JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 114, 59–96 (1993)

# Absorptions non linéaires

PHILIPPE BÉNILAN ET PETRA WITTBOLD*

*Equipe de Mathématiques, URA CNRS 741, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France*

*Communicated by H. Brezis*

Received May 10, 1992

Let $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ be a $\sigma$-finite measure space, $A$ be an $m$-completely accretive operator in $L^1(\Omega)$ ($A$ is $m$-accretive with resolvant $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ satisfying $u \leqslant \hat{u} + k \Rightarrow J_\lambda u \leqslant J_\lambda \hat{u} + k$ for $k \geqslant 0$), and $j: \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ be measurable in $x \in \Omega$, convex, and l.s.c. in $r \in \mathbb{R}$ with $j(x, 0) = 0$. We consider the operator $A + B$ where $B$ is the operator in $L^1(\Omega)$ defined by

$$w \in Bu \quad \text{iff} \quad j(r) \geqslant j(u(x)) + (r - u(x))\, w(x) \text{ for any } r \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega.$$

We define natural $m$-completely accretive extensions of $A + B$ in $L^1(\Omega)$ and study their dependence with respect to $j$ and different cases where $A + B$ is itself $m$-completely accretive; we consider also the evolution problem

$$du/dt + Au + Bu \ni f, \qquad u(0) = u_0.$$



$(\Omega, B, \mu)$ est un espace mesuré. Dans plusieurs articles [V1, V2, St], J. Voigt étudie le problème

$$\frac{du}{dt} + Au + Vu = 0 \qquad \text{sur} \quad [0, \infty[, \; u(0) = u_0 \tag{1}$$

où $-A$ est le générateur d'un semigroupe continu d'opérateurs linéaires positifs sur $L^p(\Omega)$ ($1 \leqslant p < \infty$), $u_0 \in L^p(\Omega)$ et $V: \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable. En général $-(A + V)$ n'est pas générateur d'un semigroupe continu sur $L^p(\Omega)$ de telle sorte qu'il y a réellement un problème à définir une solution de (1). Pour expliquer sa démarche et la généralisation que nous proposons dans le cas non linéaire, nous allons nous restreindre au cas $V \geqslant 0$. Il approche alors (1) par le problème

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n + (V \wedge n)\, u_n = 0 \qquad \text{sur} \quad [0, \infty[, \; u_n(0) = u_0.$$

* Ce travail est une partie d'une thèse de Doctorat de l'Universität Essen, Allemange.



0022-1236/93 $5.00

L'opérateur $-(A+V\wedge n)$ est clairement un générateur de telle sorte qu'il existe une unique solution $u_n \in \mathscr{C}([0,\infty[;\ L^p(\Omega))$. Il remarque que $(u_n)$ converge dans $\mathscr{C}(]0,\infty[;\ L^p(\Omega))$ de telle sorte que la limite $u$ peut être considérée comme une solution généralisée de (1): cette solution définit donc un semigroupe $(S(t))_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires positifs sur $L^p(\Omega)$, mais en général ce semigroupe n'est pas continu. Il dit que $V$ est $A$-admissible lorsque $S(t)$ est continu, note alors $-A_V$ le générateur de ce semigroupe et étudie les propriétés de l'opérateur $A_V$.

Plus récemment W. Arendt et Ch. Batty dans [AB] considèrent un problème analogue, mais avec $V\colon \Omega \to [0,\infty]$ mesurable. D'un autre côté, il y a 20 ans, H. Brézis et W. Strauss [BS] considérèrent le problème

$$u + Au + \beta(u) \ni f, \tag{2}$$

où $-A$ est générateur d'un semigroupe continu de contractions sous-markoviennes sur $L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ et $\beta$ est le sous-différentiel $\partial j$ d'une fonction $j\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ convexe s.c.i. avec $j(0)=0$: ils montrent l'existence d'un unique $(u,w) \in L^1(\Omega)\times L^1(\Omega)$ tel que

$$u + Au + w = f, \qquad w \in \beta(u).$$

Leur démarche est analogue d'une certaine manière à celle ci-dessus: ils approchent (2) par le problème

$$u_\lambda + Au_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) = f$$

où $\beta_\lambda = (1/\lambda)(I-(I+\lambda\beta)^{-1})$ est l'approximation Yosida de $\beta$ (cf. [Br]) et prouvent que $(u_\lambda)$ converge dans $L^1(\Omega)$; la limite $u$ est alors une solution exacte de (2). Leurs résultats ont été étendus à une classe d'opérateurs $A$ non linéaires: les opérateurs $m$-complètement accrétifs (en abrégé mca, cf. [BC]); heuristiquement $-A$ est générateur d'un semi-groupe continu de contractions non linéaires $e^{-tA}$ de $L^1(\Omega)$ vérifiant

$$u \leqslant \hat{u} + k \Rightarrow e^{-tA}u \leqslant e^{-tA}\hat{u} + k.$$

Le lien entre les problèmes (1) et les problèmes (2) passe par la théorie des semigroupes non linéaires: nous le rendrons précis à la Section 5 de cet article. Disons heuristiquement que les deux problèmes sont équivalents. Dans le cas $\beta$ linéaire, on a $\beta(u) = vu$ avec $v \in \mathbb{R}^+$; l'extension dans le cadre non linéaire du problème considéré par Voigt consiste donc à prendre un graphe $\beta(x)$ dépendant de $x \in \Omega$, ou de façon équivalente une fonctionnelle $j\colon \Omega\times\mathbb{R} \to [0,\infty]$ convexe s.c.i. mesurable; dans le cas linéaire $Vu$, on aura $j(x,r) = \frac{1}{2}V(x)\,r^2$; la possibilité pour $j$ de prendre la valeur $+\infty$ étendra aussi le cas considéré par Arendt et Batty.

L'objet de ce papier est l'étude du problème

$$u + Au + \beta(\cdot, u) \ni f \tag{3}$$

où $A$ est un opérateur mca de $L^1(\Omega)$ et $\beta(x, r) = \partial j(x, \cdot)(r)$ avec $j: \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ convexe s.c.i. mesurable; suivant la démarche de Voigt, nous associerons à ce problème un opérateur mca de $L^1(\Omega)$, en fait d'ailleurs en général deux opérateurs mca que nous noterons $A_j^+$ et $A_j^-$ (voir leur construction et leurs propriétés générales à la Section 2); nous étudierons les cas où le problème (3) admet une solution exacte (voir Section 3) et les cas où les deux opérateurs $A_j^+$ et $A_j^-$ coïncident (voir Section 4).

## 1. Données et résultats préliminaires

On se donne $(\Omega, B, \mu)$ un espace mesuré que l'on suppose $\sigma$-fini pour simplifier. Suivant [BC], on note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace des fonctions numériques mesurables définies $\mu$-p.p. sur $\Omega$; pour $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, on pose

$$\int u = \int_\Omega u(x)\, d\mu(x)$$

qui est défini si $u \geqslant 0$ $\mu$-p.p. ou si $u$ est $\mu$-intégrable; pour $u, v \in \mathcal{M}(\Omega)$, on pose

$$u \ll v \Leftrightarrow \int j(u) \leqslant \int j(v) \qquad \text{pour tout} \quad j \in \mathcal{J}_0,$$

où $\mathcal{J}_0 = \{j: \mathbb{R} \to [0, \infty]; j \text{ convexe, s.c.i., } j(0) = 0\}$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, B, \mu)$ est l'espace de Lebesgue classique dont la norme sera notée $\|\cdot\|_p$; il est clair que

$$u \in \mathcal{M}(\Omega),\, v \in L^p(\Omega),\, u \ll v \Rightarrow u \in L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \|u^-\|_p \leqslant \|v^-\|_p,$$
$$\|u^+\|_p \leqslant \|v^+\|_p \quad \text{et} \quad \|u\|_p \leqslant \|v\|_p$$

où pour $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, $u^+ = \sup(0, u)$, $u^- = (-u)^+$.

Un opérateur complètement accrétif, en abrégé ca, est une application $A: \mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{P}(\mathcal{M}(\Omega))$ vérifiant

$$u - \hat{u} \ll u - \hat{u} + \lambda(v - \hat{v}) \qquad \forall v \in Au,\, \hat{v} \in A\hat{u},\, \lambda > 0.$$

Si $X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(\Omega)$, un opérateur $m$-complètement accrétif, en abrégé mca, dans $X$ est une application $A: X \to \mathcal{P}(X)$ ca et vérifiant $R(I+\lambda A)=X$ pour tout $\lambda>0$; alors $J_\lambda^A=(I+\lambda A)^{-1}$ est une application de $X$ dans $X$ vérifiant

$$\int j(J_\lambda^A u - J_\lambda^A \hat{u}) \leqslant \int j(u-\hat{u}) \qquad \forall u, \hat{u} \in X, j \in J_0. \tag{1.0}$$

Dans toute la suite, $A$ est un opérateur mca dans $L^1(\Omega)$ vérifiant $0 \in A0$.

On notera d'autre part $\mathscr{J}_0(\Omega)$ l'ensemble des $j\colon \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ vérifiant

$$\mu-\text{p.p. } x \in \Omega \ \ j(x,\cdot) \in \mathscr{J}_0 \text{ et pour tout } r \in \mathbb{R} \ \ j(\cdot, r) \text{ est } \mu\text{-mesurable}. \tag{1.1}$$

Pour $j \in \mathscr{J}_0(\Omega)$, on pose $\beta(x,r)=\partial j(x,\cdot)(r)$ défini $\mu-$p.p. $x \in \Omega$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ par

$$s \in \beta(x,r) \Leftrightarrow j(x,\hat{r}) \geqslant j(x,r)+s(\hat{r}-r) \qquad \text{pour tout} \quad \hat{r} \in \mathbb{R},$$

et on définit l'opérateur $B$ dans $L^1(\Omega)$ par

$$w \in Bu \Leftrightarrow w, u \in L^1(\Omega) \qquad \text{et} \qquad w(x) \in \beta(x, u(x)) \ \mu-\text{p.p. } x \in \Omega. \tag{1.2}$$

On a le résultat suivant:

LEMME 1.1. *$B$ est mca dans $L^1(\Omega)$.*

*Preuve.* Le résultat se déduit des arguments classiques sur les fonctionnelles convexes (cf. par exemple [Br]) que nous rappelons ici:

Evidemment, $\mu-$p.p. $x \in \Omega$, $\beta(x,\cdot)$ est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}$ avec $0 \in \beta(x,0)$, et donc pour $\lambda>0$, $(I+\lambda\beta(x,\cdot))^{-1}$ est une contraction normale croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on pose $T_\lambda(x,r)=(I+\lambda\beta(x,\cdot))^{-1}(r)$; alors on a $T_\lambda(x,0)=0$,

$$j(T_\lambda(x,r)-T_\lambda(x,\hat{r})) \leqslant j(r-\hat{r}) \qquad \mu-\text{p.p. } x \in \Omega, \qquad \forall r, \hat{r} \in \mathbb{R}, j \in \mathscr{J}_0.$$

Etant donné $f \in L^1(\Omega)$, on a

$$u+\lambda Bu \ni f \Leftrightarrow u \in L^1(\Omega) \qquad \text{et} \qquad u(x)=T_\lambda(x, f(x)) \ \mu-\text{p.p. } x \in \Omega.$$

Pour achever la démonstration du lemme, il suffit de montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}$, $T_\lambda(\cdot, r)$ est mesurable; à cet effet, nous remarquons que

$$T_\lambda(x,r)=r-\lambda \cdot \lim_{h\to 0} \frac{j_\lambda(x,r+h)-j_\lambda(x,r)}{h},$$

où

$$j_\lambda(x,r)=\inf_{s \in \mathbb{Q}} \left\{\frac{1}{2\lambda}|s-r|^2+j(x,s)\right\}. \ \blacksquare \tag{1.3}$$

D'après [BC, Corollaire 2.4], on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.2. *$A+B$ est ca.*

En général, $A+B$ n'est pas mca dans $L^1(\Omega)$; ceci même dans le cas linéaire univoque avec $j$ finie correspondant à $-A$ est générateur d'un semigroupe de classe $C_0$, sous-markovien dans $L^1(\Omega)$ et

$$j(x,r)=\tfrac{1}{2}V(x)\,r^2 \qquad \text{où} \quad V\in \mathcal{M}(\Omega),\ V\geqslant 0$$

(cf. [V1, Exemple C.1; V2, Exemple 4.1).

Cependant $A+B$ est mca sous l'hypothèse

$$j(\cdot,r)\in L^2(\Omega)+L^\infty(\Omega) \qquad \forall r\in\mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Plus précisément, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 1.3. *On suppose* (1.4). *Alors il existe une T-contraction $W\colon L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$, c'est-à-dire une application de $L^1(\Omega)$ vérifiant*

$$\int (W(f)-W(\hat f))^+\leqslant \int (f-\hat f)^+ \qquad \forall f,\hat f\in L^1(\Omega),$$

*telle que pour tout $f\in L^1(\Omega)$, il existe une unique solution $u\in L^1(\Omega)$ de*

$$u+Au+W(f)\ni f, \qquad W(f)\in Bu.$$

*Remarque* 1.4. Si $j(x,r)=j(r)$ est indépendant de $x$ et finie, alors la condition (1.4) est automatiquement vérifiée; en fait, compte tenu du résultat de [BC, Théorème 6.1], on sait que, si $j(x,r)=j(r)$ est indépendant de $x\in\Omega$ sans l'hypothèse $j(r)$ est finie, alors $A+B$ est mca dans $L^1(\Omega)$. Combinant ce résultat avec la Proposition 1.3, on voit que $A+B$ est mca si $j(x,r)=j_0(r)+j_1(x,r)$ avec $j_1$ vérifiant (1.4) et $j_0\in\mathcal{J}_0$.

*Preuve de la proposition* 1.3. On suit la méthode de [BS]. On note pour $\lambda>0$, $B_\lambda=(1/\lambda)(I-(I+\lambda B)^{-1})$ l'approximation de Yosida de $B$; on sait (cf. [Br, Proposition 2.11]) que $B_\lambda$ est l'opérateur associé à la fonctionnelle $j_\lambda$ définie en (1.3).

