View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Elsevier - Publisher Connector

JOURNAL OF ALGEBRA 37, 447–471 (1975)

Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnitttheorie und über ein Maß von A. Seidenberg für die Imperfektheit

BODO RENSCHUCH

Pädagogische Hochschule "Karl Liebknecht," Sektion Mathematik/Physik, 15 Potsdam, DDR

JÜRGEN STÜCKRAD

Technische Hochschule "Carl Schorlemmer" Leuna—Merseburg, Sektion Mathematik und Rechentechnik, 42 Merseburg, DDR

UND

WOLFGANG VOGEL

Martin Luther Universität Halle, Wittenberg, Sektion Mathematik, 401 Halle, DDR

Communicated by D. A. Buchsbaum

Received March 5, 1974

Das Problem (bzw. die Vermutung) von D. A. Buchsbaum in [3] wurde im Wesentlichen durch die Arbeiten [28] und [25] erledigt. Nach [28] blieb zunächst noch das folgende für die Schnitttheorie interessante Problem übrig.

Seien V und W zwei irreduzible algebraische projektive Varietäten im n-dimensionalen Raum über einem beliebigen Grundkörper k. Sei C eine (irreduzible) Schnittkomponente von V und W, $C \subset V \cap W$. Wir setzen voraus, daß sich V und W eigentlich in C schneiden, d.h.

$$\dim(C) = \dim(V) + \dim(W) - n.$$

Mit $i(C, V\ W)$ bezeichnen wir die Schnittmultiplizität von V und W in C im Sinne von Weil [30]. Hierzu dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach [30] voraussetzen, daß eine Varietät, etwa W, ein vollständiger Durchschnitt ist; dies bedeutet idealtheoretisch, daß das definierende (homogene) Primideal $\mathfrak{p}_W$ von W ein Ideal der Hauptklasse in $k[x_0, x_1, \ldots, x_n] =: R$

Copyright © 1975 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

ist, also $\mathfrak{p}_W = (F_1, \ldots, F_\rho)$ mit $\rho = n - \dim(W)$ und Formen $F_i \in R$, siehe z.B. [31, Kap. VII]. W habe im folgenden diese Eigenschaft.

Mit $\mu(C, V\, W)$ bezeichnen wir die idealtheoretische Schnittmultiplizität von V und W in C, siehe z.B. W. Gröbner [5]. Sei A der lokale Ring von V in C. In [28] wurde nun das folgende Problem formuliert:

Existiert eine Ringinvariante $I(A)$ von A, so daß gilt:

$$\mu(C, V\, W) - i(C, V\, W) = I(A)? \tag{P}$$

Geometrisch bedeutet dieses Problem etwa folgendes: Wir nehmen einmal an, daß wir die Varietät W so abändern bzw. "deformieren", daß wir eine neue (irreduzible) Varietät W' erhalten, die ein vollständiger Durchschnitt ist. Außerdem sollen sich V und W' wieder eigentlich in der vorgegebenen Komponent C schneiden. Hierbei werden die Schnittmultiplizitäten $i(C, V\, W')$ und $\mu(C, V\, W')$ im allgemeinen stark von $i(C, V\, W)$ bzw. $\mu(C, V\, W)$ abweichen (siehe hierzu z.B. Korollar 4). Das Problem (P) besagt aber nun, daß sich eine derartige Deformierung von W zu W' in der Differenz der beiden Schnittmultiplizitäten nicht bemerkbar macht, d.h. also

$$\mu(C, V\, W) - i(C, V\, W) = \mu(C, V\, W') - i(C, V\, W').$$

Ein erstes Gegenbeispiel für (P) wurde aber in [26] gegeben. Es ist nun nicht einfach, explizit Beispiele anzugeben, für die $\mu(C, V\, W) \neq i(C, V\, W)$ gilt. Hierzu wird immer wieder das viel studierte nicht perfekte Primideal von Macaulay zitiert, siehe z.B. [5, 6]. Eigentlich ist es erst mit den anregenden Untersuchungen in [6] möglich, mehrere nicht triviale Beispiele für unser Problem (P) anzugeben. Wir müssen nämlich bei der Wahl solcher Beispiele den folgenden Hilfssatz berücksichtigen, der sich aus den Bemerkungen nach Korollar 2 in [28] ergibt (vergleiche auch die Folgerungen 2 and 4 in [11]).

HILFSSATZ 1. *Seien $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$ die (homogenen) Primideale aus R, die V bzw. W definieren. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *Der (idealtheoretische) Bezoutsche Satz (im Sinne von* [5], *siehe auch* [18]) *gilt für $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$ nicht, also*

$$h_0(\mathfrak{p}_V, \mathfrak{p}_W) \neq h_0(\mathfrak{p}_V)\, h_0(\mathfrak{p}_W).$$

(ii) *Es existiert eine (eigentliche) Schnittkomponente $C \subset V \cap W$ mit*

$$\mu(C, V\, W) - i(C, V\, W) \geqslant 1.$$

($h_0(\mathfrak{a})$ sei die Ordnung der Hilbertfunktion von $\mathfrak{a}$).

Bemerkung. Wenn die Bedingung (ii) erfüllt ist, dann kann V nicht lokal perfekt sein im Sinne von Rees [16], siehe hierzu [7]. Damit kann insbesondere V nicht (global) perfekt sein, d.h. $\mathfrak{p}_V$ ist notwendig imperfekt (siehe [5]).

Wir wollen daher in dieser Note weitere nicht triviale Beispiele zu diesem Problem (P) studieren, die auch gewisse Informationen liefern. So ermöglicht uns z.B. das Korollar 3 dieser Note eine kritische Diskussion über ein von Seidenberg in [21] betrachtetes Maß für die Imperfektheit von Polynomidealen; siehe hierzu die Bemerkungen nach dem Korollar 3. Außerdem gibt das Korollar 4 eine Antwort auf eine Problem, das in [26] angedeutet wurde. Abschließend geben wir dann in dieser Note (siehe Satz 2) mit Hilfe der lokalen Kohomologie die Ringinvariante $I(A)$ an, wenn sie existiert.

Weitere Untersuchungen mit Hilfe der lokalen Kohomologie schießen sich an. Dies liefert insbesondere eine (lokale) notwendige und hinreichende Bedingung dafür, wann eine nulldimensionale Vereinigung von zwei gleichdimensionalen Cohen–Macaulay–Varietäten eine Buchsbaum–Varietät ist (Vgl. die Definitionen und siehe Korollar 12). (Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 ist diese Frage für den Durchschnitt nicht interessant, da er nach [5], 153.6 dann wieder eine Cohen–Macaulay Varietät ist.)

Satz 1. *Sei r eine beliebige natürliche Zahl. Dann existieren (irreduzible, projektive) Varietäten V und W, so daß sich V und W eigentlich in einer Komponente $C \subset V \cap W$ schneiden, W ein vollständiger Durchschnitt ist, und es gilt*

$$\mu(C, V\,W) - i(C, V\,W) = r.$$

Beweis. Wir betrachten nach W. Gröbner [6] die Veroneseschen Ideale $\mathfrak{v}_{d,m}$. Von diesen Veroneseschen Varietäten $V(\mathfrak{v}_{d,m})$ (die durch $\mathfrak{v}_{d,m}$ definiert sind) bilden wir die Projektion aus dem uneigentlichen Punkt der x_i-Achse auf die Hyperebene $x_i = 0$. Die Primideale, die diese Varietäten definieren, bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}_{d,m}^{(i)}$. In [6] wird nun gezeigt, daß man durch derartige Projektionen von Veroneseschen Varietäten imperfekte Varietäten erhalten kann. Nun kann man auf die Varietäten $V(\mathfrak{v}_{d,m}^{(i)})$ wieder diese Projektionen ausführen, etwa auf die Hyperebene $x_j = 0$, $j \neq i$. Dadurch erhält man Primideale $\mathfrak{v}_{d,m}^{(i,j,k,\ldots)}$, und wir sprechen von mehrfachen Projektionen der Veroneseschen Ideale. In [19] werden nun brauchbare Methoden entwickelt, mit denen man in vielen Fällen explizit die Basiselemente der Ideale $\mathfrak{v}_{d,m}^{(i,j,k,\ldots)}$ aufstellen kann. Hierauf werden wir stets zurückgreifen.

Wir betrachten nun in diesem Sinne die Ideale $\mathfrak{v}_{1,m}^{(2,3,\ldots,m-2)}$ für $m \geqslant 4$. Sie definieren (irreduzible) Raumkurven im 3-dimensionalen projektiven Raum. Durch eine einfache Umnumerierung der Unbetsimmten $(x_i \to x_{i+1})$ erhalten wir für jedes m ein 2-dimensionales Primideal $\mathfrak{p}_V$, das die folgende

Basis besitzt (siehe [19]):

$$\mathfrak{p}_V =: (x_1x_4 - x_2x_3\,,\, x_1^{m-2}x_3 - x_2^{m-1},\, x_1^{m-3}x_3{}^2 - x_2^{m-2}x_4\,,\ldots,$$
$$x_1x_3^{m-2} - x_2{}^2x_4^{m-3},\, x_3^{m-1} - x_2x_4^{m-2}) \subset k[x_0\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4].$$

Für W wählen wir die Varietät mit dem definierenden Primideal $\mathfrak{p}_W = (x_1\,,\, x_4)$. Die Schnittkomponente C, in der sich V und W eigentlich schneiden, wird ein Punkt mit dem definierenden Primideal $\mathfrak{p}_C = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4)$. Dies ergibt sich aus dem Summenideal $(\mathfrak{p}_V\,,\, x_1\,,\, x_4) = (x_1\,,\, x_4\,,\, x_2x_3\,,\, x_2^{m-1},\, x_3^{m-1})$, das ein Primärideal $\mathfrak{q}_C$ ist.

