Journal of Number Theory **83**, 226–255 (2000)
doi:10.1006/jnth.1999.2490, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

# Hauteur des hypersurfaces et fonctions Zêta d'Igusa

Julien Cassaigne

*Institut de Mathématiques de Luminy, 163 avenue de Luminy, Case 907,*
*F-13288 Marseille Cedex 9, France*
E-mail: cassaigne@iml.univ-mrs.fr

et

Vincent Maillot

*Département de Mathématiques et d'Informatique, École Normale Supérieure*



*Communicated by M. Waldschmidt*

Received July 16, 1999; published online June 2, 2000

On associe à toute hypersurface $Z$ dans $\mathbf{P}^N$ définie par l'annulation d'un polynôme $P$ deux fonctions Zêta $\zeta_{\mathscr{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$. Leur dérivée en zéro est reliée à la hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(Z)$ de $Z$ pour la métrique de Fubini–Study. Pour certaines hypersurfaces, on donne des expressions intégrales simples de $\zeta_E(P, s)$. On en déduit le calcul de la hauteur de certaines hypersurfaces toriques et de certaines quadriques. Comme cas particulier, on obtient la hauteur de la grassmannienne $\mathbf{G}(2, 4)$ vue comme hypersurface dans $\mathbf{P}^5$ grâce au plongement de Plücker: c'est un nombre rationnel. 

## 1. INTRODUCTION: HAUTEUR DES HYPERSURFACES PROJECTIVES

Soient $\mathscr{X}$ une variété arithmétique (i.e., un schéma projectif intègre régulier et plat sur Spec $\mathbb{Z}$), $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathscr{X}$ et $Z$ un cycle de dimension (absolue) $p$ dans $\mathscr{X}$. Notons $\widehat{\deg}$ le degré arithmétique tel qu'il est défini dans [BGS] (p. 35–36 et 46–47) et $\hat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})$ la première classe de Chern arithmétique de $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ (cf. [GS], p. 177). On définit (voir [Fa], [Bo], [BGS], et [Zh]) la *hauteur* de $Z$ relativement à $\overline{\mathscr{L}}$ par l'égalité:

$$h_{\bar{\mathscr{L}}}(Z) = \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\bar{\mathscr{L}})^p \mid Z) \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que si $Z$ est le diviseur d'une section non nulle $s \in H^0(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes d})$, on a:

$$h_{\bar{\mathscr{L}}}(Z) = d h_{\bar{\mathscr{L}}}(X) + \int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} \log \|s_{\mathbb{C}}\|_{\bar{\mathscr{L}}^{\otimes d}} c_1(\bar{\mathscr{L}})^n. \tag{1}$$

Dans toute la suite, on appliquera ces notions lorsque $\mathscr{X} = \mathbf{P}^N$ et $\bar{\mathscr{L}} = \overline{\mathscr{O}(1)}$ le fibré en droites canonique (ample) sur $\mathbf{P}^N$ muni de la métrique quotient. Alors $h_{\bar{\mathscr{L}}}$ coïncide avec la hauteur définie dans [Fa]. Si $Z$ est définie par un polynôme homogène $P \in \mathbb{Z}[X_0, ..., X_N]$ de degré $d$, la relation (1) devient :

$$h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(Z) = d h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(\mathbf{P}^N) + \int_{\mathbf{P}^N(\mathbb{C})} \frac{\log |P(z_0, ..., z_N)|}{(\sum_{i=0}^N |z_i|^2)^{d/2}} \omega^N \tag{2}$$

$$= d h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(\mathbf{P}^N) + \int_{\mathscr{S}^{2N+1}} \log |P(z_0, ..., z_N)| \, dv, \tag{3}$$

où $dv$ est la mesure de probabilité uniforme (i.e., invariante par le groupe unitaire $U(N+1)$) sur la sphère unité $\mathscr{S}^{2N+1}$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$ et $\omega$ la forme de Fubini–Study $c_1(\overline{\mathscr{O}(1)})$ sur $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$.