Etant donné $f\in L^1(\Omega)$, il existe une unique solution $u_\lambda=u_\lambda(f)$ de

$$u_\lambda+Au_\lambda+B_\lambda u_\lambda\ni f.$$

L'opérateur $A+B_\lambda$ étant mca, on sait (cf. (1.0)) que

$$u_\lambda(f)\ll f. \tag{1.5}$$

D'autre part, utilisant l'accrétivité complète de $A$, on a (cf. [BC, Proposition 2.2])

$$\int_{\{u_\lambda(f) > u_\lambda(\hat{f})\}} (f - u_\lambda(f) - B_\lambda u_\lambda(f)) - (\hat{f} - u_\lambda(\hat{f}) - B_\lambda u_\lambda(\hat{f})) \geqslant 0$$

et donc

$$\int (u_\lambda(f) - u_\lambda(\hat{f}))^+ + (B_\lambda u_\lambda(f) - B_\lambda u_\lambda(\hat{f}))^+ \leqslant \int (f - \hat{f})^+. \tag{1.6}$$

En particulier

$$\|B_\lambda u_\lambda(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1. \tag{1.7}$$

Fixons maintenant d'abord $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et considérons $u_\lambda = u_\lambda(f)$, $v_\lambda = (I + \lambda B)^{-1} u_\lambda$. D'après (1.5) et compte tenu de l'accrétivité complète de $B$, on a

$$\|v_\lambda\|_\infty \leqslant \|u_\lambda\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty;$$

puisque $B_\lambda u_\lambda(x) \in \beta(x, v_\lambda(x))$ $\mu$ – p.p. $x \in \Omega$, on a

$$j(x, r) \geqslant B_\lambda u_\lambda(x)(r - v_\lambda(x)) \qquad \forall r \in \mathbb{R}$$

et donc

$$-j(x, -\|f\|_\infty - 1) \leqslant B_\lambda u_\lambda(x) \leqslant j(x, \|f\|_\infty + 1) \qquad \mu - \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Compte tenu de l'hypothèse (1.4) et l'estimation (1.7), on a alors

$$\|B_\lambda u_\lambda\|_2 \leqslant \text{const.}$$

Puisque les restrictions de $A$, $B$ à $L^2(\Omega)$ sont monotones, d'après le résultat de [Br, Théorème 2.4], on en déduit que

$$u_\lambda \to u, \; B_\lambda u_\lambda \to w \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } \lambda \downarrow 0.$$

D'après les propriétés de fermeture des opérateurs mca dans $L^1(\Omega)$ (cf. [BC, Proposition 3.4]), on a

$$u + Au + w \ni f, \qquad w \in Bu.$$

On note maintenant pour tout $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $W(f) = L^2 -$

$\lim_{\lambda \downarrow 0} B_\lambda u_\lambda(f)$. Utilisant (1.6) et le lemme de Fatou, on a pour $f, \hat{f} \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int (W(f) - W(\hat{f}))^+ \leqslant \int (f - \hat{f})^+ \tag{1.8}$$

et donc $W$ se prolonge par densité en une unique application de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, encore notée $W$, vérifiant (1.8) pour tout $f, \hat{f} \in L^1(\Omega)$.

Etant donné $f \in L^1(\Omega)$, considérons une suite $(f_n)_n \subseteq L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$, et soient $u_n$ les solutions correspondantes de

$$u_n + Au_n + W(f_n) \ni f_n, \qquad W(f_n) \in Bu_n;$$

on a d'après (1.8)

$$W(f_n) \to W(f) \qquad \text{dans } L^1(\Omega)$$

et aussi

$$u_n = (I + A)^{-1} (f_n - W(f_n)) \to u = (I + A)^{-1} (f - W(f)) \qquad \text{dans } L^1(\Omega);$$

donc, par fermeture de $B$,

$$u + Au + W(f) \ni f, \qquad W(f) \in Bu. \quad \blacksquare$$

*Remarque* 1.5. En utilisant la théorie des perturbations dans un espace de Banach à dual uniformément convexe, on peut, avec le même raisonnement, montrer que $A + B$ est mca dans $L^1(\Omega)$ sous l'hypothèse

$$\exists p > 1 \text{ tel que } j(\cdot, r) \in L^p(\Omega) + L^\infty(\Omega) \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

En fait, on montrera plus loin que $A + B$ est mca sous la seule hypothèse

$$j(\cdot, r) \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega) \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Rappelons pour terminer cette section encore quelques définitions et résultats techniques dont on aura besoin dans la suite.

Etant donné une suite généralisée $(A_i)_{i \in I}$ d'opérateurs, on note $\liminf A_i$ l'opérateur de graphe $\{(u, v);$ il existe une suite généralisée $(u_i, v_i)_{i \in I}$ convergeant vers $(u, v)$ avec $v_i \in A_i u_i$ pour tout $i \in I\}$.

Si $A_i$ est ca pour tout $i \in I$, alors $\liminf A_i$ est ca; si $A_i$ est mca dans $L^1(\Omega)$ pour tout $i \in I$, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $\liminf A_i$ est mca dans $L^1(\Omega)$.

(ii) $((I + A_i)^{-1} f)_{i \in I}$ converge pour tout $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

De plus alors $(I+\lambda A_i)^{-1}f \to (I+\lambda \liminf A_i)^{-1}f$ dans $L^1(\Omega)$ pour tout $f \in L^1(\Omega)$, $\lambda > 0$. Notons que la preuve de la Proposition 1.3 montre que, sous les hypothèses de cette proposition, on a

$$A + B = \liminf A + B_\lambda.$$

Nous utiliserons le lemme de demi-fermeture suivant:

LEMME 1.6. *Pour* $n = 0, 1, ..., \infty$ *soient* $A_n$ *des opérateurs mca dans* $L^1(\Omega)$, $u_n, v_n \in L^1(\Omega)$ *et supposons*

(i) $A_\infty = \liminf A_n$

(ii) $u_n \to u_\infty$ *dans* $L^1(\Omega)$

(iii) $(v_n)$ *est bornée dans* $L^1(\Omega)$ *et* $v_n \to v_\infty$ *dans* $\sigma(L^1(\Omega), L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$

(iv) $v_n \in A_n u_n$ *pour* $n = 0, 1, ....$

*Alors* $v_\infty \in A_\infty u_\infty$.

*Preuve.* Il suffit de noter que $A_\infty \cup \{(u_\infty, v_\infty)\}$ est un opérateur ca dans $L^1(\Omega)$ (cf. [BC, Proposition 2.6]). ∎

Etant donné $j \in \mathscr{J}_0$, on note $\partial j^0$ l'application définie par

$$\partial j^0 : r \in \mathbb{R} \to \begin{cases} \inf \partial_j(r) & \text{si} \quad r > 0 \\ 0 & \text{si} \quad r = 0 \\ \sup \partial_j(r) & \text{si} \quad r < 0 \end{cases}$$

avec la convention habituelle: $\inf \phi = +\infty$, $\sup \phi = -\infty$. Si $j \in \mathscr{J}_0(\Omega)$, $\partial j^0(x, r) = \partial j(x, \cdot)^0\,(r)$ est définie $\mu-$p.p. $x$, pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Si pour $n = 1, 2, ..., \infty$, $j_n \in \mathscr{J}_0(\Omega)$, $B_n$ est l'opérateur associé défini par (1.2), alors les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & j_n(x, r) \to j_\infty(x, r) & \text{p.p. } (x, r) \\ \text{(ii)} & \partial j_n^0(x, r) \to \partial j_\infty^0(x, r) & \text{p.p. } (x, r) \\ \text{(iii)} & \partial j_\infty(x, \cdot) = \liminf \partial j_n(x, \cdot) & \text{p.p. } x \\ \text{(iv)} & B_\infty = \liminf B_n; & \end{array} \tag{1.9}$$

et nous écrirons alors pour simplifier $j_n \to j_\infty$.

## 2. EXTENSIONS MCA DE $A + B$

Dans cette section, nous allons montrer que l'opérateur $A + B$ admet au moins une extension mca dans $L^1(\Omega)$ et mettre en évidence deux extensions mca particulières que l'on notera $A_j^+$ et $A_j^-$. Dans la Section 4, on étudiera un certain nombre de cas où il y a coïncidence entre $A_j^+$ et $A_j^-$.

On utilisera essentiellement une technique de monotonie fondée sur la remarque suivante:

LEMME 2.1. *Soient* $j_1, j_2 \in \mathscr{J}_0(\Omega)$, $B_1, B_2$ *les opérateurs dans* $L^1(\Omega)$ *associés. Supposons que*

$$\partial j_1 \leqslant \partial j_2$$

*au sens suivant*:

$$\partial j_1^0(x, r) \leqslant \partial j_2^0(x, r) \text{ p.p. } (x, r). \tag{2.0}$$

*Pour* $i = 1, 2$ *soient* $f_i$, $u_i \in L^1(\Omega)$ *vérifiant*

$$u_i + Au_i + B_i u_i \ni f_i;$$

*alors on a*

$$(u_2 - u_1)^+ \ll (f_2 - f_1)^+$$

*et donc, en particulier*

$$f_2 \leqslant f_1 \Rightarrow u_2 \leqslant u_1.$$

*Preuve.* Notons d'abord que, par (2.0), on a

$$j_2(x, r) + j_1(x, s) \geqslant j_1(x, r) + j_2(x, s) \qquad \forall r \geqslant s,\ \mu - \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{2.1}$$

En effet, fixons $x \in \Omega$; on peut toujours supposer que

$$r \in D(j_2(x, \cdot)),\ s \in D(j_1(x, \cdot)).$$

On a alors

$$j_2(x, r) - j_2(x, s) = \int_s^r \partial j_2^0(x, \tau)\, d\tau \qquad \in [-\infty, \infty[$$

$$j_1(x, r) - j_1(x, s) = \int_s^r \partial j_1^0(x, \tau)\, d\tau \qquad \in ]-\infty, \infty].$$

Compte tenu de (2.0)

$$\infty > j_2(x, r) - j_2(x, s) \geqslant j_1(x, r) - j_1(x, s) > -\infty$$

d'où (2.1).

Maintenant, soit pour $i=1,2$ $w_i \in L^1(\Omega)$ tel que

$$u_i + Au_i + w_i \ni f_i, \qquad w_i \in B_i u_i.$$

Fixons $k>0$.

Puisque $A$ est ca, on a

$$\int_{\{u_2 > u_1 + k\}} (f_2 - w_2 - u_2) - (f_1 - w_1 - u_1) \geqslant 0$$

et donc

$$\int (u_2 - u_1 - k)^+ + \int_{\{u_2 > u_1 + k\}} (w_2 - w_1) \leqslant \int (f_2 - f_1 - k)^+.$$

Montrons que

$$w_2 \geqslant w_1 \ \mu - \text{p.p. sur } \{u_2 > u_1 + k\}$$

ce qui achèvera la preuve du Lemme.

On a d'après (2.1) et la définition des opérateurs $B_1$, $B_2$ (1.2)

$$\begin{aligned} &j_2(\cdot, u_2) + j_1(\cdot, u_1) \\ &\quad \geqslant j_1(\cdot, u_2) + j_2(\cdot, u_1) \\ &\quad \geqslant j_1(\cdot, u_1) + w_1(u_2 - u_1) + j_2(\cdot, u_2) + w_2(u_1 - u_2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\mu$ – p.p. sur $\{u_2 \geqslant u_1\}$.

Puisque $u_i \in D(B_i)$, $j_i(\cdot, u_i) < \infty$ $\mu$ – p.p. sur $\Omega$; alors, en simplifiant (2.2), on a

$$(w_1 - w_2)(u_1 - u_2) \leqslant 0 \qquad \mu\text{-p.p. sur } \{u_2 \geqslant u_1\}$$

et donc

$$w_2 \geqslant w_1 \qquad \mu - \text{p.p. sur } \{u_2 > u_1\}. \quad \blacksquare$$

Montrons maintenant le résultat suivant:

PROPOSITION 2.2. *Soit $j \in \mathscr{J}_0(\Omega)$ vérifiant*

$$j(x, r) = 0 \ \mu - \text{p.p. } x \in \Omega \qquad \textit{pour tout} \quad r \leqslant 0. \tag{2.3}$$

*Alors*

(i) *$A_j := \liminf_{\lambda \downarrow 0} A + B_\lambda$ est une extension mca de $A + B$ dans $L^1(\Omega)$.*

(ii) *Etant donné une suite* $(j_n)_n \subseteq \mathscr{J}_0(\Omega)$ *vérifiant* (2.3) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *ainsi que*

$$\partial j_n \leqslant \partial j \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

$$j_n \to j, \tag{2.5}$$

*alors* $A_j = \liminf_n A_{j_n}$; *plus précisément pour tout* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\lambda > 0$, $(I + \lambda A_{j_n})^{-1} f \to (I + \lambda A_j)^{-1} f$ *dans* $L^1(\Omega)$ *et p.p. sur* $\Omega$. *En particulier, si* $j_n(\cdot, r) \in L^2(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ *pour tout* $r \geqslant 0$,

$$A_j = \liminf A + B_n,$$

*où* $B_n$ *est l'opérateur associé à* $j_n$ *dans* $L^1(\Omega)$.

*Preuve.* (1) Etant donné $m > 0$, définissons

$$j^m(x, r) = \int_0^r \inf(m, \beta^0(x, s))\, ds. \tag{2.6}$$

Evidemment, $j^m \in \mathscr{J}_0(\Omega)$ et $j^m$ vérifient $j^m(\cdot, r) \in L^2(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$; notons $B^m$ l'opérateur associé dans $L^1(\Omega)$; alors, d'après la Proposition 1.3, $A + B^m$ est mca dans $L^1(\Omega)$ pour tout $m > 0$. Etant donné $f \in L^1(\Omega)$, posons $u^m = (I + A + B^m)^{-1} f$. D'après le Lemme 2.1, $u^m$ décroît lorsque $m$ croît. Puisque $u^m \ll f$, $(u^m)$ converge dans $L^1(\Omega)$ lorsque $m \to \infty$.

