



# Quantifications des algèbres de Hopf d'arbres plans décorés et lien avec les groupes quantiques

L. Foissy

Laboratoire de Mathématiques, UMR6056, Université de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039,  
51687 Reims Cedex 2, France

Reçu le 10 mars 2003 ; accepté le 11 mars 2003

## Résumé

Nous introduisons un foncteur de la catégorie des espaces tressés dans la catégorie des algèbres de Hopf tressées, associant à tout espace tressé  $V$  une algèbre de Hopf tressée d'arbres plans enracinés  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . Nous montrons que l'algèbre de Nichols de  $V$  est un sous-quotient de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . Nous construisons un couplage de Hopf non dégénéré entre  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $\mathcal{H}_{P,R}(V^*)$ , généralisant ainsi l'un des résultats de [Bull. Sci. Math. 126 (2002) 193–239]. Lorsque le tressage de  $V$  est de la forme  $c(v_i \otimes v_j) = q_{i,j} v_j \otimes v_i$ , nous obtenons une quantification des algèbres de Hopf d'arbres  $\mathcal{H}_{P,R}^D$  introduites dans [Bull. Sci. Math. 126 (2002) 193–239 ; 126 (2002) 249–288]. Lorsque  $q_{i,j} = q^{a_{i,j}}$ , avec  $q$  une indéterminée et  $(a_{i,j})_{i,j}$  la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}^+)$  est un sous-quotient de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . Dans ce cas, nous effectuons le produit croisé de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  avec un tore puis construisons le double de Drinfel'd  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  de l'algèbre de Hopf ainsi obtenue. Nous montrons que  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  est un sous-quotient de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ .

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

We introduce a functor from the category of braided spaces into the category of braided Hopf algebras which associates to a braided space  $V$  a braided Hopf algebra of planar rooted trees  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . We show that the Nichols algebra of  $V$  is a subquotient of  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . We construct a Hopf pairing between  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  and  $\mathcal{H}_{P,R}(V^*)$ , generalising one of the results of [Bull. Sci. Math. 126 (2002) 193–239]. When the braiding of  $c$  is given by  $c(v_i \otimes v_j) = q_{i,j} v_j \otimes v_i$ , we obtain a quantification of the Hopf algebras  $\mathcal{H}_{P,R}^D$  introduced in [Bull. Sci. Math. 126 (2002) 193–239; 126 (2002) 249–288]. When  $q_{i,j} = q^{a_{i,j}}$ , with  $q$  an indeterminate and  $(a_{i,j})_{i,j}$  the Cartan matrix of a semi-simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , then  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}^+)$  is a subquotient of  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . In this case, we construct the crossed product of  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  with a torus and then the Drinfel'd quantum double  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  of this Hopf algebra. We show that  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  is a subquotient of  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ .

Adresse e-mail : [loic.foissy@univ-reims.fr](mailto:loic.foissy@univ-reims.fr) (L. Foissy).

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

MSC : 16W30 ; 05C05 ; 17B37

Mots-clés : Algèbres de Hopf tressées ; Arbres ; Groupes quantiques

## Introduction

Dans [2,3,10–12], A. Connes et D. Kreimer introduisent une algèbre de Hopf d'arbres enracinés  $\mathcal{H}_R$  dans le but d'étudier un problème de Renormalisation en Théorie Quantique des Champs. Dans [4–6], nous introduisons une algèbre de Hopf des arbres enracinés plans décorés  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$  dont la construction généralise celle de  $\mathcal{H}_R$ . Nous montrons que cette algèbre de Hopf est auto-duale et qu'il existe un couplage de Hopf non dégénéré entre  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$  et elle-même. D'autre part, nous introduisons un foncteur  $\mathcal{H}_{P,R}$  de la catégorie  $\mathcal{Vect}$  des espaces vectoriels dans la catégorie des algèbres de Hopf graduées, envoyant un espace vectoriel  $V$  sur l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , qui est isomorphe à l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ , lorsque le cardinal de  $\mathcal{D}$  est égal à la dimension de  $V$ .

Dans ce papier, nous généralisons la construction de ce foncteur pour construire un foncteur  $\mathcal{H}_{P,R}$  de la catégorie des espaces tressés  $TrVect$  dans la catégorie des algèbres de Hopf tressées graduées. En particulier, en identifiant la catégorie  $\mathcal{Vect}$  avec la sous-catégorie de  $TrVect$  des espaces munis d'un tressage trivial, le foncteur  $\mathcal{H}_{P,R}$  coïncide avec la définition de [4]. Pour tout espace tressé  $V$ , l'algèbre de Hopf tressée  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  possède une base de forêts; nous décrivons le coproduit dans cette base à l'aide de la notion de coupe admissible et de l'action des groupes de tresses  $\mathcal{B}_n$ . Nous montrons que tout couplage  $(,)_V : V' \times V \rightarrow K$  d'espaces tressés permet de construire un couplage  $(,)_\mathcal{H}$  d'algèbres de Hopf tressées entre  $\mathcal{H}_{P,R}(V')$  et  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , non dégénéré si  $(,)_V$  est non dégénéré. Lorsque  $V$  est de dimension finie, on peut donc construire un couplage d'algèbres de Hopf tressées non dégénéré entre  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $\mathcal{H}_{P,R}(V^*)$ . Nous donnons un sens combinatoire à ce couplage lorsque  $V$  est un espace tressé diagonal; en conséquence de cette interprétation, nous démontrons par exemple la formule suivante (voir par exemple [7,19]):

$$(n)_q! = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{l(\sigma)}.$$

Les modules de Yetter–Drinfeld d'une algèbre de Hopf  $\mathcal{C}$  sont des exemples particuliers d'espaces tressés. Nous montrons que, dans ce cas,  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est une algèbre de Hopf dans la catégorie des modules de Yetter–Drinfeld de  $\mathcal{C}$ . Nous décrivons la structure de module de Yetter–Drinfeld de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  dans la base des forêts et dans la base duale et nous montrons que l'algèbre de Nichols de  $V$  est un sous-quotient de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

Lorsque  $V$  est un espace tressé diagonal symétrique, il peut être considéré comme un module de Yetter–Drinfeld sur l'algèbre de Hopf  $\mathcal{C} = K[X_i^{\pm 1}, i \in \mathcal{D}]$ . Dans ce cas, nous pouvons effectuer un produit croisé  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \sharp \mathcal{C}$ , puis appliquer la construction du double de Drinfeld pour obtenir une algèbre de Hopf  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ . Cette algèbre de Hopf contient une copie de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , une copie de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)^{cop}$  et une copie de  $\mathcal{C}$ .

Lorsque  $K = k(q)$ , avec  $q$  une indéterminée et que  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \mathcal{D}}$  est une matrice de Cartan finie, on considère l'espace tressé  $V$  de base  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$  muni de la tresse suivante :

$$c(v_i \otimes v_j) = q^{a_{i,j}} v_j \otimes v_i.$$

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie associée à la matrice de Cartan  $A$  ; on montre qu'alors  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  est un sous-quotient de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ .

Ce papier est organisé de la manière suivante : la première partie est consacrée à des rappels des principaux résultats de [4–6]. Dans la deuxième partie, nous rappelons quelques résultats sur les notions d'algèbre, de cogèbre et de bigèbre tressées. La construction de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , avec  $V$  un espace tressé, est effectué dans la troisième partie : nous montrons qu'il s'agit d'une algèbre de Hopf tressée et nous décrivons sa tresse, son coproduit et son antipode dans la base des forêts. La partie suivante est consacrée au couplage  $(, )_{\mathcal{H}}$  : nous le construisons et décrivons ses propriétés. La cinquième partie est consacrée au cas où  $V$  est un module de Yetter–Drinfeld sur  $\mathcal{C}$ . Nous décrivons la structure de module de Yetter–Drinfeld sur  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et montrons que l'algèbre de Nichols de  $V$  est un sous-quotient de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . Nous décrivons également le produit croisé  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \sharp \mathcal{C}$ . Nous décrivons l'algèbre de Hopf  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  dans la dernière partie ; nous montrons également que  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  est un sous-quotient de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  lorsque  $V$  est bien choisi. Enfin, nous donnons l'interprétation combinatoire du couplage  $(, )_{\mathcal{H}}$  dans la dernière partie.

**Notations.**  $K$  désigne un corps commutatif de caractéristique nulle et  $\mathcal{D}$  désigne un ensemble non vide.

## 1. Algèbres de Hopf $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ : rappels et notations

### 1.1. Arbres, forêts et coupes

Les définitions suivantes sont introduites dans [4–6] :

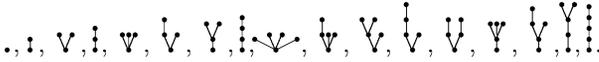
**Définition 1.** Un *arbre enraciné*  $t$  est un graphe fini connexe et sans boucles ; on suppose que l'un des sommets de ce graphe n'est l'arrivée d'aucune arête ; ce sommet est appelé *racine* de  $t$ . Les arbres enracinés seront dessinés avec la racine en bas. Le *poids* de  $t$  est le nombre de ses sommets. Un *arbre plan enraciné*  $t$  est la donnée d'un arbre enraciné muni d'un plongement dans le plan. Le *poids* de  $t$  est le nombre de ses sommets. L'ensemble des arbres plans enracinés est noté  $\mathcal{T}_{P,R}$ .

Soit  $\mathcal{D}$  un ensemble non vide. Un *arbre enraciné décoré par  $\mathcal{D}$*  est un arbre enraciné  $t$  muni d'une application  $d_t$  de l'ensemble de ses sommets vers  $\mathcal{D}$ . L'image d'un sommet  $s$  par cette application est appelée *décoration* de  $s$ . L'ensemble des arbres enracinés décorés par  $\mathcal{D}$  sera noté  $\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$ . On définit de la même manière l'ensemble  $\mathcal{T}_P^{\mathcal{D}}$  des arbres enracinés plans décorés par  $\mathcal{D}$ .

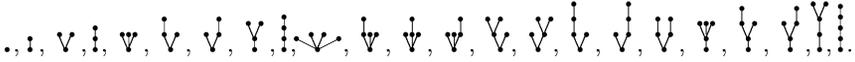
Pour tout  $d \in \mathcal{D}$ , on notera  $\bullet_d$  l'élément de  $\mathcal{T}_P^{\mathcal{D}}$  formé d'un seul sommet décoré par  $d$ .

**Exemples.**

(1) Arbres enracinés de poids inférieur ou égal à 5 :

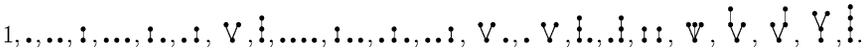


(2) Arbres plan enracinés de poids inférieur ou égal à 5 :



Soit  $\mathcal{H}_{P,R}^D$  l’algèbre associative librement engendrée sur  $K$  par les éléments de  $\mathcal{T}_{P,R}^D$ . Les monômes en les arbres plans enracinés de cette algèbre sont appelés *forêts planes enracinées décorées* ; il sera souvent utile de considérer 1 comme la forêt vide. L’ensemble des forêts planes enracinées décorées est noté  $\mathcal{F}_{P,R}^D$ . Le poids d’une forêt  $F = t_1 \dots t_n$  est par définition  $poids(t_1) + \dots + poids(t_n)$ .

**Exemples.** Forêts planes enracinées de poids inférieur ou égal à 4 :



Soit  $t \in \mathcal{T}_{P,R}^D$ . Une *coupe élémentaire* de  $t$  est une coupe sur une seule arête de  $t$ . Une *coupe admissible* de  $t$  est une coupe non vide telle que tout trajet d’un sommet de  $t$  vers un autre ne rencontre au plus qu’une seule coupe élémentaire. L’ensemble des coupes admissibles de  $t$  est noté  $\mathcal{Ad}(t)$ . Une coupe admissible  $c$  envoie  $t$  vers un couple  $(P^c(t), R^c(t)) \in \mathcal{F}_{P,R}^D \times \mathcal{T}_{P,R}^D$ , tel que  $R^c(t)$  est la composante connexe de la racine de  $t$  après la coupe, et  $P^c(t)$  est la forêt plane formée par les autres composantes connexes, placées dans le même ordre.

D’autre part, si  $c_v$  est la coupe vide de  $t$ , on pose  $P^{c_v}(t) = 1$  et  $R^{c_v}(t) = t$ . On définit la *coupe totale* de  $t$  comme une coupe  $c_t$  telle  $P^{c_t}(t) = t$  et  $R^{c_t}(t) = 1$ . L’ensemble formé des coupes admissibles de  $t$ , de la coupe vide et de la coupe totale de  $t$  est noté  $\mathcal{Ad}_*(t)$ .

Soit maintenant  $F \in \mathcal{F}_{P,R}^D$ ,  $F \neq 1$ . Il existe  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_{P,R}^D$ , tels que  $F = t_1 \dots t_n$ . Une *coupe admissible* de  $F$  est un  $n$ -uplet  $(c_1, \dots, c_n)$  tel que  $c_i \in \mathcal{Ad}_*(t_i)$  pour tout  $i$ . Si toutes les  $c_i$  sont vides (respectivement totales),  $c$  est appelée la coupe vide de  $F$  (respectivement la coupe totale de  $F$ ). L’ensemble des coupes admissibles non vides et non totales de  $F$  est noté  $\mathcal{Ad}(F)$ . L’ensemble de toutes les coupes admissibles de  $F$  est noté  $\mathcal{Ad}_*(F)$ . Pour  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{Ad}_*(F)$ , on pose  $P^c(F) = P^{c_1}(t_1) \dots P^{c_n}(t_n)$  et  $R^c(F) = R^{c_1}(t_1) \dots R^{c_n}(t_n)$ .

1.2. Algèbres  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  : notations et rappels

Soit  $V$  un espace vectoriel. L’algèbre de Hopf  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est construite dans [5], partie 3.5. Il s’agit de l’algèbre librement engendrée par les arbres enracinés plans décorés par des éléments de  $V$ , les arbres étant linéaires en chacune de leur décoration.

**Exemple.** Si  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ , dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  :

$$\begin{matrix} \bullet \\ | \\ v_3+v_4 \end{matrix} = \begin{matrix} \bullet \\ | \\ v_3 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet \\ | \\ v_4 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet \\ | \\ v_2 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet \\ | \\ v_2 \end{matrix}$$

Ce sont des algèbres graduées par le poids, le poids d'une forêt étant le nombre de ses sommets. Les résultats suivants sont des adaptations immédiates des résultats de [4–6] :

1. Soit  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$  une base de  $V$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{F}_{P,R}^{\{v_i, i \in \mathcal{D}\}}$  des forêts planes enracinées décorées par des éléments de  $\{v_i \mid i \in \mathcal{D}\}$  est une base de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .
2. On note  $\mathcal{T}_{P,R}$  l'ensemble des arbres enracinés plans (non décorés) et  $\mathcal{F}_{P,R}$  l'ensemble des forêts enracinées planes (non décorées). Soit  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$ ; les sommets de  $F$  sont totalement ordonnés par  $\geq_{b,d}$  (voir [5], partie 3.4). On les indexe de sorte que  $s_n \geq_{b,d} \dots \geq_{b,d} s_1$ .

**Exemple.**  $F = \mathbf{V}$  !; alors ses sommets sont indexés de la manière suivante :  $^1 \mathbf{V}_3^2 \mathbf{!}_5^4$ .

Pour  $v_1, \dots, v_n \in V$ , on pose  $F(v_1, \dots, v_n)$  la forêt de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  obtenue en décorant le sommet  $s_i$  de  $F$  par  $v_i$ . On pose alors, pour toute  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$  de poids  $n$  :

$$F : V^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V),$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \rightarrow F(v_1, \dots, v_n).$$

Tout élément  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  s'écrit alors de manière unique  $x = \sum_{F \in \mathcal{F}_{P,R}} F(v_F)$ , où  $v_F \in V^{\otimes \text{poids}(F)}$  pour toute  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$ .

3. On identifie  $V$  et  $\mathcal{H}_{P,R}(V)_1$  via  $v \in V \rightarrow \bullet_v \in \mathcal{H}_{P,R}(V)_1$ .
4. On définit :

$$B^+ : \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes V \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V),$$

$$x \otimes \bullet_v \rightarrow B_v^+(x),$$

où pour toute forêt  $F$ ,  $B_v^+(F)$  est l'arbre enraciné plan décoré obtenu en greffant les racines des arbres de  $F$  sur une racine commune décorée par  $v$ . On peut alors munir  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  d'une structure d'algèbre de Hopf en définissant  $\Delta$  comme l'unique morphisme d'algèbres de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  et tout  $v \in V$  :

$$\Delta(B_v^+(x)) = B_v^+(x) \otimes 1 + (Id \otimes B_v^+) \circ \Delta(x).$$

La counité  $\varepsilon$  est donnée par  $\varepsilon(t) = 0$  pour tout arbre enraciné plan décoré par des éléments de  $V$ .

5. Soit  $c$  une coupe admissible de  $F$ ,  $s_{i_1}, \dots, s_{i_k}$  les sommets de  $P^c(F)$ , avec  $i_1 < \dots < i_k$  et  $s_{j_1}, \dots, s_{j_l}$  les sommets de  $R^c(F)$ , avec  $j_1 < \dots < j_l$ . Soit  $\sigma_c$  la permutation de  $S_n$  telle que  $\sigma_c(r) = i_r$  si  $r \leq k$  et  $j_{r-k}$  sinon. Le coproduit de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  s'écrit alors pour toute forêt  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$  de poids  $n$ ,  $v_1, \dots, v_n \in V$  :

$$\begin{aligned} \Delta(F(v_1, \dots, v_n)) &= \left( \sum_{c \in Ad_*(F)} P^c(F) \otimes R^c(F) \right) (\sigma_c.(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) \\ &= \left( \sum_{c \in Ad(F)} P^c(F) \otimes R^c(F) \right) (\sigma_c.(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) \\ &\quad + F(v_1, \dots, v_n) \otimes 1 + 1 \otimes F(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

où  $S_n$  agit sur  $V^{\otimes n}$  de la manière suivante :  $\sigma.(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}$ .

6. On considère l’application suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}_{P,R}(V) &\rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes V, \\ F(v_1, \dots, v_n) &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } F \neq G\bullet, \\ G(v_1, \dots, v_{n-1}) \otimes \bullet_{v_n} & \text{si } F = G\bullet. \end{cases} \end{aligned}$$

Soient  $V, V'$  deux espaces vectoriels et  $(, )_V : V' \times V \rightarrow K$  une forme bilinéaire. Il existe alors une unique forme bilinéaire  $(, ) : \mathcal{H}_{P,R}(V') \times \mathcal{H}_{P,R}(V) \rightarrow K$  telle que :

1.  $(1, y) = \varepsilon(y), \forall y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;
2.  $(xy, z) = (x \otimes y, \Delta(z)), \forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V'), z \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;
3.  $(B^+(x \otimes w), y) = (x \otimes w, \gamma(y)), \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V), w \in V', y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;

De plus,  $(, )$  est un couplage d’algèbres de Hopf graduées. Il vérifie :

$$\begin{aligned} V^\perp = (0) &\Leftrightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V)^\perp = (0); \\ V'^\perp = (0) &\Leftrightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V')^\perp = (0). \end{aligned}$$

## 2. Espaces, algèbres et cogèbres tressées

### 2.1. Espaces tressées

On rappelle tout d’abord la définition d’un espace tressé (voir par exemple [1,8,9,20]) :

**Définition 2.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et soit  $c : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ . On dira que  $(V, c)$  est un espace tressé si l’équation de Yang–Baxter est vérifiée :

$$(c \otimes Id) \circ (Id \otimes c) \circ (c \otimes Id) = (Id \otimes c) \circ (c \otimes Id) \circ (Id \otimes c). \tag{1}$$

**Remarque.** On ne suppose pas  $c$  inversible.

**Notation.** Si  $(V, c)$  est un espace tressé, on notera  $c(u \otimes v) = \bar{v} \otimes \bar{u}$ . Pour éviter les confusions, on ajoutera si nécessaire des indices. Par exemple, l’équation de Yang–Baxter s’écrit :

$$\bar{u}^{2,3} \otimes \bar{v}^{1,3} \otimes \bar{w}^{1,2} = \bar{u}^{1,2} \otimes \bar{v}^{1,3} \otimes \bar{w}^{2,3}.$$

Comme  $c$  vérifie l’équation de Yang–Baxter,  $V^{\otimes n}$  est une représentation du monoïde des tresses positives à  $n$  brins  $\mathcal{B}_n^+$ , avec

$$\sigma_i = \underbrace{\left[ \begin{array}{|c|} \hline \dots \\ \hline \end{array} \right]}_{i-1} \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} \underbrace{\left[ \begin{array}{|c|} \hline \dots \\ \hline \end{array} \right]}_{n-i-1}$$

agissant par  $Id^{\otimes(i-1)} \otimes c \otimes Id^{\otimes(n-i-1)}$  (voir [8,9]). Si  $c$  est inversible, cette action se prolonge en une action du groupe  $\mathcal{B}_n$ .