Cette relation permet de calculer $h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(\mathbf{P}^N)$ par récurrence en utilisant l'égalité:

$$\int_{\mathscr{S}^{2N+1}} \log |z_0| \, dv = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}. \tag{4}$$

On trouve:

$$h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(\mathbf{P}^N) = \sigma_N := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j} \qquad \text{(nombres de Stoll)}, \tag{5}$$

et la relation (2) se réécrit:

$$h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(Z) = d\sigma_N + \int_{\mathscr{S}^{2N+1}} \log |P(z)| \, dv.$$

Le calcul de la hauteur d'une hypersurface de $\mathbf{P}^N$ définie par l'annulation d'un polynôme $P$ est donc ramené à celui d'une intégrale de la forme $\int_{\mathscr{S}^{2N+1}} \log |P(z)| \, dv$.

Dans cet article, on cherche à calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{S}^{2N+1}} \log |P(z)|\, dv$ pour $P$ un polynôme homogène à coefficients entiers aussi général que possible.

Dans la section 2 on définit deux fonctions $\zeta_{\mathcal{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ associées à ce problème. Ces fonctions ont été introduites par Bernšteĭn–Gel'fand et Atiyah (cf. [BG] et [At]); des analogues $p$-adiques ont été considérées par Igusa dans [Ig]. On étudie certaines de leurs propriétés en s'inspirant de [BG], puis on donne quelques exemples élémentaires. On calcule en particulier la hauteur de certaines quadriques. A la section 3 on donne une expression intégrale simple de $\zeta_E(P, s)$ pour certaines hypersurfaces. Comme application, on donne dans la section 4 quelques exemples de calculs de hauteurs. Enfin on introduit à la section 5 une méthode moins élémentaire, mais plus générale, basée sur la transformation de Mellin, qui permet d'étendre les résultats de la section 4.

Cet article reprend pour l'essentiel le contenu de [CM] que les auteurs alors n'avaient pas jugé utile de publier en l'état. Depuis, la méthode exposée ici a été employée avec succès afin de déterminer la hauteur d'autres types d'hypersurfaces (cf. [Da1] et [BY1]) et représente encore dans de nombreuses situations le seul procédé de calcul dont nous disposions.

Il est à noter que l'introduction d'un paramètre complexe avait déjà été utilisée dans [BGY] afin de construire explicitement certains courants de Green par continuation analytique. Ce point de vue a depuis été développé et étendu à d'autres situations dans [Da2] et [BY2].

## 2. FONCTIONS ZÊTA ASSOCIÉES

L'objet de cette partie consiste, dans un premier temps, à associer à tout polynôme $P$ deux fonctions Zêta $\zeta_{\mathcal{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ dont on montre que la valeur de leur dérivée en $s=0$ est reliée à la hauteur, pour la métrique de Fubini–Study, de l'hypersurface projective donnée par le lieu d'annulation de $P$. On montre ensuite que cette relation fournit un outil de calcul efficace de la hauteur des hyperplans et de certaines hypersurfaces quadriques. On déduit comme cas particulier de cette étude la hauteur du plongement de Plücker de la grassmannienne $\mathbf{G}(2, 4)$.

### 2.1. *Définition et propriétés*

Dans tout ce qui suit $d\mu$ désignera pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{C}^n$. Si $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$, on notera $|a| = (\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|^2)^{1/2}$.

Définition 2.1. Soit $N$ un entier positif et $P \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_N]$ un polynôme homogène de degré $d$. On associe au polynôme $P$ les deux fonctions Zêta:

$$\zeta_{\mathcal{S}}(P, s) = \int_{\mathcal{S}^{2N+1}} |P(z)|^s \, dv,$$

$$\zeta_E(P, s) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} e^{-|z|^2} |P(z)|^s \frac{d\mu}{\pi^{N+1}}.$$

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement des définitions:

Proposition 2.2.

— *Pour tout polynôme $P$, les fonctions $\zeta_{\mathcal{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ sont définies et continues sur $\Re(s) \geqslant 0$ et l'on a*:

$$\zeta_{\mathcal{S}}(P, 0) = \zeta_E(P, 0) = 1.$$

— *Comme fonctions de $P$, $\zeta_{\mathcal{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ sont invariantes sous l'action du groupe unitaire $U(N+1)$.*

— *On a*: $\zeta_{\mathcal{S}}(1, s) = \zeta_E(1, s) = 1$.

On vérifie facilement, par exemple en utilisant le théorème de Morera (voir par exemple [Ru], 10.17), que les fonctions $\zeta_{\mathcal{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ sont holomorphes sur $\Re(s) > 0$. De plus, du fait de l'homogénéité de $P$, elles sont liées par la relation:

$$\zeta_E(P, s) = \frac{\Gamma\left(N + 1 + \frac{ds}{2}\right)}{\Gamma(N+1)} \zeta_{\mathcal{S}}(P, s). \tag{6}$$

Le résultat suivant nous garantit l'existence des fonctions $\zeta_{\mathcal{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ sur un voisinage du point $s = 0$.