On a ainsi montré que $\liminf_m A + B^m$ est mca dans $L^1(\Omega)$. Montrons maintenant que c'est aussi une extension de $A + B$: étant donné $v \in Au$, $w \in Bu$, considérons $f = u + v + w$; on a

$$u + Au + B^m u \ni f - (w - m)^+$$

et donc

$$u^m - u \ll (w - m)^+;$$

ceci prouve que

$$u^m \to u \qquad \text{dans} \quad L^1(\Omega) \text{ lorsque } m \to \infty$$

et alors

$$A + B \subset \liminf_m A + B^m.$$

(2) Considérons maintenant une suite $(j_n)_n$ vérifiant les hypothèses de (ii), et montrons

$$\liminf_m A + B^m = \liminf_n (\liminf_m A + B_n^m),$$

où $B_n^m$ est l'opérateur associé à $j_n^m$ définie par (2.6) en remplaçant $j$ par $j_m$. Définissons

$$\tilde{j}_n(x, r) = \int_0^r (\inf_{k \geqslant n} \beta_k^0(x, s))\, ds.$$

On a

$$\partial \tilde{j}_n \leqslant \partial j_n \leqslant \partial j \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

donc

$$\partial \tilde{j}_n^m \leqslant \partial j_n^m \leqslant \partial j^m \qquad \forall n \in \mathbb{N}, m > 0,$$

où $\tilde{j}_n^m$, $j_n^m$ sont les fonctionnelles correspondantes à $\tilde{j}_n, j_n$ définies par (2.6).

Fixons $f \in L^1(\Omega)$ et considérons $u_n$, $\tilde{u}_n$, $u_n^m$, $\tilde{u}_n^m$ les solutions correspondantes avec les notations évidentes.

D'après le Lemme 2.1, on a

$$\tilde{u}_n^m \geqslant u_n^m \geqslant u^m,$$
$$\tilde{u}_n^m \geqslant \tilde{u}_{n+1}^m \qquad \forall n \in \mathbb{N}, m > 0$$

et, d'après l'étape (1),

$$\tilde{u}_n^m \to \tilde{u}_n = \inf_m \tilde{u}_n^m$$
$$u_n^m \to u_n = \inf_m u_n^m$$
$$u^m \to u = \inf_m u^m \qquad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ lorsque } m \to \infty.$$

De plus, on a

$$\tilde{u}_n^m \to \tilde{u}^m = \inf_n \tilde{u}_n^m$$
$$\tilde{u}_n \to \tilde{u} = \inf_n \tilde{u}_n \qquad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Nous allons prouver

$$\tilde{u}^m = u^m \qquad \forall m > 0. \tag{2.7}$$

Il en résultera que

$$\tilde{u} = \inf_n \tilde{u}_n = \inf_n \inf_m \tilde{u}_n^m = \inf_m \inf_n \tilde{u}_n^m = \inf_m \tilde{u}^m = \inf_m u^m = u$$

et donc, puisque $\tilde{u}_n \geqslant u_n \geqslant u$ $\forall n \in \mathbb{N}$, finalement $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$ ce qui prouvera

$$\liminf_m A + B^m = \liminf_n (\liminf_m A + B_n^m).$$

Puisque $\tilde{u}_n \to \tilde{u} = u$ p.p., on aura aussi

$$u_n = (I + \liminf_m A + B_n^m)^{-1} f \to u = (I + \liminf_m A + B^m)^{-1} f \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

(3) Pour prouver (2.7) notons d'abord que, grâce à (2.5) et (1.9),

$$\partial \tilde{j}_n^{m^0}(x, r) = \inf(m, \partial j_n^0(x, r), \partial j_{n+1}^0(x, r), ...) \to \inf(m, \partial_j^0(x, r)) = (\partial_j^m)^0 (x, r)$$

p.p. $(x, r)$ lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$A + B^m = \liminf_n A + \tilde{B}_n^m$$

où $\tilde{B}_n^m$ est l'opérateur associé à $\tilde{j}_n^m$ dans $L^1(\Omega)$. D'après la Proposition 1.3, il existe $\tilde{w}_n^m \in \tilde{B}_n^m \tilde{u}_n^m$ tel que

$$\tilde{u}_n^m + A\tilde{u}_n^m + \tilde{w}_n^m \ni f,$$
$$\|\tilde{w}_n^m\|_1 \leqslant \|f\|_1 \qquad \forall m > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\tilde{w}_n^m \leqslant m$, il existe une suite extraite $(n_k)_k$ telle que

$$\tilde{w}_{n_k}^m \to \tilde{w}^m \qquad \text{dans } \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega)).$$

On a

$$\|\tilde{w}^m\|_1 \leqslant \|f\|_1$$

et, d'après le Lemme 1.6,

$$\tilde{w}^m \in B^m \tilde{u}^m \qquad \forall m > 0;$$

enfin, par demi-fermeture de $A$ (cf. [BC, Proposition 3.4])

$$\tilde{u}^m + A\tilde{u}^m + \tilde{w}^m \ni f,$$

ce qui prouve

$$\tilde{u}^m = u^m \qquad \text{pour tout} \quad m > 0.$$

(4) Appliquant les résultats de l'étape (2) avec l'approximation de Yosida $j_\lambda$ de $j$, on a

$$\liminf_m A + B^m = \liminf_\lambda (\liminf_m A + B_\lambda^m).$$

Mais $\liminf_m A + B_\lambda^m \supseteq A + B_\lambda$ et donc, $A + B_\lambda$ étant déjà mca dans $L^1(\Omega)$,

$$\liminf_m A + B^m = \liminf_\lambda A + B_\lambda = A_j$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. ∎

Si, à la place de (2.3), on suppose

$$j(x, r) = 0 \ \mu - \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad \forall r \geqslant 0,$$

alors, de même, l'opérateur $A_j := \liminf_{\lambda \downarrow 0} A + B_\lambda$ est une extension mca de $A + B$ dans $L^1(\Omega)$; on peut en effet soit refaire le même raisonnement, soit appliquer la Proposition 2.2 en remplaçant $A, j$ par $\tilde{A}u = -A(-u)$, $\tilde{j}(x, r) = j(x, -r)$. Etant donné $j \in \mathcal{J}_0(\Omega)$ quelconque, on définit alors les opérateurs

$$A_j^+ := (A_{j_-})_{j_+}, \qquad A_j^- = (A_{j_+})_{j_-},$$

où $j_+, j_-$ sont les fonctionnelles de $\mathcal{J}_0(\Omega)$ définies par

$$j_+(x, r) = j(x, r^+), j_-(x, r) = j(x, -r^-) \ \mu - \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Par définition, on a

$$A_j^+ = \liminf_{\lambda \to 0} (\liminf_{\mu \to 0} A + B_{\lambda, \mu}), \qquad A_j^- = \liminf_{\mu \to 0} (\liminf_{\lambda \to 0} A + B_{\lambda, \mu}),$$

où pour $\lambda$, $\mu > 0$, $B_{\lambda, \mu} u = B_\lambda u^+ + B_\mu(-u^-)$. On vérifie les propriétés suivantes:

Proposition 2.3. (i) *Les opérateurs $A_j^+$, $A_j^-$ sont des extensions mca de $A + B$ dans $L^1(\Omega)$; pour tout $\lambda > 0$ et $f \in L^1(\Omega)$*

$$(I + \lambda A_j^-)^{-1} f \leqslant (I + \lambda A_j^+)^{-1} f \tag{2.8}$$

*et il y a égalité pour $f \in L^1(\Omega)^+ \cup (-L^1(\Omega)^+)$.*

(ii) $\hat{D}(A_j^+) = \hat{D}(A_j^-) = \hat{D}(A) \cap D(B)$ *et*

$$|u|_{A_j^+}, |u|_{A_j^-} \leqslant |u|_A + \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1 \qquad \forall u \in L^1(\Omega)^1$$

(iii) *Etant donné $j_1, j_2 \in \mathcal{J}_0(\Omega)$,*

$$\partial j_1 \leqslant \partial j_2 \Rightarrow \textit{pour tout } \lambda > 0, f \in L^1(\Omega) \tag{2.9}$$

[1] Rappelons (cf. par exemple [BCP]) qu'étant donné un opérateur $A$, $|u|_A := \inf\{M \in [0, \infty]$; il existe $v_n \in Au_n$ tel que $u_n \to u$, $\|v_n\| \leqslant M\}$ et $\hat{D}(A) := \{u, |u|_A < \infty\}$; si $A$ est $m$-accrétif, alors $|u|_A = \sup_{\lambda > 0} \|A_\lambda u\| = \lim_{\lambda \to 0} \|A_\lambda u\|$.

$$(I+\lambda A_{j_2}^+)^{-1}f \leqslant (I+\lambda A_{j_1}^+)^{-1}f, \qquad (I+\lambda A_{j_2}^-)^{-1}f \leqslant (I+\lambda A_{j_1}^-)^{-1}f$$

$$|\partial j_1| \leqslant |\partial j_2| \Rightarrow \textit{pour tout } \lambda > 0, f \in L^1(\Omega) \tag{2.10}$$

$$(I+\lambda A_{j_1}^+)^{-1}(-f^-) \leqslant (I+\lambda A_{j_2}^+)^{-1}f \leqslant (I+\lambda A_{j_1}^+)^{-1}(f^+)$$

$$(I+\lambda A_{j_1}^-)^{-1}(-f^-) \leqslant (I+\lambda A_{j_2}^-)^{-1}f \leqslant (I+\lambda A_{j_2}^-)^{-1}(f^+).$$

(iv) *Etant donné une suite* $(j_n)_n$ *de* $\mathscr{J}_0(\Omega)$ *telle que*

$$j_n \to j, |\partial j_n| \leqslant |\partial j| \qquad \textit{pour tout } n \tag{2.11}$$

*on a pour tout* $\lambda > 0, f \in L^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}(I+\lambda A_j^-)^{-1} &\leqslant \liminf_n (I+\lambda A_{j_n}^-)^{-1} \\ &\leqslant \limsup_n (I+\lambda A_{j_n}^+)^{-1}f \leqslant (I+\lambda A_j^+)^{-1}f \text{ p.p.}\end{aligned} \tag{2.12}$$

*En particulier, si* $A_j^+ = A_j^-$ *alors*

$$A_j^+ = A_j^- = \liminf A_{j_n}^+ = \liminf A_{j_n}^-.$$

*Preuve.* D'après la Proposition 2.2, $A_{j_+}$ est une extension mca de $A+B_+$, où $B_+u = B(u^+)$ est l'opérateur associé à $j_+$; appliquant à nouveau cette proposition $A_j^- = (A_{j_+})_{j_-}$ est une extension mca de $A_{j_+} + B_- \supset A + B_+ + B_- = A + B$, avec $B_-u = B(-u^-)$; de même $A_j^+$ est une extension mca de $A+B$.

Donnons-nous maintenant une suite $(j_n)_n$ vérifiant (2.11) et montrons (2.12). On peut toujours supposer $\lambda = 1$ en remplaçant $A, j, j_n$ par $\lambda A$, $\lambda j$, $\lambda j_n$. Fixons $f \in L^1(\Omega)$. Etant donné $\lambda$, $\mu > 0$, appliquant le Lemme 2.1, on a

$$(I+A+B_{n,\lambda,\mu})^{-1}f \leqslant (I+A+B_{n,\lambda,+}+B_{\mu,-})^{-1}f$$

et à la limite lorsque $\mu \to 0$,

$$u_n^\lambda := (I+A_{j_{n,-}}+B_{n,\lambda,+})^{-1}f \leqslant (I+A_{j_-}+B_{n,\lambda,+})^{-1}f =: v_n^\lambda.$$

D'après la Proposition 2.2,

$$v_n^\lambda \to (I+A_j^+)^{-1}f \text{ p.p. lorsque } (n,\lambda) \to (\infty, 0)$$

et donc

$$\limsup_{n\to\infty} (I+A_{j_n}^+)^{-1}f = \limsup_{n\to\infty} \lim_{\lambda\to 0} u_n^\lambda \leqslant (I+A_j^+)^{-1}f.$$

On montrera de même la première inégalité de (2.12). Si $A_j^+ = A_j^- =: A_j$, on a alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$

$$(I + A_{j_n}^+)^{-1} f \to (I + A_j)^{-1} f \quad \text{p.p. sur } \Omega;$$

puisque $(I + A_{j_n}^+)^{-1} f \ll f$, on a bien

$$(I + A_{j_n}^+)^{-1} f \to (I + A_j)^{-1} f \qquad \text{dans } L^1(\Omega)$$

et donc $A_j = \liminf A_{j_n}^+$ ; de même $A_j = \liminf A_{j_n}^-$ .

Les inégalités (2.12) impliquent en particulier l'inégalité (2.8). Lorsque $f \in L^1(\Omega)^+$, $u_{\lambda,\mu} = (I + A + B_{\lambda,\mu})^{-1} f \geqslant 0$ et donc $u_{\lambda,\mu} = (I + A + B_{\lambda,+})^{-1} f$; il en résulte que $(I + A_j^+)^{-1} f = (I + A_j^-)^{-1} f = (I + A_{j_+})^{-1} f$; de même, si $-f \in L^1(\Omega)^+$, $(I + A_j^+)^{-1} f = (I + A_j^-)^{-1} f = (I + A_{j_-})^{-1} f$.