2.2. Algèbres tressées et paires d’algèbres tressées

**Définition 3.**

1. Soient  $A$  et  $B$  deux  $K$ -algèbres unitaires et :

$$c : B \otimes A \rightarrow A \otimes B,$$

$$b \otimes a \rightarrow \bar{a} \otimes \bar{b}.$$

On dira que  $(A, B, c)$  est une paire d’algèbres tressée si on a :

$$\bar{a} \otimes \bar{1} = a \otimes 1, \tag{2}$$

$$\bar{1} \otimes \bar{b} = 1 \otimes b, \tag{3}$$

$$\bar{a} \otimes \overline{b_1 b_2} = \bar{a}^{1,2} \otimes \bar{b}_1^{-2} \bar{b}_2^{-1}, \tag{4}$$

$$\overline{a_1 a_2} \otimes \bar{b} = \bar{a}_1^{-1} \bar{a}_2^2 \otimes \bar{b}^{1,2}. \tag{5}$$

Si  $A = B$  et si  $c$  vérifie l’équation de Yang–Baxter, on dira simplement que  $(A, c)$  est une algèbre tressée.

2. Soient  $(A, B, c_1)$ ,  $(B, C, c_2)$  et  $(A, C, c_3)$  des paires d’algèbres tressées. On dira que  $(c_1, c_2, c_3)$  vérifie l’équation de Yang–Baxter si :

$$(c_1 \otimes Id) \circ (Id \otimes c_3) \circ (c_2 \otimes Id) = (Id \otimes c_2) \circ (c_3 \otimes Id) \circ (Id \otimes c_1). \tag{6}$$

**Remarque.** Si  $A = B = C$  et  $c_1 = c_2 = c_3 = c$ , alors  $(c, c, c)$  vérifie l’équation de Yang–Baxter si, et seulement si,  $c$  vérifie l’équation de Yang–Baxter.

Les résultats suivants se démontrent par des calculs directs :

**Proposition 4.** Soit  $(A, B, c)$  une paire d’algèbres tressée. Alors  $A \otimes B$  est muni d’une structure d’algèbre associative unitaire donnée par  $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 \bar{a}_2 \otimes \bar{b}_1 b_2$ . L’élément neutre est  $1 \otimes 1$ . Ce produit sera appelé produit tressé de  $A \otimes B$ .

**Proposition 5.** Soient  $(A, B, c_1)$ ,  $(B, C, c_2)$  et  $(A, C, c_3)$  des paires d’algèbres tressées, telles que  $(c_1, c_2, c_3)$  vérifie l’équation de Yang–Baxter. On définit alors :

$$\tau_1 : C \otimes (A \otimes B) \rightarrow (A \otimes B) \otimes C,$$

$$c \otimes a \otimes b \rightarrow \bar{a}^1 \otimes \bar{b}^2 \otimes \bar{c}^{1,2},$$

$$\tau_2 : (B \otimes C) \otimes A \rightarrow A \otimes (B \otimes C),$$

$$b \otimes c \otimes a \rightarrow \bar{a}^{1,2} \otimes \bar{b}^2 \otimes \bar{c}^1.$$

Alors  $(A \otimes B, C, \tau_1)$  et  $(A, B \otimes C, \tau_2)$  sont des paires d’algèbres tressées. De plus, les deux produits induits sur  $A \otimes B \otimes C$  par la proposition 4 coïncident.

**Lemme 6.** Soient  $(A_1, B_1, c_1)$  et  $(A_2, B_2, c_2)$  des paires d’algèbres tressées. Soient  $\phi_i : A_i \rightarrow B_i$ ,  $i = 1, 2$ , des morphismes d’algèbres, et supposons que  $(\phi_1 \otimes \phi_2) \circ c_1 = c_2 \circ (\phi_2 \otimes \phi_1)$ . Alors  $\phi_1 \otimes \phi_2 : A_1 \otimes B_1 \rightarrow A_2 \otimes B_2$  est un morphisme d’algèbres  $(A_i \otimes B_i)$  étant muni du produit tressé).

2.3. *Cogèbres tressées et paires de cogèbres tressées*

**Définition 7.**

1. Soient  $A$  et  $B$  deux  $K$ -cogèbres counitaires et :

$$c : B \otimes A \rightarrow A \otimes B,$$

$$b \otimes a \rightarrow \bar{a} \otimes \bar{b}.$$

On dira que  $(A, B, c)$  est une paire de cogèbres tressée si on a :

$$\varepsilon(\bar{a})\bar{b} = \varepsilon(a)b, \tag{7}$$

$$\bar{a}\varepsilon(\bar{b}) = a\varepsilon(b), \tag{8}$$

$$\bar{a}' \otimes \bar{a}'' \otimes \bar{b} = \bar{a}'^1 \otimes \bar{a}''^2 \otimes \bar{b}^{1,2}, \tag{9}$$

$$\bar{a} \otimes \bar{b}' \otimes \bar{b}'' = \bar{a}^{1,2} \otimes \bar{b}'^2 \otimes \bar{b}''^1. \tag{10}$$

Si  $A = B$  et si  $c$  vérifie l'équation de Yang–Baxter, on dira simplement que  $(A, c)$  est une cogèbre tressée.

2. Soient  $(A, B, c_1)$ ,  $(B, C, c_2)$  et  $(A, C, c_3)$  des paires de cogèbres tressées. On dira que  $(c_1, c_2, c_3)$  vérifie l'équation de Yang–Baxter si (6) est vérifiée.

Les résultats suivants sont duaux des résultats des propositions 4 et 5 :

**Proposition 8.** *Soit  $(A, B, c)$  une paire de cogèbres tressée. Alors  $A \otimes B$  est muni d'une structure de cogèbre coassociative counitaire donnée par  $\Delta(a \otimes b) = (a' \otimes \bar{b}') \otimes (a'' \otimes b'')$ . La counite est  $\varepsilon \otimes \varepsilon$ . Ce coproduit sera appelé coproduit tressé de  $A \otimes B$ .*

**Proposition 9.** *Soient  $(A, B, c_1)$ ,  $(B, C, c_2)$  et  $(A, C, c_3)$  des paires de cogèbres tressées, telles que  $(c_1, c_2, c_3)$  vérifie l'équation de Yang–Baxter. On définit alors :*

$$\tau_1 : C \otimes (A \otimes B) \rightarrow (A \otimes B) \otimes C,$$

$$c \otimes a \otimes b \rightarrow \bar{a}^1 \otimes \bar{b}^2 \otimes \bar{c}^{1,2},$$

$$\tau_2 : (B \otimes C) \otimes A \rightarrow A \otimes (B \otimes C),$$

$$b \otimes c \otimes a \rightarrow \bar{a}^{1,2} \otimes \bar{b}^2 \otimes \bar{c}^1.$$

Alors  $(A \otimes B, C, \tau_1)$  et  $(A, B \otimes C, \tau_2)$  sont des paires de cogèbres tressées. De plus, les deux coproduits induits sur  $A \otimes B \otimes C$  par la proposition 8 coïncident.

2.4. *Bigèbres et algèbres de Hopf tressées*

**Définition 10.** Soit  $A$  un  $K$ -espace vectoriel,  $c : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ ,  $m : A \otimes A \rightarrow A$ ,  $1 \in A$ ,  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ ,  $\varepsilon : A \rightarrow K$ . On dira que  $A$  est une bigèbre tressée si :

1.  $(A, m, 1, c)$  est une algèbre tressée ;
2.  $(A, \Delta, \varepsilon, c)$  est une cogèbre tressée ;

3.  $\Delta$  et  $\varepsilon$  sont des morphismes d’algèbres, c’est-à-dire :

$$\Delta(ab) = a'b' \otimes \overline{a''}b'', \tag{11}$$

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \tag{12}$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \tag{13}$$

$$\varepsilon(1) = 1. \tag{14}$$

**Remarque.** La condition 3 équivaut à :  $m$  et  $1 : K \rightarrow A$  sont des morphismes de cogèbres.

Soit  $A$  une bigèbre tressée. Alors  $\mathcal{L}(A)$  est munie d’une structure d’algèbre associative unitaire donnée par le produit de convolution défini par  $f \star g(x) = f(x')g(x'')$ , d’élément neutre donné par  $1(x) = \varepsilon(x)1$ . On dira que  $A$  est une algèbre de Hopf tressée si  $Id$  admet un inverse  $T$  dans  $(\mathcal{L}(A), \star)$  ;  $T$  sera appelé antipode de  $A$ .

**Proposition 11.** Soit  $A$  une algèbre de Hopf tressée. Son antipode  $T$  vérifie :

$$T(ab) = T(\bar{b})T(\bar{a}), \tag{15}$$

$$T(a)' \otimes T(a)'' = \overline{T(a'')} \otimes \overline{T(a')}. \tag{16}$$

**Preuve.**  $A \otimes A$  est munie d’une structure d’algèbre par le produit tressé et donc le produit de convolution munit  $\mathcal{L}(A, A \otimes A)$  d’une structure d’algèbre associative unitaire. On montre que  $\Delta \circ T$  et  $c \circ (T \otimes T) \circ \Delta$  sont deux inverses de  $\Delta$  dans cette algèbre ; par suite ils sont égaux, ce qui prouve (16). On montre (15) de la même manière.  $\square$

Les résultats suivants, bien connus dans le cas des algèbres de Hopf (voir par exemple [4,5,8,15]), s’adaptent aux algèbres de Hopf tressées :

**Lemme 12.** 1. Soient  $A$  et  $B$  deux algèbres de Hopf, et soit  $\phi : A \rightarrow B$  morphisme de bigèbres (i.e. morphisme d’algèbres et de cogèbres). Alors  $\phi$  est un morphisme d’algèbres de Hopf tressées, c’est-à-dire que  $\phi \circ T_A = T_B \circ \phi$ .

2. Soit  $A$  une bigèbre tressée, graduée et connexe (i.e.  $A_0$  est de dimension 1). Alors  $A$  est une algèbre de Hopf tressée.

**Lemme 13.** Supposons que  $A$  soit une bigèbre tressée avec une tresse  $c$  inversible. On munit  $A$  d’un produit noté  $\cdot$  défini par  $x \cdot y = m \circ c^{-1}(x \otimes y)$ . Alors  $A$  munie de ce nouveau produit et de son coproduit est une bigèbre tressée de tresse  $c^{-1}$ . On note cette structure  $A^{op}$ .

**Preuve.** (2)–(5) et (7)–(10) pour  $A^{op}$  découlent des propriétés semblables pour  $A$ . Montrons que  $\cdot$  est associatif. Pour tous  $x, y \in A$ , on pose  $c^{-1}(x \otimes y) = \tilde{y} \otimes \tilde{x}$ .

Soient  $x, y, z \in A$ . En notant  $m^2 = m \circ (m \otimes Id) = m \circ (Id \otimes m)$  :

$$(x \cdot y) \cdot z = (\tilde{y}\tilde{x}) \cdot z = \tilde{z}^2 \widetilde{(\tilde{y}^1 \tilde{x}^1)}^2 = \tilde{z}^{2,3} \tilde{y}^{1,3} \tilde{x}^{1,2} = m^2 \left( \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} .x \otimes y \otimes z \right).$$

(On a utilisé (4) pour la troisième égalité.)

$$x.(y.z) = x.(\widetilde{z\tilde{y}}) = (\widetilde{\tilde{z}1\tilde{y}1})^2 \tilde{x}^2 = \tilde{z}^{1,2}\tilde{y}^{1,3}\tilde{x}^{2,3} = m^2 \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} .x \otimes y \otimes z \right).$$

(On a utilisé (5) pour la troisième égalité.)

On conclut avec l'égalité des deux tresses.

Montrons (11) : soient  $x, y \in A$ . Un calcul simple utilisant (11) pour  $A$  ainsi que (9) et (10) montre que :

$$\begin{aligned} x'.\tilde{y}' \otimes \tilde{x}'' .y'' &= \tilde{y}'^{1,2}\tilde{x}''^2 \otimes \tilde{y}''^3\tilde{x}''^{1,3} = (m \otimes m) \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} .x' \otimes x'' \otimes y' \otimes y'' \right), \\ \Delta(x.y) &= \tilde{y}'^{1,2}\overline{(\tilde{x}''^{2,4})^5} \otimes \overline{(\tilde{y}''^{3,4})^5} \tilde{x}''^{1,3} \\ &= (m \otimes m) \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} .x' \otimes x'' \otimes y' \otimes y'' \right). \end{aligned}$$

On conclut avec l'égalité des deux tresses.  $\square$

**Proposition 14.** *Soit  $A$  une bigèbre tressée, graduée et connexe (i.e  $A_0$  est de dimension 1) dont la tresse est inversible. Alors  $A$  est une algèbre de Hopf tressée ; de plus, son antipode est inversible et son inverse est l'antipode de  $A^{op}$ .*

**Preuve.** D'après le lemme 12,  $A$  possède un antipode  $T$ . De même,  $A^{op}$  possède un antipode  $T'$ . Par définition de l'antipode, pour tout  $x \in A$  :

$$\begin{aligned} T(x')x'' &= x'T(x'') = \varepsilon(x)1, \\ \tilde{x}''\widetilde{T'(x')} &= \widetilde{T'(x'')}\tilde{x}' = \varepsilon(x)1. \end{aligned}$$

Calculons  $(T \circ T') \star T$  : pour tout  $x \in A$  :

$$(T \circ T') \star T(x) = T(T'(x'))T(x'') = T(\widetilde{\tilde{x}''\widetilde{T'(x')}}) = T(\varepsilon(x)1) = \varepsilon(x)1.$$

(On a utilisé (15) pour la deuxième égalité.)

Donc  $(T \circ T') \star T = 1_{\mathcal{L}(A)}$ . De même, on montre que  $T \star (T \circ T') = 1_{\mathcal{L}(A)}$ . Par unicité de l'inverse dans  $\mathcal{L}(A)$ ,  $T \circ T' = Id$ . En appliquant ce résultat à  $A^{op}$ , comme  $(A^{op})^{op} = A$ , on obtient  $T' \circ T = Id$ .  $\square$

### 3. Constructions des algèbres de Hopf tressées $\mathcal{H}_{P,R}(V)$

Dans tout ce qui suit,  $(V, c)$  désigne un espace tressé.

#### 3.1. Construction de la tresse

**Proposition 15.** *Il existe un unique  $\tau : \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V) \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  tel que :*

1.  $\tau(1 \otimes x) = x \otimes 1, \tau(y \otimes 1) = 1 \otimes y$  ;
2.  $\tau(y_1 y_2 \otimes x) = (Id \otimes m) \circ (\tau \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau)(y_1 \otimes y_2 \otimes x)$  ;
3.  $\tau(B_w^+(y) \otimes x) = (Id \otimes B^+) \circ (\tau \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau)(y \otimes \bullet_w \otimes x)$  ;
4.  $\tau(\bullet_w \otimes \bullet_v) = \bullet_{\bar{v}} \otimes \bullet_{\bar{w}}$  ;
5.  $\tau(\bullet_w \otimes x_1 x_2) = (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes Id)(\bullet_w \otimes x_1 \otimes x_2)$  ;
6.  $\tau(\bullet_w \otimes B_v^+(x)) = (B^+ \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes Id)(\bullet_w \otimes x \otimes \bullet_v)$ .

**Preuve.** Les formules précédentes permettent de déterminer de façon unique  $\tau(F \otimes G)$ , pour  $F$  et  $G$  deux forêts, par une double récurrence sur le poids de  $F$  et le poids de  $G$ .  $\square$

**Remarque.** Si  $c$  est le tressage trivial de  $V$  (c'est-à-dire la volte usuelle), alors  $\tau$  est le tressage trivial de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

**Théorème 16.** On note  $\tau(x \otimes y) = \bar{y} \otimes \bar{x}$  ;  $\tau$  vérifie :

1.  $\bar{1} \otimes \bar{x} = 1 \otimes x, \bar{y} \otimes \bar{1} = y \otimes 1$  ;
2.  $\bar{x} \otimes \overline{y_1 y_2} = \bar{x}^{1,2} \otimes \bar{y}_1^2 \bar{y}_2^1$  ;
3.  $\bar{x} \otimes B_w^+(y) = \bar{x}^{1,2} \otimes B_{\bar{w}^1}^+(\bar{y}^2)$  ;
4.  $\overline{x_1 x_2} \otimes \bar{y} = \bar{x}_1^1 \bar{x}_2^2 \otimes \bar{y}^{1,2}$  ;
5.  $B_v^+(x) \otimes \bar{y} = B_{\bar{v}^2}^+(\bar{x}^1) \otimes \bar{y}^{1,2}$ .

**Preuve.** Les trois premiers points sont des réécritures des trois premiers points de la proposition précédente. Montrons le point 4. On pose :

$$X = \{y \in \mathcal{H}_{P,R}(V) \mid \overline{x_1 x_2} \otimes \bar{y} = \bar{x}_1^1 \bar{x}_2^2 \otimes \bar{y}^{1,2} \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}_{P,R}(V)\}.$$

Il est immédiat que  $1 \in X$ . De plus, le point 5 de la proposition précédente implique que  $\bullet_w \in W$  quelque soit  $w \in V$ .

Soient  $y_1, y_2 \in X$ .

$$\begin{aligned} \overline{x_1 x_2} \otimes \overline{y_1 y_2} &= \overline{x_1 x_2}^{1,2} \otimes \overline{y_1^2 y_2^1} \quad \text{par le point 2,} \\ &= \overline{x_1^{1,3} x_2^{2,4}} \otimes \overline{y_1^{3,4} y_2^{1,2}} \quad \text{car } y_1, y_2 \in X, \\ \overline{x_1^1 x_2^2} \otimes \overline{y_1 y_2}^{1,2} &= \overline{x_1^{1,2} x_2^{3,4}} \otimes \overline{y_1^{2,4} y_2^{1,3}} \quad \text{par le point 2.} \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \overline{x_1^{1,2} x_2^{3,4}} \otimes \overline{y_1^{2,4} y_2^{1,3}} &= \overline{x_1^{1,3} x_2^{2,4}} \otimes \overline{y_1^{3,4} y_2^{1,2}} \\ &= \text{Diagramme de tressage} \cdot y_1 \otimes y_2 \otimes x_1 \otimes x_2, \end{aligned}$$

et donc  $X$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

Soit  $w \in V$ , montrons que  $X$  est stable par  $B_w^+$ . Soit  $y \in X$  :

$$\begin{aligned} \overline{x_1 x_2} \otimes \overline{B_w^+(y)} &= \overline{x_1 x_2}^{1,2} \otimes B_{\bar{w}^1}^+(\bar{y}^2) \quad \text{par le point 3,} \\ &= \overline{x_1^{1,2} x_2^{3,4}} \otimes B_{\bar{w}^{1,3}}^+(\bar{y}^{2,4}) \quad \text{car } y \in X; \\ \overline{x_1^1 x_2^2} \otimes \overline{B_w^+(y)}^{1,2} &= \overline{x_1^{1,3} x_2^{2,4}} \otimes B_{\bar{w}^{1,2}}^+(\bar{y}^{3,4}) \quad \text{par le point 3.} \end{aligned}$$

On montre alors que  $\overline{x_1}^{1,2} \otimes \overline{x_2}^{3,4} \otimes \overline{y}^{2,4} \otimes \bullet_w^{1,3} = \overline{x_1}^{1,3} \otimes \overline{x_2}^{2,4} \otimes \overline{y}^{3,4} \otimes \bullet_w^{1,2}$  de la même manière que précédemment et donc  $X$  est une sous-algèbre stable par  $B_w^+$  pour tout  $w \in V$ , et donc  $X = \mathcal{H}_{P,R}(V)$ . On montre 5 de manière semblable.  $\square$

Par suite,  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  est muni du produit tressé qui en fait une algèbre associative unitaire (proposition 4).