Théorème 2.3. *Pour tout polynôme homogène $P \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_N]$, il existe $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que les intégrales*:

$$\int_{\mathscr{S}^{2N+1}} |P(z)|^s \, dv \qquad et \qquad \int_{\mathbb{C}^{N+1}} e^{-|z|^2} \, |P(z)|^s \, d\mu$$

*soient convergentes sur* $\Re(s) > -\delta$.

Avant de donner la démonstration du théorème 2.3, déduisons-en grâce au théorème de Morera (cf. [Ru], 10.17) et à la relation (6) le corollaire suivant qui, à la lumière de la relation (2), justifie l'introduction des fonctions $\zeta_{\mathscr{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ pour étudier la hauteur des hypersurfaces projectives.

COROLLAIRE 2.4. *Il existe* $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ *tel que* $\zeta_{\mathscr{S}}(P, s)$ *et* $\zeta_E(P, s)$ *soient holomorphes sur* $\Re(s) > -\delta$. *La fonction* $\zeta_{\mathscr{S}}(P, s)$ *(resp.* $\zeta_E(P, s)$*) est dérivable en zéro et*:

$$\zeta'_{\mathscr{S}}(P, 0) = \int_{\mathscr{S}^{2N+1}} \log |P(z)| \, dv,$$

$$\left( \textit{resp. } \zeta'_E(P, 0) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} e^{-|z|^2} \log |P(z)| \, \frac{d\mu}{\pi^{N+1}} \right).$$

*De plus, on a la relation*:

$$\zeta'_{\mathscr{S}}(P, 0) = \zeta'_E(P, 0) + \frac{d}{2} (\gamma - \mathscr{H}_N),$$

*où* $\gamma = -\Gamma'(1)$ *est la constante d'Euler et* $\mathscr{H}_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$ *(lorsque* $N = 0$ *on convient que* $\mathscr{H}_0 = 0$).

*Démonstration du théorème* 2.3. On démontre tout d'abord le résultat suivant, qui est une conséquence directe des considérations développées dans [BG] et [At].

LEMME 2.5. (Bernšteĭn–Gel'fand). *Soient* $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *à support compact et* $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. *Il existe* $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ *tel que l'intégrale*:

$$I(P, \varphi, s) = \int_{\mathbb{C}^n} |P(x)|^s \, \varphi(x) \, d\mu,$$

*soit absolument convergente sur* $\Re(s) > -\delta$.

Supposons qu'on puisse écrire $P(x)$ sous la forme $P(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \, Q(x)$, où $Q$ est un polynôme ne s'annulant pas sur le support $\mathrm{Supp}(\varphi)$ de $\varphi$; le lemme 2.5 est alors une simple conséquence des théorèmes classiques de convergences sur les intégrales impropres.

Lorsque $P$ est quelconque, on se ramène au cas précédent en utilisant le théorème de résolution des singularités d'Hironaka (cf. [Hi]). Pour cela, soit $\pi: \widetilde{X} \to X := \mathbb{C}^n$ une résolution des singularités de $P$. L'espace $\widetilde{X}$ est une variété complexe lisse et $\pi$ un morphisme propre. De plus, si l'on note $Z(P)$ le lieu des zéros de $P$, $Z(\widetilde{P}) := \pi^*(Z(P))$ est un diviseur à croisement normal et $\pi: \widetilde{X} \backslash Z(\widetilde{P}) \to X \backslash Z(P)$ est un isomorphisme.

En utilisant la compacité de $\operatorname{Supp}(\varphi)$, on peut trouver un recouvrement fini $(U_j)_{j \in J}$ de $\operatorname{Supp}(\varphi)$ tel que sur $\widetilde{U}_j := \pi^*(U_j)$ on ait:

$$\widetilde{P}(y) = y_1^{\alpha_1^{(j)}} \cdots y_n^{\alpha_n^{(j)}} Q_j(y),$$

où $Q_j$ est un polynôme ne s'annulant pas sur $\widetilde{U}_j$ et $y_1, ..., y_n$ un système de coordonnées local.