Montrons maintenant le point (ii). Supposons d'abord que $j$ vérifie (2.3) et donc $A_j^+ = A_j^- = A_j$. Fixons $u \in L^1(\Omega)$ et considérons $u_\lambda^\varepsilon = (I + \varepsilon(A + B_\lambda))^{-1} u$ pour $\varepsilon$, $\lambda > 0$; on a $u_\lambda^\varepsilon \downarrow u^\varepsilon = (I + \varepsilon A_j)^{-1} u$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Puisque

$$\left\| \frac{u - u_\lambda^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_1 = \|(A + B_\lambda)_\varepsilon u\|_1 \leqslant |u|_{A + B_\lambda}$$
$$\leqslant |u|_A + \|B_\lambda u\|_1 \leqslant |u|_A + \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1$$

on aura à la limite

$$\left\| \frac{u - u^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_1 \leqslant |u|_A + \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1,$$

et donc $\hat{D}(A) \cap D(B) \subset \hat{D}(A_j)$, $|u|_{A_j} \leqslant |u|_A + \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1$. Réciproquement considérons d'abord $u \in D(A_j)$, $v \in A_j u$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_\lambda = (I + n(A + B_\lambda))^{-1}(u + nv)$; on a $u_\lambda \downarrow (I + nA_j)^{-1}(u + nv) = u$ lorsque $\lambda \downarrow 0$, et par accrétivité de $A$,

$$\|u_\lambda\|_1 + n\, \|B_\lambda u_\lambda\|_1 \leqslant \|u + nv\|_1;$$

et on déduit

$$\|u\|_1 + n\, |u|_A + n\, |u|_B \leqslant 2\, \|u + nv\|_1;$$

ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque $|u|_B = \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1$,

$$|u|_A + \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1 \leqslant 2\, \|v\|_1.$$

Il en résulte que $|u|_A + \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1 \leqslant 2\, |u|_{A_j}$ pour tout $u \in L^1(\Omega)$ et en particulier $\hat{D}(A_j) \subset \hat{D}(A) \cap D(B)$. On a ainsi prouvé (ii) lorsque $j$ vérifie

(2.3); on montrera de même (ii) lorsque $j(\cdot, r)=0$ pour $r \geqslant 0$; dans le cas général, on aura donc

$$\begin{aligned}\hat{D}(A_j^+) &= \hat{D}((A_{j_-})_{j_+}) = \hat{D}(A_{j_-}) \cap D(B_+) \\ &= \hat{D}(A) \cap D(B_-) \cap D(B_+) = \hat{D}(A) \cap D(B)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|u|_{A_j^+} &\leqslant |u|_{A_{j_-}} + \|\partial j_+^0(\cdot, u)\|_1 \\ &\leqslant |u|_A + \|\partial j_-^0(\cdot, u)\|_1 + \|\partial j_+^0(\cdot, u)\|_1 = |u|_A + \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1;\end{aligned}$$

le cas de $A_j^-$ est similaire.

Pour prouver le point (iii), notons que si $\partial j_1 \leqslant \partial j_2$ (resp. $|\partial j_1| \leqslant |\partial j_2|$) alors $\partial j_1^{n,m} \leqslant \partial j_2^{n,m}$ (resp. $|\partial j_1^{n,m}| \leqslant |\partial j_2^{n,m}|$), où $j_i^{n,m}(x, r) = \int_0^r \{(\partial j_i^0(x, s)^+ \wedge n) - (\partial j_i^0(x, s)^- \wedge m)\}\, ds$. Les inégalités (2.9), (2.10) s'obtiennent alors à la limite dans les inégalités correspondantes pour $j_1^{n,m}$, $j_2^{n,m}$ dues au Lemme 2.1. ▌

## 3. Cas où $A + B$ est mca

Nous ignorons si en général $\overline{A + B}$ mca implique que $A + B$ est mca dans $L^1(\Omega)$. On a cependant le résultat suivant:

**Proposition 3.1.** *Supposons que $\overline{A+B}$ soit mca dans $L^1(\Omega)$ et*

$$\forall u \in D(A) \cap D(B), \qquad Au \text{ ou } Bu \text{ est un singleton.} \tag{3.0}$$

*Alors $A + B$ est mca dans $L^1(\Omega)$.*

*Preuve.* Etant donné $f \in R(I + A + B)$ et $u = (I + A + B)^{-1} f$, notons $W(f)$ l'unique élément de $Bu \cap (f - u - Au)$. Montrons que $W$ est une contraction pour la norme $\|\cdot\|_1$; il en résultera immédiatement (cf. preuve de la Proposition 1.3) que $R(I + A + B)$ est fermé et donc égal à $R(I + \overline{A + B}) = L^1(\Omega)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $B^n$ l'opérateur associé à $j_n(x, r) = \int_0^r (|\partial j^0(x, s)| \wedge n)(\operatorname{sign} s)\, ds$ (qui vérifie (1.4)) et $W_n$ la $T$-contraction de $L^1(\Omega)$ associée définie dans la Proposition 1.3. Etant donné $f \in R(I + A + B)$, $u = (I + A + B)^{-1} f$, $w = W(f)$ considérons $w_n = (w \wedge n) \vee (-n)$; on a

$$u + Au + w_n \ni f + (w_n - w), \qquad w_n \in B^n u.$$

D'après (3.0), $w_n = W_n(f + (w_n - w))$ et donc

$$\|W_n(f) - w\|_1 \leqslant 2\, \|w_n - w\|_1$$

Il en résulte que $W_n(f) \to W(f)$ dans $L^1(\Omega)$ et donc $W$ est une $T$-contraction. ∎

D'après la Proposition 1.3, $A + B$ est mca dans $L^1(\Omega)$ si $j(\cdot, r) \in L^2(\Omega) + L^\infty(\Omega)$; comme nous l'avons annoncé dans la Remarque 1.5, $A + B$ est mca sous des hypothèses beaucoup plus générales. Montrons d'abord le résultat suivant:

PROPOSITION 3.2. *Supposons $L^1(\Omega)$ séparable et qu'il existe une topologie $\tau$ sur $L^1(\Omega)$ telle que*:

(i) *pour toute suite $(w_n)_n$ bornée dans $L^1(\Omega)$ convergeant dans $\tau$, il existe $(\Omega_k)_k$, suite de $\mathscr{B}$ avec $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (w_n \chi_{\Omega_k})_n \text{ converge faiblement dans } L^1(\Omega_k).$$

(ii) $\forall r \in \mathbb{N}$, $\{w \in L^1(\Omega);\, |w| \leqslant j(\cdot, r), \|w\|_1 \leqslant |r|\}$ *est relativement sequentiellement compact dans $\tau$.*

(iii) $\forall (u_n, v_n)_n$ *suite dans le graphe de $A|_{L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}$ avec $(u_n)$ bornée dans $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $(v_n)$ bornée dans $L^1(\Omega)$, $v_n \to v$ dans $\tau$, on a $v \in Au$.*

*Alors il existe une $T$-contraction $W$: $L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ telle que pour tout $f \in L^1(\Omega)$ il existe $u \in L^1(\Omega)$, solution (unique) de*

$$u + Au + W(f) \ni f, \; W(f) \in Bu.$$

*En particulier, $A + B$ est mca dans $L^1(\Omega)$.*

*Preuve.* Fixons d'abord $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et considérons pour $\lambda, \mu > 0$

$$u_{\lambda, \mu} = (I + A + B_{\lambda, \mu})^{-1} f.$$

Montrons qu'il existe $(\lambda_n, \mu_n) \to 0$ tel que

$$u_{\lambda_n, \mu_n} \to u \text{ dans } L^1(\Omega), \qquad B_{\lambda_n, \mu_n} u_{\lambda_n, \mu_n} \to w \text{ dans } \tau$$

avec $u + Au + w \ni f$, $w \in Bu$.

D'après la Proposition 2.3, il existe $(\lambda_n, \mu_n) \to 0$ tel que $u_{\lambda_n, \mu_n} \to u = (I + A_j^+)^{-1} f$. On a d'autre part $\|B_{\lambda, \mu} u_{\lambda, \mu}\|_1 \leqslant \|f\|_1$ et, puisque $\|u_{\lambda, \mu}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$,

$$j(\cdot, -\|f\|_\infty - 1) \leqslant B_{\lambda, \mu} u_{\lambda, \mu} \leqslant j(\cdot, \|f\|_\infty + 1).$$

D'après l'hypothèse (ii), on peut donc supposer, après extraction d'une sous-suite, que $B_{\lambda_n, \mu_n} u_{\lambda_n, \mu_n} \to w$ dans $\tau$. D'après l'hypothèse (iii), $u + Au + w \ni f$. D'après l'hypothèse (i) et le Lemme 1.6 on a $w \in Bu$.

Etant donné $(f_k)$ une suite de $L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ dense dans $L^1(\Omega)$, on peut par procédé diagonal, choisir la même suite $(\lambda_n, \mu_n)\to 0$ pour toutes les fonctions $f_k$. Notant $w_k = \tau - \lim B_{\lambda_n,\mu_n} u^k_{\lambda_n,\mu_n}$ la fonction correspondant à $f_k$ définie ci-dessus, d'après l'hypothèse (i), on aura pour tout $k, l$

$$\int (w_k - w_l)^+ \leqslant \liminf \int (B_{\lambda_n,\mu_n} u^k_{\lambda_n,\mu_n} - B_{\lambda_n,\mu_n} u^l_{\lambda_n,\mu_n})^+$$

$$\leqslant \int (f_k - f_l)^+ ;$$

on conclut alors comme dans la Proposition 1.3 que $R(I+A+B) = L^1(\Omega)$. ▮

Nous donnons maintenant quelques corollaires de ce résultat.

COROLLAIRE 3.3. *Supposons $L^1(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$.*[2] *Alors pour tout $j\in \mathscr{J}_0(\Omega)$, $A+B$ est mca dans $L^1(\Omega)$.*

*Preuve.* On applique la Proposition 3.2 avec $\tau = \sigma(L^1(\Omega), L^1(\Omega))$. La propriété (i) est immédiate puisque $\mu$ est $\sigma$-fini. Puisque les bornés de $L^\infty(\Omega)$ sont $*$-faiblement séquentiellement relativement compacts, les bornés de $L^1(\Omega)$ sont séquentiellement relativement compacts pour $\tau$ et la propriété (ii) s'en suit. Enfin la propriété (iii) est vérifiée d'après [BC, Proposition 3.4] puisque $\tau$ est la topologie faible de $L_0(\Omega) = \overline{L^1(\Omega)}^{L^\infty(\Omega)}$. ▮

COROLLAIRE 3.4. *Supposons $j(\cdot, r)\in L^1(\Omega)+L^\infty(\Omega)$ pour tout $r\in\mathbb{R}$. Alors $A+B$ est mca dans $L^1(\Omega)$.*

*Preuve.* On applique la Proposition 3.2 avec $\tau = \sigma(L^1(\Omega), L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega))$. Donnons-nous une suite croissante $(\Omega_k)$ de $\mathscr{B}$ avec $\mu(\Omega_k)<\infty$ et $\bigcup \Omega_k = \Omega$. Il est clair que l'hypothèse (i) est vérifiée avec cette suite $(\Omega_k)$. Pour vérifier l'hypothèse (ii), donnons-nous une suite $(w_n)$ bornée dans $L^1(\Omega)$ avec $|w_n| \leqslant j(\cdot, |r|) = f\in L^1(\Omega)+L^\infty(\Omega)$; puisque $f\chi_{\Omega_k}\in L^1(\Omega)$, il existe une suite que nous noterons encore $(w_n)$ telle que $(w_n\chi_{\Omega_k})$ converge faiblement dans $L^1(\Omega)$ pour tout $k$; étant donné $g\in L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, on a

$$\left|\int (w_n - w_m) g\right| \leqslant \left|\int (w_n - w_m) g\chi_{\Omega_k}\right| + 2\int_{\Omega\setminus\Omega_k} |fg|$$

et donc

$$\limsup_{n,m\to\infty} \left|\int (w_n - w_m) g\right| \leqslant 2\int_{\Omega\setminus\Omega_k} |fg| \ \forall k;$$

[2] En particulier si $\Omega$ est fini ou si $\Omega = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\inf_k \mu(\{x_k\})>0$.

ceci prouve bien que $(w_n)$ converge dans $\sigma(L^1(\Omega), L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega))$. Enfin l'hypothèse (iii) est vérifiée d'après [BC, Proposition 3.4]. ∎

Peut-être plus intéressant, comme le montre l'exemple qui suit, est le cas particulier suivant de la Proposition 3.2:

COROLLAIRE 3.5. *Supposons qu'il existe une suite* $(\Omega_k)_k$ *de* $\mathscr{B}$ *avec* $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$ *vérifiant*

(i) $$\int_{\Omega_k} j(x, r)\, d\mu(x) < \infty \qquad \forall r \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

(ii) *A vérifie la propriété de demi-fermeture suivante: pour toute suite* $(u_n, v_n)$ *dans le graphe de* $A|_{L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)}$ *avec* $(u_n)$ *bornée dans* $L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, $u_n \to u$ *dans* $L^1(\Omega)$, $(v_n)$ *bornée dans* $L^1(\Omega)$, $\chi_{\Omega_k} v_n \to \chi_{\Omega_k} v$ *faiblement dans* $L^1(\Omega_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, *on a* $v \in Au$.

*Alors* $A + B$ *est mca dans* $L^1(\Omega)$.

*Preuve.* Il est évident qu'en choisissant comme topologie $\tau$ sur $L^1(\Omega)$ la limite inductive de la topologie faible de $L^1(\Omega_n)$, les hypothèses (i), (ii), et (iii) de la Proposition 3.2 sont satisfaites.

EXEMPLE 3.6. On se donne $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $a\colon \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mesurable en $x \in \Omega$, continue monotone en $\xi \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$|a(x, \xi)| \leqslant a_0(x) + C\,|\xi|^{p-1}\ \mu-\text{p.p. } x, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.6}$$

$$|\xi|^p \leqslant a(x, \xi)\,\xi\ \mu-\text{p.p. } x, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{3.7}$$

où $1 < p < \infty$, $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$ $(p' = p/(p-1))$, $C < \infty$.

On considère $A_0$, l'opérateur univoque de $L^1(\Omega)$ défini par

$$A_0 u = -\operatorname{div} a(\cdot, \operatorname{grad} u)$$

avec

$$D(A_0) = \{u \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega);\ \operatorname{div} a(\cdot, \operatorname{grad} u) \in L^1(\Omega)\}.$$

$A_0$ est ca, car, en effet, étant donné $u, \hat{u} \in D(A_0)$, $T \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $T' \geqslant 0$, $T(0) = 0$, on a

$$T(u - \hat{u}) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

de telle sorte que

$$\int (A_0 u - A_0 \hat{u})(T(u-\hat{u}))$$

$$= \int (a(\cdot, \operatorname{grad} u) - a(\cdot, \operatorname{grad} \hat{u}))(\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} \hat{u})(T'(u-\hat{u})) \geqslant 0$$

d'où l'on obtient le résultat (cf. [BC, Proposition 2.2]).

On voit facilement que $R(I+\lambda A_0) \supseteq L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (cf. p. ex. [BBGGPV]; dans le cas $\Omega$ borné, ceci est très classique, cf. [LL, Théorème 2]).