**Proposition 17.** Soient  $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}$  de poids respectifs  $n$  et  $m$  et soient  $v_1, \dots, v_{n+m} \in V$ . On a alors  $\tau(F(v_1, \dots, v_n) \otimes G(v_{n+1}, \dots, v_{n+m})) = G(w_1, \dots, w_m) \otimes F(w_{m+1}, \dots, w_{m+n})$ , où  $w_1 \otimes \dots \otimes w_{m+n} = b_{n,m} \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m})$ , avec

$$b_{n,m} = \underbrace{\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}}_n \underbrace{\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}}_m.$$

**Preuve.** Récurrence sur  $n = \text{poids}(F)$ . Si  $F = 1$ , c’est immédiat. Supposons que  $F = \bullet$ , et montrons le résultat par récurrence sur  $m = \text{poids}(G)$ . Si  $G = 1$ , c’est immédiat. Supposons le résultat vrai pour  $F = \bullet$  et  $G'$  de poids strictement inférieur à  $m$ . Deux cas se présentent :

1.  $G = B^+(H)$  : alors  $G(v_{n+1}, \dots, v_{n+m}) = B_{v_{m+1}}^+(H(v_2, \dots, v_{n+m-1}))$ . On alors :

$$\begin{aligned} \tau(F(v_1) \otimes G(v_2, \dots, v_{m+1})) &= B_{v_{m+1}}^+ \overline{(H(v_2, \dots, v_{m+1}))^1} \otimes F(\overline{v_1}^{1,2}) \\ &= G(w_1, \dots, w_m) \otimes F(w_{m+1}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (w_1 \otimes \dots \otimes w_{m+1}) &= \left( \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}}_{m-1} \right) \left( \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}}_{m-1} \right) \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}) \\ &= \left( \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}}_m \right) \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}). \end{aligned}$$

2.  $G = G_1 G_2$ ,  $G_1$  de degré  $k - 1$  compris entre 2 et  $m - 1$ . Alors  $G(v_{n+1}, \dots, v_{n+m}) = G_1(v_2, \dots, v_k) G_2(v_{k+1}, \dots, v_{m+1})$  et par suite :

$$\begin{aligned} \tau(F(v_1) \otimes G(v_2, \dots, v_{m+1})) &= \overline{G_1(v_2, \dots, v_k)}^1 \overline{G_2(v_{k+1}, \dots, v_{m+1})}^2 \otimes \overline{F(v_1)}^{1,2} \\ &= G(w_1, \dots, w_m) \otimes F(w_{m+1}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (w_1 \otimes \dots \otimes w_{m+1}) &= \left( \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}}_{k-1} \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}}_{m-k+1} \right) \left( \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}}_{k-1} \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}}_{m-k+1} \right) \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}) \\ &= \left( \underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ \dots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}}_m \right) \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}). \end{aligned}$$

Supposons le résultat vrai pour toute forêt  $F'$  de poids inférieur à  $n - 1$ . Deux cas se présentent :

1.  $F = B^+(H)$  : alors  $F(v_1, \dots, v_n) = B_{v_n}^+(H(v_1, \dots, v_{n-1}))$ . Par suite :

$$\begin{aligned} \tau(F(v_1, \dots, v_n) \otimes G(v_{n+1}, \dots, v_{n+m})) &= \overline{G(v_{n+1}, \dots, v_{n+m})}^{1,2} \otimes B_{v_n}^+(\overline{H(v_1, \dots, v_{n-1})}^2) \\ &= G(w_1, \dots, w_m) \otimes F(w_{m+1}, \dots, w_{m+n}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (w_1 \otimes \dots \otimes w_{m+1}) &= \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_{n-1} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_m \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}) \\ &= \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_n \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}). \end{aligned}$$

2.  $F = F_1 F_2$ , avec  $F_1$  de poids  $k$  compris entre 2 et  $n - 1$ .

Alors  $F(u_1, \dots, u_n) = F_1(u_1, \dots, u_k) F_2(u_{k+1}, \dots, u_n)$ , d'où :

$$\begin{aligned} \tau(F(v_1, \dots, v_n) \otimes G(v_{n+1}, \dots, v_{n+m})) &= \overline{G(v_{n+1}, \dots, v_{n+m})}^{1,2} \\ &\quad \otimes \overline{F_1(v_1, \dots, v_k)}^2 \overline{F_2(v_{k+1}, \dots, v_n)}^1 \\ &= G(w_1, \dots, w_m) \otimes F(w_{m+1}, \dots, w_{m+n}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (w_1 \otimes \dots \otimes w_{m+1}) &= \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_k \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_m \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_{n-k} \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}) \\ &= \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_n \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{m+1}). \end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai pour toutes forêts  $F$  et  $G$ .  $\square$

**Corollaire 18.**  $(\mathcal{H}_{P,R}(V), \tau)$  est une solution de l'équation de Yang–Baxter (1) et donc  $(\mathcal{H}_{P,R}(V), c)$  est une algèbre tressée.

**Preuve.** Soient  $F, G, H \in \mathcal{F}_{P,R}$ , de poids respectifs  $m, n, p$ . Soient  $u \in V^{\otimes m}$ ,  $v \in V^{\otimes n}$ ,  $w \in V^{\otimes p}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} &(Id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau)(F(u) \otimes G(v) \otimes H(w)) \\ &= (H \otimes G \otimes F) \left[ \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_p \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_n \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)_m \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( \underbrace{\dots}_{n} \underbrace{\dots}_{m} \underbrace{\dots}_{p} \right) \cdot (u \otimes v \otimes w) \right] \\
 = & (H \otimes G \otimes F) \left[ \left( \dots \right) \cdot (u \otimes v \otimes w) \right], \\
 & (\tau \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes Id) (F(u) \otimes G(v) \otimes H(w)) \\
 = & (H \otimes G \otimes F) \left[ \left( \underbrace{\dots}_{m} \underbrace{\dots}_{p} \underbrace{\dots}_{n} \right) \left( \underbrace{\dots}_{m} \underbrace{\dots}_{n} \underbrace{\dots}_{p} \right) \right. \\
 & \left. \left( \underbrace{\dots}_{n} \underbrace{\dots}_{m} \underbrace{\dots}_{p} \right) \cdot (u \otimes v \otimes w) \right] \\
 = & (H \otimes G \otimes F) \left[ \left( \dots \right) \cdot (u \otimes v \otimes w) \right].
 \end{aligned}$$

Les deux tresses apparaissant étant égales, on en déduit que  $(\mathcal{H}_{P,R}(V), \tau)$  est une solution de l'équation de Yang–Baxter.  $\square$

### 3.2. Construction du coproduit

**Théorème 19.** Soit  $\Delta_c : \mathcal{H}_{P,R}(V) \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  l'unique morphisme d'algèbres vérifiant, pour tous  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ ,  $v \in V$  :

$$\Delta_c(B_v^+(x)) = B_v^+(x) \otimes 1 + (Id \otimes B_v^+) \circ \Delta_c(x), \tag{17}$$

$\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  étant muni du produit tressé. Alors  $\Delta_c$  est un coproduit coassociatif counitaire, de counité  $\varepsilon$ . Muni de ce coproduit,  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est une algèbre de Hopf tressée.

**Remarque.** Si  $c$  est le tressage trivial de  $V$ , alors  $\Delta_c$  est égal au coproduit  $\Delta$  défini dans [4,5] (voir la section 1).



$$\overline{x}_1^{-1} \otimes \overline{x}_2^{-3,5} \otimes \overline{x}_1''^{2,5} \otimes \overline{x}_2''^4 \otimes \overline{y}^{-1,2,3,4} = \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} \cdot y \otimes x'_1 \otimes x''_1 \otimes x'_2 \otimes x''_2.$$

Comme les deux tresses apparaissant sont égales,  $X = \mathcal{H}_{P,R}(V)$ , d'où (9). On montre (10) de manière semblable.

On considère  $Y = \{x \in \mathcal{H}_{P,R}(V) \mid (\Delta_c \otimes Id) \circ \Delta_c(x) = (Id \otimes \Delta_c) \circ \Delta_c(x)\}$ . Montrons que  $Y$  est une sous-algèbre : de manière évidente,  $1 \in Y$ . De plus, d'après la proposition 5,  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  est une algèbre associative ; d'après le lemme 6, avec (9) et (10),  $\Delta_c \otimes Id$  et  $Id \otimes \Delta_c$  sont des morphismes d'algèbres de  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  et donc  $(\Delta_c \otimes Id) \circ \Delta_c$  et  $(Id \otimes \Delta_c) \circ \Delta_c$  sont des morphismes d'algèbres de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$ . Par suite,  $Y$  est une sous-algèbre.

Montrons que  $Y$  est stable par  $B_v^+$  pour tout  $v \in V$  : si  $x \in Y$ , on pose  $(\Delta_c \otimes Id) \circ \Delta_c(x) = (Id \otimes \Delta_c) \circ \Delta_c(x) = x' \otimes x'' \otimes x'''$ .

$$\begin{aligned} &(\Delta_c \otimes Id) \circ \Delta_c(B_v^+(x)) \\ &= B_v^+(x) \otimes 1 \otimes 1 + x' \otimes B_v^+(x'') \otimes 1 + x' \otimes x'' \otimes B_v^+(x''') \\ &= (Id \otimes \Delta_c) \circ \Delta_c(B_v^+(x)). \end{aligned}$$

Donc  $Y = \mathcal{H}_{P,R}(V)$  et par suite,  $\Delta_c$  est coassociatif. Donc  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est une bigèbre tressée. La proposition 20 qui suit implique que  $\Delta_c$  est homogène de degré 0, donc  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est une bigèbre graduée connexe. Par le lemme 12(2), c'est une algèbre de Hopf tressée.  $\square$

**Proposition 20.** Soit  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$ , de poids  $n$  et soit  $v \in V^{\otimes n}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \Delta_c(F(v)) &= \sum_{c \in Ad_*(F)} (P^c(F) \otimes R^c(F))(a_c(v)) \\ &= \sum_{c \in Ad(F)} (P^c(F) \otimes R^c(F))(a_c(v)) + F(v) \otimes 1 + 1 \otimes F(v), \end{aligned}$$

où  $a_c : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$  est une application linéaire.

**Preuve.** Par récurrence sur  $n$ . Si  $F = 1$ , c'est immédiat. Supposons le résultat vrai pour toute forêt de poids inférieur à  $n - 1$ . Deux cas se présentent :

1.  $F = F_1 F_2$ , avec la forêt  $F_i$  de poids  $n_i$  strictement inférieur à  $n$ . On a alors une bijection :

$$\begin{aligned} Ad_*(F) &\rightarrow Ad_*(F_1) \times Ad_*(F_2), \\ c &\rightarrow (c|_{F_1}, c|_{F_2}). \end{aligned}$$

Par suite, si  $v = v_1 \otimes v_2 \in V^{\otimes n}$ ,  $v_1 \in V^{\otimes n_1}$ ,  $v_2 \in V^{\otimes n_2}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_c(F(v)) &= \Delta_c(F_1(v_1)F_2(v_2)) \\ &= \left( \sum_{c_1 \in Ad_*(F_1)} (P^{c_1}(F_1) \otimes R^{c_1}(F_1))(a_{c_1}(v_1)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \sum_{c_2 \in \mathcal{A}d_*(F_2)} (P^{c_2}(F_2) \otimes R^{c_2}(F_2))(a_{c_2}(v_2)) \right) \\
 &= \sum_{c_i \in \mathcal{A}d_*(F_i)} (P^{c_1}(F_1) \otimes P^{c_2}(F_2) \otimes R^{c_1}(F_1)R^{c_2}(F_2)) \\
 & \quad (Id \otimes b_c \otimes Id)(a_{c_1}(v_1) \otimes a_{c_2}(v_2)) \\
 &= \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(F)} (P^c(F) \otimes R^c(F))(Id \otimes b_c \otimes Id)(a_{c_{F_1}}(v_1) \otimes a_{c_{F_2}}(v_2)),
 \end{aligned}$$

où  $b_c$  est une certaine tresse (proposition 17). On prend alors  $a_c = (Id \otimes b_c \otimes Id) \circ (a_{c_{F_1}} \otimes a_{c_{F_2}})$ .

2.  $F = B^+(F_1)$  : on a alors une bijection de  $\mathcal{A}d_*(F) - \{\text{coupe totale de } F\}$  dans  $\mathcal{A}d_*(F_1)$  envoyant  $c$  sur  $c_{|F_1}$ . De plus, si  $v = u \otimes v_n$ , avec  $u \in V^{\otimes(n-1)}$  alors  $F(v) = B_{v_n}^+(F_1(u))$ . Par suite :

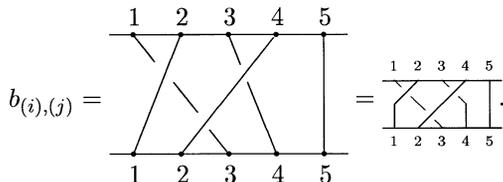
$$\begin{aligned}
 \Delta_c(F(v)) &= F(v) \otimes 1 + \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(F_1)} (P^c(F_1) \otimes B^+(R^c(F_1)))(a_c \otimes Id)(u \otimes v_n) \\
 &= \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(F)} (P^c(F) \otimes R^c(F))(a_c(v)),
 \end{aligned}$$

avec  $a_c = a_{c_{F_1}} \otimes Id$  si  $c$  n'est pas la coupe totale de  $F$  et  $a_c = Id$  sinon.  $\square$

On peut décrire les applications  $a_c$  à l'aide du monoïde  $\mathcal{B}_n^+$  de la manière suivante :

**Proposition 21.** Soient  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$  et  $c \in \mathcal{A}d_*(F)$ . Soient  $s_n \geq_{b,d} \dots \geq_{b,d} s_1$  les sommets de  $F$ . Soient  $s_{i_1}, \dots, s_{i_k}$  les sommets de  $P^c(F)$ ,  $i_1 \leq \dots \leq i_k$ ,  $s_{j_1}, \dots, s_{j_l}$  les sommets de  $R^c(F)$ ,  $j_1 \leq \dots \leq j_l$ . On pose  $(i) = (i_1, \dots, i_k)$  et  $(j) = (j_1, \dots, j_l)$ . Soit  $b_{(i),(j)}$  l'élément de  $\mathcal{B}_n$  obtenue en reliant d'abord les sommets  $n-l+1, \dots, n$  aux sommets  $j_1, \dots, j_l$  dans cet ordre puis les sommets  $1, \dots, k$  au sommets  $i_1, \dots, i_k$  dans cet ordre. Alors pour tout  $v \in V^{\otimes n}$ ,  $a_c(v) = b_{(i),(j)}.v$ .

**Exemple.** Si  $(i) = (2, 4)$  et  $(j) = (1, 3, 5)$ , alors :



**Preuve.** Par récurrence sur  $\text{poids}(F)$ . Si  $F = 1$ , c'est immédiat. Supposons la proposition vraie pour toute forêt de poids strictement inférieur à  $n$ . Deux cas se présentent :

1.  $F = F_1 F_2$ ,  $\text{poids}(F_i) < n$ . Posons alors  $c_1 = c_{|F_1}$ ,  $c_2 = c_{|F_2}$  et :

$i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1}$  les sommets de  $P^{c_1}(F_1)$ ,

$i_{2,1}, \dots, i_{2,k_2}$  les sommets de  $P^{c_2}(F_2)$ ,

$j_{1,1}, \dots, j_{1,l_1}$  les sommets de  $R^{c_1}(F_1)$ ,

$j_{2,1}, \dots, j_{2,l_2}$  les sommets de  $R^{c_2}(F_2)$ .

Alors  $(i) = (i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1}, i_{2,1}, \dots, i_{2,k_2})$  et  $(j) = (j_{1,1}, \dots, j_{1,l_1}, j_{2,1}, \dots, j_{2,l_2})$ . De plus, d'après la preuve de la proposition précédente, on alors :

$$\begin{aligned} a_c &= (Id^{\otimes k_1} \otimes b_{l_1, k_2} \otimes Id^{\otimes l_2}) \circ (a_{c_1} \otimes a_{c_2}) \\ &= (Id^{\otimes k_1} \otimes b_{l_1, k_2} \otimes Id^{\otimes l_2}) \circ (b_{(i_1), (j_1)} \otimes b_{(i_2), (j_2)}) \\ &\quad \text{par l'hypothèse de récurrence,} \\ &= b_{(i), (j)}. \end{aligned}$$

2.  $F = B^+(F_1)$  : si  $c$  est la coupe totale de  $F$ , alors  $(i) = (1, \dots, n)$  et  $(j) = \emptyset$ , d'où  $b_{(i), (j)} = Id = a_c$ . Sinon, posons  $c' = c|_{F_1}$ . Les sommets de  $P^{c'}(F_1)$  sont  $i_1, \dots, i_k$ , et les sommets de  $R^{c'}(F_1)$  sont  $j_1, \dots, j_{l-1}$ . De plus,  $j_l = n$ . En posant  $(j') = (j_1, \dots, j_{l-1})$ , on a alors :

$$\begin{aligned} a_c &= (a_{c'} \otimes Id) \\ &= (b_{(i), (j')} \otimes Id) \quad \text{par l'hypothèse de récurrence,} \\ &= b_{(i), (j)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Remarque.** Si la tresse de  $V$  est inversible, alors les  $a_c$  sont tous inversibles.

### 3.3. Antipode de $\mathcal{H}_{P,R}(V)$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ , on pose :

$$\tau_i = (i, i + 1) \in S_n, \quad \sigma_i = \underbrace{\dots}_{i-1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \diagdown & & \diagup \\ \hline \end{array} \underbrace{\dots}_{n-i-1} \in \mathcal{B}_n^+.$$

(Voir [18].) Pour tout  $\tau \in S_n$ , soit  $\tau = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_k}$  une décomposition réduite de  $\sigma$ . On pose alors :

$$b_\tau = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}.$$

Remarquons que  $b_\tau$  ne dépend pas de la décomposition de  $\tau$  choisie.

**Exemple.** Soit

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Alors  $\tau = \tau_2 \tau_1 \tau_3$ , donc

$$b_\tau = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ \hline \end{array}.$$

**Remarque.**  $b_\tau$  est la tresse obtenue en reliant le sommet  $n$  au sommet  $\tau(n)$ , puis le sommet  $n - 1$  au sommet  $\tau(n - 1), \dots$ , puis le sommet 1 au sommet  $\tau(1)$  (du bas vers le haut).

On utilise les notations de [4,5]. Soient  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$ ,  $s_1, \dots, s_n$  ses sommets,  $s_n \geq_{b,d} \dots \geq_{b,d} s_1$ . Soit  $c$  une coupe de  $F$  et soit  $W_{h,d}^c(F)$  le résultat de cette coupe ; soient  $s'_1, \dots, s'_n$  les sommets de  $W_{h,d}^c(F)$ ,  $s'_n \geq_{b,d} \dots \geq_{b,d} s'_1$ . Il existe une bijection naturelle  $\bar{\sigma}_c$  entre les sommets de  $F$  et les sommets de  $W_{h,d}^c(F)$  ; on pose  $\sigma_c \in S_n$ , telle que pour tout  $i$ ,  $s'_{\sigma_c(i)} = \bar{\sigma}_c(s_i)$ . Enfin, on note  $n_c$  le nombre de coupes élémentaires constituant  $c$ .