$\mu(C, V\,W)$ ist nun nach [5] die Anzahl der Glieder in einer unverkürzbaren, aber maximalen Kette von $\mathfrak{p}_C$-primären Idealen $\mathfrak{q}_i$:

$$\mathfrak{q}_C =: \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_{\mu(C,V\,W)} =: \mathfrak{p}_C\,.$$

Man bestätigt daher leicht, daß gilt

$$\mu(C, V\,W) = 2m - 3.$$

Wir behaupten nun, daß $i(C, V\,W) = m$ ist.

Für den Beweis seien V und W zunächst wieder beliebige Varietäten im obigen Sinne mit den definierenden Primidealen $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$. Mit $h_0(\mathfrak{p}_V)$ und $h_0(\mathfrak{p}_W)$ bezeichnen wir ihre (idealtheoretischen) Ordnungen, d.h. es sind die Leitkoeffizienten der (klassischen) Hilbertfunktion von $\mathfrak{p}_V$ bzw. $\mathfrak{p}_W$ (siehe hierzu [5]). Dann gilt nach [4], Formel (8) und nach [23, Kapitel V, Theoreme 1], die für uns whichtige Gleichung:

$$h_0(\mathfrak{p}_V)\, h_0(\mathfrak{p}_W) = \sum_C i(C, V\,W)\, h_0(\mathfrak{p}_C), \tag{*}$$

wobei die Summe über alle höchstdimensionalen Schnittkomponenten $C \subset V \cap W$ genommen wird, d.h. also, in denen sich V und W eigentlich schneiden.

Für die Zwischenbehauptung haben wir in unserem Beispiel nur eine Schnittkomponente C. Da W und C vollständige Durchschitte sind, werden die Ordnungen $h_0(\mathfrak{p}_W)$ und $h_0(\mathfrak{p}_C)$ durch das Produkt der Gradzahlen ihrer Basiselemente von $\mathfrak{p}_W$ bzw. $\mathfrak{p}_C$ geliefert, also

$$h_0(\mathfrak{p}_W) = 1 \qquad \text{und} \qquad h_0(\mathfrak{p}_C) = 1.$$

Damit reduziert sich unsere Behauptung auf $h_0(\mathfrak{p}_V) = m$.

Für die Berechnung der idealtheoretischen Ordnung stehen aber nun mehrere Methoden zur Verfügung. So gelingt es sehr häufig, mit Hilfe der

Syzygientheorie (siehe [5]) die Hilbertfunktion $H(t, \mathfrak{p}_V)$ von einem (homogenen) Polynomideal zu berechnen. Auch in unserem Fall ist es nach [19] möglich, und es gilt

$$H(t, \mathfrak{p}_V) = m\binom{t}{2} + (m+1)\binom{t}{1} + 1 - \binom{m-1}{3},$$

also $h_0(\mathfrak{p}_V) = m$.

Aber auch die Diskussion in [27], Section 1 über die Ordnung des Schnittes einer algebraischen, projektiven Varietät mit einer Hyperfläche liefert brauchbare Methoden, insbesondere eine (mehrmalige) Anwendung der Korollare der Hilfssätze 2 und 3. Hiermit bestätigt man ebenfalls $h_0(\mathfrak{p}_V) = m$.

Damit haben wir insgesamt

$$\mu(C, V\, W) - i(C, V\, W) = (2m - 3) - m = m - 3.$$

Wählt man nun $m = r + 3 \geqslant 4$, so ist der Satz bewiesen. Q.E.D.

In [26] wurde nun eine neue Klasse von Varietäten (sogenannte Buchsbaum–Varietäten) eingeführt, die eine Verallgemeinerung der Cohen–Macaulay Varietäten darstellt. Da nach Hilfssatz 1 die Varietäten V im Beweis des Satzes 1 keine Cohen–Macaulay Varietäten sind, soll im Hinblick auf das von A. Seidenberg betrachtete Maß für die Imperfektheit untersucht werden, ob sie Buchsbaum–Varietäten sind. Hierzu schicken wir einige Definitionen aus [25] und [26] voraus.

Definitionen. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring (noetherscher, kommutativer Ring mit Einselement). Ein System von Elementen $a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ heißt schwache A-Sequenz, wenn für jedes $i = 1, \ldots, r$ gilt:

$$\mathfrak{m}\, [(a_1, \ldots, a_{i-1}) : a_i] \subseteq (a_1, \ldots, a_{i-1}) \qquad \text{wobei} \qquad r \leqslant \dim(A).$$

(Für $i = 1$ setzen wir $(a_1, \ldots, a_{i-1}) =: (0)$).

A heißt ein Buchsbaum Ring (kurz B-Ring), wenn jedes Parametersystem von A eine schwache A-Sequenz ist.

Sei $(V, \mathcal{O}_V)$ eine algebraische projektive Varietät (im Sinne von [22]). V heißt eine Buchsbaum Varietät (oder kurz B-Varietät), wenn für jeden Punkt $x \in V$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{V,x}$ ein Buchsbaum-Ring ist.

Nach [26], Satz 3 gilt, daß unser Problem (P) eine Lösung besitzt, wenn V eine Buchsbaum Varietät ist.

Um zu entscheiden, ob die Varietäten V im Beweis des Satzes 1 B-Varietäten sind, benötigen wir eine Verschärfung des Satzes 5 in [26]. Eine Analyse des Beweises von diesem Satz 5 in [26] ergibt den folgenden

Hilfssatz 2. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein lokaler Ring mit* $\dim(A) = \operatorname{codh}(A) + 1 = 2$ (codh *bezeichne die homologische Kodimension; siehe z.B.* [23]). *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *A ist ein Buchsbaum Ring.*

(ii) *Es gibt ein Element* $a \in \mathfrak{m}$ *mit* $\dim A/(a) = 1$, *so daß*

$$\mathfrak{m}\, U(a) + U(a^2) \subseteq (a) \qquad \textit{und} \qquad \mathfrak{m}\, U(0) = (0).$$

(iii) *Für jedes Element* $a \in \mathfrak{m}$ *mit* dem $A/(a) = 1$ *gilt*

$$\mathfrak{m}\, U(a) + U(a^2) \subseteq (a) \qquad \textit{und} \qquad \mathfrak{m}\, U(0) = (0).$$

(*Dabei bezeichnet* $U(\mathfrak{a})$ *für ein Ideal* $\mathfrak{a} \subset A$ *den Durchschnitt der höchstdimensionalen Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$).

Dieser Hilfssatz 2 erleichtert uns die Entscheidung, ob die in dieser Note betrachteten Varietäten Buchsbaum-Varietäten sind oder nicht. Sei z.B. V eine Varietät, die man durch Projektionen einer Veroneseschen Varietät erhält. Bis auf den Nullpunkt ergeben sich die Punkte von solchen projizierten Varietäten V eindeutig aus den Punkten der (singularitätenfreien) Veroneseschen Varietät, siehe [7, Kapitel I]. Daher ist der Nullpunkt auf derartigen Varietäten V ein singulärer Punkt; in der Tat sind diese Varietäten V z.B. keine arithmetisch normalen Varietäten, d.h. ihre Koordinatenringe sind nicht ganz abgeschlossen, siehe hierzu [21, S. 609]. Die anderen Punkte sind aber auf V regulär. Darum genügt es, den Halm $0_{V,x}$ von solchen Varietäten V im Nullpunkt x zu untersuchen, um zu entscheiden, ob V eine Buchsbaum-Varietät ist oder nicht.

Mit diesen Bemerkungen kehren wir nun zurück zu den Varietäten V im Beweis des Satzes 1. Mit V_m bezeichnen wir die 2-dimensionalen Varietäten im 4-dimensionalen projektiven Raum, deren definierende Primideale $\mathfrak{w}_{1,m}^{(2,3,\ldots,m-2)}$, $m \geqslant 4$ sind und die man dadurch erhält, daß in $\mathfrak{v}_{1,m}^{(2,3,\ldots,m-2)}$ die Unbestimmten x_i durch x_{i+1} ersetzt werden. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir das

Korollar 3. *Wenn* $m \geqslant 5$ *ist, dann ist* V_m *keine Buchsbaum-Varietät.* V_4 *ist eine Buchsbaum-Varietät.*

Beweis. Nach dem Beispiel in [26] ist V_4 eine B-Varietät. Für $m \geqslant 5$ betrachten wir den Hilfssatz 2(iii). Hierbei sei $(A, \mathfrak{m})$ der lokale Ring von V_m im Nullpunkt $x_1 = \cdots = x_4 = 0$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Wir studieren zunächst eine Primärzerlegung von

$$\begin{aligned}(\mathfrak{w}_{1,m}^{(2,\ldots,m-2)}, x_2) = {} & (x_1, x_2, x_3^{m-1}) \cap (x_2, x_3, x_4) \\ & \cap (x_2, x_4, x_3^{m-1}, x_1^{m-2}, x_1^{m-3}x_3^{2}, \ldots, x_1 x_3^{m-2}).\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß $x_1 x_3^2 \notin \mathfrak{w}_{1,m}^{(2,\ldots,m-2)}, x_2)$, aber $x_1 x_3$ liegt im Durchschnitt der höchstdimensionalen Primärkomponenten. Dies zeigt, daß für $m \geqslant 5$ gilt

$$\mathfrak{m}\ U((x_2)\ A) \not\subseteq (x_2)\ A.$$

Nach Hilfssatz 2 und Definition ergibt sich damit, daß V_m, $m \geqslant 5$, keine B-Varietät ist.