On note $A$ la fermeture de $A_0$ dans $L^1(\Omega)$ qui est donc un opérateur mca de $L^1(\Omega)$. Appliquant le Corollaire 3.5, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 3.7. *Sous les hypothèses de l'Exemple* 3.6, *supposons qu'il existe $F$ une partie fermée de $\Omega$ telle que*

(i) $j(\cdot, r) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus F)$ $\forall r \in \mathbb{R}$;

(ii) *$F$ est polaire par rapport à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*[3]

*Alors, $A+B$ est mca dans $L^1(\Omega)$; plus précisément $R(I+\lambda(A_0+B)) \supset L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$ et $A+B$ est la fermeture dans $L^1(\Omega)$ de $A_0 + B$.*

*Preuve.* D'après le Corollaire 3.5, il suffit de montrer qu'étant donné une suite $(u_n)$ de $D(A_0)$ bornée dans $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $(A_0 u_n)$ bornée dans $L^1(\Omega)$ avec $A_0 u_n \to v$ faiblement dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus F)$, alors $v \in Au$. On va montrer qu'en fait $v \in A_0 u$.

Notons d'abord que $(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ puisque, par (3.7),

$$\int |\operatorname{grad} u_n|^p \leqslant \int a(\cdot, \operatorname{grad} u_n) \cdot \operatorname{grad} u_n = \int A_0 u_n \cdot u_n \leqslant \|A_0 u_n\|_1 \, \|u_n\|_\infty$$

et donc $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Notons maintenant que $-\operatorname{div} a(\cdot, \operatorname{grad} u) = v$ dans $\mathscr{D}'(\Omega \setminus F)$; ceci se

[3] Rappelons que $F$ est polaire par rapport à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si pour tout $K \subset F$, $K$ compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\zeta \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\zeta \geqslant 1$ au voisinage de $K$ et vérifiant $\|\zeta\|_{W^{1,p}} \leqslant \varepsilon$. De façon équivalente (cf. [DL], II § 5, dans le cas $p=2$), $F$ est polaire si pour tout $K \subset F$, $K$ compact et tout $\omega \supset K$, $\omega$ ouvert, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\zeta \in W_0^{1,p}(\omega)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\zeta \equiv 1$ au voisinage de $K$ tel que $\int_\omega |\operatorname{grad} \zeta|^p \leqslant \varepsilon$.

montre par un argument classique de monotonie que nous rappelons. On peut toujours supposer que

$$u_n \to u \text{ p.p. sur } \Omega, \qquad a(\cdot, \operatorname{grad} u_n) \to h \text{ faiblement dans } L^{p'}(\Omega).$$

On a $v = -\operatorname{div} h$ dans $\mathscr{D}'(\Omega \backslash F)$.

Fixons $\rho \in \mathscr{D}(\Omega \backslash F)$, $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega \backslash F)^+$ avec $\zeta = 1$ au voisinage du support de $\rho$. On a

$$\int \zeta a(\cdot, \operatorname{grad} u_n) \operatorname{grad} u_n = -\int u_n a(\cdot, \operatorname{grad} u_n) \cdot \operatorname{grad} \zeta + \int u_n \zeta A_0 u_n$$

$$\to -\int uh \cdot \operatorname{grad} \zeta + \int u\zeta v = \int \zeta h \cdot \operatorname{grad} u.$$

Alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$t \int \rho v = t \int \zeta h \cdot \operatorname{grad} \rho = \lim \int \zeta a(\cdot, \operatorname{grad} u_n) \cdot \operatorname{grad}(u_n - u + t\rho)$$

$$\geqslant \limsup \int \zeta a(\cdot, \operatorname{grad}(u - t\rho)) \cdot \operatorname{grad}(u_n - u + t\rho)$$

$$= t \int \zeta a(\cdot, \operatorname{grad}(u - t\rho)) \cdot \operatorname{grad} \rho.$$

Divisant par $t > 0$, $t < 0$ et faisant $t \to 0$, donne $\int \rho v = \int a(\cdot, \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} \rho$. Donc $v = -\operatorname{div} a(\cdot, \operatorname{grad} u)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega \backslash F)$.

Puisque $F$ est polaire, on a en fait $v = -\operatorname{div} a(\cdot, \operatorname{grad} u)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et donc $u \in D(A_0)$, $v = A_0 u$. Rappelons encore l'argument classique: étant donné $\rho \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, considérons $\omega$ ouvert contenant $F \cap \operatorname{supp} \rho$ (qui est négligeable) tel que $\int_\omega |\rho v - a(\cdot, \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} \rho| \leqslant \varepsilon$; choisissons alors $\zeta \in W_0^{1,p}(\omega)$ avec $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\zeta = 1$ au voisinage de $F \cap \operatorname{supp} \rho$, $\|\operatorname{grad} \zeta\|_p \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\left| \int \rho v - a(\cdot, \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} \rho \right|$$

$$= \left| \int \zeta(\rho v - a(\cdot, \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} \rho - \int \rho a(\cdot, \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} \zeta \right|$$

$$\leqslant \varepsilon + \|\rho\|_\infty \, \|a(\cdot, \operatorname{grad} u)\|_{p'} \, \varepsilon.$$

Donc $\int \rho v = \int a(\cdot, \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} \rho$ et $v = -\operatorname{div} a(\cdot, \operatorname{grad} u)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. ∎

*Remarque* 3.8. Le résultat de la Proposition 3.7 étend ceux de [V1, V2, St, Section 3] obtenus dans le cas

$$a(x, \zeta) = \zeta (p=2), j(x, r) = \tfrac{1}{2} V(x) r^2 (V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus F)^+).$$

Terminons cette section par le résultat suivant qui étend celui de [V1, Proposition 2.13 et Corollaire 4.3], dans le cas linéaire.

PROPOSITION 3.9. *Supposons que $D(B)$ soit un core pour $A$, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} &\forall v \in Au, \exists \text{ une suite } (u_n) \text{ dans } D(A) \cap D(B) \text{ et pour tout} \\ &n, v_n \in Au_n, \text{ tels que } u_n \to u, v_n \to v \text{ dans } L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.8}$$

*Alors $A + B$ est mca dans $L^1(\Omega)$.*

*Preuve.* Montrons d'abord qu'étant donné une suite $(j_n)$ dans $\mathscr{J}_0(\Omega)$ avec $|\partial j_n| \leqslant |\partial j|$ et $j_n \to 0$, alors $A = \liminf A^+_{j_n}$. Puisque $D(B)$ est un core, il suffit de montrer qu'étant donné $u \in D(A) \cap D(B)$, $v \in Au$

$$u_n = (I + A^+_{j_n})^{-1} (u + v) \to (I + A)^{-1} (u + v) = u.$$

On a $u = (I + A + B^{k,l}_n)^{-1} (u + v + ((\partial j^0_n u) \wedge k) \vee (-l))$ et donc

$$\|u_n - u\|_1 \leqslant \|u_n - (I + A + B^{k,l}_n)^{-1} (u + v)\|_1 + \|\partial j^0_n u\|_1.$$

Puisque $|\partial j^0_n u| \leqslant |\partial j^0 u| \in L^1(\Omega)$ et $\partial j^0_n u \to 0$ p.p., par définition de $A^+_{j_n}$, $\|u_n - u\|_1 \to 0$.

Appliquons la première étape avec $j_n = j - j^n$. Fixons $f \in L^1(\Omega)$ et considérons $u_{\lambda,\mu} = (I + A + B_{\lambda,\mu})^{-1} f$, $w^n_{\lambda,\mu} = B^n_{\lambda,\mu} u_{\lambda,\mu}$. Il existe des suites $\lambda_k \downarrow 0$, $\mu_l \downarrow 0$ telles que $w^n_{\lambda_k,\mu_l} \to w^n_k$ dans $\sigma(L^1, L^1 \cap L^\infty)$ lorsque $l \to \infty$, pour tout $n$ et $k$, $w^n_k \to w^n$ dans $\sigma(L^1, L^1 \cap L^\infty)$ lorsque $k \to \infty$, pour tout $n$. Puisque $u_{\lambda,\mu} = (I + A + B_{n,\lambda,\mu})^{-1} (f - w^n_{\lambda,\mu})$, d'après le Lemme 1.6, on a

$$u := (I + A^+_j)^{-1} f = (I + A^+_{j_n})^{-1} (f - w^n)$$

On a aussi $w^n \in B^n u$. Maintenant on peut toujours supposer $|w^n_{\lambda_k,\mu_l}| \to |w^n_k|$, $|w^n_k| \to |w^n|$ dans $\sigma(L^1, L^1 \cap L^\infty)$ et donc $|w^n| \leqslant |w^{n+1}|$ p.p. pour tout $n$. Puisque $(w^n)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, on a alors $w^n \to w$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$, avec $w \in Bu$ et, d'après la première étape, $u = (I + A)^{-1} (f - w)$. Ceci prouve que $A + B$ est mca. ∎

## 4. COÏNCIDENCE ENTRE $A^+_j$ ET $A^-_j$

Nous ignorons si en général $A^+_j = A^-_j$ ; nous donnons dans cette section un nombre de cas où cette coïncidence a lieu.

(a) *Hypothèse sur j*

Si $\overline{A+B}$ est mca dans $L^1(\Omega)$, alors évidemment $A_j^+ = A_j^- = \overline{A+B}$. En particulier, si $j(\cdot, r) \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ $\forall r \in \mathbb{R}$, d'après le Corollaire 3.4, alors $A_j^+ = A_j^- (= A + B)$. En fait, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 4.1. *Supposons* $j(\cdot, r) \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ $\forall r \geqslant 0$ (*resp.* $\forall r \leqslant 0$), *alors* $A_j^+ = A_j^-$.

*Preuve.* D'après le Corollaire 3.4:

$$A_j^- = (A_{j_+})_{j_-} = (A + B_+)_{j_-} = \liminf_{\lambda \downarrow 0} (A + B_+ + B_{\lambda, -})$$

$$A_j^+ = (A_{j_-})_{j_+} = A_{j_-} + B_+ = (\liminf_{\lambda \downarrow 0} A + B_{\lambda, -}) + B_+$$

Considérons pour $f \in L^1(\Omega)$ $u = (I + A_j^+)^{-1} f$; on a

$$u + A_{j_-} u + w \ni f \qquad \text{avec} \quad w \in B_+ u$$

et donc

$$u = (I + A_{j_-})^{-1} (f - w).$$

Alors

$$u_\lambda = (I + A + B_{\lambda, -})^{-1} (f - w) \uparrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \qquad \text{lorsque } \lambda \downarrow 0.$$

Puisque $u_\lambda \leqslant u$, $w_\lambda = \partial_{j_+}^0(\cdot, u_\lambda) \leqslant w$ $\forall \lambda > 0$ et alors

$$u_\lambda + A u_\lambda + w_\lambda + B_{\lambda, -} u_\lambda \ni f - w + w_\lambda \leqslant f \qquad \forall \lambda > 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u_\lambda &\leqslant (I + A + B_+ + B_{\lambda, -})^{-1} f \\ &= (I + A_{j_+} + B_{\lambda, -})^{-1} f \end{aligned}$$

et donc à la limite

$$u \leqslant (I + (A_{j_+})_{j_-})^{-1} f = (I + A_j^-)^{-1} f \leqslant (I + A_j^+)^{-1} f \leqslant u$$

et donc

$$A_j^+ = A_j^-.$$

*Remarque* 4.2. Il suffit en fait de supposer que $B_+$ (resp. $B_-$) est tel que $A + B_+$ (resp. $A + B_-$) est mca pour tout opérateur $A$ mca dans $L^1(\Omega)$.

(b) *Cas semi-linéaire*

On considère le cas où $A$ est linéaire, éventuellement multivoque, c'est-à-dire le graphe de $A$ est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega)\times L^1(\Omega)$. On a la:

PROPOSITION 4.3. *Supposons $A$ est linéaire. Alors $A_j^+ = A_j^-$.*

*Preuve.* Posons pour $\lambda$, $\mu>0, f\in L^1(\Omega)$ $u_{\lambda,\mu} = (I+A+B_{\lambda,+}+B_{\mu,-})^{-1}f$. Pour $\lambda$ fixé (resp. $\mu$ fixé), on a

$$u_{\lambda,\mu}\uparrow u^\lambda \ (\text{resp. } u_{\lambda,\mu}\downarrow u_\mu) \qquad \text{dans } L^1(\Omega) \tag{4.0}$$

et, par définition,

$$u^\lambda \downarrow \bar{u} = (I+A_j^+)^{-1}f \qquad (\text{resp. } u_\mu \uparrow \underline{u} = (I+A_j^-)^{-1}f).$$

Posons $T=(I+A)^{-1}$ qui est un opérateur linéaire, positif de $L^1(\Omega)$; on a donc

$$u_{\lambda,\mu} = Tf - TB_{\lambda,+}u_{\lambda,\mu} - TB_{\mu,-}u_{\lambda,\mu}$$

et par (4.0), alors

$$u_{\lambda,\mu} \geqslant Tf - TB_{\lambda,+}u^\lambda - TB_{\mu,-}u_{\lambda,\mu}$$
$$u_{\lambda,\mu} \leqslant Tf - TB_{\lambda,+}u_{\lambda,\mu} - TB_{\mu,-}u_{\mu}$$

d'où à la limite

$$u_\mu \geqslant Tf - \liminf TB_{\lambda,+}u^\lambda - TB_{\mu,-}u_\mu$$
$$u^\lambda \leqslant Tf - TB_{\lambda,+}u^\lambda - \limsup TB_{\mu,-}u_\mu$$

et donc

$$\begin{aligned}\bar{u} &\leqslant Tf - \limsup TB_{\lambda,+}u^\lambda - \limsup TB_{\mu,-}u_\mu\\ &\leqslant Tf - \liminf TB_{\lambda,+}u^\lambda - \liminf TB_{\mu,-}u_\mu \leqslant \underline{u}.\end{aligned}$$

Comme $\underline{u}\leqslant\bar{u}$ d'après la Proposition 2.3 (i), on a $\underline{u}=\bar{u}$. ▮

*Remarque* 4.4. Ce résultat montre, pour un opérateur $A$ linéaire, qu'il existe un (unique) opérateur $A_j$ mca dans $L^1(\Omega)$ vérifiant:

> pour toute suite $(j_n)$ dans $\mathscr{J}_0(\Omega)$ vérifiant $|\partial j_n|\leqslant|\partial j|$, $A+B_n$ est mca pour tout $n$, $j_n\to j$, on a $A_j = \liminf(A+B_n)$.