Soit $(\lambda_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité associée à $(U_j)_{j \in J}$ et notons $\widetilde{d\mu} = \pi^*(d\mu)$. Localement, c'est-à-dire sur chaque $\widetilde{U}_j$, on a $\widetilde{d\mu} = D_j(y)\, dy_1 \cdots dy_n$, où $D_j$ est un polynôme ne s'annulant que sur $Z(\widetilde{P}) \cap \widetilde{U}_j$. D'après le théorème des zéros de Hilbert, on a donc:

$$D_j(y) = y_1^{\beta_1^{(j)}} \cdots y_n^{\beta_n^{(j)}} R_j(y),$$

où $R_j$ ne s'annule pas sur $\widetilde{U}_j$. On peut donc écrire $I(P, \varphi, s)$ sous la forme:

$$\begin{aligned} I(P, \varphi, s) = \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{C}^n} & |y_1|^{\alpha_1^{(j)} s + \beta_1^{(j)}} \cdots |y_n|^{\alpha_n^{(j)} s + \beta_n^{(j)}} \\ & \times Q_j^s(y)\, R_j(y)\, \pi^*(\varphi \lambda_j)(y)\, dy_1 \cdots dy_n. \end{aligned}$$

ce qui nous ramène au cas précédemment traité, et le lemme 2.5 est démontré.

Il nous reste à montrer que le lemme 2.5 entraîne le théorème 2.3.

Soit $\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact non identiquement nulle et considérons:

$$I(s) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} |P(z)|^s\, \eta(|z|)\, d\mu.$$

Comme $P$ est homogène, il existe $A$ et $B$ des réels positifs tels que:

$$\int_{\mathscr{S}^{2N+1}} |P(z)|^s\, dv \leqslant A I(s) \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{C}^{N+1}} e^{-|z|^2} |P(z)|^s\, d\mu \leqslant B I(s).$$

On peut appliquer le lemme 2.5 à $I(s)$ et en déduire donc l'existence d'un $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant les conditions requises. ∎

*Remarque* 2.6. On pourrait démontrer le théorème 2.3 sans utiliser le théorème de résolution des singularités, en ayant recours au théorème de préparation de Weierstraß.

*Remarque* 2.7. Les fonctions Zêta $\zeta_{\mathcal{S}}(P, s)$ et $\zeta_E(P, s)$ se prolongent en des fonctions méromorphes sur tout le plan (cf. [BG] et [At]). Elles vérifient des équations fonctionnelles (cf. [Be]).

Nous concluons cette section par un lemme qui nous sera utile par la suite:

LEMME 2.8. *La fonction*:

$$s \mapsto \left| \frac{\zeta_E(P, s)}{\Gamma\left(N+1+\frac{ds}{2}\right) \|P\|_{\mathcal{S}}^{s}} \right|$$

*où l'on a noté* $\|P\|_{\mathcal{S}} = \sup_{z \in \mathcal{S}^{2N+1}} |P(z)|$, *est bornée sur* $\Re(s) \geqslant 0$.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la relation (6). ∎

### 2.2. *Premiers exemples*

2.2.1. *Formes linéaires.*

THÉORÈME 2.9. *Soit* $L(z) = a_0 z_0 + \cdots + a_N z_N$ *une forme linéaire en* $N+1$ *variables, dont les coefficients* $a = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant N} \in \mathbb{C}^{N+1}$ *sont choisis de manière arbitraire. La fonction* $\zeta_E(L, s)$ *associée à* $L$ *est donnée par*:

$$\zeta_E(L, s) = |a|^s \, \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right).$$

*Démonstration.* Il vient:

$$\begin{aligned}
\zeta_E(L, s) &= \frac{1}{\pi^{N+1}} \int_{\mathbb{C}^{N+1}} e^{-|z|^2} \, |a_0 z_0 + \cdots + a_N z_N|^s \, d\mu(z) \\
&= \frac{|a|^s}{\pi^{N+1}} \int_{\mathbb{C}^{N+1}} e^{-|z|^2} \, |z_0|^s \, d\mu(z) \qquad \text{(invariance unitaire de } d\mu) \\
&= \frac{|a|^s}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-|z_0|^2} \, |z_0|^s \, d\mu(z_0) \qquad \left(\text{car } \int_{\mathbb{C}} e^{-|z_i|^2} \, d\mu(z_i) = \pi\right) \\
&= \frac{|a|^s}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{s+1} \, dr \\
&= |a|^s \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s/2} \, dt, \qquad \text{(par le changement de variable } t = r^2)
\end{aligned}$$

ce dont on tire que:

$$\zeta_E(L, s) = |a|^s\, \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) \quad \blacksquare$$