**Théorème 22.** Soient  $F = t_1 \dots t_m \in \mathcal{F}_{P,R}$  et  $v \in V^{\otimes \text{poids}(F)}$ . Alors :

$$T(F(v)) = (-1)^m \sum_{c \text{ coupe de } F} (-1)^{n_c} W_{h,d}^c(F)(b_{\sigma_c}.v).$$

**Preuve.** Récurrence semblable à celle de [4,5], utilisant la proposition 21.  $\square$

**Exemple.** Soit  $v \in V^{\otimes 4}$ .

$$\begin{aligned} T\left(\mathbb{Y}(v)\right) &= -\mathbb{Y}(v) + \cdot\mathbb{!}(v) + \cdot\mathbb{!}\left(\overline{\text{XXXX}}.v\right) + \mathbb{V}\cdot(v) \\ &\quad - \cdot\mathbb{!}\cdot(v) - \dots\mathbb{!}\left(\overline{\text{XXXX}}.v\right) - \cdot\mathbb{!}\cdot\left(\overline{\text{XXXX}}.v\right) + \dots\left(\overline{\text{XXXX}}.v\right). \end{aligned}$$

**Proposition 23.** Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\tau$  est inversible.
2.  $c$  est inversible.
3.  $T$  est inversible.

**Preuve.**  $1 \Rightarrow 3$ . Découle immédiatement de la proposition 14.

$3 \Rightarrow 2$ . Supposons  $T$  inversible. Soit  $\sum v_i \otimes w_i \in \text{Ker}(c)$ . On a alors, en utilisant (15) :

$$\begin{aligned} T\left(\sum \bullet_{v_i} \bullet_{w_j}\right) &= \sum m \circ (T \otimes T) \circ \tau(\bullet_{v_i} \otimes \bullet_{w_i}) \\ &= \sum m \circ (T \otimes T) \circ (\bullet \otimes \bullet) \circ c(v_i \otimes w_i) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\sum \bullet_{v_i} \bullet_{w_i} = 0$  et donc  $\sum v_i \otimes w_i = 0$  :  $c$  est injective.

Montrons que  $c$  est surjective. Soit  $v \otimes w \in V \otimes V$ . Comme  $T$  est inversible, d'après (15), en notant  $M$  l'idéal d'augmentation de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , on a  $T^{-1}(M^2) = M^2$ . Par suite, comme  $T$  est homogène, il existe  $\sum v_i \otimes w_i \in V \otimes V$  tel que  $\sum T(\bullet_{v_i} \bullet_{w_i}) = \bullet_v \bullet_w$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \bullet\bullet(v \otimes w) &= \bullet_v \bullet_w = \sum T(\bullet_{v_i} \bullet_{w_i}) \\ &= \sum T(\bullet_{\bar{w}_i})T(\bullet_{\bar{v}_i}) = \sum (-\bullet_{\bar{w}_i})(-\bullet_{\bar{v}_i}) \\ &= \sum \bullet_{\bar{w}_i} \bullet_{\bar{v}_i} = \bullet\bullet\left(c\left(\sum v_i \otimes w_i\right)\right). \end{aligned}$$

Par suite,  $v \otimes w = c(\sum v_i \otimes w_i)$  et donc  $c$  est surjective.

2  $\Rightarrow$  1. Découle immédiatement de la proposition 17.  $\square$

**4. Dualité dans les algèbres  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$**

Désormais, tous les espaces tressés considérés ont une tresse inversible.

*4.1. Propriétés de l'application  $\gamma$*

On rappelle que  $\gamma$  est définie dans la section 1.

**Proposition 24.** Soient  $x, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

1.  $\gamma(xy) = \gamma(x)\varepsilon(y) + (x \otimes 1)\gamma(y)$ .
2.  $\bar{y} \otimes \gamma(\bar{x}) = \bar{y}^{1,2} \otimes \bar{x}_1^{-2} \otimes \bar{x}_2^{-1}$ , avec  $\gamma(x) = x_1 \otimes x_2$ .
3.  $\gamma(\bar{y}) \otimes \bar{x} = \bar{y}_1^{-1} \otimes \bar{y}_2^{-2} \otimes \bar{x}^{1,2}$ , avec  $\gamma(y) = y_1 \otimes y_2$ .

**Preuve.** On peut se limiter au cas où  $x = F(u_1, \dots, u_n)$  et  $y = G(u_{n+1}, \dots, u_{n+m})$ , avec  $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}$ .

1. C'est trivial si  $G = 1$ . Sinon, il faut montrer que  $\gamma(xy) = (x \otimes 1)\gamma(y)$ , ce qui est immédiat.

2. Si  $F$  n'est pas de la forme  $F_1 \bullet$ , les deux termes de l'égalité sont nuls. Supposons  $F = F_1 \bullet$ .

$$\begin{aligned} \bar{y} \otimes \gamma(\bar{x}) &= G(w_1, \dots, w_m) \otimes F_1(w_{m+1}, \dots, w_{m+n-1}) \otimes \bullet_{w_{m+n}}, \\ \bar{y}^{1,2} \otimes \bar{x}_1^{-2} \otimes \bar{x}_2^{-1} &= \overline{G(u_{n+1}, \dots, u_{n+m})}^{1,2} \otimes \overline{F_1(u_1, \dots, u_{n-1})}^2 \otimes \bullet_{u_n}^{-1} \\ &= G(w'_1, \dots, w'_m) \otimes F_1(w'_{m+1}, \dots, w'_{m+n-1}) \otimes \bullet_{w'_{m+n}}, \end{aligned}$$

avec, d'après la proposition 17,

$$\begin{aligned} w_1 \otimes \dots \otimes w_{m+n} &= \left( \text{Diagram with } n \text{ and } m \text{ strands} \right) \cdot (u_1 \otimes \dots \otimes u_{m+n}), \\ w'_1 \otimes \dots \otimes w'_{m+n} &= \left( \text{Diagram with } n-1 \text{ and } m \text{ strands} \right) \cdot (u_1 \otimes \dots \otimes u_{m+n}). \end{aligned}$$

Les deux tresses apparaissant étant égales, on a l'égalité demandée. Le point 3 se démontre de la même manière.  $\square$

**Lemme 25.** Soit  $p = \sum_{F \in \mathcal{F}_{P,R}} F(u_F)$  un élément primitif non nul de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . Alors il existe  $G \in \mathcal{F}_{P,R}$ , telle que  $u_{G \bullet}$ , soit non nul.

**Preuve.** Choisissons  $F = t_1 \dots t_k$  telle que :

1.  $u_F \neq 0$ ;

2. Si  $u_G \neq 0$ , avec  $G = t'_1 \dots t'_l$ , alors  $l \geq k$  ;
3. Si de plus  $l = k$ , alors  $\text{poids}(t'_l) \geq \text{poids}(t'_k)$ .

Une étude simple des coupes admissibles (voir [4], lemme 77 et [5]) montre que si  $G$  possède une coupe admissible  $c$  telle que  $P^c(G) = B^-(t_n)$  et  $R^c(G) = t_1 \dots t_{n-1} \bullet$  avec  $u_G \neq 0$ , alors  $G = F$  et la coupe  $c$  est unique. Par suite, dans la décomposition suivante :

$$\Delta_c(p) = \sum_{F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{P,R}} (F_1 \otimes F_2)(v_{(F_1, F_2)}),$$

$v_{B^-(t_n), t_1 \dots t_{n-1} \bullet} = a_c(u_F)$  d'après la proposition 20. De plus, comme  $a_c$  est inversible, ceci est non nul. Comme  $p$  est primitif, nécessairement  $B^-(t_n) = 1$  et donc  $F = t_1 \dots t_{n-1} \bullet$ . On prend donc  $G = t_1 \dots t_{n-1}$ .  $\square$

**Corollaire 26.**  $\gamma_{\text{Prim}(\mathcal{H}_{P,R}(V))} : \text{Prim}(\mathcal{H}_{P,R}(V)) \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes V$  est injective.

**Preuve.** Si  $p = \sum_{F \in \mathcal{F}_{P,R}} F(u_F)$ , par définition de  $\gamma$ ,  $\gamma(p) = \sum_{G \in \mathcal{F}_{P,R}} (G \otimes \bullet)(u_{G \bullet})$ . Par suite, si  $p$  est un primitif non nul, d'après le lemme précédent, il existe  $G \in \mathcal{F}_{P,R}$ , telle que  $u_{G \bullet}$  est non nul, d'où  $\gamma(p)$  est non nul.  $\square$

#### 4.2. Construction du couplage

**Définition 27.** Soient  $(V, c)$  et  $(V', c')$  deux espaces tressés et soit  $(, )_V : V' \times V \rightarrow K$  une forme bilinéaire. On dira que  $(, )_V$  est un couplage d'espaces tressés si pour tous  $v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in V, (w_1 \otimes w_2, \overline{v_2} \otimes \overline{v_1})_V = (\overline{w_2} \otimes \overline{w_1}, v_1 \otimes v_2)_V$ .

**Exemple.** Si  $V$  est de dimension finie, on prend  $V' = V^*$  ; le tressage  $c'$  est donné par :

$$V^* \otimes V^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes V)^* \xrightarrow{c^*} (V \otimes V)^* \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V^*.$$

La forme bilinéaire  $(, )_V$  est donnée par  $(f, x)_V = f(x)$ .

**Théorème 28.** Soient  $(V, c)$  et  $(V', c')$  deux espaces tressés et soit  $(, )_V : V' \times V \rightarrow K$  une couplage d'espaces tressés. Alors il existe un unique couplage noté  $(, )_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}_{P,R}(V') \times \mathcal{H}_{P,R}(V) \rightarrow K$  vérifiant :

1.  $(1, y)_{\mathcal{H}} = \varepsilon(y), \forall y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;
- 1'.  $(x, 1)_{\mathcal{H}} = \varepsilon(x), \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$  ;
2.  $(xy, z)_{\mathcal{H}} = (x \otimes y, \Delta_c(z))_{\mathcal{H}}, \forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V'), z \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;
- 2'.  $(x, yz)_{\mathcal{H}} = (\Delta_{c'}(x), y \otimes z)_{\mathcal{H}}, \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V'), y, z \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;
3.  $(B^+(x \otimes w), y)_{\mathcal{H}} = (x \otimes w, \gamma(y))_{\mathcal{H}}, \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V), w \in V', y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;
- 3'.  $(x, B^+(y \otimes v))_{\mathcal{H}} = (\gamma(x), y \otimes v)_{\mathcal{H}}, \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V), v \in V, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  ;
4.  $(x_1 \otimes x_2, \overline{y_2} \otimes \overline{y_1})_{\mathcal{H}} = (\overline{x_2} \otimes \overline{x_1}, y_1 \otimes y_2)_{\mathcal{H}}, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}_{P,R}(V), y_1, y_2 \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$  ;
5.  $(\bullet_w, \bullet_v)_{\mathcal{H}} = (w, v)_V, \forall v \in V, w \in V'$  ;
6. Si  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V'), y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  sont homogènes de poids différents, alors  $(x, y)_{\mathcal{H}} = 0$ .
7.  $V^\perp = (0) \Leftrightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V)^\perp = (0)$  ;
- 7'.  $V'^\perp = (0) \Leftrightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V')^\perp = (0)$  ;

$$8. (x, T(y))_{\mathcal{H}} = (T(x), y)_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V'), \quad y \in \mathcal{H}_{P,R}(V).$$

**Remarque.** Si  $V$  et  $V'$  sont tressés trivialement, on retrouve le couplage  $(,)$  défini dans [4,5] (voir partie 1).

**Preuve.**  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  étant une cogèbre, son dual gradué  $\mathcal{H}_{P,R}(V)^*$  est une algèbre. Par suite, il existe un unique morphisme d'algèbres  $\Phi : \mathcal{H}_{P,R}(V') \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V)^*$ , tel que pour tout  $w \in V'$ ,  $\Phi \circ B_w^+ = \gamma_w^* \circ \Phi$ , avec  $\gamma_w : \mathcal{H}_{P,R}(V) \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V)$  défini de la manière suivante :

$$\gamma_w(x) = x_1(w, x_2)_V, \quad \text{où } \gamma(x) = x_1 \otimes x_2.$$

On pose alors  $(x, y)_{\mathcal{H}} = \Phi(x)(y)$ . Comme  $\Phi(1) = 1_{\mathcal{H}_{P,R}(V)^*} = \varepsilon$ , 1 est vérifiée. Comme  $\Phi$  est un morphisme d'algèbres, 2 est vérifiée. Comme  $\Phi \circ B_w^+ = \gamma_w^* \circ \Phi$ , 3 est vérifiée.

Comme 1 est un élément de type groupe de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , d'après 2,  $x \rightarrow (x, 1)$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathcal{H}_{P,R}(V')$  dans  $K$ . Comme  $\gamma(1) = 0$ , d'après 3,  $(B_w^+(x), 1)_{\mathcal{H}} = 0$ . Par suite,  $x \rightarrow (x, 1)$  coïncide avec  $\varepsilon$ , ce qui démontre 1'.

Pour tous  $v \in V$ ,  $w \in V'$  :

$$\begin{aligned} (\bullet_w, \bullet_v)_{\mathcal{H}} &= (B^+(1 \otimes w), \bullet_v)_{\mathcal{H}} = (1 \otimes w, \gamma(\bullet_v))_{\mathcal{H}} = (1 \otimes w, 1 \otimes v)_{\mathcal{H}} \\ &= \varepsilon(1)(w, v)_V = (w, v)_V, \end{aligned}$$

donc 5 est vérifiée.

Pour montrer 6, on peut prendre  $x = F(w_1, \dots, w_n)$  et  $y = G(v_1, \dots, v_m)$ . Le résultat se démontre alors par récurrence sur le poids de  $F$ .

On considère  $X_3 = \{x \in \mathcal{H}_{P,R}(V) / 3' \text{ est vérifiée pour tout } y \in \mathcal{H}_{P,R}(V), v \in V\}$ .

D'après 1,  $(1, B^+(y \otimes v))_{\mathcal{H}} = \varepsilon(B_v^+(y)) = 0 = (\gamma(1), y \otimes v)$ , donc  $1 \in X_3$ . Soient  $x_1, x_2 \in X_3$ .

$$\begin{aligned} (x_1 x_2, B^+(y \otimes v))_{\mathcal{H}} &= (x_1 \otimes x_2, \Delta_c(B_v^+(y)))_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 2,} \\ &= (x_1 \otimes x_2, B_v^+(y) \otimes 1 + y' \otimes B_v^+(y''))_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après (17),} \\ &= (\gamma(x_1)\varepsilon(x_2), y \otimes v)_{\mathcal{H}} + (x_1 \otimes \gamma(x_2), y' \otimes y'' \otimes v)_{\mathcal{H}} \quad \text{car } x_1, x_2 \in X_3, \\ &= (\gamma(x_1)\varepsilon(x_2) + (x_1 \otimes 1)\gamma(x_2), y \otimes v)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 2,} \\ &= (\gamma(x_1 x_2), y \otimes v)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après la proposition 24-(1).} \end{aligned}$$

Donc  $X_3$  est une sous-algèbre. Montrons que  $X_3$  est stable par  $B_w^+$  pour tout  $w \in V'$ . Soit  $x \in X_3$  :

$$\begin{aligned} (B_w^+(x), B_v^+(y))_{\mathcal{H}} &= (x \otimes w, \gamma(B_v^+(y)))_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 3,} \\ &= (x, 1)_{\mathcal{H}}(w, v)_V \varepsilon(y) \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(y)(w, v)_V \quad \text{d'après 1',} \\ (\gamma(B_w^+(x)), y \otimes v)_{\mathcal{H}} &= (1 \otimes w, y \otimes v)_{\mathcal{H}} \varepsilon(x) \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(y)(w, v)_V. \end{aligned}$$

Par suite,  $X_3 = \mathcal{H}_{P,R}(V)$ , ce qui démontre 3'.

Soit  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ . On pose :

$$Y_x = \{x_2 \in \mathcal{H}_{P,R}(V') \mid (x \otimes x_2, \bar{y}_2 \otimes \bar{y}_1)_{\mathcal{H}} = (\bar{x}_2 \otimes \bar{x}, y_1 \otimes y_2)_{\mathcal{H}}, \\ \forall y_1, y_2 \in \mathcal{H}_{P,R}(V)\}, \\ Y = \{x \in \mathcal{H}_{P,R}(V') \mid Y_x = \mathcal{H}_{P,R}(V')\}.$$

On a immédiatement  $1 \in Y$  et  $1 \in Y_x$  pour tout  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$ . De plus, les propriétés 5 et 6 impliquent que pour tous  $w_1, w_2 \in V', \bullet_{w_1} \in Y_{\bullet_{w_2}}$ . Une récurrence simple sur le poids de  $x$  montre que  $\bullet_w \in Y_x$  pour tout  $w \in V'$  et pour tout  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$ .

Montrons que  $Y_x$  est stable par  $B_w^+$  pour tout  $w \in V'$ . Soit  $x_2 \in Y_x$ .

$$(x \otimes B_w^+(x_2), \bar{z} \otimes \bar{y})_{\mathcal{H}} \\ = (x \otimes x_2 \otimes w, \bar{z} \otimes \gamma(\bar{y}))_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 3,} \\ = (x \otimes x_2 \otimes w, \bar{z}^{1,2} \otimes \bar{y}_1^2 \otimes \bar{y}_2^1)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après la proposition 24-(2),} \\ = (\bar{x}_2 \otimes \bar{x} \otimes w, y_1 \otimes \bar{z} \otimes \bar{y}_2)_{\mathcal{H}} \quad \text{car } x_2 \in Y_x, \\ = (\bar{x}_2^1, \otimes \bullet_w^2 \otimes \bar{x}^{1,2}, \gamma(y) \otimes z)_{\mathcal{H}} \quad \text{car } \bullet_w \in Y_{\bar{x}^1}, \\ = (B_{\bar{y}_2^1}^+(\bar{x}_2^1) \otimes \bar{x}^{1,2}, y \otimes z)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 3,} \\ = (\overline{B_w^+(x_2)} \otimes \bar{x}, y \otimes z)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après le théorème 16-(5).}$$

Montrons que si  $x_1 \in Y_x, x_2 \in Y_{x'}$  pour tout  $x'$ , alors  $x_1 x_2 \in Y_x$ .

$$(x \otimes x_1 x_2, \bar{y}_2 \otimes \bar{y}_1)_{\mathcal{H}} = (x \otimes x_1 \otimes x_2, \bar{y}_2 \otimes \bar{y}_1' \otimes \bar{y}_1'')_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 2,} \\ = (x \otimes x_1 \otimes x_2, \bar{y}_2^{1,2} \otimes \bar{y}_1'^2 \otimes \bar{y}_1''^1)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après (10),} \\ = (\bar{x}_1 \otimes \bar{x} \otimes x_2, y_1' \otimes \bar{y}_2 \otimes \bar{y}_1'')_{\mathcal{H}} \quad \text{car } x_1 \in Y_x, \\ = (\bar{x}_1^1 \otimes \bar{x}_2^2 \otimes \bar{x}^{1,2}, y_1' \otimes y_1'' \otimes y_2)_{\mathcal{H}} \quad \text{car } x_2 \in Y_{\bar{x}}, \\ = (\bar{x}_1^1 \bar{x}_2^2 \otimes \bar{x}^{1,2}, y_1 \otimes y_2)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 2,} \\ = (\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \otimes \bar{x}, y_1 \otimes y_2)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après (5).}$$

Montrons que  $Y = \mathcal{H}_{P,R}(V')$  : montrons que  $x_2 \in Y_x$  pour tout  $x$  par récurrence sur le poids de  $x_2$ . On l'a déjà vu pour  $x_2 = 1$ . Supposons le résultat vrai pour tout élément de poids strictement inférieur à celui de  $x_2$ . On peut se limiter aux deux cas suivants :

1.  $x_2 = B_w^+(x_3)$  : alors  $x_3 \in Y_x$ , et cela découle immédiatement de la première remarque.
2.  $x_2 = x_3 x_4$ , avec  $x_3$  et  $x_4$  vérifiant le résultat. On conclut immédiatement avec la deuxième remarque.

Par suite, la propriété 4 est vraie.