En particulier si $j(x,r)=\frac{1}{2}V(x)r^2$ avec $V:\Omega\to[0,\infty]$ mesurable, $A_V = \liminf A + (V\wedge n)I$ est un opérateur linéaire mca et pour toute suite

$(j_n)$ de $\mathscr{J}_0(\Omega)$ vérifiant $|\partial j_n^0(x, r)| \leqslant V(x)\, r$, $j_n(x, r) \to \frac{1}{2} V(x)\, r^2$ p.p. sur $\Omega \times \mathbb{R}$, on a $A_V = \liminf A_{j_n}$. Ceci précise les résultats de [V1, V2].

(c) *Cas symétrique*

Nous nous donnons $\phi\colon L^2(\Omega) \to [0, \infty]$ convexe s.c.i. avec $\phi(0) = 0$. Rappelons (cf. [BP, BC]) que le sous-différentiel $\partial\phi$ défini par

$$v \in \partial\phi(u) \Leftrightarrow \phi(\hat{u}) \geqslant \phi(u) + \int v(\hat{u} - u) \qquad \forall \hat{u} \in L^2(\Omega)$$

est ca si et seulement si

$$\phi(u \wedge (\hat{u} + k)) + \phi((u - k) \vee \hat{u}) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u}) \qquad \forall u, \hat{u} \in L^2(\Omega), k > 0. \quad (4.1)$$

Nous supposons que (4.1) est vérifiée et prenons pour $A$ l'opérateur mca dans $L^1(\Omega)$ défini par $\partial\phi$, c'est-à-dire $A = \overline{\partial\phi|_{L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}}^{L^1(\Omega)}$ (cf. [BC]). Notons que l'on a $\overline{D(A)}^{L^1} = \overline{D(\phi) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}^{L^1}$. En effet

$$D(A) \subset \overline{D(A|_{L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)})}^{L^1} \subset \overline{D(\phi) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}^{L^1};$$

si $u \in D(\phi) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$(I + \lambda A)^{-1} u \to u \text{ dans } L^2(\Omega) \qquad \text{lorsque } \lambda \downarrow 0$$

puisque $\overline{D(\partial\phi)}^{L^2} = \overline{D(\phi)}^{L^2}$ (cf. p.e. [Br], Proposition 2.11); de plus, $(I + \lambda A)^{-1} u \ll u$ de telle sorte que $(I + \lambda A)^{-1} u \to u$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$.

On a le résultat suivant:

PROPOSITION 4.5. *Supposons que l'opérateur $A$ mca dans $L^1(\Omega)$ est défini par $\phi\colon L^2(\Omega) \to [0, \infty]$ convexe, s.c.i. au sens ci-dessus. Alors $A_j^+ = A_j^- =$ l'opérateur $A_j$ mca dans $L^1(\Omega)$ défini par la fonctionnelle convexe, s.c.i.:*

$$\phi_j\colon u \in L^2(\Omega) \mapsto \phi(u) + \int j(\cdot, u) \in [0, \infty].$$

*En particulier*:

$$\overline{D(A_j)}^{L^1} = \overline{\{u \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\, \phi(u) < \infty, j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\}}^{L^1}.$$

*Preuve.* Il est clair que la fonctionnelle $\phi_j$ est convexe, s.c.i. et vérifie (4.1) et donc la fermeture $A_j$ dans $L^1(\Omega)$ de $\partial\phi_j|_{L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}$ est mca dans $L^1(\Omega)$.

Notons que l'on a $\phi_{j_{\lambda,+} + j_{\mu,-}} \leqslant \phi_j$ et lorsque $(\lambda, \mu) \to 0$ $\phi_{j_{\lambda,+} + j_{\mu,-}}(u) \to$

$\phi_j(u)$ pour tout $u \in L^2(\Omega)$; donc $\phi_{j_{\lambda,+}+j_{\mu,-}} \to \phi_j$ au sens de Mosco et ainsi (cf. [At])

$$(I + \partial\phi_{j_{\lambda,+}+j_{\mu,-}})^{-1} f \to (I + \partial\phi_j)^{-1} f$$

dans $L^2(\Omega)$ pour tout $f \in L^2(\Omega)$.

Etant donné $f \in L^{1 \cap \infty}(\Omega)$, on a lorsque $(\lambda, \mu) \to 0$ $u_{\lambda,\mu} = (I + A + B_{\lambda,+} + B_{\mu,-})^{-1} f = (I + \partial\phi_{j_{\lambda,+}+j_{\mu,-}})^{-1} f \to (I + \partial\phi_j)^{-1} f$ dans $L^2(\Omega)$, et donc $(I + A_j^+)^{-1} f = (I + A_j^-)^{-1} f = (I + \partial\phi_j)^{-1} f$. ▮

*Remarque* 4.6. Si $A$ est un opérateur linéaire univoque mca dans $L^1(\Omega)$, il existe $\phi$: $L^2(\Omega) \to [0, \infty]$ convexe s.c.i. vérifiant (4.1) tel que $A$ soit défini par $\phi$ au sens ci-dessus si et seulement si $A|_{L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}$ est un opérateur symétrique de $L^2(\Omega)$; alors la fermeture $A_2$ de $A|_{L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}$ dans $L^2(\Omega)$ est un opérateur auto-adjoint et

$$\phi(u) = \begin{cases} \int (1/2)\, |A_2^{1/2} u|^2 & \text{si } u \in D(A_2^{1/2}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

(cf. [Br, Proposition (2.15)]).

Notons d'autre part que sous les hypothèses de la Proposition 4.5, $D(A_j)$ est dense dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si $D(A_j|_{L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)})$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\{u \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ \phi(u) < \infty, j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\} \text{ est dense dans } L^2(\Omega).$$

En particular donc, si $A$ est linéaire univoque, $D(A_j)$ est dense dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si

$$\{u \in D(A_2^{1/2}) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\} \text{ est dense dans } L^2(\Omega).$$

Ceci étend dans un cadre abstrait la Proposition 5.8 de [V1]; nous en donnons ci-dessous une autre généralisation dans un cadre concret.

(d) *Un autre exemple où* $A_j^+ = A_j^-$

Nous reprenons les hypothèses de l'Exemple 3.6; avant d'étudier un cas où $A_j^+ = A_j^-$, notons l'extension suivante de la Proposition 5.8 de [V1]:

PROPOSITION 4.7. *Sous les hypothèses de l'Exemple* 3.6, *étant donné* $1 \leqslant q < \infty$, *on a* $\overline{D(A_j^+)} = \overline{D(A_j^-)} = L^1(\Omega)$ *si et seulement si*

$$\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\}$$

*est dense dans* $L^q(\Omega)$.

*Preuve.* Rappelons d'abord que $\overline{D(A_j^+)} = \overline{D(A_j^-)} = \overline{\hat{D}(A) \cap D(B)}$ (cf. Proposition 2.3(ii)). Compte tenu de l'accrétivité complète des opérateurs, il est clair que $\overline{D(A_j^+)} = L^1(\Omega)$ si et seulement si $\hat{D}(A) \cap D(B) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^q(\Omega)$ (cf. Proposition 3.4 de [BC]). Etant donné $u \in \hat{D}(A) \cap L^\infty(\Omega)$ et $u_\varepsilon = (I + \varepsilon A)^{-1} u$, on a $u_\varepsilon \to u$ dans $L^1(\Omega)$, $u_\varepsilon$ borné dans $L^\infty(\Omega)$, $u_\varepsilon \in D(A_0)$ et $A_0 u_\varepsilon = -\operatorname{div} a(\cdot, \operatorname{grad} u_\varepsilon)$ borné dans $L^1(\Omega)$; donc $u_\varepsilon$ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. D'autre part pour $u \in D(B) \cap L^\infty(\Omega)$, on a $\int j(\cdot, u) \leqslant \|u\|_\infty \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1$. Donc $\hat{D}(A) \cap D(B) \cap L^\infty(\Omega) \subset \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\}$ et la condition nécessaire est prouvée.

Réciproquement donnons-nous $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$ et considérons $u_{\varepsilon,\lambda,\mu} = (I + \varepsilon A + \varepsilon B_{\lambda,\mu})^{-1} u$; on a $u_{\varepsilon,\lambda,\mu} \in D(A_0)$ et

$$\|u_{\varepsilon,\lambda,\mu} - u\|_2^2 + \varepsilon \int a(\cdot, \operatorname{grad} u_{\varepsilon,\lambda,\mu}) \operatorname{grad}(u_{\varepsilon,\lambda,\mu} - u)$$

$$\leqslant \varepsilon \int (B_{\lambda,\mu} u_{\varepsilon,\lambda,\mu})(u - u_{\varepsilon,\lambda,\mu}) \leqslant \varepsilon \int j_{\lambda,\mu}(\cdot, u) \leqslant \varepsilon \int j(\cdot, u),$$

d'où en utilisant les hypothèses sur $a(\cdot, \xi)$ et l'inégalité de Hölder:

$$\|u_{\varepsilon,\lambda,\mu} - u\|_2^2 \leqslant \varepsilon \left\{ \int j(\cdot, u) + \|a_0\|_{p'} \|\operatorname{grad} u\|_p + \frac{C^p}{pp'^{p-1}} \|\operatorname{grad} u\|_p^p \right\}$$

Donc $\|(I + \varepsilon A_j^+)^{-1} u - u\|_2 = 0(\sqrt{\varepsilon})$ lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui prouve la condition suffisante. ∎

Nous supposons maintenant que $a: \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est strictement monotone en $\xi \in \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire

$$(a(x, \xi) - a(x, \hat{\xi})) \cdot (\xi - \hat{\xi}) > 0 \qquad \text{p.p. } x \in \Omega,\ \forall \xi, \hat{\xi} \in \mathbb{R}^N,\ \xi \neq \hat{\xi}. \tag{4.2}$$

Dans ce cas, on peut caractériser la fermeture $A$ de $A_0$ dans $L^1(\Omega)$ (cf. [BBGGPV]) mais ceci n'est pas notre propos. Cette hypothèse de stricte monotonie va nous permettre de prouver $A_j^+ = A_j^-$ pour tout $j \in \mathcal{J}_0(\Omega)$.

PROPOSITION 4.8. *Sous les hypothèses de l'Exemple* 3.6 *et l'hypothèse supplémentaire* (4.2), *on a* $A_j^+ = A_j^-$ *pour tout* $j \in \mathcal{J}_0(\Omega)$.

Nous utiliserons de façon essentielle le lemme suivant:

LEMME 4.9. *Sous les hypothèses de la Proposition* 4.8, $\{u \in D(A_0);\ \|u\|_1 + \|u\|_\infty + \|A_0 u\|_1 \leqslant M\}$ *est relativement compact dans* $W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\bar{\Omega})$ *pour tout* $M < \infty$ *et* $1 \leqslant q < p$.

Ce lemme est dû pour l'essentiel à L. Boccardo et Th. Gallouet (cf. [BG]); nous en rappelons rapidement l'argumentation dans notre cadre plus général (cf. [BBGGPV]):

*Preuve.* Considérons une suite $(u_n)$ de $D(A_0)$ bornée dans $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $(A_0 u_n)$ bornée dans $L^1(\Omega)$. Alors $(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour démontrer le lemme, on peut supposer $u_n \to u$ p.p. et il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n, m \to \infty} |\{\text{grad } u_n - \text{grad } u_m| \geqslant \varepsilon\}| = 0.$$

Etant donné $M$, $\varepsilon > 0$, posons

$$c(x, M, \varepsilon) = \min\{(a(x, \xi) - a(x, \hat{\xi}))(\xi - \hat{\xi}); |\xi| + |\hat{\xi}| \leqslant M, |\xi - \hat{\xi}| \geqslant \varepsilon\};$$

on a $c(x, M, \varepsilon) > 0$ p.p. $x \in \Omega$, grâce à (4.2).

Alors pour $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
&\{|\text{grad } u_n - \text{grad } u_m| \geqslant \varepsilon\} \\
&\quad \subseteq \{|\text{grad } u_n| + |\text{grad } u_m| \geqslant M\} \cup \{|u_n - u_m| \geqslant \delta^2\} \\
&\quad \cup \{c(\cdot, M, \varepsilon) \leqslant \delta\} \\
&\quad \cup \{|u_n - u_m| \leqslant \delta^2, c(\cdot, M, \varepsilon) \geqslant \delta, |\text{grad } u_n - \text{grad } u_m| \geqslant \varepsilon\} \\
&\quad =: \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4
\end{aligned}$$

et on vérifie facilement, grâce aux hypothèses

$$|\Omega_1| \leqslant \frac{1}{M^p} \int (|\text{grad } u_n| + |\text{grad } u_m|)^p \leqslant \frac{\text{const}}{M^p},$$

$$\lim_{n, m \to \infty} |\Omega_2| = 0 \qquad \forall \delta > 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} |\Omega_3| = 0 \qquad \forall M, \varepsilon > 0,$$

$$\begin{aligned}
|\Omega_4| &\leqslant |\{(a(\cdot, \text{grad } u_n) - a(\cdot, \text{grad } u_m)) \,\text{grad}(u_n - u_m)\, \chi_{\{|u_n - u_m| \leqslant \delta^2\}} \geqslant \delta\}| \\
&\leqslant \frac{1}{\delta} \int (A_0 u_n - A_0 u_m)(((u_n - u_m) \wedge \delta^2) \vee (-\delta^2)) \\
&\leqslant \delta \int |A_0 u_n| + |A_0 u_m| \leqslant \text{const} \cdot \delta,
\end{aligned}$$

d'où

$$\overline{\lim_{n, m \to \infty}} \{|\operatorname{grad} u_n - \operatorname{grad} u_m| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \text{const} \cdot \left(\delta + \frac{1}{M^p}\right) + |\Omega_3| \qquad \forall \delta, M, \varepsilon > 0.$$

Faisant alors $\delta \to 0$, puis $M \to \infty$, on obtient le résultat. ∎

Donnons enfin la

*Preuve de la Proposition* 4.8. Considérons $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $u_{\lambda, \mu} = (I + A + B_{\lambda, \mu})^{-1} f$. D'après le Lemme 4.9, $\{u_{\lambda, \mu}; \lambda, \mu > 0\}$ est relativement compact dans $W^{1,q}_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$ pour $1 \leqslant q < p$. On a donc

$$u_{\lambda, \mu} \to u_\mu, \quad u_\mu \to \underline{u}, \quad u_{\lambda, \mu} \to u^\lambda, \quad u^\lambda \to \bar{u}$$

dans $W^{1,q}_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$, d'où

$$a(\cdot, \operatorname{grad} u_{\lambda, \mu}) \to a(\cdot, \operatorname{grad} u_\mu), a(\cdot, \operatorname{grad} u_\mu) \to a(\cdot, \operatorname{grad} \underline{u})$$
$$a(\cdot, \operatorname{grad} u_{\lambda, \mu}) \to a(\cdot, \operatorname{grad} u^\lambda), a(\cdot, \operatorname{grad} u^\lambda) \to a(\cdot, \operatorname{grad} \bar{u})$$

dans $L^r_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$ pour tout $1 \leqslant r < p'$.

