forme $a_1X_1^{2p}+\cdots+a_nX_n^{2p}+H_{2p}$ avec $a_k \in \mathbb{R}_+^*$ pour $k=1, n$ et H_{2p} homogène de degré $2p$ et élément de ∇. En posant $R=-P$ on a $P|_K > 0$ avec $K=R^{-1}(\mathbb{R}_+)=\varnothing$ et en appliquant le théorème de représentation on voit qu'il existe Q_1 et $Q_2 \in \nabla$ tels que $P=Q_1+RQ_2=Q_1-PQ_2$ d'où $(1+Q_2)P=Q_1$ soit encore $P=Q_1/(1+Q_2)$, on écrit alors $Q_1=\sum_{k=0}^{N_1} Q_{1,k}^2$ et $1+Q_2=\sum_{l=0}^{N_2} Q_{2,l}^2$, avec $Q_{2,0}=1$. Ainsi P peut s'exprimer sous la forme:

$$P=\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=0}^{N_2}\left[\frac{Q_{1,k}Q_{2,l}}{1+Q_2}\right]^2$$

c'est-à-dire comme somme de carrés de fractions rationnelles. On voit donc que l'on obtient dans ces cas particuliers le théorème d'Artin, répondant en 1927 au 17e problème de Hilbert posé en 1900 au Congrès de Mathématiques de Paris, voir [7; 8], comme une application immédiate du théorème de représentation.

References

1. A. Atzmon, A moment problem for positive measures on the unit disc, *Pacific J. Math.* **59** (2) (1975), 317–325.
2. C. Berg, J. P. R. Christensen, and C. U. Jensen, A remark on the multidimensional moment problem, *Math. Ann.* **243** (1979), 163–169.
3. C. Berg and P. H. Maserick, Polynomially positive definite sequences, *Math. Ann.* **259** (1982), 487–495.
4. G. Cassier, Le problème des moments pour un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **296** (1983), 195–197.

5. G. CASSIER, "Problème des moments n dimensionnel, mesures quasi-spectrales et semi-groupes," Thèse 3ème cycle, Lyon 1983.
6. B. FUGLEDE, The muldimensional moment problem, *Exposition Math.* **1** (1983), 47–65.
7. N. JACOBSON, "Lectures in Abstract Algebra," Van Nostrand, Toronto/New-York/London, 1975.
8. S. LANG, "Algebra," Addison–Wesley, Amsterdam/London/Manila/Singapore/Sydney/Tokyo, 1965.
9. P. H. MASERICK, Moments of measures on convex bodies, *Pacific J. Math.* **68** (1977), 135–152.
10. J. L. MC GREGOR, Solvability criteria for certain N-dimensional moment problems, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 315–333.
11. R. R. PHELPS, Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand Mathematical Studies No. 7, Princeton, N.J., 1966.