On considère l'ensemble suivant :

$$Y_2 = \{x \in \mathcal{H}_{P,R}(V') \mid (x, yz)_{\mathcal{H}} = (\Delta_{c'}(x), y \otimes z)_{\mathcal{H}}, \forall y, z \in \mathcal{H}_{P,R}(V)\}.$$

Le point 2 implique que  $1 \in Y_2$ . Montrons que  $Y_2$  est stable par  $B_w^+$  pour tout  $w \in V'$ . Soit  $x \in Y_2$ .

$$\begin{aligned}
 & (\Delta_{c'}(B_w^+(z)), y \otimes z)_{\mathcal{H}} \\
 &= (B_w^+(x) \otimes 1 + x' \otimes B_v^+(x''), y \otimes z)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après (17),} \\
 &= (x \otimes w, \gamma(y)\varepsilon(z) + (y \otimes 1)\gamma(z))_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 2 et 3,} \\
 &= (x \otimes w, \gamma(yz))_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après la proposition 24(1),} \\
 &= (B_w^+(x), yz)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 3.}
 \end{aligned}$$

Montrons que  $Y_2$  est une sous-algèbre : soient  $x_1, x_2 \in Y_2$ .

$$\begin{aligned}
 (x_1 x_2, yz)_{\mathcal{H}} &= (x_1 \otimes x_2, y' \bar{z}' \otimes \bar{y}'' z'')_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 2,} \\
 &= (x'_1 \otimes x''_1 \otimes x'_2 \otimes x''_2, y' \otimes \bar{z}' \otimes \bar{y}'' \otimes z'')_{\mathcal{H}} \quad \text{car } x_1, x_2 \in Y_2, \\
 &= (x'_1 \otimes \bar{x}_2' \otimes \bar{x}_1'' \otimes x''_2, y' \otimes y'' \otimes z' \otimes z'')_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 4,} \\
 &= (x'_1 \bar{x}_2' \otimes \bar{x}_1'' x''_2, y \otimes z)_{\mathcal{H}} \quad \text{d'après 2,} \\
 &= (\Delta_{c'}(x_1 x_2), y \otimes z)_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Par suite,  $Y_2 = \mathcal{H}_{P,R}(V')$ , ce qui démontre 2'.

Par suite, le morphisme  $\Phi : \mathcal{H}_{P,R}(V') \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V)^*$  est à valeur dans le dual de Hopf de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et est un morphisme de bigèbres tressées. Par le lemme 12(1),  $\Phi \circ T = T^* \circ \Phi$ , ce qui équivaut au point 8.

Montrons 7.

$\Leftarrow$  : découle immédiatement de 5 et 6.

$\Rightarrow$  : supposons  $V^\perp = (0)$  et  $I = \mathcal{H}_{P,R}(V)^\perp$  non nul. Comme  $(, )$  est un couplage de Hopf,  $I$  est un biidéale de  $\mathcal{H}_{P,R}(V')$ . De plus, d'après 6,  $I$  est gradué. Soit  $x$  un élément non nul de  $I$  homogène de poids minimal  $n$ . Comme  $I$  est un coidéale,  $x$  est primitif. Pour tout  $y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ ,  $v \in V$ ,  $(x, B_v^+(y))_{\mathcal{H}} = (\gamma(x), y \otimes v)_{\mathcal{H}} = 0$  d'après 3'. Par suite,  $\gamma(x) \in I \otimes V + \mathcal{H}_{P,R}(V') \otimes V^\perp = I \otimes V$ . Or  $\gamma(x) \in (\mathcal{H}_{P,R}(V'))_{n-1} \otimes V$ . Par minimalité de  $n$ ,  $\gamma(x) = 0$ . D'après le corollaire 26,  $x = 0$  : contradiction. Donc  $\mathcal{H}_{P,R}(V)^\perp = (0)$ . On montre 7' de la même manière.  $\square$

**Remarque.** Lorsque  $V$  et  $V'$  sont de dimension finie et que  $(, )_V$  est non dégénéré,  $\mathcal{H}_{P,R}(V')$  et donc isomorphe au dual gradué de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  comme algèbre de Hopf tressée graduée par l'isomorphisme :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H}_{P,R}(V') \rightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V)^{*g}, \\
 & x \rightarrow (x, \cdot)_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

### 4.3. Cas des espaces tressés diagonaux

**Définition 29.**  $(V, c)$  est un espace tressé diagonal s'il existe une base  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$  de  $V$  et des scalaires tous non nuls  $q_{i,j}$ ,  $i, j \in \mathcal{D}$  tels que :

$$\bar{v}_j \otimes \bar{v}_i = q_{i,j} v_j \otimes v_i.$$

La base  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$  est appelée base diagonale de  $V$ .

**Remarque.** L'ensemble  $\mathcal{F}_{P,R}^{\{v_i, i \in \mathcal{D}\}}$  des forêts planes enracinées décorés par des éléments de la base  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$  est une base de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . On l'identifie avec  $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$  en identifiant  $v_i$  avec  $i$  pour tout  $i \in \mathcal{D}$ .

**Proposition 30.** 1.  $\mathcal{F}_{P,R}^{\{v_i, i \in \mathcal{D}\}}$  est une base diagonale de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  : pour toutes forêts  $F = F(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  et  $G = G(v_{j_1}, \dots, v_{j_m})$  dans  $\mathcal{F}_{P,R}^{\{v_i, i \in \mathcal{D}\}}$ ,

$$\overline{G} \otimes \overline{F} = q_{F,G} G \otimes F, \quad \text{avec } q_{F,G} = \prod_{\alpha, \beta} q_{i_\alpha, j_\beta}.$$

2. Pour toute forêt  $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ ,  $\Delta_c(F) = \sum_{c \in \text{Ad}_*(F)} q_c P^c(F) \otimes R^c(F)$ , les  $q_c$  etont des scalaires non nuls, produits de  $q_{i,j}$ .

**Preuve.** 1. Découle de la proposition 17.

2. Découle de la proposition 20.  $\square$

Lorsque  $V$  est un espace tressé diagonal, on pose  $V' = V$  comme espace vectoriel, avec  $c'$  défini par  $c'(v_i \otimes v_j) = q_{j,i} v_j \otimes v_i$ . Remarquons que  $(V, c) = (V', c')$  si, et seulement si,  $q_{i,j} = q_{j,i}$  pour tous  $i, j \in \mathcal{D}$ . On vérifie que le couplage suivant est un couplage d'espaces tressés :

$$(v_i, v_j)_V = \delta_{i,j}.$$

Il est évidemment non dégénéré. On a alors un couplage de Hopf non dégénéré entre  $\mathcal{H}_{P,R}(V')$  et  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

#### 4.4. Algèbres $\mathcal{H}_\bullet(V)$ et $B(V)$

Soit  $\mathcal{H}_\bullet(V)$  la sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{P,R}$  engendrée par  $\bullet_v, v \in V$ .

**Proposition 31.**  $\mathcal{H}_\bullet(V)$  est une sous-algèbre de Hopf tressée de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

**Preuve.** On remarque que  $\mathcal{H}_\bullet(V) = \text{vect}\{\bullet^n(v_1, \dots, v_n) \mid n \in \mathbb{N}, v_i \in V\}$ . Le résultat découle alors immédiatement des propositions 17 et 20.  $\square$

**Proposition 32.** 1. Supposons que  $(, )_V$  soit un couplage d'espaces tressés non dégénéré. Alors  $\mathcal{H}_\bullet(V')^\perp$  est un biidéale gradué de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , concentré en degré supérieur ou égal à deux.

2.  $\mathcal{H}_\bullet(V) \cap \mathcal{H}_\bullet(V')^\perp$  est le plus grand coidéale de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  qui soit gradué et concentré en degré supérieur ou égal à 2 (et donc ne dépend pas de  $V'$ ).

**Preuve.**

1. Comme  $(, )_{\mathcal{H}}$  est un couplage de Hopf et que  $\mathcal{H}_\bullet(V')$  est une sous-algèbre de Hopf de  $\mathcal{H}_{P,R}(V')$ ,  $\mathcal{H}_\bullet(V')^\perp$  est un biidéale. Comme  $(, )_{\mathcal{H}}$  vérifie 6 et que  $\mathcal{H}_\bullet(V')$  est graduée,  $\mathcal{H}_\bullet(V')^\perp$  est gradué. Comme  $(, )_{\mathcal{H}}$  restreint à  $V' \times V$  est égal à  $(, )_V$  qui est non dégénéré,  $(\mathcal{H}_\bullet(V')^\perp)_1 = (0)$ .

2. Soit  $I$  un coïdéal gradué de  $\mathcal{H}_\bullet(V)$  concentré en degré supérieur ou égal à 2. Soient  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Pour tout  $x \in I$  :

$$(\bullet_{v_1} \cdots \bullet_{v_n}, x)_{\mathcal{H}} = (\bullet_{v_1} \otimes \cdots \otimes \bullet_{v_n}, x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n)})_{\mathcal{H}} \in \left( V' \otimes \cdots \otimes V', \sum_{i+j=n-1} \mathcal{H}_{P,R}(V)^{\otimes i} \otimes I \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)^{\otimes j} \right)_{\mathcal{H}}.$$

Comme  $I$  est concentré en degré supérieur ou égal à 2, ceci est nul par la propriété 6, donc  $I \subseteq \mathcal{H}_\bullet(V) \cap \mathcal{H}_\bullet(V)^\perp$ .  $\square$

On pose alors :

$$B(V) = \frac{\mathcal{H}_\bullet(V)}{\mathcal{H}_\bullet(V) \cap \mathcal{H}_\bullet(V)^\perp}.$$

D’après la proposition précédente,  $B(V)$  ne dépend pas de  $V'$  et est muni d’une structure d’algèbre de Hopf tressée graduée par passage au quotient. De plus,  $V$  s’identifie avec  $\mathcal{H}_\bullet(V)_1$ . Enfin, le couplage  $(, )_{\mathcal{H}}$  induit un couplage  $B(V') \times B(V) \rightarrow K$  non dégénéré vérifiant les propriétés 1, 1', 2, 2', 4, 5, 6 et 8 du théorème 28. En particulier, si  $V$  est de dimension finie,  $\mathcal{H}_\bullet(V')$  s’identifie au dual gradué de  $\mathcal{H}_\bullet(V)$ .

### 5. Algèbres de Hopf $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , avec $V$ module de Yetter–Drinfeld

#### 5.1. Rappels : modules de Yetter–Drinfeld

On rappelle la définition classique suivante (voir par exemple [1,13,14,17]) :

**Définition 33.** Soit  $C$  une algèbre de Hopf. Soit  $V$  un espace vectoriel, muni d’une structure de  $C$ -comodule et de  $C$ -module par les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \delta : V &\rightarrow C \otimes V, & m : C \otimes V &\rightarrow V, \\ v &\rightarrow v_0 \otimes v_1, & c \otimes v &\rightarrow c.v. \end{aligned}$$

On dira que  $(V, m, \delta)$  est un module de Yetter–Drinfeld sur  $C$  si :

$$\forall v \in V, c \in C, \quad (c.v)_0 \otimes (c.v)_1 = c'v_0 S(c''') \otimes c'' . v_1.$$

On notera  ${}^C_C \mathcal{YD}$  la catégorie des modules de Yetter–Drinfeld sur  $C$ .

Soit  $V \in {}^C_C \mathcal{YD}$ . Alors  $(V, c)$  est un espace tressé avec  $c$  défini de la manière suivante :

$$\bar{w} \otimes \bar{v} = v_0 . w \otimes v_1.$$

5.2. Construction

**Théorème 34.** Soit  $C$  une algèbre de Hopf,  $V \in_C^C \mathcal{YD}$ . Alors  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est muni d'une structure de module de Yetter–Drinfeld sur  $C$  définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{aligned} c.1 &= \varepsilon(c)1, & c.(t_1 \dots t_n) &= c^{(1)}.t_1 \dots c^{(n)}.t_n, \\ c.\bullet_v &= \bullet_{c,v}, & c.B_v^+(F) &= B_{c',v}^+(c'.F); \\ \delta(1) &= 1 \otimes 1, & \delta(t_1 \dots t_n) &= (t_1)_0 \dots (t_n)_0 \otimes (t_1)_0 \dots (t_n)_0, \\ \delta(\bullet_v) &= v_0 \otimes \bullet_{v_1}, & \delta(B_v^+(F)) &= F_0 v_0 \otimes B_{v_1}^+(F_1). \end{aligned}$$

De plus, le produit de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est un morphisme de modules de Yetter–Drinfeld de  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

**Preuve.** Montrons d'abord que  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est un  $C$ -module. Il s'agit de montrer que pour toute forêt  $F$  et pour tous  $c_1, c_2 \in c, c_1.(c_2.F) = (c_1 c_2).F$ . Procédons par récurrence sur le poids de  $F$ . C'est immédiat si  $F = 1$  et découle du fait que  $V$  est un  $C$ -module si  $F = \bullet_v$ . Supposons le résultat vrai pour toute forêt de poids strictement plus petit que le poids de  $F$ . Deux cas se présentent :

1.  $F = t_1 \dots t_n, n \geq 2$ .

$$\begin{aligned} c_1.(c_2.F) &= c_1.(c_2^{(1)}.t_1 \dots c_2^{(n)}.t_n) \\ &= c_1^{(1)}.(c_2^{(1)}.t_1) \dots c_1^{(n)}.(c_2^{(n)}.t_n) \\ &= (c_1^{(1)} c_2^{(1)}).t_1 \dots (c_1^{(n)} c_2^{(n)}).t_n \quad \text{par l'hypothèse de récurrence,} \\ &= ((c_1 c_2)^{(1)}).t_1 \dots ((c_1 c_2)^{(n)}).t_n \\ &= (c_1 c_2).t_1 \dots t_n. \end{aligned}$$

2.  $F = B_v^+(F_1)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} c_1.(c_2.F) &= c_1.B_{c',v}^+(c'.F_1) \\ &= B_{c'_1.(c'_2.v)}^+(c'_1(c'.F_1)) \\ &= B_{(c'_1 c'_2).v}^+((c'_1 c'_2).F_1) \quad \text{par l'hypothèse de récurrence,} \\ &= (c_1 c_2).F. \end{aligned}$$

Montrons que  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est un  $C$ -comodule. Il s'agit de montrer que pour toute forêt  $F, F'_0 \otimes F''_0 \otimes F_1 = F_0 \otimes F_{1,0} \otimes F_{1,1}$ . Procédons par récurrence sur le poids de  $F$ . C'est immédiat si  $F = 1$  et découle du fait que  $V$  est un  $C$ -comodule si  $F = \bullet_v$ . Supposons le résultat vrai pour toute forêt de poids strictement plus petit que le poids de  $F$ . Deux cas se présentent :

1.  $F = t_1 \dots t_n, n \geq 2$ .

$$\begin{aligned} F'_0 \otimes F''_0 \otimes F_1 &= (t_1)'_0 \dots (t_n)'_0 \otimes (t_1)''_0 \dots (t_n)''_0 \otimes (t_1)_0 \dots (t_n)_0 \\ &= (t_1)_0 \dots (t_n)_0 \otimes (t_1)_{1,0} \dots (t_n)_{1,0} \otimes (t_1)_{1,1} \dots (t_n)_{1,1} \\ &= F_0 \otimes F_{1,0} \times F_{1,1}. \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la deuxième égalité.)

2.  $F = B_v^+(G)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} F'_0 \otimes F''_0 \otimes F_1 &= G'_0 v'_0 \otimes G''_0 v''_0 \otimes B_{v_1}^+(G_1) \\ &= G_0 v_0 \otimes G_{1,0} v_{1,0} \otimes B_{v_{1,1}}^+(G_{1,1}) \quad \text{par l’hypothèse de récurrence,} \\ &= F_0 \otimes F_{1,0} \otimes F_{1,1}. \end{aligned}$$

Par définition de l’action et de la coaction, le produit de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est un morphisme de modules et de comodules, ce qui peut s’écrire : pour tous  $x, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ ,  $c \in C$  :

$$c.(xy) = c'.xc''.y, \tag{18}$$

$$(xy)_0 = x_0 y_0 \otimes x_1 y_1. \tag{19}$$

Montrons que  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \in_C^C \mathcal{YD}$ . Il s’agit de montrer que pour toute forêt  $F$  et pour tout  $c \in C$ ,  $(c.F)_0 \otimes (c.F)_1 = c'F_0 S(c''') \otimes c''.F_1$ . Procédons par récurrence sur le poids de  $F$ . C’est immédiat si  $F = 1$  et découle du fait que  $V \in_C^C \mathcal{YD}$  si  $F = \bullet_v$ . Supposons le résultat vrai pour toute forêt de poids strictement plus petit que le poids de  $F$ . Deux cas se présentent :

1.  $F = F_1 F_2$ , les  $F_i$  de poids strictement inférieur au poids de  $F$ .

$$\begin{aligned} (c.F)_0 \otimes (c.F)_1 &= (c'.F_1 c''.F_2)_0 \otimes (c'.F_1 c''.F_2)_1 \\ &= (c'.F_1)_0.(c''.F_2)_0 \otimes (c'.F_1)_1.(c''.F_2)_1 \\ &= c^{(1)}(F_1)_0 S(c^{(3)})c^{(4)}(F_2)_0 S(c^{(6)}) \otimes c^{(2)}.(F_1)_1 c^{(5)}.(F_2)_1 \\ &= c^{(1)}(F_1)_0(F_2)_0 S(c^{(4)}) \otimes c^{(2)}.(F_1)_1 c^{(3)}.(F_2)_1 \\ &= c^{(1)}(F_1)_0(F_2)_0 S(c^{(3)}) \otimes c^{(2)}.((F_1)_1(F_2)_1) \\ &= c^{(1)}F_0 S(c^{(3)}) \otimes c^{(2)}.(F_1). \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la troisième égalité.)

2.  $F = B_v^+(G)$  :

$$\begin{aligned} (c.F)_0 \otimes (c.F)_1 &= (c'.G)_0(c''.v)_0 \otimes B_{(c'',v)_1}^+((c'.G)_1) \\ &= c^{(1)}G_0 S(c^{(3)})c^{(4)}v_0 S(c^{(6)}) \otimes B_{c^{(2),v_1}}^+(c^{(5)}.G_1) \\ &= c^{(1)}G_0 v_0 S(c^{(4)}) \otimes B_{c^{(2),v_1}}^+(c^{(3)}.G_1) \\ &= c^{(1)}G_0 v_0 S(c^{(3)}) \otimes c^{(2)}.B_{v_1}^+(G_1) \\ &= c^{(1)}F_0 S(c^{(3)}) \otimes c^{(2)}.F. \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la deuxième égalité.)  $\square$

**Proposition 35.** Soit  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$  de poids  $n$ ,  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $c \in C$ . On a :

$$\begin{aligned} c.F(v_1, \dots, v_n) &= F(c^{(1)}.v_1, \dots, c^{(n)}.v_n), \\ \delta(F(v_1, \dots, v_n)) &= (v_1)_0 \dots (v_n)_0 \otimes F((v_1)_1, \dots, (v_n)_1). \end{aligned}$$

**Preuve.** Récurrence simple sur le poids de  $F$ .  $\square$

Soit  $V \in_C^C \mathcal{YD}$ . Alors  $V$  est un espace tressé; d’après la proposition 15,  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  possède un tressage  $\tau$ . De plus,  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \in_C^C \mathcal{YD}$ , donc  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  possède un second tressage  $\tau'$ .

**Lemme 36.**  $\tau$  et  $\tau'$  sont égaux.

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $\tau'$  vérifie les 6 propriétés de la proposition 15. Elles découlent tous de calculs directs.  $\square$

D’après le théorème 19,  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est muni d’un coproduit  $\Delta_c$ , la munissant d’une structure d’algèbre de Hopf tressée.