Fixant $\xi \in D(\Omega)^+$, on a

$$\int u_{\lambda, \mu} \xi + a(\cdot, \operatorname{grad} u_{\lambda, \mu}) \cdot \operatorname{grad} \xi \geqslant \int f\xi - B_{\lambda, +} u^\lambda - B_{\mu, -} u_{\lambda, \mu}$$

et donc à la limite lorsque $\lambda \to 0$, puis $\mu \to 0$,

$$\int \underline{u}\xi + a(\cdot, \operatorname{grad} \underline{u}) \cdot \operatorname{grad} \xi$$
$$\geqslant \int f\xi - \liminf_{\lambda \to 0} \int B_{\lambda, +} u^\lambda - \liminf_{\mu \to 0} \int B_{\mu, -} u_\mu .$$

Avec le même raisonnement pour $\bar{u}$, on en déduit

$$\int (\underline{u} - \bar{u})\, \xi + (a(\cdot, \operatorname{grad} \underline{u}) - a(\cdot, \operatorname{grad} \bar{u})) \cdot \operatorname{grad} \xi \geqslant 0.$$

Par densité ceci est encore vrai pour tout $\xi \in W^{1,p}_0(\Omega)$, $\xi \geqslant 0$; appliquant avec $\xi = \bar{u} - \underline{u}$, on obtient $\bar{u} = \underline{u}$. ∎

## 5. Applications au problème d'évolution

Dans cette section, nous allons appliquer les résultats précédents au problème d'évolution

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + Au + Bu \ni f \qquad \text{sur } ]0, T[ \\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{PC}$$

Rappelons d'abord (cf. [Lê, Théorème II.2.3]) qu'étant donné $A$ un opérateur mca dans $L^1(\Omega)$, pour tout $u_0 \in D(A)$ et $f \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ il existe une unique solution forte de

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + Au \ni f \qquad \text{sur } ]0, T[ \\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{P}$$

c'est-à-dire $u \in W^{1,\infty}(0, T; L^1(\Omega))$, $u'(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. $t \in ]0, T[$, $u(0) = u_0$. Si $\hat{u}$ est la solution correspondante à $\hat{u}_0 \in D(A)$, $\hat{f} \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$, on a

$$\int_\Omega (u(t) - \hat{u}(t))^+ \leqslant \int_\Omega (u_0 - \hat{u}_0)^+ + \iint_Q (f - \hat{f})^+ \qquad \forall t \in [0, T]$$

de telle sorte que l'application $(u_0, f) \to u$ se prolonge par continuité en une $T$-contraction $E^A$ de $\overline{D(A)} \times L^1(Q)$[4] dans $\mathscr{C}([0, T]; L^1(\Omega))$. Pour $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1(Q)$, $u = E^A(u_0, f)$ est l'unique bonne solution au sens de la théorie des équations d'évolution non linéaires de (P) (cf. [BCP]). Nous noterons $S^A$ le semi-groupe engendré par $A$: $S^A(t)\, u_0 = E^A(u_0, 0)(t)$.

Rappelons également qu'étant donné une suite généralisée $(A_i)_{i \in I}$ d'opérateurs mca dans $L^1(\Omega)$, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $A = \liminf A_i$.

(ii) Pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une suite généralisée $(u_{0,i})_{i \in I}$ avec $u_{0,i} \in \overline{D(A_i)}$ telle que $S^{A_i}(t)\, u_{0,i} \to S^A(t)\, u_0$ dans $L^1(\Omega)$ uniformément pour $t \geqslant 0$ bornée.

(iii) (a) Pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une suite généralisée $(u_{0,i})_{i \in I}$ avec $u_{0,i} \in \overline{D(A_i)}$ telle que $u_{0,i} \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$.

(b) Pour toute suite généralisée $(u_{0,i}, f_i)_{i \in I}$ avec $u_{0,i} \in \overline{D(A_i)}$, $f_i \in L^1(Q)$, $u_{0,i} \to u_0 \in \overline{D(A)}$ dans $L^1(\Omega)$, $f_i \to f$ dans $L^1(Q)$, on a $E^{A_i}(u_{0,i}, f_i) \to E^A(u_0, f)$ dans $\mathscr{C}([0, T]; L^1(\Omega))$.

En effet (i) $\Leftrightarrow$ (iii) est un résultat classique des problèmes d'évolution dans un espace de Banach (cf. [Be, Proposition 1.24]); pour l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii), on se ramène à la convergence des semi-groupes dans un

[4] On note comme d'habitude $Q = ]0, T[ \times \Omega$ muni de la mesure produit et on identifie $L^1(Q)$ avec $L^1(0, T; L^1(\Omega))$.

espace de Hilbert (cf. [Br, Théorème 4.2, et BC, Theorem 5.5] pour une démonstration analogue).

Rappelons enfin (cf. [BC, Théorème 5.1, Proposition 5.3]) qu'étant donné $A$ mca dans $L^1(\Omega)$, $\overline{D(A)}$ est un convexe vérifiant

$$u, \hat{u} \in \overline{D(A)}, \qquad k>0 \Rightarrow u \wedge (\hat{u}+k), \qquad (u-k) \vee \hat{u} \in \overline{D(A)},$$

et qu'il existe une unique projection $P\colon L^1(\Omega) \to \overline{D(A)}$ définie par

$$Pu - \hat{u} \ll Pu - \hat{u} + \lambda(u - Pu) \qquad \forall u \in L^1(\Omega), \qquad \hat{u} \in \overline{D(A)}, \qquad \lambda > 0.$$

En fait $P$ est la fermeture dans $L^1(\Omega)$ de $P_{2|L^1(\Omega)}$ où $P_2$ est la projection orthogonale sur la fermeture dans $L^2(\Omega)$ du convexe $\overline{D(A)} \cap L^2(\Omega)$; on a aussi $Pu = \lim_{\lambda \to 0} (I + \lambda A)^{-1} u$ dans $L^1(\Omega)$ pour tout $u \in \overline{D(A)}$. On notera $P =: P_{\overline{D(A)}}$ et pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(Q)$, $\tilde{E}^A(u_0, f) = E^A(Pu_0, f)$.

Dans toute la suite, $A$ est un opérateur mca dans $L^1(\Omega)$, $j \in \mathscr{J}_0(\Omega)$, $B$ est l'opérateur associé à $j$, $A_j^+$ et $A_j^-$ sont les extensions mca dans $L^1(\Omega)$ de $A + B$ définis à la Section 2. On a $\hat{D}(A_j^+) = \hat{D}(A_j^-) = \hat{D}(A) \cap D(B)$ et donc $\overline{D(A_j^+)} = \overline{D(A_j^-)} = \overline{\hat{D}(A) \cap D(B)}$ que l'on notera $\overline{D(A, j)}$. D'après la théorie générale, pour tout $u_0 \in \overline{D(A, j)}$ et $f \in L^1(Q)$, $E^{A_j^+}(u_0, f)$ et $E^{A_j^-}(u_0, f)$ sont deux solutions généralisées de $(PC)$. Par définition de $A_j^+$, $A_j^-$ et le résultat rappelé ci-dessus,

$$E^{A_j^+}(u_0, f) = \lim_{\lambda \to 0} \lim_{\mu \to 0} u_{\lambda, \mu}, \qquad E^{A_j^-}(u_0, f) = \lim_{\mu \to 0} \lim_{\lambda \to 0} u_{\lambda, \mu}$$

dans $\mathscr{C}([0, T]; L^1(\Omega))$, où $u_{\lambda, \mu}$ est la bonne solution de

$$\begin{aligned} &\frac{du_{\lambda,\mu}}{dt} + Au_{\lambda,\mu} + B_{\lambda,\mu} u_{\lambda,\mu} \ni f \\ &u_{\lambda,\mu}(0) = u_0. \end{aligned} \tag{$PC_{\lambda,\mu}$}$$

On a le résultat suivant pout $\tilde{E}^{A_j^+}$ et $\tilde{E}^{A_j^-}$:

PROPOSITION 5.1. *Avec les notations ci-dessus*:

(i) $\tilde{E}^{A_j^-}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{A_j^+}(u_0, f)$ $\forall u_0 \in L^1(\Omega), f \in L^1(Q)$.

(ii) *Si* $j_1, j_2 \in \mathscr{J}_0(\Omega)$ *et* $\partial j_1 \leqslant \partial j_2$ (*resp.* $|\partial j_1| \leqslant |\partial j_2|$), *alors pour tout* $u_0 \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(Q)$

$$\tilde{E}^{A_{j_2}^+}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_1}^+}(u_0, f) \qquad et \qquad \tilde{E}^{A_{j_2}^-}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_1}^-}(u_0, f)$$

(*resp.* $\tilde{E}^{A_{j_1}^+}(-u_0^-, -f^-) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_2}^+}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_1}^+}(u_0^+, f^+)$ *et* $\tilde{E}^{A_{j_1}^-}(-u_0^-, -f^-) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_2}^-}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_1}^-}(u_0^+, f^+)$).

(iii) *Etant donné* $(j_n)$ *une suite de* $\mathcal{J}_0(\Omega)$ *avec* $|\partial j_n| \leqslant |\partial j|$, $j_n \to j$, *on a pour tout* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *et* $f \in L^1(Q)$

$$\begin{aligned}\tilde{E}^{A_j^-}(P_{\overline{D(A_{j_+})}} u_0, f)(t) &\leqslant \liminf \tilde{E}^{A_{j_n}^-}(u_0, f)(t)\\ &\leqslant \limsup \tilde{E}^{A_{j_n}^+}(u_0, f)(t) \leqslant \tilde{E}^{A_j^+}(P_{\overline{D(A_{j_-})}} u_0, f)(t)\end{aligned}$$

*pour tout* $t \in ]0, T]$; *en particulier si*

$$\tilde{E}^{A_j^-}(P_{\overline{D(A_{j_+})}} u_0, f) = \tilde{E}^{A_j^+}(P_{\overline{D(A_{j_-})}} u_0, f) =: u, \tag{5.0}$$

*alors* $\tilde{E}^{A_{j_n}^+}(u_0, f)$ *et* $\tilde{E}^{A_{j_n}^-}(u_0, f) \to u$ *dans* $\mathscr{C}(]0, T]; L^1(\Omega))$.

*Remarque* 5.2. Insistons sur le fait que les résultats de la Proposition 5.1 concernant les opérateurs $\tilde{E}$; par exemple concernant le point (ii) et se restreignant au cas où $A_j^+ = A_j^- =: A_j$, il est immédiat d'après la théorie générale des équations d'évolution et les résultats de la Section 2, qu'étant donné $u_0 \in \overline{D(A, j)}$, $f \in L^1(Q)$,

$$\tilde{E}^{A_{j_n}^+}(u_0, f) \quad \text{et} \quad \tilde{E}^{A_{j_n}^-}(u_0, f) \to E^{A_j}(u_0, f) \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}([0, T]; L^1(\Omega));$$

par contre la convergence lorsque $u_0 \notin \overline{D(A, j)}$ est un résultat pour lequel il n'existe pas de théorie générale (cf. [Br. Problème 16] qui à notre connaissance est encore ouvert). Nous ignorons cependant sous quelles conditions générales la condition (5.0) est assurée; notons cependant différents cas:

(a) Cas où $j = j_+$ (resp. $j_-$) avec $u_0 \in \overline{D(A)}$ car alors $A_{j_+} = A_j^+ = A_j$ et $A_{j_-} = A$.

(b) Cas linéaire ($A$ et $B$ sont linéaires) car alors $A_j^+ = A_j^-$, $\overline{D(A, j)}$, $\overline{D(A_{j_+})}$, $\overline{D(A_{j_-})}$ sont des sous-espaces avec $\overline{D(A, j)} \subset \overline{D(A_{j_+})} \cap \overline{D(A_{j_-})}$ de telle sorte que

$$P_{\overline{D(A, j)}} = P_{\overline{D(A, j)}} P_{\overline{D(A_{j_+})}} = P_{\overline{D(A, j)}} P_{\overline{D(A_{j_-})}}.$$

(c) Cas où $A$ est linéaire avec $\overline{D(A)} = L^1(\Omega)$ et $\hat{D}(A) \cap D(B)$ dense dans $D(B)$; en effet alors $\overline{D(A_{j_+})} = \overline{D(B_+)}$, $\overline{D(A_{j_-})} = \overline{D(B_-)}$, $\overline{D(A, j)} = \overline{D(B)}$ de telle sorte que $P_{\overline{D(B)}} u_0 = P_{\overline{D(B_+)}} u_{0,+} + P_{\overline{D(B_-)}} u_{0,-}$.