Bemerkungen. A. Seidenberg benutzt in [21, S. 620] die Differenz von kohomologischer Dimension und Kodimension von Polynomidealen als Maß für die Imperfektheit. Lokal bedeutet dies, die Differenz $\dim(A) - \operatorname{codh}(A)$ als ein Maß für die Abweichung von der Cohen–Macaulay Struktur zu betrachten. Das Korollar 3 dürfte aber zeigen, daß diese Maße nicht gut genug derartige Abweichungen angeben. Wir meinen dies im folgenden Sinne: Sei für $m \geqslant 4 A_m$ der lokale Ring von der Varietät V_m im Nullpunkt $x_1 = \cdots = x_4 = 0$. Aus dem Beweis des Korollars 3 ergibt sich

$$2 = \dim(A_m) > \operatorname{codh}(A_m) = 1.$$

Dies bedeutet, daß für alle $m \geqslant 4$ stets $\dim(A_m) - \operatorname{codh}(A_m) = 1$ ist, also von m unabhängig; dies gilt auch für die von A. Seidenberg betrachtete Differenz der entsprechenden globalen Größen für die (imperfekten) Primideale $\mathfrak{w}_{1,m}^{(2,\ldots,m-2)}$, $m \geqslant 4$, denn die kohomologische Dimension ist 3 und die Kodimension ist 2. Der Satz 1 und insbesondere das Korollar 3 zeigen aber, daß die Varietäten V_m sich durchaus qualitativ (speziell hinsichtlich der Ringstruktur von A_m) unterscheiden. Dieser qualitative Unterschied wird auch durch die lokale Kohomologie deutlich, siehe hierzu die dritte Bemerkung am Ende dieser Note. Dies dürfte bedeuten, daß die Primideale $\mathfrak{w}_{1,m}^{(2,\ldots,m-2)}$ nicht schlechthin als "gleichwertige" imperfekte Primideale anzusehen sind, obwohl ihre zugehörigen Varietäten $V_m \subset P_k^4$ nach A. Seidenberg [21, S. 609] nicht arithmetisch normal sind; siehe in diesem Zusammenhang auch Theorem 3 und die Bemerkung über Theorem 3 in [21, S. 620]. Theorem 3 zeigt aber auch, daß für alle $m \geqslant 4$ die Varietäten V_m nicht k-normal sind.

Diese Bemerkungen dürften zur Ausschau nach einem anderen Maß für die Imperfektheit bzw. Abweichung von der Cohen–Macaulay Struktur anregen. Auch das Verschwinden und Nichtverschwinden von lokalen Kohomologiegruppen dürften hierfür nicht geeignet sein, da ein solches Maß für die hier betrachteten lokalen Ringe A_m ebenfalls keinen Unterschied liefert. In diesem Zusammenhang siehe [10, S. 133], wo Struktureigenschaften von lokalen Kohomologiegruppen ein Maß für die Singularität in einem Punkt liefern. Wenn wir (lokale) Cohen–Macaulay Ringe und Buchsbaum Ringe betrachten, dann deckt der Hilfssatz 3 dieser Note die Strukturunterschiede ihrer lokalen Kohomologiegruppen auf.

Bemerkungen. In dem Beweis des Satzes 1 konnten wir die Varietät W und die Schnittkomponente C festhalten. Im Hinblick auf das Ausgangsproblem von Buchsbaum [3] ist aber von Interesse, ob wir für die Aussage des Satzes 1 Varietäten V und C vorgeben können. Das folgende Korollar 4 zeigt, daß dies in der Tat möglich ist. Dieses Korollar gibt außerdem eine negative Antwort auf das Problem, das in [26] angedeutet wurde:

Sei V im n-dimensionalen projektiven Raum $P_k{}^n$ eine (irreduzible) Buchsbaum-Varietät. Der projektive Kegel $C(V) \subseteq P_k^{n+1}$ über V (siehe z.B. [30]) ist dann nach [26] im allgemeinen keine Buchsbaum-Varietät. Hierzu wird in [26] die B-Varietät $V_4 \subset P_k{}^4$ (im Sinne des Korollars 3) betrachtet. Sei x die Spitze des Kegels $C(V_4)$ und $\mathfrak{O}_{C(V_4),x}$ der Halm von $C(V_4)$ in x. Mit Hilfe der Parameterideale $\mathfrak{q} =: (x_1, x_4, x_5{}^r)\, \mathfrak{O}_{C(V_4),x}$, $r \geqslant 1$, zeigt man dann leicht, daß $\mathfrak{O}_{C(V_4),x}$ kein B-Ring ist; man rechnet nämlich nach, daß

$$l(\mathfrak{O}_{C(V_4),x}/\mathfrak{q}) - e_0(\mathfrak{q}, \mathfrak{O}_{C(V_4),x}) = r$$

ist.

Nach [25, Satz 10] folgt dann, daß $\mathfrak{O}_{C(V_4),x}$ kein B-Ring ist. Wie in unserem Problem (P) können wir auch hier diese Untersuchungen auf die Schnittheorie beschränken, d.h. wir lassen nur solche Parameterideale zu, die aus den definierenden Gleichungen irreduzibler Varietäten im P_k^{n+1} gebildet werden. Dies liefert also das folgende Problem (P′):

> Sei $C(V)$ der projektive Kegel einer B-Varietät $V \subset P_k{}^n$. Seien W und C irreduzible Varietäten im P_k^{n+1}, so daß sich V und W eigentlich in C schneiden und W ein vollständiger Durchschnitt ist. Existiert eine Ringinvariante $I(A)$ des lokalen Ringes A von V in C, so daß gilt:
>
> $$\mu(C, C(V)\, W) - i(C, C(V)\, W) = I(A)\,?$$

Das folgende Korollar 4 gibt nun eine Antwort auf diese beiden Bemerkungen.

KOROLLAR 4. *Sei $V \subset P_k{}^5$ die dreidimensionale projektive Varietät mit dem definierenden Primideal*

$$\mathfrak{p}_V =: (x_1x_4 - x_2x_3,\ x_1{}^2x_3 - x_2{}^3,\ x_1x_3{}^2 - x_2{}^2x_4,\ x_2x_4{}^2 - x_3{}^3) \\ \subset k[x_0, \ldots, x_5].$$

Sei C der Nullpunkt $x_1 = \cdots = x_5 = 0$ und r eine beliebige natürliche Zahl. Dann existieren (irreduzible) vollständige Durchschnitte W_r im $P_k{}^5$, so daß sich V und W_r eigentlich in C schneiden, und es gilt:

$$\mu(C, V\, W_r) - i(C, V\, W_r) = r.$$

Beweis. Wir definieren die folgenden Varietäten W_r. Sei W_1 mit dem definierenden Primideal

$$\mathfrak{p}_1 =: (x_1, x_4, x_5).$$

Für $r \geqslant 2$ sei W_r mit dem zugehörigen Primideal

$$\mathfrak{p}_r = (x_1, x_4, x_2 x_3^{r-1} + x_5^r).$$

Die Beweismethoden des Satzes 1 liefern dann:

$$\mu(C, V\, W_1) - i(C, V\, W_1) = 1$$

und

$$\mu(C, V\, W_r) - i(C, V\, W_r) = r, \qquad r \geqslant 2. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Wir haben bisher nur eine irreduzible Buchsbaum-Varietät konnengelernt (siehe Korollar 3). Das folgende Korollar zeigt nun, daß man durch Projektionen von Veroneseschen Varietäten weitere B-Varietäten erhalten kann. Hierzu betrachten wir im obigen Sinne die Projektion $\mathfrak{v}_{15}^{(2)}$. Indem wir die Unbestimmten wieder umnumerieren ($x_i \to x_{i+1}$) erhalten wir das Primideal

$$\mathfrak{w}_{15}^{(2)} =: (x_1 x_4 - x_2 x_3, x_1 x_5 - x_2 x_4, x_2 x_5 - x_3^2, x_3 x_5 - x_4^2, x_1^2 x_3 - x_2^3)$$

in $k[x_0, x_1, \ldots, x_5]$. Dieses Primideal definiert eine 2-dimensionale Varietät $V(\mathfrak{w}_{15}^{(2)})$ *in* P_k^5.

KOROLLAR 5. *$V(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}) \subset P_k^5$ ist eine Buchsbaum-Varietät.*

Beweis. Auf Grund der Bemerkungen nach dem Hilfssatz 2 haben wir zu zeigen, daß der lokale Ring $0_{V,x}$ von V im Nullpunkt $x\ x_1 = \cdots = x_5 = 0$ ein B-Ring ist. Hierzu benutzen wir Hilfssatz 2(ii). Daher ist der Beweis geliefert, wenn wir nachweisen, daß die (globale) Beziehung

$$(x_1, \ldots, x_5)\ U(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2) + U(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2^2) \subsetneqq (\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2)$$

in $k[x_0, x_1, \ldots, x_5]$ gilt. Hierzu geben wir die folgenden Primärzerlegungen an:

$$(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2) = (x_2, x_3, x_4, x_5) \cap (x_1, x_2, x_3^2, x_3 x_5 - x_4^2)$$
$$\cap\ (x_1^2, x_2, x_3^2, x_4, x_5),$$

dabei ist das Ideal $(x_1, x_2, x_3^2, x_3 x_5 - x_4^2)$ (x_1, x_2, x_3, x_4)-primär.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2^2) &= (x_2^2, x_3, x_4, x_5) \cap (x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, \\ &\qquad x_1x_5 - x_2x_4, x_2x_5 - x_3^2, x_3x_5 - x_4^2) \\ &\qquad \cap (x_1^3, x_1^2x_3, x_1x_4 - x_2x_3, x_2^2, x_2x_4, x_3^2, x_4^2, x_5) \\ &=: \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 .\end{aligned}$$

Für die Herleitung dieser Primärzerlegungen wollen wir nur auf eine Hauptschwierigkeit hinweisen; nämlich, daß $\mathfrak{q}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$-primär ist. Hierzu bemerken wir zunächst, daß $(x_1^2, x_2^2, x_3^4, x_4^8) \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Daher kann $\mathfrak{q}_2$ nur die folgende Primärzerlegung besitzen: $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}'$, wobei $\mathfrak{q}(x_1, x_2, x_3, x_4)$-primär und $\mathfrak{q}'(x_1, \ldots, x_5)$-primär sind. Wenn wir nun zeigen, daß $\mathfrak{q}_2 : x_5 = \mathfrak{q}_2$ ist, dann ist die Primäreigenschaft von $\mathfrak{q}_2$ nachgeweisen. Sei hierzu f o.B.d.A. eine Form, die nur von $x_1, \ldots, x_5$ abhängt, dann haben wir nachzuweisen, daß aus $x_5 f \in \mathfrak{q}_2$ folgt, daß $f \in \mathfrak{q}_2$. Mit allgemeinen Ansätzen für die Formen f (module $\mathfrak{q}_2$ gerechnet) kann man durch einen mühsamen Koeffizientenvergleich dann die Relation $\mathfrak{q}_2 : x_5 = \mathfrak{q}_2$ bestätigen.