**Théorème 37.**  $\Delta_c$  est un morphisme de modules de Yetter–Drinfeld de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{H}_{P,R}(V)$ , c’est-à-dire :

$$(c.x)' \otimes (c.x)'' = c'.x' \otimes c''.x'', \tag{20}$$

$$x_0 \otimes (x_1)' \otimes (x_1)'' = (x')_0(x'')_0 \otimes (x')_1 \otimes (x'')_1. \tag{21}$$

En conséquence,  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est une algèbre de Hopf dans la catégorie  ${}_C^C \mathcal{YD}$

**Lemme 38.** Soient  $V \in_C^C \mathcal{YD}$ ,  $b \in C$ ,  $z \in V$ . Alors  $b'z_0 \otimes b''.z_1 = (b'.z)_0 b'' \otimes (b'.z)_1$ .

**Preuve du lemme.** Comme  $V \in_C^C \mathcal{YD}$  :

$$(b'.z)_0 b'' \otimes (b'.z)_1 = b^{(1)}z_0 S(b^{(3)})b^{(4)} \otimes b^{(2)}.z_1 = b'z_0 \otimes b''.z_1. \quad \square$$

**Preuve du théorème.** Montrons (20) par récurrence sur le poids de  $x$ . C’est immédiat si  $x = 1$ . Supposons le résultat vrai pour tout  $y$  de poids strictement inférieur à celui de  $x$ . On peut se ramener aux deux cas suivants :

1.  $x = B_v^+(y)$  :

$$\begin{aligned} (c.x)' \otimes (c.x)'' &= \Delta_c(B_{c''.v}(c'.y)) \\ &= B_{c''.v}^+(c'.y) \otimes 1 + (c'.y)' \otimes B_{c''.v}(c'.y)'' \quad \text{par (17),} \\ &= c.x \otimes 1 + c'.y' \otimes B_{c''.v}(c''.y'') \quad \text{d’après l’hypothèse de récurrence,} \\ &= c'.x \otimes c''.1 + c'.y' \otimes c''.B_v^+(y'') \\ &= c'.x' \otimes c''.x''. \end{aligned}$$

2.  $x = x_1x_2$ , avec  $\text{poids}(x_i) < \text{poids}(x)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (c.(x_1x_2))' \otimes (c.(x_1x_2))'' &= (c'.x_1c''.x_2)' \otimes (c'.x_1c''.x_2)'' \\ &= [(c^{(1)}.x_1') \otimes (c^{(2)}.x_1'')][c^{(3)}.x_2' \otimes (c^{(4)}.x_2'')] \\ &= (c^{(1)}.x_1')[((c^{(2)}.x_1'')_0 c^{(3)}).x_2'] \otimes (c^{(2)}.x_1'')_1 (c^{(4)}.x_2''); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'.(x_1x_2)' \otimes c''.(x_1x_2)'' &= c'.(x'_1[(x''_1)_0.x'_2]) \otimes c''.((x''_1)_1x''_2) \\ &= (c^{(1)}.x'_1)[((c^{(2)}.x''_1)_0).x'_2] \otimes (c^{(3)}.(x''_1)_1)(c^{(4)}.x''_2). \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la deuxième égalité.)

On conclut à l’aide du lemme 38, avec  $b = c^{(2)}$  et  $z = x''_1$ .

Montrons (21) par récurrence sur le poids de  $x$ . C’est immédiat si  $x = 1$ . Supposons le résultat vrai pour tout  $y$  de poids strictement inférieur à celui de  $x$ . On peut se ramener aux deux cas suivants :

1.  $x = B_v^+(y)$  :

$$\begin{aligned} x_0 \otimes (x_1)' \otimes (x_1)'' &= y_0v_0 \otimes B_{v_1}^+(y_1)' \otimes B_{v_1}^+(y_1)'' \\ &= y_0v_0 \otimes B_{v_1}(y_1) \otimes 1 + y_0v_0 \otimes (y_1)' \otimes B_{v_1}^+(y_1)'' \quad \text{par (17),} \\ &= y_0v_0 \otimes B_{v_1}(y_1) \otimes 1 + (y'_0(y'')_0v_0 \otimes (y'_1 \otimes B_{v_1}^+((y'')_1))) \\ &= (x'_0(x'')_0 \otimes (x'_1 \otimes (x'')_1)) \quad \text{par (17).} \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la troisième égalité.)

2.  $x = yz$ , avec  $\text{poids}(y), \text{poids}(z) < \text{poids}(x)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} x_0 \otimes (x_1)' \otimes (x_1)'' &= y_0z_0 \otimes (y_1z_1)' \otimes (y_1z_1)'' \\ &= y_0z_0 \otimes (y_1)'((y_1'')_0).(z_1)' \otimes ((y_1'')_1).(z_1)'' \\ &= (y'_0(y'')_0(z')_0(z'')_0 \otimes (y'_1(y'')_1,0).(z'_1 \otimes (y'')_1,1(z'')_1)) \\ &= (y'_0((y'')_0)'(z')_0(z'')_0 \otimes (y'_1((y'')_0)'.(z'_1 \otimes (y'')_1(z'')_1)). \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la troisième égalité et la coassociativité de  $\delta$  pour la dernière.)

$$\begin{aligned} (x'_0(x'')_0 \otimes (x'_1 \otimes (x'')_1)) &= (y'_0((y'')_0.z')_0(y'')_1,0(z'')_0 \otimes (y'_1((y'')_0.z')_1 \otimes (y'')_1,1(z'')_1)) \\ &= (y'_0(((y'')_0)' .z')_0((y'')_0)'(z'')_0 \otimes (y'_1((y'')_0.z')_1 \otimes (y'')_1(z'')_1)). \end{aligned}$$

(On a utilisé la coassociativité de  $\delta$  pour la deuxième égalité.)

On conclut à l’aide du lemme 38, avec  $b = (y'')_0, z = z'$ .  $\square$

On peut donc effectuer un produit croisé  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \sharp C$  (voir [1,14,17]). Cette algèbre de Hopf est notée  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)$ . Elle est décrite par la proposition suivante :

**Proposition 39.**  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $C$  sont des sous-algèbres de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ . De plus, l’application suivante est un isomorphisme d’espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes C &\rightarrow \mathcal{H}_{P,R}^C(V), \\ x \otimes c &\rightarrow xc. \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$  et tout  $c \in C$ ,  $cx = c' .xc''$ . Le coproduit est défini sur  $\mathcal{H}_{P,R}(V) \subseteq \mathcal{H}_{P,R}^C(V)$  par la formule suivante : pour tout  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ , en notant  $\Delta(x) = x^{(1)} \otimes x^{(2)}$  son coproduit dans  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)$  :

$$\Delta(B_v^+(x)) = B_v^+(x) \otimes 1 + x^{(1)}v_0 \otimes B_{v_1}^+(x^{(2)}). \tag{22}$$

Enfin,  $C$  est une sous-algèbre de Hopf de  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)$ .

**Preuve.** Montrons la formule (22). On note  $\Delta_c(x) = x' \otimes x''$ . On a alors  $\Delta(x) = x'(x'')_0 \otimes (x'')_1$ .

Par suite :

$$\begin{aligned} \Delta(B_v^+(x)) &= B_v^+(x) \otimes 1 + x'(B_v^+(x''))_0 \otimes B_{v_1}^+(x'')_1 \\ &= B_v^+(x) \otimes 1 + x'(x'')_0v_0 \otimes B_{v_1}^+((x'')_1) \\ &= B_v^+(x) \otimes 1 + x^{(1)}v_0 \otimes B_{v_1}^+(x^{(2)}). \end{aligned}$$

Le reste est immédiat.  $\square$

**Remarque.**  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)$  est une algèbre de Hopf graduée en mettant les éléments de  $C$  homogènes de degré 0. On a alors  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)_0 = C$ . Par suite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)_{\leq n}$  est un bimodule de Hopf sur  $C$ , donc  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)_1$  est muni d'une structure de bimodule de Hopf sur  $C$  en l'identifiant au quotient  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)_{\leq 1}/\mathcal{H}_{P,R}^C(V)_0$ . On a les formules suivantes : pour tout  $v \in V$ ,  $b, c \in C$  :

$$\begin{aligned} \delta_G(\bullet_v c) &= v_0c' \otimes \bullet_{v_1}c'', & \delta_D(\bullet_v c) &= \bullet_v c' \otimes c'', \\ b \cdot (\bullet_v c) &= \bullet_{b'.v}b''c, & (\bullet_v c) \cdot b &= \bullet_v cb. \end{aligned}$$

Par suite, l'ensemble des coinvariants à droite  $(\mathcal{H}_{P,R}^C(V)_1)^{coinv} = \{x \in \mathcal{H}_{P,R}^C(V)_1 / \delta_D(x) = x \otimes 1\}$  est l'ensemble des  $\bullet_v$ ,  $v \in V$ . Cet espace est muni d'une structure de module de Yetter–Drinfeld sur  $C$  donnée par :

$$\begin{aligned} \delta(\bullet_v) &= v_0 \otimes \bullet_{v_1}, \\ c \cdot \bullet_v &= c' \cdot \bullet_v \cdot S(c'') = \bullet_{c'.v}c''S(c''') = \bullet_{c.v}. \end{aligned}$$

Donc  $(\mathcal{H}_{P,R}^C(V)_1)^{coinv}$  est isomorphe à  $V$  comme module de Yetter–Drinfeld sur  $C$ .

### 5.3. Dualité

**Définition 40.** Soient  $C$  et  $C'$  deux algèbres de Hopf et soit  $(, )_C : C' \times C \rightarrow K$  un couplage de Hopf (éventuellement dégénéré). Soient  $V \in_C \mathcal{YD}$ ,  $V' \in_{C'} \mathcal{YD}$  et soit  $(, )_V : V' \otimes V \rightarrow K$ . On dira que  $(, )_V$  est un couplage de Yetter–Drinfeld si pour tous  $v \in V$ ,  $v' \in V'$ ,  $c \in C$ ,  $c' \in C'$  :

$$(v'_0, c)_C(v'_1, v)_V = (v', c.v)_V, \tag{23}$$

$$(c', v_0)_C(v', v_1)_V = (c'.v', v)_V. \tag{24}$$

Si  $(, )_V$  est un couplage de Yetter–Drinfeld, alors  $(, )_V$  est un couplage d’espaces tressés. Le théorème 28 s’applique donc. On a les propriétés supplémentaires :

**Théorème 41.** *Le couplage  $(, )_{\mathcal{H}}$  vérifie :*

- 9.  $(\delta(x), c \otimes y)_{C \otimes \mathcal{H}} = (x, c.y)_{\mathcal{H}}, \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V'), y \in \mathcal{H}_{P,R}(V), c \in C ;$
- 9'.  $(c' \otimes x, \delta(y))_{C \otimes \mathcal{H}} = (c'.x, y)_{\mathcal{H}}, \forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V'), y \in \mathcal{H}_{P,R}(V), c' \in C.$

(C’est-à-dire que  $(, )_{\mathcal{H}}$  est un couplage de Yetter–Drinfeld.)

**Lemme 42.** *Pour tout  $c \in C, x \in \mathcal{H}_{P,R}(V), \gamma(c.x) = (c' \otimes c'').\gamma(x) = c.\gamma(x).$*

**Preuve.** On peut se limiter à  $x$  de la forme  $F(v_1, \dots, v_n)$ . Si  $F$  n’est pas de la forme  $G\bullet$ , les deux membres sont nuls d’après la proposition 35. Si  $F = G\bullet$ , d’après la proposition 35 :

$$\begin{aligned} \gamma(c.x) &= \gamma(G(c^{(1)}.v_1, \dots, c^{(n-1)}.v_{n-1})\bullet_{c^{(n)}.v_n}) \\ &= G(c^{(1)}.v_1, \dots, c^{(n-1)}.v_{n-1}) \otimes \bullet_{c^{(n)}.v_n} \\ &= c'.G(v_1, \dots, v_n) \otimes c''.\bullet_{v_n} \\ &= (c' \otimes c'').\gamma(x). \quad \square \end{aligned}$$

**Preuve du théorème.** Montrons le point 9 par récurrence sur le poids de  $x$ . C’est immédiat si  $x = 1$ . Supposons le résultat vrai pour tout  $z$  de poids strictement inférieur à celui de  $x$ . On peut se ramener aux deux cas suivants :

- 1.  $x = B_v^+(z) :$

$$\begin{aligned} (\delta(x), c \otimes y)_{C \otimes \mathcal{H}} &= (z_0 v_0, c)_{C(B_{v_1}^+(z_1), y)_{\mathcal{H}}} \\ &= (z_0 \otimes v_0, c' \otimes c'')_{C(z_1 \otimes v_1, \gamma(y))_{\mathcal{H}}} \\ &= (z \otimes v, (c' \otimes c'').\gamma(y))_{\mathcal{H}} \\ &= (z \otimes v, \gamma(c.y))_{\mathcal{H}} \\ &= (B_v^+(z), c.y)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la troisième égalité.)

- 2.  $x = x_1 x_2$ , avec  $\text{poids}(x_i) < \text{poids}(x)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (\delta(x), c \otimes y)_{C \otimes \mathcal{H}} &= ((x_1)_0(x_2)_0, c)_{C((x_1)_1(x_2)_1, y)_{\mathcal{H}}} \\ &= ((x_1)_0 \otimes (x_2)_0, c' \otimes c'')_{C((x_1)_1 \otimes (x_2)_1, y' \otimes y'')_{\mathcal{H}}} \\ &= (x_1, c'.y')_{\mathcal{H}}(x_2, c''.y'')_{\mathcal{H}} \\ &= (x_1 \otimes x_2, \Delta(c.y))_{\mathcal{H}} \\ &= (x_1 x_2, c.y)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

(On a utilisé l’hypothèse de récurrence pour la troisième égalité.)

Le point 9' se démontre de manière semblable.  $\square$

**Théorème 43.** *Sous les hypothèses précédentes, le couplage suivant est un couplage de Hopf :*

$$\begin{aligned}
 (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}C} &: \mathcal{H}_{P,R}^{C'}(V') \times \mathcal{H}_{P,R}^C(V) \rightarrow K, \\
 (yc, xb) &\rightarrow (y, x)_{\mathcal{H}}(c, b)_C.
 \end{aligned}$$

De plus, si  $(\cdot, \cdot)_C$  et  $(\cdot, \cdot)_V$  sont non dégénérés, alors ce couplage est non dégénéré.

**Preuve.** Si  $(\cdot, \cdot)_V$  n'est pas dégénéré, alors  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$  est non dégénéré et donc si de plus  $(\cdot, \cdot)_C$  est non dégénéré, alors  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}C}$  est non dégénéré. Montrons qu'il s'agit d'un couplage de Hopf : soient  $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$ ,  $c_1, c_2 \in C'$ ,  $y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ ,  $b \in C$ .

$$\begin{aligned}
 (x_1c_1x_2c_2, yb)_{\mathcal{H}C} &= (x_1c'_1 \cdot x_2c''_1c_2, yb)_{\mathcal{H}C} \\
 &= (x_1c'_1 \cdot x_2, y)_{\mathcal{H}}(c''_1c_2, b)_C \\
 &= (x_1 \otimes c'_1 \otimes x_2, y' \otimes (y'')_0 \otimes (y'')_1)_{\mathcal{H}}(c''_1 \otimes c_2, b' \otimes b'')_C \\
 &= (x_1 \otimes x_2, y' \otimes (y'')_1)_{\mathcal{H}}(c_1 \otimes c_2, (y'')_0b' \otimes b'')_C \\
 &= (x_1c_1 \otimes x_2c_2, y'(y'')_0b' \otimes (y'')_1b'')_{\mathcal{H}C} \\
 &= (x_1c_1 \otimes x_2c_2, \Delta(yb))_{\mathcal{H}C}.
 \end{aligned}$$

Les autres égalités se démontrent de la même manière.  $\square$

#### 5.4. Modules de Yetter–Drinfeld diagonaux

**Définition 44.** Soit  $V \in {}^C_C \mathcal{YD}$ . On dira que  $V$  est diagonal s'il existe  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$  base de  $V$ ,  $g_i \in C$ ,  $q_{i,j} \in K$ , tels que pour tous  $i, j \in \mathcal{D}$ ,  $\delta(v_i) = g_i \otimes v_i$  et  $g_i \cdot v_j = q_{i,j} v_j$ . La base  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$  est dite base diagonale de  $V$ .

#### Remarques.

1. Par coassociativité, les  $g_i$  sont des éléments de type groupe. Ils sont donc inversibles dans  $A$  et donc les  $q_{i,j}$  sont tous non nuls.
2. Soient  $i, j \in \mathcal{D}$ ; alors  $\overline{v_j} \otimes \overline{v_i} = g_i \cdot v_j \otimes v_i = q_{i,j} v_j \otimes v_i$ , donc  $V$  est un espace tressé diagonal de base diagonale  $(v_i)_{i \in \mathcal{D}}$ .
3. Réciproquement, si  $V$  est un espace tressé diagonal, on en fait un module de Yetter–Drinfeld sur  $K[X_i^{\pm 1}, i \in \mathcal{D}]$  en posant  $\delta(v_i) = X_i \otimes v_i$  et  $X_i \cdot v_j = q_{i,j} v_j$ .

**Proposition 45.** Soient  $F = F(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ ,  $G = G(v_{j_1}, \dots, v_{j_m}) \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ .

1.  $\delta(F) = g_F \otimes F$ , avec  $g_F = g_{i_1} \dots g_{i_n}$ .
2.  $g_F \cdot G = q_{F,G} G$ , avec  $q_{F,G} = \prod_{\alpha, \beta} q_{i_\alpha, j_\beta}$ .

Par suite,  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  est un module de Yetter–Drinfeld diagonal, de base diagonale  $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ .

**Preuve.** Découle de la proposition 35 et du fait que les  $g_i$  soient des éléments de type groupe.  $\square$

Soit  $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ . On définit  $|F| = (d_i(F))_{i \in \mathcal{D}}$  (degré de  $F$ ), avec  $d_i(F)$  le nombre de sommets de  $F$  décorés par  $i$ ;  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  devient ainsi une algèbre de Hopf tressée graduée par  $\mathbb{N}^{\mathcal{D}}$ . Par la remarque 3 de la partie précédente, il s’agit d’une algèbre de Hopf dans  ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{YD}$ , avec  $\mathcal{C} = K[X_i^{\pm 1}, i \in \mathcal{D}]$ .

Pour  $n = (n_i)_{i \in \mathcal{D}}, m = (m_i)_{i \in \mathcal{D}}$ , on pose :

$$q_{n,m} = \prod_{i,j} (q_{i,j})^{n_i m_j}.$$

Remarquons que  $q_{F,G}$  est égal à  $q_{|F|,|G|}$  pour toutes forêts  $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ .

On appelle  $\mathbb{Z}_{\mathcal{D}}$  l’ensemble des éléments de  $\mathbb{Z}^{\mathcal{D}}$  à support fini et  $\mathbb{N}_{\mathcal{D}}$  l’ensemble des éléments de  $\mathbb{N}^{\mathcal{D}}$  à support fini. Pour tout  $(n_i)_{i \in \mathcal{D}} \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}$ , on pose :

$$X^{(n_i)} = \prod_{i \in \mathcal{D}} X_i^{n_i} \in \mathcal{C}.$$

On peut décrire  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V)$  de la manière suivante :

**Théorème 46.**  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $\mathcal{C}$  sont des sous-algèbres de  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V)$ . De plus, l’application suivante est un isomorphisme d’espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{P,R}(V) \otimes \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V), \\ x \otimes a &\rightarrow xa. \end{aligned}$$

De plus, pour  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ , homogène et  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}$ , on a  $X^\alpha x = q_{\alpha,|x|} x X^\alpha$ . Le coproduit est donné par :

$$\Delta(X^\alpha) = X^\alpha \otimes X^\alpha, \quad \Delta(x) = \sum x' X^{|x''|} \otimes x'',$$

où  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ , homogène,  $\Delta_c(x) = \sum x' \otimes x''$  son coproduit dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , les  $x', x''$  étant homogènes. En notant  $T$  l’antipode de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $S$  l’antipode de  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V)$ , on a pour tous  $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$ , homogène et  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}$ ,

$$S(x X^\alpha) = X^{-\alpha-|x|} T(x) = q_{\alpha+|x|,|x|}^{-1} T(x) X^{-\alpha-|x|}.$$

**Preuve.** Démontrons la formule pour l’antipode  $S$  :

$$\begin{aligned} (Id \star S)(x X^\alpha) &= x' X^{|x''|+\alpha} X^{-\alpha-|x''|} T(x'') = x' T(x'') \\ &= \varepsilon(x) 1 = \varepsilon(x X^\alpha) 1. \end{aligned}$$

Donc  $S$  est un inverse à droite de  $Id$  pour la convolution; par suite,  $S$  est bien l’antipode de  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V)$ .  $\square$

**Exemple.** Reprenons l'exemple de la partie 3.2. Dans  $\mathcal{H}_{P,R}^C(V)$  :

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\ \Delta(\bullet) &= \bullet \otimes X + 1 \otimes \bullet, \\ \Delta(\bullet\bullet) &= \bullet\bullet \otimes X^2 + 1 \otimes \bullet\bullet + (1+q)\bullet \otimes \bullet X, \\ \Delta(\dagger) &= \dagger \otimes X^2 + 1 \otimes \dagger + \bullet \otimes \bullet X, \\ \Delta(\dots) &= \dots \otimes X^3 + 1 \otimes \dots + (1+q+q^2)\bullet \otimes \bullet\bullet X + (1+q+q^2)\bullet\bullet \otimes \bullet X^2, \\ \Delta(\dagger\bullet) &= \dagger\bullet \otimes X^3 + 1 \otimes \dagger\bullet + \dagger \otimes \bullet X^2 + q^2\bullet \otimes \dagger X + q\bullet\bullet \otimes \bullet X^2 + \bullet \otimes \bullet\bullet X, \\ \Delta(\bullet\dagger) &= \bullet\dagger \otimes X^3 + 1 \otimes \bullet\dagger + q^2\dagger \otimes \bullet X^2 + \bullet \otimes \dagger X + \bullet\bullet \otimes \bullet X^2 + q\bullet \otimes \bullet\bullet X, \\ \Delta(V) &= V \otimes X^3 + 1 \otimes V + \bullet\bullet \otimes \bullet X^2 + (1+q)\bullet \otimes \dagger X, \\ \Delta(\dagger\dagger) &= \dagger\dagger \otimes X^3 + 1 \otimes \dagger\dagger + \dagger \otimes \bullet X^2 + \bullet \otimes \dagger X, \end{aligned}$$

$$XF = q^{\text{poids}(F)} FX.$$

### 5.5. Algèbres $\mathcal{H}_\bullet(V)$ et $B(V)$

On suppose que  $V \in_C^C \mathcal{YD}$  et qu'il existe une algèbre de Hopf  $C'$ ,  $V' \in_{C'}^C \mathcal{YD}$  et  $(\cdot)_V$  un couplage de Yetter–Drinfeld non dégénéré entre  $V'$  et  $V$  (par exemple,  $C$  et  $V$  sont de dimension finie, ou encore  $V$  est diagonal). D'après la proposition 35,  $\mathcal{H}_\bullet(V)$  est un sous-module de Yetter–Drinfeld de  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et donc une algèbre de Hopf dans  ${}^C_C \mathcal{YD}$ . Il en est de même pour  $\mathcal{H}_\bullet(V')$ . D'après les propriétés 8 et 8',  $\mathcal{H}_\bullet(V')^\perp$  est un sous-module de Yetter–Drinfeld et donc  $B(V)$  est une algèbre de Hopf dans  ${}^C_C \mathcal{YD}$ . Plus précisément :

**Théorème 47** (voir [1,16,18]).  $B(V)$  est l'algèbre de Nichols de  $V$ .

**Preuve.** Il s'agit de montrer que :

1.  $B(V)$  est engendrée comme algèbre par  $V$  ;
2.  $\text{Prim}(B(V)) = V$ .

Le premier point est immédiat. Soit  $p$  un élément primitif de  $B(V)$  et supposons qu'il n'appartient pas à  $V$ . On peut alors le supposer homogène de degré supérieur ou égal à 2. Soit  $q \in \mathcal{H}_\bullet(V)$  un antécédent de  $p$ , homogène de même degré que  $p$ . On a alors :

$$\Delta(q) \equiv q \otimes 1 + 1 \otimes q [\mathcal{H}_\bullet(V')^\perp \otimes \mathcal{H}_\bullet(V) + \mathcal{H}_\bullet(V) \otimes \mathcal{H}_\bullet(V')^\perp].$$

Par suite,  $(q) + \mathcal{H}_\bullet(V')^\perp \cap \mathcal{H}_\bullet(V)$  est un coïdéal de  $\mathcal{H}_\bullet(V)$ , gradué et concentré en degré supérieur ou égal à 2. Comme  $\mathcal{H}_\bullet(V')^\perp \cap \mathcal{H}_\bullet(V)$  est le plus grand coïdéal gradué de  $\mathcal{H}_\bullet(V)$  concentré en degré supérieur ou égal à 2 (proposition 32(2)),  $q \in \mathcal{H}_\bullet(V')^\perp \cap \mathcal{H}_\bullet(V)$ , donc  $p = 0$  : contradiction. Donc  $\text{Prim}(B(V)) = V$ .  $\square$

**Exemple.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple,  $(a_{i,j})$  sa matrice de Cartan,  $q \in \mathbb{C}^*$ . On prend  $q_{i,j} = q^{a_{i,j}}$ . Alors si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors  $B(V')$  est isomorphe à  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$  ; si  $q$  est une racine de l'unité,  $B(V')$  est isomorphe à  $u_q^+(\mathfrak{g})$  (voir [1]).

**6. Double quantique d’une algèbre  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , avec  $V$  diagonal et symétrique**

6.1. Construction du double

Soit  $V$  un espace tressé diagonal. Il est dit symétrique si  $q_{i,j} = q_{j,i}$  pour tout couple  $(i, j)$ . On a alors  $(V, c) = (V', c')$ . On prend  $\mathcal{C} = k[X_i^{\pm 1}, i \in \mathcal{D}]$ .

**Lemme 48.** *La forme bilinéaire suivante est un couplage de Hopf symétrique entre  $\mathcal{C}$  et elle-même :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}, (X^\alpha, X^\beta)_{\mathcal{C}} = q_{\alpha,\beta}$ .*

**Preuve.** Immédiat.  $\square$

Par suite, d’après le théorème 43, on a un couplage de Hopf  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}\mathcal{C}} : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V) \times \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V) \rightarrow K$  défini de la manière suivante : pour  $x, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V), \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}$  :

$$(xX^\alpha, yX^\beta) = (x, y)q_{\alpha,\beta}.$$

On pose  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $\mathcal{H}^- = \mathcal{H}_{P,R}(V)^{cop}$ . On peut donc construire un double quantique entre  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V) = \mathcal{H}^+ \sharp \mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{C}}(V)^{cop} = \mathcal{H}^- \sharp \mathcal{C}$  à l’aide de la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}\mathcal{C}}$  (voir [8,9,14]). On le note  $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ . On pose  $X_*^\alpha = X^{-\alpha} \in \mathcal{H}^+$ . On peut alors décrire  $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  de la manière suivante :

**Théorème 49.**  *$\mathcal{H}^+ \sharp \mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}^- \sharp \mathcal{C}$  sont des sous-algèbres de  $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ . De plus, l’application suivante est un isomorphisme d’espaces vectoriels :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^- \sharp \mathcal{C}) \otimes (\mathcal{H}^+ \sharp \mathcal{C}) &\rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}_{P,R}(V)), \\ yX^\beta \otimes xX_*^\alpha &\rightarrow yX^\beta xX_*^\alpha. \end{aligned}$$

On a de plus les relations suivantes, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}, x \in \mathcal{H}^+, y \in \mathcal{H}^-$ , homogènes :

$$\begin{aligned} X_*^\alpha x &= q_{\alpha,|x|}^{-1} x X_*^\alpha, & X_*^\alpha y &= q_{\alpha,|y|} X_*^\alpha y, \\ X^\beta y &= q_{\beta,|y|} y X^\beta, & x X^\beta &= q_{\beta,|x|} X^\beta x, \\ X^\beta X_*^\alpha &= X_*^\alpha X^\beta, \end{aligned}$$

$$xy = \sum \sum q_{|x''|,|y''|}^{-1} q_{|x''|,|y''|}^{-1} q_{|x'''|,|y'''|}^{-1} (y', T^{-1}(x'''))(y''', x') y'' x'' X^{|y''|} X_*^{-|x''|}.$$

Le coproduit est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \sum x' X_*^{-|x''|} \otimes x'', & \Delta(y) &= \sum y'' \otimes y' X^{|y''|}, \\ \Delta(X_*^\alpha) &= X_*^\alpha \otimes X_*^\alpha, & \Delta(X^\beta) &= X^\beta \otimes X^\beta, \end{aligned}$$

où  $\Delta_c(x) = \sum x' \otimes x''$  est le coproduit de  $x$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $\Delta_c(y) = \sum y' \otimes y''$  le coproduit de  $y$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ .

**Remarque.** Les coefficients  $q_{i,j}$  étant tous non nuls,  $c$  est inversible; d’après la proposition 23,  $T$  est inversible et donc les formules précédentes ont bien un sens.

On considère l'idéal de  $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  engendré par les éléments  $X^\alpha - X_*^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}$ . Il s'agit d'un coïdéal : en effet,

$$\begin{aligned} \Delta(X^\alpha - X_*^\alpha) &= X^\alpha \otimes X^\alpha - X_*^\alpha \otimes X_*^\alpha \\ &= (X^\alpha - X_*^\alpha) \otimes X^\alpha + X_*^\alpha \otimes (X^\alpha - X_*^\alpha). \end{aligned}$$

Il est stable par l'antipode, car  $S(X^\alpha - X_*^\alpha) = X^{-\alpha} - X_*^{-\alpha}$ . C'est donc un idéal de Hopf. Le quotient de  $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  par cet idéal est noté  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ . On a immédiatement, d'après le théorème précédent :

**Théorème 50.**  $\mathcal{H}^+$ ,  $\mathcal{H}^-$  et  $\mathcal{C}$  sont des sous-algèbres de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ . De plus, l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^- \otimes \mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{C} &\rightarrow D(\mathcal{H}_{P,R}(V)), \\ y \otimes x \otimes X^\alpha &\rightarrow xyX^\alpha. \end{aligned}$$

On a de plus les relations suivantes, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}$ ,  $x \in \mathcal{H}^+$ ,  $y \in \mathcal{H}^-$ , homogènes :

$$X^\alpha x = q_{\alpha,|x|}^{-1} x X^\alpha, \quad X^\alpha y = q_{\alpha,|y|} y X^\alpha, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} xy &= \sum \sum q_{|x'''|,|y''|}^{-1} q_{|x''|,|y'''}^{-1} q_{|x'''|,|y'''}^{-1} (y', T^{-1}(x'''))_{\mathcal{H}} \\ &\quad \times (y''', x')_{\mathcal{H}} y'' x'' X^{|y''''|-|x''''|}. \end{aligned} \tag{26}$$

Le coproduit est donné de la manière suivante, où  $\Delta_c(x) = \sum x' \otimes x''$  est le coproduit de  $x$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  et  $\Delta_c(y) = \sum y' \otimes y''$  le coproduit de  $y$  dans  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$  :

$$\Delta(x) = \sum x' X^{-|x''|} \otimes x'', \quad \Delta(y) = \sum y'' \otimes y' X^{|y''|}, \quad \Delta(X^\alpha) = X^\alpha \otimes X^\alpha. \tag{27}$$

De plus, l'antipode est donné par :

$$S(x) = X^{|x|} T(x), \quad S(y) = T^{-1}(y) X^{-|y|}, \quad S(X^\alpha) = X^{-\alpha}. \tag{28}$$

Son inverse est donné par :

$$S^{-1}(x) = T^{-1}(x) X^{|x|}, \quad S^{-1}(y) = X^{-|y|} T(y), \quad S^{-1}(X^\alpha) = X^{-\alpha}. \tag{29}$$

**Preuve.** Vérifions que les formules données donnent bien l'antipode de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  :

$$\begin{aligned} (S \star Id)(y) &= \sum T^{-1}(y'') X^{-|y''|} y' X^{|y''|} = \sum q_{|y''|,|y''|}^{-1} T^{-1}(y'') y' \\ &= T^{-1}\left(\sum T(y') y''\right) = T^{-1}(\varepsilon(y) 1) = \varepsilon(y) 1, \end{aligned}$$

$$(Id \star S)(x) = \sum x' X^{-|x''|} X^{|x''|} T(x'') = \sum x' T(x'') = \varepsilon(x) 1,$$

$$(Id \star S)(X^\alpha) = X^\alpha X^{-\alpha} = 1 = \varepsilon(X^\alpha) 1.$$

Comme  $S$  est un antimorphisme d'algèbres :

$$S(T^{-1}(x) X^{|x|}) = X^{-|x|} X^{|x|} T(T^{-1}(x)) = x,$$

$$S(X^{-|y|} T(y)) = T^{-1}(T(y)) X^{|-y|} X^{|y|} = y,$$

$$S(X^{-\alpha}) = X^\alpha.$$

Donc  $S$  est inversible et son inverse est donné par les formules annoncées.  $\square$

**Proposition 51.** Soient  $E \in \mathcal{H}^+$ , primitif et homogène,  $F \in \mathcal{H}^-$ , primitif et homogène. Alors, dans  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  :

$$[E, F] = (F, E)_{\mathcal{H}}(X^{|F|} - X^{-|E|}).$$

**Preuve.** Dans  $\mathcal{H}^+$ , on a  $T(E) = -E$ , donc  $T^{-1}(E) = -E$ . De plus,

$$E' \otimes E'' \otimes E''' = E \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E,$$

$$F' \otimes F'' \otimes F''' = F \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes F \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes F.$$

Le résultat découle immédiatement de (26).  $\square$

### 6.2. Liens avec les groupes quantiques

**Proposition 52.** 1. Soient  $S$  une sous-algèbre de Hopf graduée de  $\mathcal{H}^+$ ,  $S'$  une sous-algèbre de Hopf graduée de  $\mathcal{H}^-$ . Alors  $SS'C$  est une sous-algèbre de Hopf graduée de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$ .

2. Soient  $I \subseteq \{x \in S \mid (x, S')_{\mathcal{H}} = 0\}$  un biidéale gradué de  $S$  et  $I' \subseteq \{f \in S' \mid (S, f)_{\mathcal{H}} = 0\}$  un biidéale gradué de  $S'$ . Alors  $IS'C$  et  $S'I'C$  sont des biidéaux de  $SS'C$ .

**Preuve.** 1. Soient  $x_1, x_2 \in S$ ,  $y_1, y_2 \in S'$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}^D$ . On pose  $\Delta(x_2) = \sum x'_2 \otimes x''_2$ ,  $x'_2, x''_2 \in S$ ,  $\Delta(y_1) = \sum y'_1 \otimes y''_1$ ,  $y'_1, y''_1 \in S'$ . Alors  $x_1 y_1 X^{\alpha_1} x_2 y_2 X^{\alpha_2}$  est une combinaison linéaire de termes de la forme  $x_1 x'_2 y'_1 y''_2 X^{\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma}$  et est donc dans  $SS'C$ .

Montrons que  $\Delta(SS'C) \subseteq SS'C \otimes SS'C$ . Comme  $SS'C$  est une sous-algèbre de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  engendrée par  $S \cup S' \cup C$ , il suffit de montrer que  $\Delta(x) \in SS'C \otimes SS'C$  pour  $x \in S, S'$  ou  $C$ . C'est immédiat si  $x \in C$ . Si  $x \in S$ , on peut le supposer homogène. On a alors :

$$\Delta(x) = \sum x' X^{-|x''|} \otimes x'' \in SS'C \otimes SS'C.$$

On procède de même pour  $x \in S'$ .

2. Montrons que  $IS'C$  est un idéal à gauche. Soit  $x \in SS'C$ ,  $abX^\alpha \in IS'C$ . On peut supposer  $a$  et  $b$  homogènes. Il suffit de montrer que  $xabX^\alpha \in IS'C$  dans les trois cas suivants :

1.  $x \in S$  : découle du fait que  $I$  est un idéal à gauche de  $S$ .
2.  $x \in S'$  : on pose

$$(\Delta_V \otimes Id) \circ \Delta_V(a) = \sum a' \otimes a'' \otimes a''',$$

avec  $a', a''$  ou  $a''' \in I$  car  $I$  est un coidéale. Alors  $xabX^\alpha$  est une combinaison linéaire de  $(S^{-1}(x'), a')_{\mathcal{H}^C}(x''', a''')_{\mathcal{H}} a'' x'' f X^\alpha$ . Si  $a'' \notin I$ , alors  $a'$  ou  $a''' \in I \subseteq \{b \in S \mid (b, S') = 0\}$ , donc  $(S^{-1}(x'), a')_{\mathcal{H}^C}$  ou  $(x''', a''')_{\mathcal{H}}$  est nul. Donc  $xabX^\alpha \in IS'C$ .

3.  $x = X^\beta$  : alors  $xabX^\alpha = q_{\beta, |a| - |f|} abX^{\alpha + \beta} \in IS'C$ .

On montre de même qu'il s'agit d'un idéal à droite. Pour montrer qu'il s'agit d'un biidéale, il suffit de montrer que  $\Delta(I) \subseteq IS'C \otimes SS'C + SS'C \otimes IS'C$ . Soit  $a \in I$ , on peut

le supposer homogène. Alors  $\Delta_{\mathcal{H}}(a) = \sum a' \otimes a''$ , les  $a', a''$  homogènes,  $a'$  ou  $a'' \in I$ , et par suite :

$$\Delta(a) = \sum a' X^{-|a''|} \otimes a'' \in IS'C \otimes SS'C + SS'C \otimes IS'C.$$

On procède de même pour  $SI'C$ .  $\square$

**Corollaire 53.** Soient  $S$  une sous-algèbre de Hopf graduée de  $\mathcal{H}^+$ ,  $S'$  une sous-algèbre de Hopf graduée de  $\mathcal{H}^-$ ,  $I \subseteq \{x \in S \mid (x, S')_{\mathcal{H}} = 0\}$  un biidéale gradué de  $S$  et  $I' \subseteq \{f \in S' \mid (S, f)_{\mathcal{H}} = 0\}$  un biidéale gradué de  $S'$ . Alors l'espace suivant est muni d'une structure de bigèbre provenant de  $D(\mathcal{H}_{P,R}(V))$  :

$$D(S, S', I, I') = \frac{SS'C}{IS'C + SI'C}.$$

De plus, l'application suivante est un isomorphisme d'espace vectoriels :

$$\begin{aligned} \frac{S}{I} \otimes \frac{S'}{I'} \otimes C &\rightarrow D(S, S', I, I'), \\ \bar{a} \otimes \bar{b} \otimes X^\alpha &\rightarrow \overline{abX^\alpha}. \end{aligned}$$

**Exemple.** Reprenons l'exemple de la partie 5.5. On prend  $S = S' = \mathcal{H}_\bullet(V)$  et  $I = I' = \mathcal{H}_\bullet(V) \cap \mathcal{H}_\bullet(V)^\perp$ . Alors  $\frac{S}{I} = B(V)$  et  $\frac{S'}{I'} = B(V)^{cop}$ . A l'aide de la proposition 51, on montre que :

1. Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors  $B(V)$  est isomorphe à  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$  et  $D(S, S', I, I')$  est isomorphe à  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  ;
2. Si  $q$  est une racine de l'unité, alors  $B(V)$  est isomorphe à  $u_q^+(\mathfrak{g})$  et  $D(S, S', I, I')$  est isomorphe à  $u_q(\mathfrak{g})$ .