*Preuve Proposition* 5.1(i) *et* (ii). Etant donné $j_1, j_2 \in \mathcal{J}_0(\Omega)$ avec $\partial j_1 \leqslant \partial j_2$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$, posons $u_1 = \mathrm{Proj}_{\overline{D(A, j_1)}} u_0$, $u_2 = \mathrm{Proj}_{\overline{D(A, j_2)}} u_0$; pour $i = 1, 2$, $\lambda$, $\mu > 0$ considérons $u^i_{\lambda,\mu}$ solution de $(PC_{\lambda,\mu})$ correspondant à $u_0 = u_i$, $B = B_i$; on a

$$\tilde{E}^{A_{j_i}^+}(u_0, f) = \lim_{\lambda \to 0} \lim_{\mu \to 0} u^i_{\lambda,\mu},$$

$$\tilde{E}^{A_{j_i}^-}(u_0, f) = \lim_{\mu \to 0} \lim_{\lambda \to 0} u^i_{\lambda,\mu}.$$

Utilisant (2.9),

$$u_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (I + \varepsilon A_{j_2}^+)^{-1} u_0 \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} (I + \varepsilon A_{j_1}^+)^{-1} u_0 = u_1.$$

D'autre part $B_{\lambda,\mu}^1 \leqslant B_{\lambda,\mu}^2$ et donc $u_{\lambda,\mu}^2 \leqslant u_{\lambda,\mu}^1$. Passant à la limite on obtient

$$\tilde{E}^{A_{j_2}^+}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_1}^+}(u_0, f), \qquad \tilde{E}^{A_{j_2}^-}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{A_{j_1}^-}(u_0, f).$$

Les autres inégalités de (ii) se déduisent de la même manière. Enfin le point (i) s'obtient en remarquant que $u_{\lambda,\mu} \downarrow u_\mu$ lorsque $\lambda \downarrow 0$ et $u_{\lambda,\mu} \uparrow u^\lambda$ lorsque $\mu \downarrow 0$. ∎

Pour la preuve du point (iii), nous allons suivre la démarche de la Section 2 et d'abord montrer le cas particulier suivant:

LEMME 5.3. *Soit* $j \in \mathscr{J}_0(\Omega)$ *vérifiant* (2.3). *Alors pour tout* $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1(Q)$

$$E^{A+B_\lambda}(u_0, f) \to \tilde{E}^{A_j}(u_0, f) \qquad \textit{dans} \quad \mathscr{C}(]0, T]; L^1(\Omega)).$$

*Preuve.* Notons d'abord que l'on peut supposer $u_0 \in D(A)$ et $f \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ puisque les applications $\tilde{E}$ sont des contractions de $L^1(\Omega) \times L^1(Q)$ dans $\mathscr{C}([0, T]; L^1(\Omega))$. Posons $u_\lambda = E^{A+B_\lambda}(u_0, f)$. On a alors

$$u_\lambda \text{ décroît lorsque } \lambda \text{ décroît} \tag{5.1}$$

puisque $B_\lambda$ croît lorsque $\lambda$ décroît;

$$\|B_\lambda u_\lambda\|_{L^1(Q)} \leqslant \|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1(Q)} \tag{5.2}$$

puisque, par accrétivité de $A$ dans $L^1(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega |u_\lambda(t)| + \int_\Omega |B_\lambda u_\lambda(t)| \leqslant \int_\Omega f(t) \operatorname{sign}_0 u_\lambda(t);$$

enfin on a

$$\int_0^T |u_\lambda(t)|_A \, dt \leqslant 2(\|u_0\|_{L^1(\Omega)} + 2 \|f\|_{L^1(Q)}) + T\left(|u_0|_A + 2 \left\|\frac{df}{dt}\right\|_{L^1(Q)}\right). \tag{5.3}$$

En effet par accrétivité de $A$ dans $L^1(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt} \|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\|_1 + \|B_\lambda u_\lambda(t+h) - B_\lambda u_\lambda(t)\|_1 \leqslant \|f(t+h) - f(t)\|_1$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|_1 - \|B_\lambda u_\lambda(t) - f(t)\|_1\right)$$
$$\leqslant \left\|\frac{df}{dt}(t)\right\|_1 - \left\|\frac{dB_\lambda u_\lambda}{dt}(t)\right\|_1 + \left\|\frac{dB_\lambda u_\lambda}{dt}(t) - \frac{df}{dt}(t)\right\|_1$$
$$\leqslant 2\left\|\frac{df}{dt}(t)\right\|_1 \qquad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(]0, T[);$$

puisque $\|(du_\lambda/dt)(t)\|_1 = |u_\lambda(t)|_{A+B_\lambda - f(t)}$; il en résulte

$$|u_\lambda(t)|_A \leqslant \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|_1 + \left\|B_\lambda u_\lambda(t) - f(t)\right\|_1$$
$$\leqslant |u_0|_{A+B_\lambda - f(0)} - \|B_\lambda u_0 - f(0)\|_1 + 2\,\|B_\lambda u_\lambda(t) - f(t)\|_1$$
$$+ 2\int_0^t \left\|\frac{df}{dt}(s)\right\|_1 ds;$$

d'où (5.3) en intégrant compte tenu de (5.2).

D'apres (5.1), $u_\lambda(t) \to u(t)$ dans $L^1(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$. D'après (5.2) et (5.3), $u(t) \in \hat{D}(A) \cap D(B) = \hat{D}(A_j)$ p.p. $t \in (0, T)$. Puisque $A_j = \liminf A + B_\lambda$, utilisant la théorie générale des équations d'évolution, on a p.p. $s \in (0, T)$

$$u_\lambda(s + \cdot) \to E^{A_j}(u(s), f(s + \cdot)) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{C}([0, T-s]; L^1(\Omega))$$

et donc $u_\lambda \to u$ dans $\mathscr{C}(]0, T]; L^1(\Omega))$ et

$$u(s + t) = E^{A_j}(u(s), f(s + \cdot))(t) \qquad \forall s \in ]0, T], \qquad t \in [0, T-s]. \tag{5.4}$$

Puisque $B_\lambda \geqslant 0$, $u_\lambda(t) \leqslant E^A(u_0, f)(t)$ et à la limite $u(t) \leqslant E^A(u_0, f)(t)$; notant $P$ la projection sur $\overline{D(A_j)}$, on a

$$u(t) = Pu(t) \leqslant PE^A(u_0, f)(t)$$

et donc d'après (5.4), pour $0 < s < T$, $0 \leqslant t \leqslant T - s$

$$u(s + t) \leqslant E^{A_j}(PE^A(u_0, f)(s), f(s + \cdot))(t).$$

Passant à la limite lorsque $s \to 0$, on obtient

$$u(t) \leqslant E^{A_j}(Pu_0, f)(t) \qquad \forall t \in ]0, T] \tag{5.5}$$

Enfin $Pu_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} (I + \varepsilon A_j)^{-1} u_0 \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} (I + \varepsilon A)^{-1} u_0 = u_0$ et donc

$$u_\lambda(t) \geqslant E^{A + B_\lambda}(Pu_0, f)(t) \qquad \forall t \in [0, T].$$

Passant à la limite grâce à la théorie générale des équations d'évolution, on obtient

$$u(t) \geqslant E^{A_j}(Pu_0, f)(t) \qquad \forall t \in [0, T],$$

ce qui, avec (5.5), achève la preuve du lemme. ∎

*Preuve Proposition* 5.1(iii). Posons $v_0 = P_{\overline{D(A_{j_-})}} u_0$. On a $\partial j_n \geqslant \partial j_{n,+} + \partial j_- \geqslant \partial j_-$ ; on en déduit d'abord en utilisant (2.9)

$$P_{\overline{D(A, j_n)}} u_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} (I + \varepsilon A_{j_n}^+)^{-1} u_0 \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} (I + \varepsilon A_{j_-})^{-1} u_0 = v_0$$

et puis, compte tenu du point (ii) de la Proposition 5.1,

$$\tilde{E}^{A_{j_n}^+}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{(A_{j_-})_{j_{n,+}}}(u_0, f) \leqslant \tilde{E}^{(A_{j_-})_{j_{n,+}}}(v_0, f). \tag{5.6}$$

Maintenant pour $\lambda > 0$,

$$\tilde{E}^{(A_{j_-})_{j_{n,+}}}(v_0, f) \leqslant E^{A_{j_-} + B_{n,+,\lambda}}(v_0, f). \tag{5.7}$$

Puisque $v_0 \in \overline{D(A_{j_-})} = \overline{D(A_{j_-} + B_{+,\lambda})}$ et $A_{j_-} + B_{+,\lambda} = \lim\inf_{n \to \infty} A_{j_-} + B_{n,+,\lambda}$ (cf. Prop. 2.3(iv)), on a grâce à la théorie générale des équations d'évolution,

$$E^{A_{j_-} + B_{n,+,\lambda}}(v_0, f) \to E^{A_{j_-} + B_{+,\lambda}}(v_0, f) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{C}([0, T]; L^1(\Omega)); \tag{5.8}$$

en fait en reprenant les notations de la preuve de la Proposition 2.2, on a

$$E^{A_{j_-} + B_{+,\lambda}}(v_0, f) \leqslant E^{A_{j_-} + B_{n,+,\lambda}}(v_0, f) \leqslant E^{A_{j_-} + \widetilde{B_{n,+,\lambda}}}(v_0, f);$$

la suite $E^{A_{j_-} + \widetilde{B_{n,+,\lambda}}}(v_0, f)$ étant monotone, la convergence dans (5.8) est aussi p.p. sur $\Omega$ pour tout $t \in [0, T]$.

Passant à la limite dans (5.6) + (5.7) on obtient donc

$$\limsup_{n \to \infty} \tilde{E}^{A_{j_n}^+}(u_0, f)(t) \leqslant E^{A_{j_-} + B_{+,\lambda}}(v_0, f)(t)$$

$$\text{p.p. sur} \quad \Omega, \qquad \forall t \in [0, T];$$

ceci est vrai pour tout $\lambda > 0$, utilisant alors le Lemme 5.3, avec $A_{j_-}$ à la place de $A$, compte tenu de la décroissance de $E^{A_{j^-}+B_+,\lambda}(v_0, f)$ lorsque $\lambda$ décroît, on a lorsque $\lambda \to 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \tilde{E}^{A_{j_n}^+}(u_0, f)(t) \leqslant \tilde{E}^{A_j^+}(v_0, f)(t) \qquad \forall t \in ]0, T].$$

L'autre inégalité se montre de manière identique. ∎

Pour achever cette section, notons enfin l'extension de la formule de Trotter et Kato dans le cas symétrique:

PROPOSITION 5.4. *Supposons que $A$ soit l'opérateur mca de $L^1(\Omega)$ défini par $\partial\Phi$ où $\Phi$ est une fonctionnelle convexe s.c.i. sur $L^2(\Omega)$ vérifiant* (4.1). *Rappelons qu'alors $A_j^- = A_j^+ =: A_j$ (cf. Proposition* 4.5). *Alors pour tout $u_0 \in \overline{D(A_j)}$,*

$$S^{A_j}(t)\, u_0 = \lim_{n\to\infty} \left( S^A\left(\frac{t}{n}\right) P_{\overline{D(A)}} S^B\left(\frac{t}{n}\right) P_{\overline{D(B)}} \right)^n u_0 \tag{5.9}$$

*dans $L^1(\Omega)$ uniformément pour $t \geqslant 0$ borné.*

*Remarque* 5.5. Ceci étend le résultat de [*AB*] dans le cas $A = -\Delta$ sur $\mathbb{R}^N$,

$$j(x, r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \Omega \quad \text{ou} \quad r = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases},$$

$\Omega$ étant un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$: dans ce cas $S^B(t)\, P_{\overline{D(B)}} u_0 = u_0 \chi_\Omega$.

*Preuve.* D'après la Proposition 4.5, $A_j$ est l'opérateur mca de $L^1(\Omega)$ défini par $\Phi_j : u \to \Phi(u) + \int j(\cdot, u)\, d\mu$. D'après [KM], pour tout $u_0 \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, on a (5.9) avec convergence dans $L^2(\Omega)$. Mais le terme de droite est $\ll u_0$ de telle sorte que la convergence est aussi dans $L^1(\Omega)$. Par densité ceci est vrai pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$.

## BIBLIOGRAHIE


[AB] W. ARENDT ET C. J. K. BATTY, Absorption semigroups and Dirichlet boundary conditions, *Math. Ann.*, à paraître.

[At] H. ATTOUCH, Familles d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **120** (1979), 35–111.

[BBGGPV] PH. BÉNILAN, L. BOCCARDO, TH. GALLOUET, R. GARIEPY, M. PIERRE, ET J. L. VAZQUEZ, Quasilinear elliptic equations in $L^1$, en préparation.

[BC] PH. BÉNILAN ET M. GRANDALL, Completely accretive operators, dans "Semigroup Theory and Evolution Equations" (Ph. Clément *et al.*, Eds.), pp. 41–76, Dekker, New York, 1991.

[BCP] PH. BÉNILAN, M. CRANDALL, ET A. PAZY, "Evolution Equations Governed by Accretive Operators," à paraître.

[Be] PH. BÉNILAN, "Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications," Thèse d'Etat, Orsay, 1972.

[BG] L. BOCCARDO ET T. GALLOUET, On some nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data, *J. Funct. Anal.* **87** (1989), 149–169.

[BP] PH. BÉNILAN ET C. PICARD, Quelques aspects non linéaires du principe du maximum, dans "Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris VI."

[Br] H. BRÉZIS, "Opérateurs maximaux monotones dans les espaces de Hilbert et équations d'évolution," Lecture Notes, Vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[BS] H. BRÉZIS ET W. STRAUSS, Semi-linear second-order elliptic equations in $L^1$, *J. Math. Soc. Japan* **25**, No. 4 (1973), 565–590.

[DL] R. DAUTRAY ET J.-L. LIONS, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques," Tome 1, Masson, Paris, 1984.

[KM] T. KATO ET K. MASUDA, Trotter's product formula for nonlinear semigroups generated by the subdifferentials of convex functionals, *J. Math. Soc. Japan* **30**, No. 1 (1978), 169–178.

[Lê] C. H. LÊ, "Etude de la classe des opérateurs $m$-accrétifs dans $L^1(\Omega)$ et accrétifs dans $L^\infty(\Omega)$," Thèse de 3^e^ cycle, Paris VI, 1977.

[LL] J. LERAY ET J.-L. LIONS, Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty–Browder, *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), 97–107.

[St] P. STOLLMANN, Admissible and regular potentials for Schrödinger forms, *J. Operator Theory* **18** (1987), 139–151.

[V1] J. VOIGT, Absorption semigroups, their generators and Schrödinger semigroups, *J. Funct. Anal.* **68** (1986), 167–205.

[V2] J. VOIGT, Absorption semigroups, *J. Operator Theory* **20** (1988), 117–131.