Diese angegebenen Primärzerlegungen liefern:

$$U(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2) = (\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2, x_1x_3)$$

$$U(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2^2) = (\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2^2, x_1^2x_4)$$

$$(\mathfrak{w}_{15}^{(2)}, x_2) = (x_1^2x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2, x_3^2, x_3x_5 - x_4^2).$$

Hiermit betsätigt man die obige Beziehung, und dies liefert den Beweis.

Q.E.D.

Die Varietäten V, die wir bisher studiert haben, besitzen die auffallende Eigenschaft, daß in der Basisdarstellung ihrer definierenden Primideale stets eine Form zweiten Grades auftritt. Daher scheint uns ein Beispiel interessant zu sein, in dem dies nicht der Fall ist. Hierzu betrachten wir in obiger Bezeichnungsweise das Ideal $\mathfrak{v}_{17}^{(1,3,4,5)}$. Durch eine Umnumerierung $(x_i \to x_{i+1})$ der Unbestimmten erhalten wir das Primideal

$$\mathfrak{w}_{17}^{(1,3,4,5)} = (x_1^2x_3 - x_2^3, x_1x_4^2 - x_2x_3^2, x_1x_3^3 - x_2^2x_4^2, x_2x_4^4 - x_3^5)$$

in $k[x_0, x_1, \ldots, x_4]$. Dieses Primideal definiert eine 2-dimensionale Varietät $V =: V(\mathfrak{w}_{17}^{(1,3,4,5)})$ im P_k^4.

KOROLLAR 6. *$V \subset P_k^4$ ist keine Buchsbaum-Varietät.*

Beweis. Wir stellen hier kurz zwei Beweismethoden zur Diskussion. Wir betrachten eine Primärzerlegung von

$$(\mathfrak{p}_V, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cap (x_2^3, x_3, x_4^2) \cap (x_1, x_2^2, x_3, x_4^4).$$

Wie im Beweis von Korollar 3 liefert der Hilfssatz 2(iii) wieder, daß V keine B-Varietät ist.

In dem anderen Beweis gehen wir auf die geometrische Deutung des Problems (P) zurück. Hierzu betrachten wir die beiden Varietäten W und W' in P_k^4 mit den definierenden Primidealen $\mathfrak{p}_W =: (x_1, x_4)$ bzw. $\mathfrak{p}_{W'} =: (x_1 + x_4, x_3)$. Die einzige Schnittkomponente von $V \cap W$ und $V \cap W'$ ist der Nullpunkt $x_1 = \cdots = x_4 = 0$. Mit Hilfe der Relation (*) im Beweis des Satzes 1 ergibt sich:

$$i(C, V\, W) = i(C, V\, W') = h_0(\mathfrak{p}_V) = 7.$$

Wir bemerken hierzu nur, daß man analog den in [6] angegebenen Methoden auch die Hilbert-Funktion von $\mathfrak{p}_V$ berechnen kann:

$$H(t, \mathfrak{p}_V) = 7t - 2.$$

Aus den Primärzerlegungen:

$$(\mathfrak{p}_V, x_1, x_4) = (x_1, x_4, x_2^3, x_3^5, x_2x_3^2)$$

und

$$(\mathfrak{p}_V, x_1 + x_4, x_3) = (x_3, x_2^3, x_1 + x_4, x_1x_4^2, x_2^2x_4^2)$$

folgen $\mu(C, V\, W) = 9$ und $\mu(C, V\, W') = 8$. (Hierbei ist es nützlich, wieder die Methoden aus [27], Section 1 heranzuziehen). Damit erhalten wir

$$2 = \mu(C, V\, W) - i(C, V\, W) \neq \mu(C, V\, W') - i(C, V\, W') = 1,$$

Q.E.D.

Mit diesen Beweismethoden kann man weitere 2-dimensionale imperfekte Varietäten V angeben, die keine Buchsbaum-Varietäten darstellen, z.B.: $V \subset P_k^4$ mit dem definierenden Primideal

$$\mathfrak{w}_{17}^{(1,3,4,6)} =: (x_1x_4 - x_2x_3, x_1^3x_3^2 - x_2^5, x_1^2x_3^3 - x_2^4x_4, x_1x_3^4 - x_2^3x_4^2, x_3^5 - x_2^2x_4^3)$$

oder

$$\mathfrak{w}_{16}^{(1,3,4)} =: (x_1^2x_4 - x_2^3, x_1x_3^2 - x_2^2x_4, x_1x_4^2 - x_2x_3^2, x_2x_4^3 - x_3^4)$$

(siehe hierzu [26], Satz 2) oder

$$\mathfrak{p}_A =: (x_0x_3 - x_1x_2 + x_3^2, x_0^3x_2 - x_0x_1^3 + 3x_0x_1x_2^2 + x_2x_3^3, x_0^2x_2^2 - x_1^3x_2 + x_1^2x_3^2 + 2x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2, x_0x_2^3 - x_1^2x_2x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3, x_1x\, x_3^2 - x_2^4 - x_3^4)$$

(Daß $\mathfrak{p}_A$ keine B-Varietät definiert, folgt aus der Primärzerlegung

$$(\mathfrak{p}_A, x_2) = (x_0, x_2, x_3^2) \cap (x_1^3, x_2, x_3) \\ \cap (x_0^3, x_0x_3 + x_3^2, x_1^2, x_1x_3^3, x_2, x_3^4).$$

$\mathfrak{p}_A$ liefert die (idealtheoretischen) definierenden Gleichungen der in [1, S. 83] studierten Raumkurve. Insbesondere ist also $\mathfrak{p}_A$ imperfekt), oder

$$\mathfrak{w}_{18}^{(1,2,4,5,6)} = (x_1x_3^2 - x_2^2x_4, x_1^2x_4^2 - x_2^3x_3, x_1x_4^3 - x_2x_3^3, \\ x_1^3x_3x_4 - x_2^5, x_2x_4^4 - x_3^5)$$

oder

$$\mathfrak{w}_{18}^{(1,3,4,5,6)} = (x_1x_4^2 - x_2x_3^2, x_1^4x_4 - x_2^4, x_1^2x_3^2 - x_2^3x_4, \\ x_1x_3^4 - x_2^2x_4^3, x_2x_4^5 - x_3^6).$$

Die bisherigen Beispiele (bis auf $\mathfrak{p}_A$) entstanden alle durch Projektionen von Veroneseschen Varietäten. Daher wollen wir noch ein Beispiel studieren, das wohl nicht durch solche Projektionen entsteht. Wir betrachten hierzu die von Hartshorne studierte Fläche $H \subset P_k^4$ in [8, 3.4.2]. Aus der dort angegebenen allgemeinen Nullstelle erhalten wir mit den Methoden aus [19] das folgende Primideal

$$\mathfrak{p}_H = (x_1x_4 - x_2x_3, x_0x_1x_2 - x_0x_2^2 + x_1^2x_3, x_0x_2x_3 - x_0x_2x_4 + x_1x_3^2, \\ \times x_0x_3x_4 - x_0x_4^2 + x_3^3) \quad \text{in} \quad k[x_0, x_1, ..., x_4].$$

Diese Fläche H besitzt nach [8] eine Singularität im Nullpunkt und ist in den anderen Punkten singularitätenfrei. Für die Untersuchung, ob H eine Buchsbaum-Varietät ist, können wir daher die Beweismethode des Korollars 5 benutzen.

KOROLLAR 7. *Die Hartshornesche Fläche $H \subset P_k^4$ ist eine Buchsbaum-Varietät.*

Beweis. Sei $A =: k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]_{(x_1,...,x_4)}$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} =: (x_1, ..., x_4) A$. Der Beweis ist also nach Hilfssatz 2 geliefert, wenn wir gezeigt haben:

$$\mathfrak{m}\, U((\mathfrak{p}_H, x_3) A) + U((\mathfrak{p}_H, x_3^2) A) \subseteq (\mathfrak{p}_H, x_3) A.$$

Es gilt die folgende Primärzerlegung

$$(\mathfrak{p}_H, x_3) = (x_3, x_1x_4, x_0x_2(x_1 - x_2), x_0x_2x_4, x_0x_4^2) \\ = (x_0, x_1, x_3) \cap (x_0, x_3, x_4) \cap (x_2, x_3, x_4) \cap (x_1 - x_2, x_3, x_4) \\ \cap (x_1, x_2, x_3, x_4^2),$$

also $U((\mathfrak{p}_H, x_3) A) = (x_2(x_1 - x_2), x_3, x_4) A$; daher gilt

$$\mathfrak{m}\, U((\mathfrak{p}_H, x_3) A) \subseteq (\mathfrak{p}_H, x_3) A.$$

$U((\mathfrak{p}_H, x_3^2))$ zu berechnen, bereitet Schwierigkeiten. Daher gehen wir wie folgt vor: Die minimalen Primideale von $(\mathfrak{p}_H, x_3^2) A$ sind wieder $\mathfrak{p}_1 =: (x_2, x_3, x_4) A$ und $\mathfrak{p}_2 =: (x_1 - x_2, x_3, x_4) A$. Man muß dann nachrechnen, daß

$$U((\mathfrak{p}_H, x_3^2) A)$$
$$= (x_3^2, x_4, x_0x_2 + x_1x_3) A \cap (x_3^2, x_3 - x_4, x_0(x_1 - x_2) + x_1x_3) A.$$

Man bestätigt wieder, daß $U((\mathfrak{p}_H, x_3^2) A) \subseteq (x_1, x_2, x_3, x_4^2) A$. Daher ergibt sich:

$$U((\mathfrak{p}_H, x_3^2) A) \subseteq U((\mathfrak{p}_H, x_3) A) \cap (x_1, x_2, x_3, x_4^2) A = (\mathfrak{p}_H, x_3) A,$$

Q.E.D.