## 7. Interprétation combinatoire du couplage $(, )$

### 7.1. Action du groupe de tresses

**Définition 54.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , des indéterminées. Pour toute tresse  $b \in \mathcal{B}_n$ , choisissons  $D$  un diagramme représentant  $b$ . On pose alors, pour tout croisement  $c$  de  $g$  :

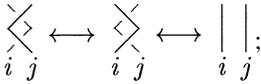
$$\begin{aligned} \text{si } c = \begin{array}{c} \diagdown \\ i \quad j \\ \diagup \end{array}, & \quad h(c) = i, \quad b(c) = j, \quad \varepsilon(c) = 1; \\ \text{si } c = \begin{array}{c} \diagup \\ i \quad j \\ \diagdown \end{array}, & \quad h(c) = j, \quad b(c) = i, \quad \varepsilon(c) = -1. \end{aligned}$$

On pose alors  $P_b(X) = \prod_{c \text{ croisement de } D} X_{h(c), b(c)}^{\varepsilon(c)} \in K[X_{i,j}^{\pm 1}, 1 \leq i, j \leq n]$ .

**Remarque.**  $P_b(X)$  ne dépend pas du choix de  $D$  ; en effet, d'après [8], si  $D$  et  $D'$  sont deux diagrammes représentant  $b$ , on passe  $d$  e l'un à l'autre par les opérations locales suivantes :

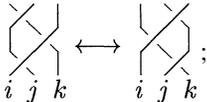
1. une isotopie, ce qui ne modifie pas les croisements et donc ne modifie pas  $P_b(X)$  ;

2. une transformation



les contributions de ces trois sous-diagrammes sont respectivement  $X_{j,i}^{-1} X_{j,i}, X_{i,j} X_{i,j}^{-1}$  et 1 : elles sont donc égales ;

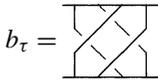
3. une transformation



les contributions de ces deux sous-diagrammes sont respectivement  $X_{i,j} X_{i,k} X_{j,k}$  et  $X_{j,k} X_{i,k} X_{i,j}$  : elles sont donc égales.

Pour tout  $\tau \in S_n$ , on pose  $P_\tau(X) = P_{b_\tau}(X) \in K[X_{i,j}^{\pm 1}, 1 \leq i, j \leq n]$  (on rappelle que  $b_\tau$  est définie dans la section 3.3). On remarque que  $P_\tau(X)$  est un monôme de  $K[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n]$  de degré la longueur de  $\tau$ .

**Exemple.** On prend  $\tau = (1\ 3)(2\ 4)$ . Alors



et donc  $P_\tau(X) = X_{1,3} X_{1,4} X_{2,3} X_{2,4}$ .

Le lemme suivant se démontre facilement par récurrence sur le nombre de croisements d'un diagramme de la tresse  $b$  :

**Lemme 55.** Soit  $(V, c)$  un espace tressé avec  $c$  inversible et  $w_1, \dots, w_n \in V$ , tels que pour tous  $i, j, c(w_i \otimes w_j) = p_{i,j} w_j \otimes w_i$ , les  $p_{i,j}$  étant des éléments de  $K$ . Alors pour tout  $b \in \mathcal{B}_n$ ,

$$b.(w_1 \otimes \dots \otimes w_n) = P_b(p_{i,j})(\pi(b).(w_1 \otimes \dots \otimes w_n)),$$

où  $\pi : \mathcal{B}_n \rightarrow S_n$  est la surjection envoyant  $\sigma_i$  sur  $\tau_i$  pour tout  $i \leq n - 1$ .

7.2. Applications aux algèbres  $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ , avec  $V$  diagonal

Reprenons les notations des propositions 20 et 21. Pour toute coupe  $c$ , soit  $\tau_c$  l'élément de  $S_n$  envoyant 1 sur  $i_1, \dots, k$  sur  $i_k, k + 1$  sur  $j_1, \dots, k + l = n$  sur  $j_l$ . Notons que  $\tau_c$  est un  $(k, l)$ -battage. Alors, par définition,  $a_c = b_{(i),(j)} = b_{\tau_c}$ . D'après le lemme 55, on a alors :

**Proposition 56.** Soit  $F \in \mathcal{F}_{P,R}^D$ . Les sommets de  $s$  sont totalement ordonnés par  $\geq_{b,d}$  :  $s_n \geq_{b,d} \dots \geq_{b,d} s_1$ . On note  $d_i$  la décoration du sommet  $s_i$  de  $F$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta_c(F) &= \sum_{c \in \text{Ad}_*(F)} P_{\tau_c}(q_{d_i, d_j}) P^c(F) \otimes R^c(F) \\ &= \sum_{c \in \text{Ad}(F)} P_{\tau_c}(q_{d_i, d_j}) P^c(F) \otimes R^c(F) + F \otimes 1 + 1 \otimes F. \end{aligned}$$

**Définition 57.** Soient  $F$  et  $G$  deux éléments de  $\mathcal{F}_{P,R}^D$ . Soient  $s_n \geq_{b,d} \dots \geq_{b,d} s_1$  les sommets de  $F$  et  $s'_m \geq_{b,d} \dots \geq_{b,d} s'_1$  les sommets de  $G$ . On note  $S(F, G)$  l'ensemble des applications  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, m\}$  vérifiant :

1.  $\sigma$  est bijective.
2. Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s_i \geq_{\text{haut}} s_j \Rightarrow s'_{\sigma(i)} \geq_{\text{gauche}} s'_{\sigma(j)}$ .
3. Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s'_{\sigma(i)} \geq_{\text{haut}} s'_{\sigma(j)} \Rightarrow s_i \geq_{\text{gauche}} s_j$ .
4. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s_i$  et  $s'_{\sigma(i)}$  ont la même décoration.

**Théorème 58.** Soient  $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^D$ ; on note  $d_i$  la décoration du sommet de  $G$  indexé par  $i$ . Alors :

$$(F, G)_{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma \in S(F, G)} P_{\sigma}(q_{d_i, d_j}).$$

**Preuve.** C'est vrai si  $\text{poids}(F) \neq \text{poids}(G)$ , car alors  $(F, G)_{\mathcal{H}} = 0$  et il n'y a aucune bijection de  $\{1, \dots, n\}$  vers  $\{1, \dots, m\}$ . Supposons donc  $\text{poids}(F) = \text{poids}(G) = n$  et procédons par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , alors  $(\bullet_d, \bullet_{d'})_{\mathcal{H}} = \delta_{d, d'}$ . De plus,  $S(\bullet_d, \bullet_{d'}) = \{e\}$  si  $d = d'$  et  $\emptyset$  sinon par la condition 4, d'où le résultat.

Supposons la propriété vérifiée pour tout  $k < n$  et soient  $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^D$  de poids  $n$ . Posons  $F = t_1 \dots t_m$ .

Si  $m = 1$  : posons  $F = t_1 = B_d^+(F')$ . Alors  $(F, G)_{\mathcal{H}} = (F', \gamma_d(G))_{\mathcal{H}}$ .

Si  $G$  n'est pas de la forme  $G' \bullet_{d'}$  : alors  $(F, G)_{\mathcal{H}} = 0$ . Supposons  $S(F, G)$  non vide et soit  $\sigma \in S(F, G)$ . Remarquons que  $\forall s \in \text{som}(F)$ ,  $s \geq_{\text{haut}} \text{racine de } t_1$ . Par la condition 2,  $\exists s'_i \in \text{som}(G)$ ,  $s' \geq_{\text{gauche}} s'_i$ ,  $\forall s' \in \text{som}(G)$  ( $i$  est l'image par  $\sigma$  de l'indice de la racine de  $t_1$ , c'est-à-dire  $n$ ). Donc  $G = G' \bullet_{d'}$  et  $\sigma(n) = n$ . Par la condition 4,  $d' = d$  : on aboutit à une contradiction. Par suite,  $S(F, G) = \emptyset$ , d'où le résultat.

Si  $G = G' \bullet_{d'}$  : alors pour toute  $\sigma \in S(F, G)$ ,  $\sigma(n) = n$ . Donc on a une bijection :  $S(F, G) \rightarrow S(F', G')$ , envoyant  $\sigma$  sur  $\sigma'$  définie par  $\sigma'(i) = \sigma(i)$ . De plus,  $b_{\sigma}$  est obtenue en ajoutant un brin à droite de la tresse  $b_{\sigma'}$  ; par suite,  $P_{b_{\sigma}}(X) = P_{b_{\sigma'}}(X)$ . Comme  $(F, G)_{\mathcal{H}} = (F', G')_{\mathcal{H}}$ , le résultat est acquis.

Si  $m > 1$  : posons  $F' = t_1 \dots t_{m-1}$ . Alors :

$$\begin{aligned} (F, G)_{\mathcal{H}} &= \sum_{c \in \text{Ad}(G)} P_{\tau_c}(q_{d_i, d_j}) (F', P^c(G))_{\mathcal{H}} (t_m, R^c(G))_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{c \in \text{Ad}_*(G)} P_{\tau_c}(q_{d_i, d_j}) (F', P^c(G)) (t_m, R^c(G)). \end{aligned} \tag{30}$$

Pour simplifier les notations, pour toute  $\sigma \in S(F, G)$ , on note  $f_{\sigma} : \text{som}(F) \rightarrow \text{som}(G)$  la bijection donnée par  $f_{\sigma}(s_i) = s'_{\sigma(i)}$ . Soit  $\sigma \in S(F, G)$  ; considérons  $f_{\sigma}(\text{som}(t_m))$ . Soit  $s'$  un

sommet de  $G$ , tel qu'il existe  $s \in \text{som}(t_m)$ ,  $f_\sigma(s) \geq_{\text{haut}} s'$ . Supposons  $s' \notin f_\sigma(\text{som}(t_m))$ . Alors  $s \in f_\sigma(\text{som}(F'))$ . Soit  $t \in \text{som}(F')$ , tel que  $f_\sigma(t) = s'$ . Comme  $f_\sigma(s) \geq_{\text{haut}} f_\sigma(t)$ , d'après la condition 3,  $s \geq_{\text{gauche}} t$ . Or  $s \in \text{som}(t_m)$ ,  $t \in \text{som}(F')$ , donc  $t \geq_{\text{gauche}} s$ , et donc  $s = t$  : contradiction, car  $s \in \text{som}(t_m)$ ,  $t \in \text{som}(F')$ . Donc  $s' \in f_\sigma(\text{som}(t_m))$ . Par suite, il existe une coupe admissible  $c_\sigma$  de  $G$ , telle que  $R^{c_\sigma}(G) = f_\sigma(\text{som}(t_m))$ . Etant donnée la définition d'une coupe admissible,  $c_\sigma$  est entièrement déterminée par  $R^{c_\sigma}(G)$  et donc  $c_\sigma$  est unique.

On a donc une application :

$$\beta : S(F, G) \rightarrow \bigcup_{c \in \text{Ad}_*(G)} S(F', P^c(G)) \times S(t_m, R^c(G)),$$

semblable à celle de [4,5]. On montre facilement qu'elle est bijective. De plus, si  $\beta(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2) \in S(F', P^c(G)) \times S(t_m, R^c(G))$ , alors  $b_\sigma = (b_{\sigma(1)} \otimes b_{\sigma(2)})b_{\tau(c)}$ , où  $b_{\sigma(1)} \otimes b_{\sigma(2)}$  est obtenue en accollant  $b_{\sigma(1)}$  à gauche de  $b_{\sigma(2)}$ . Par suite, si  $(i_1, \dots, i_k)$  sont les sommets de  $P^c(G)$  et  $(j_1, \dots, j_l)$  sont les sommets de  $R^c(G)$ ,  $P_\sigma(X_{d_i, d_j}) = P_{\sigma_1}(X_{d_{i_\alpha}, d_{i_\beta}})P_{\sigma_2}(X_{d_{j_\alpha}, d_{j_\beta}})P_{\tau_c}(X_{d_i, d_j})$ . En conséquence :

$$\begin{aligned} (F, G)_\mathcal{H} &= \sum_{c \in \text{Ad}_*(G)} P_{\tau_c}(q_{d_i, d_j})(F', P^c(G))_\mathcal{H}(t_m, R^c(G))_\mathcal{H} \\ &= \sum_{c \in \text{Ad}_*(G)} \sum_{\sigma_1 \in S(F', P^c(G))} \sum_{\sigma_2 \in S(F', R^c(G))} P_{\sigma_1}(q_{d_{i_\alpha}, d_{i_\beta}}) \\ &\quad \times P_{\sigma_2}(q_{d_{j_\alpha}, d_{j_\beta}})P_{\tau_c}(q_{d_i, d_j}) \\ &= \sum_{S(F, G)} P_\sigma(q_{d_i, d_j}). \end{aligned}$$

(On a utilisé (30) pour la première égalité et l'hypothèse de récurrence pour la deuxième égalité.)  $\square$

### 7.3. Applications lorsque $V$ est de dimension 1

Supposons  $V$  de dimension 1. Soit alors  $q$  l'unique élément de  $K$  tel que  $c(v \otimes w) = qw \otimes v$  pour tous  $v, w \in V$ . D'après la remarque 2 suivant la définition 54, les résultats précédents prennent la forme ci-dessous :

**Proposition 59.** Soient  $F, G \in \mathcal{F}_{P, R}$ . On a :

$$\begin{aligned} \Delta_c(F) &= \sum_{c \in \text{Ad}_*(F)} q^{l(\sigma_c)} P^c(F) \otimes R^c(F) \\ &= \sum_{c \in \text{Ad}(F)} q^{l(\sigma_c)} P^c(F) \otimes R^c(F) + F \otimes 1 + 1 \otimes F, \\ (F, G)_\mathcal{H} &= \sum_{\sigma \in S(F, G)} q^{l(\sigma)}. \end{aligned}$$

**Définition 60** (voir [8]). Soit  $q \in K$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \leq n$ , on pose :

$$(n)_q = 1 + \dots + q^{n-1}, \quad (n)_q! = (1)_q \dots (n)_q, \quad \binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}.$$

Pour toute forêt  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$ , on pose :

$$(F)_q! = \prod_{s \in \text{som}(F)} (\text{card}(\{s' \in \text{som}(F) \mid s' \geq_{\text{haut}} s\}))_q.$$

**Remarque.**  $(F)_q!$  peut être défini par récurrence sur le poids de  $F$  par les formules suivantes :

$$(1)_q! = 1, \quad (F_1 F_2)_q! = (F_1)_q! (F_2)_q!, \quad (B^+(F))_q! = (F)_q! (\text{poids}(B^+(F)))_q.$$

**Proposition 61.** Soit  $F \in \mathcal{F}_{P,R}$  de poids  $n$ . Alors  $(F, \bullet^n)_{\mathcal{H}} = (n)_q! / (F)_q!$ .

**Preuve.** Par récurrence sur le poids de  $F$ . C'est immédiat si  $F = 1$ . Sinon, deux cas se présentent :

1.  $F = B^+(G)$  ; on a alors :

$$(F, \bullet^n)_{\mathcal{H}} = (G, \gamma(\bullet^n))_{\mathcal{H}} = (G, \bullet^{n-1}) = \frac{(n-1)_q!}{(G)_q!} = \frac{(n)_q!}{(n)_q!(G)_q!} = \frac{(n)_q!}{(F)_q!}.$$

2. Il existe  $F_1, F_2$  forêts de poids strictement inférieur à  $n$ , telles que  $F = F_1 F_2$ . On pose  $n_i = \text{poids}(F_i)$ . On a alors  $\Delta(\bullet^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q \bullet^k \otimes \bullet^{n-k}$ . Par suite :

$$\begin{aligned} (F, \bullet^n)_{\mathcal{H}} &= (F_1 \otimes F_2, \Delta(\bullet^n))_{\mathcal{H}} = \left( F_1 \otimes F_2, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q \bullet^k \otimes \bullet^{n-k} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \binom{n}{n_1}_q (F_1, \bullet^{n_1})(F_2, \bullet^{n_2})_{\mathcal{H}} + 0 = \frac{(n)_q!}{(n_1)_q!(n_2)_q!} \frac{(n_1)_q! (n_2)_q!}{(F_1)_q! (F_2)_q!} \\ &= \frac{(n)_q!}{(F_1)_q!(F_2)_q!} = \frac{(n)_q!}{(F)_q!}. \quad \square \end{aligned}$$

Soient  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^k$ , avec  $n = n_1 + \dots + n_k$ . L'ensemble des éléments  $\sigma$  de  $S_n$  tels que  $\sigma$  est croissante sur  $\{1, \dots, n_1\}, \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}, \dots, \{n_1 + \dots + n_{k-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_k\}$  est appelé  $\text{bat}(n_1, \dots, n_k)$ . Notons que  $\text{bat}(1, \dots, 1) = S_n$ .

**Corollaire 62.** Soient  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^k$ , avec  $n = n_1 + \dots + n_k$ . On a alors :

$$\frac{(n)_q!}{(n_1)_q! \dots (n_k)_q!} = \sum_{\sigma \in \text{bat}(n_1, \dots, n_k)} q^{l(\sigma)}.$$

En particulier, pour  $k = n$  et  $n_1 = \dots = n_n = 1$  :

$$(n)_q! = \sum_{\sigma \in S_n} q^{l(\sigma)}.$$

**Remarque.** La deuxième formule est démontrée de manière différente dans [7,19].

**Preuve.** Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $l_i = (B^+)^i(1)$ , c'est-à-dire :

$$l_0 = 1, \quad l_1 = \bullet, \quad l_2 = \updownarrow, \quad l_3 = \updownarrow\updownarrow, \quad l_4 = \updownarrow\updownarrow\updownarrow, \quad l_5 = \updownarrow\updownarrow\updownarrow\updownarrow, \dots$$

Calculons  $(l_{n_1} \dots l_{n_k}, \bullet^n)_{\mathcal{H}}$  de deux manières différentes.

Par définition,  $S(l_{n_1} \dots l_{n_k}, \bullet^n) = \text{bat}(n_1, \dots, n_k)$ , donc :

$$(l_{n_1} \dots l_{n_k}, \bullet^n)_{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma \in \text{bat}(n_1, \dots, n_k)} q^{l(\sigma)}.$$

De plus,  $(l_{n_1} \dots l_{n_k})_q! = (n_1)_q! \dots (n_k)_q!$ , donc :

$$(l_{n_1} \dots l_{n_k}, \bullet^n)_{\mathcal{H}} = \frac{(n)_q!}{(n_1)_q! \dots (n_k)_q!},$$

d'où le résultat annoncé.  $\square$

## Références

- [1] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, Pointed Hopf algebras, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 43 (2002) 1–68, math.QA/0110136.
- [2] A. Connes, D. Kreimer, Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry, *Comm. Math. Phys.* 199 (1) (1998) 203–242, hep-th/9808042.
- [3] A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem I. The Hopf algebra of graphs and the main theorem, *Comm. Math. Phys.* 210 (1) (2000) 249–273, hep-th/9912092.
- [4] L. Foissy, Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés, Thèse de doctorat, Université de Reims, 2002.
- [5] L. Foissy, Les algèbres de Hopf des arbres enracinés, I, *Bull. Sci. Math.* 126 (2002) 193–239.
- [6] L. Foissy, Les algèbres de Hopf des arbres enracinés, II, *Bull. Sci. Math.* 126 (2002) 249–288.
- [7] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, in: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 29, 1990.
- [8] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] Ch. Kassel, M. Rosso, V. Turaev, *Quantum Groups and Knot Invariants*, in: Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France, 1997.
- [10] D. Kreimer, On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (2) (1998) 303–334, q-alg/9707029.
- [11] D. Kreimer, On overlapping divergences, *Comm. Math. Phys.* 204 (3) (1999) 669–689, hep-th/9810022.
- [12] D. Kreimer, Combinatorics of (perturbative) Quantum Field Theory, *Phys. Rep.* 4–6 (2002) 387–424.
- [13] S. Majid, Crossed products by braided group and bosonization, *J. Algebra* 163 (1994) 165–190.
- [14] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [15] J.W. Milnor, J.C. Moore, On the structure of Hopf algebras, *Ann. of Math.* (2) 81 (1965) 211–264.
- [16] W.D. Nichols, Bialgebras of type one, *Commun. Alg.* 6 (1978) 1521–1552.
- [17] D. Radford, Hopf algebras with projection, *J. Algebra* 92 (1985) 322–347.
- [18] M. Rosso, Quantum groups and quantum shuffles, *Inventiones Math.* 133 (1998) 399–416.
- [19] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, II, in: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 62, 1999.
- [20] M. Takeuchi, Survey of braided Hopf algebras, *Contemp. Math.* 267 (2000) 301–324.