Abschließend kehren wir zurück zu dem von A. Seidenberg [21] betrachteten Maß für die Imperfektheit von Polynomidealen. Wir haben in dieser Note nur solche Varietäten $V \subset P_k^n$ studiert, für die die Differenz der kohomologischen Dimension und Kodimension eins beträgt. Daher geben wir das folgende

Problem 1. Existieren zu jeder vorgegebenen kohomologischen Dimension und Kodimension (irreduzible) Buchsbaum-Varietäten im P_k^n?

Eine Analyse der Beispiele in dieser Note und weiterer Beispiele liefert uns das:

Problem 2. Sei $V \subset P_k^n$ eine (irreduzible) Varietät mit dem definierenden homogenen Primideal $\mathfrak{p}$. Sei $\mathfrak{p} = (p_1, ..., p_t)$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{p}$, r der Maximalgrad und s der Minimalgrad der Basiselemente p_i, $i = 1, ..., t$. Wenn $r = s + 2$, ist dann V keine B-Varietät?

Man könnte einen Augenblick daran denken, daß V eine B-Varietät ist, wenn $r = s + 1$. Aber das Beispiel $\mathfrak{w}_{16}^{(1,3,4)}$ (siehe die Beispiele nach Korollar 6) und auch das Korollar 4 widerlegen dies.

Wir wollen nun für unser Problem (P) mit Hilfe der lokalen Kohomologie eine Ringinvariante $I(A)$ angeben, die nach [26], Satz 3 auf Buchsbaum-Varietäten existiert. Hierzu zeigen wir zunächst, daß die lokalen Kohomologiegruppen eines B-Ringes endlichdimensionale Vektorräume sind, also insbesondere endliche Länge haben. Diese Eigenschaft ist auch von besonderem Interesse für den Beweis des Hauptsatzes in [13] (siehe die Proposition A′ und Lemma 7.1.) Das Lemma 7.1 in [13] liefert eine hinreichende Bedingung dafür, daß gewisse lokale Kohomologiegruppen noethersch sind. Hiervon gilt aber auch die Umkehrung; dies zeigt schon eine Analyse des Beweises von diesem Lemma 7.1. Diese notwendige und hinreichende Bedingung wurde auch in [20] bewiesen und verallgemeinert. Wir haben also daß

KOROLLAR 8. *Sei (T, Q) ein regulärer lokaler Ring, und sei $A = T/\mathfrak{a}$, wobei die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$ alle dieselbe Dimension haben. Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist $\mathfrak{m} = Q/\mathfrak{a}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent*

(i) *$H_{\mathfrak{m}}{}^i(A)$ hat endliche Länge für alle $i = 0,..., \dim(A) - 1$.*

(ii) *Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ aus A ist der lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ein Cohen–Macaulay Ring.*

In [20] wird untersucht, in welchen Zusammenhang die Bedingungen (i) und (ii) stehen, wenn A kein Quotient eines regulären lokalen Ringes ist. Insbesondere wird dort gezeigt, daß für einen beliebigen lokalen Ring A aus (i) die Eigenschaft (ii) folgt. Indem man zur Komplettierung von A übergeht, liefern die Beweismethoden von Lemma 7.1 in [13] das folgende Korollar, siehe also auch [20]:

KOROLLAR 9. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Wenn $H_{\mathfrak{m}}{}^i(A)$ für all $i \neq \dim(A)$ endliche Länge besitzt, dann ist jeder Teil eines Parametersystems aus A dimensionsungemischt bis auf eine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente.*

Für den Beweis des Korollars 9 zeigt man zunächst, daß aus der Voraussetzung die Bedingung (ii) des Korollars 8 folgt und außerdem gilt

$$ht(\mathfrak{p}) + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A \qquad \text{für alle } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A).$$

Die Behauptung des Korollars 9 ist dann klar (siehe [20], Satz 4).

Für unsere Problematik benötigen wir mehr Struktur für die lokalen Kohomologiegruppen. Wir beweisen hierzu den

HILFSSATZ 3. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein Buchsbaum-Ring der Dimension $d > 0$. Dann ist*

$$\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^i(A) = 0 \qquad \textit{für alle } i = 0,..., d-1,$$

d.h. diese lokalen Kohomologiegruppen $H_{\mathfrak{m}}{}^i(A)$ von A mit dem Träger $\mathfrak{m}$ sind endlichdimensionale Vektorräume über $A/\mathfrak{m}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $i = 0$. Wir wählen ein Element $a \in \mathfrak{m}$, das Teil eines Parametersystems ist. Für genügend großes n gilt dann

$$\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^0(A) = \mathfrak{m}(0: \mathfrak{m}^n) = \mathfrak{m}(0: a^n) = \mathfrak{m}(0: \mathfrak{m}) = 0.$$

Wir benutzen jetzt Induktion nach d. Für $d = 1$ ist nichts mehr zu zeigen. Sei $d \geqslant 1$ und ebenfalls $\operatorname{codh}(A) \geqslant 1$. Dann betrachten wir ein Element $b \in \mathfrak{m}$, das Teil einer Primsequenz ist. Für jede natürliche Zahl n haben wir die folgende exakte Sequenz:

$$0 \to A \xrightarrow{b^n} A \to A/b^n \to 0,$$

die die lange exakte Sequenz induziert:

$$\begin{aligned} 0 \to H_{\mathfrak{m}}{}^0(A/b^n) \to H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \xrightarrow{b^n} H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \to H_{\mathfrak{m}}{}^1(A/b^n) \\ \to H_{\mathfrak{m}}{}^2(A) \to H_{\mathfrak{m}}{}^2(A) \to \cdots \end{aligned}$$

Daher erhalten wir für jedes i die Epimorphismen:

$$H_{\mathfrak{m}}{}^i(A/b^n) \twoheadrightarrow 0:_{H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(A)} b^n.$$

Da $\dim(A/b^n) = \dim(A) - 1$ ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^i(A/b^n) = 0$ für alle $i = 0,\ldots, d-2$. Wegen des Epimorphismus haben wir dann auch $\mathfrak{m}\, [0:_{H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(A)} b^n] = 0$ für alle $i = 0,\ldots, d-2$. Daher gilt für jedes $i = 1,\ldots, d-1$:

$$0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}\, [0:_{H_{\mathfrak{m}}{}^i(A)} b^n] = \mathfrak{m} \bigcup_{n=1}^{\infty} (0:_{H_{\mathfrak{m}}{}^i(A)} b^n) = \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^i(A);$$

siehe zur letzten Gleichung z.B. D. Kirby [14, Prop. 5]. Da $\operatorname{codh}(A) > 0$ vorausgesetzt war, ist $H_{\mathfrak{m}}{}^0(A) = 0$ (siehe z.B. [15, Prop. 2.1]), und die Behauptung ist in diesem Fall bewiesen. Sei nun $\operatorname{codh}(A) = 0$. Allgemein ist für Buchsbaum-Ringe A und genügend großes n:

$$H_{\mathfrak{m}}{}^0(A) = (0 : \mathfrak{m}^n) = U(0),$$

siehe [26, Kor. 1.4]. Daher ist nach [25, Kor. 13], $A' =: A/U(0)$ ein B-Ring. Ferner gilt, daß $\operatorname{codh}(A') \geqslant 1$ ist. Damit ist $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^i(A') = 0$ für alle $i = 1,\ldots, d-1$.

Da $H_{\mathfrak{m}}{}^0(A)$ ein artinscher A-Modul ist (siehe z.B. [15, Prop. 2.1]), gilt $H_{\mathfrak{m}}{}^i(H_{\mathfrak{m}}{}^0(A)) = 0$ für alle $i \geqslant 1$. Daher folgt aus der exakten Sequenz:

$$0 \to H_{\mathfrak{m}}{}^0(A) \to A \to A' \to 0$$

die Isomorphie $H_{\mathfrak{m}}{}^i(A) \simeq H_{\mathfrak{m}}{}^i(A')$ für alle $i \geqslant 1$. Damit hat man nach dem ersten Teil des Beweises

$$\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^i(A) = \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^i(A') = 0 \qquad \text{für alle } i = 1,\ldots, d-1, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Bemerkungen.

(1) Die Umkehrung von Hilfssatz 3 gilt nicht. Hierzu betrachten wir in $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ das Ideal

$$\mathfrak{a} =: (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_3, x_2x_4)$$

und bilden den lokalen Ring

$$A =: K[x_1, \ldots, x_4]_{(x_1, \ldots, x_4)} / \mathfrak{a}\, K[x_1, \ldots, x_4]_{(x_1, \ldots, x_4)},$$

mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$.

Nach den Beispielen aus [25], Section 4 folgt: A ist kein B-Ring, aber $A/U(0)$ ist ein B-Ring. Ferner rechnet man nach, daß $\mathfrak{m}\ U(0) = (0)$ in A gilt; also

$$\mathfrak{m}\ H_{\mathfrak{m}}^0(A) = \mathfrak{m}\ (0 : \mathfrak{m}^n) \subseteq \mathfrak{m}\ U(0) = (0).$$

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to U(0) \to A \to A/U(0) \to 0$$

und $\mathfrak{m}\ U(0) = (0)$ folgt

$$H_{\mathfrak{m}}^1(A) \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A/U(0)).$$

Nach Hilfssatz 3 ist $H_{\mathfrak{m}}^1(A/U(0))$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Damit sind die lokalen Kohomologiegruppen $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$, $i = 0, 1$, von A endlichdimensionale Vektorräume, aber A ist kein B-ring. Diese Bemerkung liefert uns das:

PROBLEM 3. Existiert eine rein kohomologische Charakterisierung der B-Ringe?

(2) Der Hilfssatz 3 und Korollar 8 liefern eine brauchbare notwendige Bedingung dafür, wann eine algebraische, projektive Varietät $V \subset P_k^n$ eine Buchsbaum-Varietät ist, nämlich: Sei W eine beliebige Untervarietät von V mit einer Dimension $\geqslant 1$. Wenn V eine Buchsbaum-Varietät ist, dann sind die lokalen Ringe von V in W Cohen–Macaulay Ringe. (Siehe hierzu auch [26, Korollar 1.4]). Dies bedeutet, daß eine B-Varietät höchstens singuläre Punkte besitzen kann, die nicht notwendig Cohen–Macaulay Punkte zu sein brauchen. Diese Bemerkung zeigt erneut, daß die Varietät V, die wir im Korollar 4 studiert haben, keine B-Varietät ist. In diesem Rahmen ist also auch von Interesse, ob Untervarietäten arithmetisch Cohen–Macaulay

Varietäten sind, siehe hierzu z.B. [13, Section 14] und die dort zitierte Literatur.

Mit dem Hilfssatz 3 können wir nun die Ringinvariante für B-Ringe angeben.

SATZ 2. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein d-dimensionaler* $(d \geqslant 1)$ *Buchsbaum-Ring. Für jedes Parameterideal* $\mathfrak{q}$ *von* A *gilt*

$$l(A/\mathfrak{q}) - e_0(\mathfrak{q}, A) = I(A)$$

mit

$$I(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \dim_{A/\mathfrak{m}}(H_\mathfrak{m}{}^i(A)).$$

($e_0(\mathfrak{q}, A)$ *sei die Multiplizität von* $\mathfrak{q}$ *in* A.)

Beweis. Wir führen Induktion nach d. Nach Hilfssatz 3 können wir in $I(A)$ auch die Länge von $H_\mathfrak{m}{}^i(A)$ als A-Modul nehmen. Für $d = 1$ gilt nach [25, Prop. 12]:

$$I(A) = l(U(0)), \qquad \text{also} \qquad I(A) = l(H_\mathfrak{m}{}^0(A)).$$

Sei $d \geqslant 2$. Wir setzen wieder $A' =: A/U(0)$, und wir wählen ein Element $a \in \mathfrak{m}$, das Teil einer Primsequenz in A' bildet. Wir betrachten die exakte Sequenz $0 \to A' \xrightarrow{a} A' \to A'/(a) \to 0$. Wir bemerken, daß nach [25, Prop. 12] A' ein B-Ring ist und daher ist nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{m}\, H_\mathfrak{m}{}^i(A') = 0$, also insbesondere $a\, H_\mathfrak{m}{}^i(A') = 0$ für alle $i = 0,..., \dim(A) - 1$. Daher induziert die obige exakte Sequenz die folgenden exakten Sequenzen

$$0 \to H_\mathfrak{m}{}^i(A') \to H_\mathfrak{m}{}^i(A'/(a)) \to H_\mathfrak{m}^{i+1}(A') \to 0$$

für all $i = 0,..., d - 2$. Für den Induktionsbeweis bemerken wir noch, daß $I(A') = I(A'/(a))$ und nach [25, Prop. 12] gilt:

$$I(A) = I(A') + l(H_\mathfrak{m}{}^0(A)) = l(H_\mathfrak{m}{}^0(A)) + I(A'/(a)).$$

Daher folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} I(A) &= l(H_\mathfrak{m}{}^0(A)) + \sum_{i=0}^{d-2} \binom{d-2}{i} l(H_\mathfrak{m}{}^i(A'/(a)) \\ &= l(H_\mathfrak{m}{}^0(A)) + \sum_{i=0}^{d-2} \binom{d-2}{i} [l(H_\mathfrak{m}{}^i(A') + l(H_\mathfrak{m}^{i+1}(A'))], \end{aligned}$$

nach den obigen exakten Sequenzen

$$= l(H_{\mathfrak{m}}{}^0(A)) + \sum_{i=1}^{d-1} \left[\binom{d-2}{i-1} + \binom{d-2}{i}\right] l(H_{\mathfrak{m}}{}^i(A'))$$

$$= l(H_{\mathfrak{m}}{}^0(A)) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i} l(H_{\mathfrak{m}}{}^i(A'))$$

$$= l(H_{\mathfrak{m}}{}^0(A)) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i} l(H_{\mathfrak{m}}{}^i(A))$$

vgl. hierzu den letzten Beweisschritt in Hilfssatz 3

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} l(H_{\mathfrak{m}}{}^i(A)). \qquad \text{Q.E.D.}$$

In [3] wurde vermutet, daß stets $I(A)$ existiert und

$$I(A) = \dim(A) - \operatorname{codh}(A).$$

Indiesem Zusammenhang liefert der Satz 2 das

KOROLLAR 10. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein* B*-Ring mit* $0 < t =: \operatorname{codh}(A) < \dim(A) =: d$. *Es gilt* $I(A) = \dim(A) - \operatorname{codh}(A)$ *genau dann, wenn*

(i) $\operatorname{codh}(A) = \dim(A) - 1$ *und* $H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A) \cong A/\mathfrak{m}$, *oder*

(ii) $\operatorname{codh}(A) = 1$, $H_{\mathfrak{m}}{}^i(A) = 0$ *für alle* $i = 2,..., d-1$ *und* $H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \cong A/\mathfrak{m}$.

Beweis. Da $\binom{d-1}{t} - (d-t) \geqslant 0$ ist, gilt nach Satz 2

$$I(A) \geqslant (d-t)\, l(H^t(A_{\mathfrak{m}})).$$

Das Gleichheitszeichen steht hier genau dann, wenn $\operatorname{codh}(A) = \dim(A) - 1$ oder $\operatorname{codh}(A) = 1$ und $H_{\mathfrak{m}}{}^i(A) = 0$ für alle $i = 2,..., d-2$.

Beachtet man nun noch, daß $I(A) \geqslant (d-t)\, l(H_{\mathfrak{m}}{}^t(A)) \geqslant (d-t)$ gilt, dann ergibt sich die Behauptung. Q.E.D.

Kennt man von einem B-Ring die Invariante, so erhält man durch das Korollar 10 Informationen über die lokalen Kohomologiegruppen. Sei z.B. A der lokale Ring der V_4 (siehe Korollar 3) im Nullpunkt $x_1 = \cdots = x_4 = 0$. Dann liefert das Korollar 10, da nach Satz 1 $I(A) = 1$ ist:

$$H_{\mathfrak{m}}{}^0(A) = 0 \qquad \text{und} \qquad H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \cong A/\mathfrak{m}.$$

Im Hinblick auf die in dieser Note studierten Beispiele geben wir noch das Korollar 11, das auch für den Beweis des Satzes 3 benötigt wird.

KOROLLAR 11. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein d-dimensionaler* $(d \geqslant 1)$ *lokaler Ring mit* $\operatorname{codh}(A) = d - 1$. *A ist genau dann ein Buchsbaum-Ring, wenn* $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A) = 0$ *ist. Die Invariante ist dann* $I(A) = l(H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A))$.

Beweis. Der Wert der Invariante ergibt sich nach Satz 2. Wir führen Induktion nach d. Für $d = 1$ folgt die Behauptung aus dem [25, Satz 5(ii)]. Sei $d \geqslant 2$. Dann existiert ein Element $a \in \mathfrak{m}$, das Teil einer Primsequenz in A ist.

Für jede natürliche Zahl n haben wir die exakte Sequenz:

$$0 \to A \xrightarrow{a^n} A \to A/(a^n) \to 0.$$

Da $(a^n)\, H_{\mathfrak{m}}^{i}(A) \subseteq \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^{i}(A) =$ für alle $i = 0, \ldots, d-1$ erhalten wir hieraus:

$$0 \to H_{\mathfrak{m}}^{i}(A) \to H_{\mathfrak{m}}^{i}(A/(a^n)) \to H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(A) \to 0$$

für alle $i = 0, \ldots, d-2$.Da nach Voraussetzung $H_{\mathfrak{m}}^{d-2}(A) = 0$ ist (siehe z.B. [15, Prop. 2.1]), folgt also

$$H_{\mathfrak{m}}^{d-2}(A/(a^n)) \cong H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A).$$

Damit ist auch $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^{d-2}(A/(a^n)) = 0$. Zusammen mit der Bemerkung, daß $\operatorname{codh}(A/(a^n)) = \dim(A/(a^n)) - 1$ ist, folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß $A/(a^n)$ ein B-Ring ist. Daher gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_{d-1}$, so daß für jedes System von natürlichen Zahlen $n, n_1, \ldots, n_{d-1}$ gilt:

$$\mathfrak{m}\, [(a^n, a_1^{n_1}, \ldots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i}] \subseteq (a^n, a_1^{n_1}, \ldots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$$

für all $i = 1, \ldots, d-1$ und $\mathfrak{m}\,(0 : a^n) = (0)$ in A.

Hieraus folgt nach [26, Korollar 1.4], daß das Nullideal in A bis auf eine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente ungemischt ist. Da in diesem Induktionsbeweis $\operatorname{codh}(A) \geqslant 1$ ist, muß das Nullideal ungemischt sein. Sei nun $b_1, \ldots, b_d$ ein beliebiges Parametersystem aus A. Dann gilt $(0) : b_1 = (0)$ in A. Daher folgt wieder, daß $A/(b_1)$ ein B-Ring ist. Daher bilden $b_2, \ldots, b_d$ in $A/(b_1)$ eine schwache Primsequenz. Zusammen mit $\mathfrak{m}\,((0) : b_1) = (0)$ folgt hieraus, daß $b_1, b_2, \ldots, b_d$ eine schwache Primsequenz bilden. Nach [25, Satz 5] folgt dann die Behauptung.

Die Umkehrung ergibt sich aus dem Satz 2. Q.E.D.

Die Beispiele in dieser Note und das Korollar 11 liefern 2-dimensionale lokale Ringe A, für die $H_{\mathfrak{m}}^{1}(A)$ endlichdimensionale Vektorräume sind. Um weitere Beispiele für Buchsbaum-Ringe geben zu können, beweisen wir zunächst den Satz 3, der das Korollar 11 verallgemeinert.

SATZ 3. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein d-dimensionaler* $(d \geqslant 2)$ *lokaler Ring, so daß die lokalen Kohomologiegruppen* $H_{\mathfrak{m}}{}^i(A) = 0$ *für alle* $i \neq 1$, d. *Die folgenden Bedingungen sind dann äquivalent*

(i) $H_{\mathfrak{m}}{}^1(A)$ *ist ein endlichdimensionaler Vektorraum, d.h.* $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) = 0$.

(ii) A *ist ein Buchsbaum-Ring.*

Wenn $H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \neq 0$, *dann ist* A *kein Cohen–Macaulay Ring, und es ist* $\operatorname{codh}(A) = 1$.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 folgt aus (ii) die Bedingung (i). Für die Umkehrung sei zunächst $d = 2$. Dann folgt die Behauptung aus Korollar 11. Sei $d \geqslant 3$. Im folgenden Hilfssatz 4, (i) werden wir zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 3 $(d \geqslant 3)$ gilt $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^0(A/(a_1, ..., a_i)) = 0$ für alle $i = 1, ..., d-1$ und für jeden Teil $a_1, ..., a_i$ eines beliebigen Parametersystems von A. Hieraus folgt dann für genügend großes n mit $A' =: A/(a_1, ..., a_i)$:

$$\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^0(A/(a_1, ..., a_i)) = \mathfrak{m}\,(0:_{A'} \mathfrak{m}^n) = 0,$$

also $0: \mathfrak{m}^n = 0: \mathfrak{m}$, d.h. in A gilt $(a_1, ..., a_i): \mathfrak{m}^n = (a_1, ..., a_i): \mathfrak{m}$. Nach Korollar 9 ist aber $(a_1, ..., a_i)$ bis auf eine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente ungemischt. Daher gilt

$$\mathfrak{m}\, U(a_1, ..., a_i) \subseteq (a_1, ..., a_i).$$

Nach [25, Satz 5(ii)] folgt dann die Behauptung. Q.E.D.

Für den Beweis des Satzes 3 bleibt also noch zu zeigen

HILFSSATZ 4. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 3 *gilt: Für jedes Parametersystem* $a_1, ..., a_d$, $d \geqslant 3$, *sind*

(i) $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^0(A/(a_1, ..., a_i)) = 0$ *für alle* $i = 1, ..., d-1$,

(ii) $H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \cong H_{\mathfrak{m}}{}^1(A/(a_1, ..., a_i): \mathfrak{m})$ *für alle* $i = 1, ..., d-2$,

(iii) $H_{\mathfrak{m}}{}^i(A/(a_1, ..., a_i): \mathfrak{m}) = 0$ *für alle* $i \neq 1$, $d - i$.

Beweis. Wir führen Induktion nach i. Sei $i = 1$. Die exakte Sequenz

$$0 \to A \xrightarrow{a_1} A \to A/(a_1) \to 0$$

liefert die exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to H_{\mathfrak{m}}{}^0(A/a_1) \to H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \xrightarrow{a_1} H_{\mathfrak{m}}{}^1(A) \to H_{\mathfrak{m}}{}^1(A/a_1) \to 0$$

und $H_{\mathfrak{m}}^i(A/(a_1)) = 0$ für alle $i = 2,\dots, d-2$. Da $a_1 \cdot H_{\mathfrak{m}}^1(A) \subseteq \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^1(A) = 0$ ist, gilt $H_{\mathfrak{m}}^0(A/a_1) \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A)$, $H_{\mathfrak{m}}^1(A/(a_1)\colon \mathfrak{m}) \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A/(a_1)) \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A)$ und $H_{\mathfrak{m}}^i(A/(a_1)\colon \mathfrak{m}) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(A/(a_1)) = 0$ für alle $i = 2,\dots, d-2$. Wegen $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^1(A) \cong \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^0(A/a_1) = 0$ ist für genügend großes n außerdem

$$(a_1)\colon \mathfrak{m}^n = (a_1)\colon \mathfrak{m};$$

hieraus folgt

$$0 = (a_1)\colon \mathfrak{m}^{n+1}/(a_1)\colon \mathfrak{m}^n = 0\colon_{A/(a_1)\colon \mathfrak{m}} \mathfrak{m}^n = H_{\mathfrak{m}}^0(A/(a_1)\colon \mathfrak{m}).$$

Für $i = k-1$ sei alles gezeigt, und $k \leqslant d-2$. Sei $A' =\colon A/(a_1,\dots, a_{k-1})\colon \mathfrak{m}$. Die exakte Sequenz

$$0 \to A' \xrightarrow{a_k} A' \to A'/(a_k)\,A' \to 0$$

induziert die exakte Sequenz

$$0 \to H_{\mathfrak{m}}^0(A'/(a_k)\,A') \to H_{\mathfrak{m}}^1(A') \to H_{\mathfrak{m}}^1(A') \to H_{\mathfrak{m}}^1(A'/(a_k)\,A') \to 0,$$

da wegen $\dim(A') = d-k+1 \geqslant 3$ die Induktionsvoraussetzung $H_{\mathfrak{m}}^2(A') = 0$ liefert. Da außerdem

$$a_k\, H_{\mathfrak{m}}^1(A') \subseteq \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^1(A') \cong \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^1(A) = 0$$

ist, gilt

$$H_{\mathfrak{m}}^0(A'/(a_k)\,A') \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A') \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A),$$
$$H_{\mathfrak{m}}^1(A'/(a_k)\,A') \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A') \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A)$$

und

$$H_{\mathfrak{m}}^i(A'/(a_k)\,A') = 0 \qquad \text{für alle } i = 2,\dots, d-k-1.$$

Sei $A'' =\colon A/(a_1,\dots, a_k)\colon \mathfrak{m}$. Da der A-Modul

$$(a_1,\dots, a_k)\colon \mathfrak{m}/(a_1,\dots, a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k)$$

die Krull-Dimension Null besitzt, ergeben sich aus einer langen (lokalen) Kohomologiesequenz dies Isomorphien:

$$H_{\mathfrak{m}}^1(A'') \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A'/(a_k)\,A') \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A)$$

und

$$H_{\mathfrak{m}}^i(A'') \cong H_{\mathfrak{m}}^i(A'/(a_k)\,A') = 0 \qquad \text{für alle } i = 2,\dots, d-k-1.$$

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^0(A/(a_1,\dots, a_k)) = 0$ ist. Hieraus folgt dann wie beim Induktionsanfang $H_{\mathfrak{m}}^0(A'') = H_{\mathfrak{m}}^0(A/(a_1,\dots, a_k)\colon \mathfrak{m}) = 0$. Um dies zu beweisen, betrachten wir den durch $a_k\colon \mathfrak{m} \subseteq ((a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k))\colon \mathfrak{m}^n$ und $a_k \subseteq (a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k)$ induzierten natürlichen Homomorphismus

$$\varphi\colon (a_k)\colon \mathfrak{m}/(a_k) \to ((a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k))\colon \mathfrak{m}^n/(a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k).$$

Wir bemerken, daß der Induktionsbeweis außerdem noch liefert, daß φ für jede natürliche Zahl n das folgende Diagram kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathfrak{m}}^1(A) & \cong & H_{\mathfrak{m}}^1(A') \\ \wr\| & & \wr\| \\ H_{\mathfrak{m}}^0(A/(a_k)A) & \xrightarrow{\varphi} & H_{\mathfrak{m}}^0(A'/(a_k)A'), \end{array}$$

d.h. φ ist ein Isomorphismus. Damit ist

$$0 = \operatorname{Koker}(\varphi) = ((a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k))\colon \mathfrak{m}^n/(a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k)\colon \mathfrak{m}.$$

Daher folgt für genügend großes n:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^0(A/(a_1,\ldots,a_k)) \\ &\quad = (a_1,\ldots,a_k) + \mathfrak{m}\,((a_1,\ldots,a_k)\colon \mathfrak{m}^n)/(a_1,\ldots,a_k) \\ &\quad\quad \subseteq (a_1,\ldots,a_k) + \mathfrak{m}\,(((a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k))\colon \mathfrak{m}^n)/(a_1,\ldots,a_k) \\ &\quad = (a_1,\ldots,a_k) + \mathfrak{m}\,((a_1,\ldots,a_{k-1})\colon \mathfrak{m} + (a_k)\colon \mathfrak{m})/(a_1,\ldots,a_k) \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Für den Induktionsbeweis war $k \leqslant d - 2$ vorausgesetzt. Der letzte Schluß für $\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^0(A/a_1,\ldots,a_k)) = 0$ ist aber auch noch für $k = d - 1$ möglich, d.h. est gilt

$$\mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}^0(A/(a_1,\ldots,a_i)) = 0 \qquad \text{für alle } i = 1,\ldots, d-1. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Der Satz 3 liefert uns ein weiteres Kriterium, wann ein lokaler Ring ein B-Ring ist. Insbesondere besitzt dieses Kriterium gute Anwendungen für die Vereinigung von Cohen–Macaulay Varietäten. Der Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ von zwei perfekten Idealen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist nämlich im allgemeinen kein perfektes Ideal. Notwendige und hinreichende Bedingungen hierfür findet man z.B. in [12, Section 3]. Wenn $\mathfrak{a}$ ein vollständiger Durchschnitt ist, dann kann man nach [2, Theorem 2.1] unter gewissen Voraussetzungen stets erreichen, daß in $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ das Ideal $\mathfrak{b}$ perfekt ist. Für unsere Problematik interessieren aber Buchsbaum-Strukturen, hierzu geben wir das

KOROLLAR 12. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein d-dimensionaler ($d \geqslant 2$) lokaler Ring. Das Nullideal* (0) *in A sei Durchschnitt von zwei Idealen* $(0) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, *so daß $A/\mathfrak{a}$ und $A/\mathfrak{b}$ d-dimensionale Cohen-Macaulay Ringen sind und* $\dim A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$. *Die folgenden Bedingungen sind dann äquivalent*

(i) $\mathfrak{m} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$,

(ii) *A ist ein Buchsbaum-Ring.*

Beweis. Wir betrachten die beiden exakten Sequenzen

$$0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

und

$$0 \to \mathfrak{a} \to A/\mathfrak{b} \to A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to 0,$$

webei die letzte Sequenz aus dem noetherschen Isomorphiesatz folgt. Da $A/\mathfrak{a}$ und $A/\mathfrak{b}$ d-dimensionale Cohen–Macaulay Ringe sind, folgen:

$$H_{\mathfrak{m}}{}^{i}(A) \cong H_{\mathfrak{m}}{}^{i}(\mathfrak{a}) \qquad \text{für alle } i = 1,..., d-1$$

und

$$H_{\mathfrak{m}}{}^{i}(\mathfrak{a}) = H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) \qquad \text{für alle } i = 1,..., d-1.$$

Daher ist $H_{\mathfrak{m}}{}^{i}(A) \cong H_{\mathfrak{m}}{}^{i}(\mathfrak{a}) = H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = 0$, da $\dim A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$, für alle $i = 2,..., d-1$, und trivialer Weise $H_{\mathfrak{m}}{}^{0}(A) = 0$. Damit sind die generellen Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Für $i = 1$ haben wir noch

$$H_{\mathfrak{m}}{}^{1}(A) \cong H_{\mathfrak{m}}{}^{1}(\mathfrak{a}) \cong H_{\mathfrak{m}}{}^{0}(A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})).$$

Daher ist nach Satz 3 A ein B-Ring genau dann, wenn $0 = \mathfrak{m}\, H_{\mathfrak{m}}{}^{0}(A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = \mathfrak{m}\,(A/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$ ist (siehe hierzu z.B. [14, Prop. 5]), und dies ist mit der Bedingung (i) äquivalent. Q.E.D.

Beispiel. Das Korollar 12 zeigt sofort, daß der lokale Ring

$$A =: K[x_1, ..., x_{2d}]_{(x_1,...,x_{2d})}/(x_1, ..., x_d) \cap (x_d, ..., x_{2d})\, K[x_1, ..., x_{2d}]_{(x_1,...,x_{2d})}$$

ein Buchsbaum-Ring ist. Für $d = 2$ wurde bisher dies direkt (wie in [25, Section 4]) oder mit Hilfe von Hilfssatz 2 bestätigt. Beide Wege waren mit unbequemen Rechnungen verbunden.

Bemerkungen.

(1) Mit diesen Betrachtungen und Proposition 16 aus [25] können wir für eine beliebige Dimension B-Ringe mit der homologischen Kodimension 0 oder 1 angeben. Nach Hilfssatz 3 existieren also beliebig viele lokale Ringe der homologischen Kodimension 0 oder 1, so daß die lokalen Kohomologiegruppen (das maximale Ideal als Träger) endlichdimensionale Vektorräume sind, die nach einer Bemerkung in [9, S. 412] sehr selten vorkommen sollen.

(2) Das Beispiel zu Korollar 12 liefert folgendes: Das Ideal $\mathfrak{a} =: (x_0, x_1, ..., x_{d-1}) \cap (x_d, ..., x_{2d-1}) \subset K[x_0, ..., x_{2d-1}]$ ist imperfekt, und für jede

zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form F, $\mathfrak{a}:F = \mathfrak{a}$, besitzt das Ideal $(\mathfrak{a}, F)$ eine triviale Komponente und ist sonst ungemischt (für $d = 2$ siehe hierzu [5], 153). Für jedes Element $f \in A$ mit $\dim A/(f) = \dim(A) - 1$ ist $A' =: A/(f)$ wieder ein Buchsbaum-Ring mit $\operatorname{codh}(A') = 0$, aber $A'/U(0)$ ist kein Cohen–Macaulay Ring (siehe in diesem Zusammenhang auch die Prop. 12 und 15 in [25]).

(3) Wir kehren nun noch einmal zu dem Maß von Seidenberg [21] für die Imperfektheit zurück. Wir haben in dieser Note mehrere imperfekte Primideale kennengelernt, für die dieses Maß den Wert eins liefert. Die letzten Ergebnisse, die wir mit Hilfe der lokalen Kohomologie gewonnen haben, zeigen erneut, daß dieses Maß von A. Seidenberg zu grob ist. Diese Primideale definieren nämlich (projektive) Varietäten (V, 0_V), so daß die lokalen Kohomologiegruppen von den Halmen $O_{V,x}$ in Punkten $x \in V$ unterschiedliche Struktureigenschaften besitzen; denn wir können nach den bisherigen Beispielen und Resultaten die folgenden Unterschiede feststellen: Diese lokalen Kohomologiegruppen sind

(a_1) nicht noethersch (siehe die Korollare 8 und 4),

(a_2) noethersch (siehe das Korollar 8 und die Beispiele nach Korollar 6),

(a_3) endlichdimensionale Vektorräume (siehe Hilfssatz 3).

In diesem Fall (a_3) könnten wir noch einmal hinsichtlich der Dimension der Vektorräume unterscheiden, siehe hierzu z.B. das Korollar 10 und den Satz 3.

Note added in proof. Siehe auch die folgende Arbeit: J. Stückrad and W. Vogel, Toward a theory of Buchsbaum singularities, Preprint, University of Halle, 1975.

LITERATUR

1. S. S. ABHYANKAR, "Algebraic Space Curves, Montreal Lecture Notes," 1970.
2. M. ARTIN AND M. NAGATA, Residual intersections in Cohen–Macaulay rings, *J. Math. Kyoto Univ.* **12** (1972), 307–323.
3. D. A. BUCHSBAUM, Complexes in local ring theory, *in* "Some Aspects of Ring Theory," C.I.M.E., Rome, 1965.
4. L. BUDACH UND W. VOGEL, Cohen–Macaulay Moduln und der Bézoutsche Satz, *Monatsh. Math.* **73** (1969), 97–111.
5. W. GRÖBNER, "Moderne Algebraische Geometrie. Die Idealtheoretischen Grundlagen, Springer, Wien-Innsbruck, 1949.
6. W. GRÖBNER, Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen, *Arch. Math.* **16** (1965), 257–264.
7. W. GRÖBNER, "Algebraische Geometrie," Vol. II, B. I. Mannheim, 1970.

8. R. HARTSHORNE, Complete intersections and connectedness, *Amer. J. Math.* **34** (1962), 497–508.
9. R. HARTSHORNE, Cohomological dimension of algebraic varieties, *Ann. of Math.* **88** (1968), 403–450.
10. R. HARTSHORNE, Algebraic de Rham cohomology, *Manuscripta Math.* **7** (1972), 125–140.
11. M. HERRMANN UND W. VOGEL, Bemerkungen zur Multiplizitätstheorie von Gröbner und Serre, *J. Reine Angew. Math.* **241** (1970), 42–46.
12. M. HOCHSTER AND J. A. EAGON, Cohen–Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 1020–1058.
13. M. HOCHSTER AND J. L. ROBERTS, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen–Macaulay, *Advances in Math.* **13** (1974), 115–175.
14. D. KIRBY, Artinian modules and Hilbert polynomials, *Quart. J. Math. Oxford* **24**, No. 2 (1973), 47–57.
15. I. G. MACDONALD AND R. SHARP, An elementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules, *Quart. J. Math. Oxford* **23**, No. 2 (1972), 197–204.
16. D. REES, The grade of an ideal or module, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 28–42.
17. H. REITBERGER AND W. VOGEL, A cohomology condition in idealtheoretical multiplicity theory, *Rend. Mat. Ser. VI.* **5**, No. 3 (1972), 1–7.
18. B. RENSCHUCH, "Verallgemeinerungen des Bézoutschen Satzes," S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl. 107, Heft 4, Berlin 1966.
19. B. RENSCHUCH, u.a., Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale I, II, III, *Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. Potsdam* **17** (1973), 141–153; IV, V, VI ebenda **18** (1974), 95–106.
20. P. SCHENZEL, Einige Anwendungen der lokalen Dualität in der kommutativen Algebra und verallgemeinerte Cohen–Macaulay-Moduln, *Math. Nachr.*, im Druck.
21. A. SEIDENBERG, The hyperplane sections of arithmetically normal varieties, *Amer. J. Math.* **44** (1972), 609–630.
22. J. P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* **61** (1955), 197–278.
23. J.-P. SERRE, "Algèbre locale—Multiplicités, Lecture Notes in Mathematics," Nr. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
24. J. STÜCKRAD UND W. VOGEL, Ein Korrekturglied in der Multiplizitätstheorie von D. G. Northcott und Anwendungen, *Monatsh. Math.* **76** (1972), 264–271.
25. J. STÜCKRAD UND W. VOGEL, Eine Verallgemeinerung der Cohen–Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, *J. Math. Kyoto Univ.* **13** (1973), 513–528.
26. J. STÜCKRAD UND W. VOGEL, Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum Varietäten, *Monatsh. Math.* **78** (1974), 433–445.
27. W. VOGEL, Grenzen für die Gültigkeit des Bézoutschen Satzes, *Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin* **8** (1966), 1–7.
28. W. VOGEL, Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, *J. Algebra* **25** (1973), 106–112.
29. W. VOGEL UND L. MÀRKI, Zur Theorie der lokalen Ringe, (ungarisch), *Magyar. Tud. Akad. Mat. Tis. Oszt. Kösl.* **22** (1973), 55–78.
30. A. WEIL, "Foundations of Algebraic Geometry," 2nd ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 29, Providence, R.I., 1962.
31. O. ZARISKI AND P. SAMUEL, "Commutative Algebra," Vol. II, Princeton, 1962.