Par dérivation en $s=0$, on déduit du théorème 2.9 le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2.10.

$$\int_{\mathscr{S}^{2N+1}} \log |a_0 z_0 + \cdots + a_N z_N|\, dv = \log |a| - \tfrac{1}{2}\mathscr{H}_N.$$

*Remarque* 2.11. On aurait pu déduire directement ce résultat par invariance unitaire en utilisant (4).

2.2.2. *Formes quadratiques.*

THÉORÈME 2.12. *Soit* $m \in \{0, ..., N\}$ *et posons, pour tout* $z \in \mathbb{C}^{N+1}$, $Q(z) = z_0^2 + \cdots + z_m^2$. *Pour tout s dans le demi-plan* $\Re(s) \geqslant 0$, *on a*:

$$\zeta_E(Q, s) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\Gamma(s+m)}{\Gamma(m)\,\Gamma\left(\frac{s+m}{2}\right)}. \tag{7}$$

*Démonstration.* La démonstration se fait en plusieurs étapes. On démontre tout d'abord l'énoncé combinatoire suivant:

PROPOSITION 2.13. *Soient k et p deux entiers strictement positifs. On a les relations suivantes*:

$$\sum_{a_0 + \cdots + a_{2p-1} = k} \binom{2a_0}{a_0} \cdots \binom{2a_{2p-1}}{a_{2p-1}} = 4^k \binom{k+p-1}{k}, \tag{8}$$

$$\sum_{a_0 + \cdots + a_{2p} = k} \binom{2a_0}{a_0} \cdots \binom{2a_{2p}}{a_{2p}} = \binom{2k+2p-1}{2k}\binom{2k}{k} \Big/ \binom{k+p-1}{k}. \tag{9}$$

*Démonstration de la proposition* 2.13. Soit $S(x)$ la série génératrice des $\binom{2n}{n}$; l'identité suivante est bien connue:

$$S(x) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \qquad \text{pour} \quad |x| < \frac{1}{4}$$

Pour démontrer (8) (resp. (9)) il suffit de calculer le développement en série entière de $S^{2p}(x)$ (resp. $S^{2p+1}(x)$) au voisinage de 0 et de vérifier que leur $k$-ème coefficient est donné par (8) (resp. (9)). Or on obtient facilement ces développements par dérivation successive de $(1-4x)^{-1}$ (resp. $(1-4x)^{-1/2}$). ∎

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.12. On commence tout d'abord par calculer $\zeta_E(Q, s)$ pour $s = 2k$ un entier positif pair:

$$\begin{aligned}\zeta_E(Q, s) &= \frac{1}{\pi^{N+1}} \int_{\mathbb{C}^{N+1}} e^{-|z|^2} \, |z_0^2 + \cdots + z_m^2|^s \, d\mu \\ &= \frac{1}{\pi^{m+1}} \int_{\mathbb{C}^{m+1}} e^{-|z|^2} (|z_0^2 + \cdots + z_m^2|^2)^k \, d\mu.\end{aligned}$$

Il vient:

$$\begin{aligned}(|z_0^2 + \cdots + z_m^2|^2)^k &= (z_0^2 + \cdots + z_m^2)^k \, (\bar{z}_0^2 + \cdots + \bar{z}_m^2)^k \\ &= \sum_{\substack{a_0 + \cdots + a_m = k \\ a_0 \geqslant 0, \dots, a_m \geqslant 0}} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(a_0+1) \cdots \Gamma(a_m+1)} \, z_0^{2a_0} \cdots z_m^{2a_m} \\ &\quad \times \sum_{\substack{b_0 + \cdots + b_m = k \\ b_0 \geqslant 0, \dots, b_m \geqslant 0}} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(b_0+1) \cdots \Gamma(b_m+1)} \, \bar{z}_0^{2b_0} \cdots \bar{z}_m^{2b_m}.\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} z^a \bar{z}^b \, dx \, dy = \delta_{a, b} \, \Gamma(a+1), \tag{10}$$

ce qui, en remplaçant dans l'expression précédente, montre que:

$$\zeta_E(Q, s) = \sum_{\substack{a_0 + \cdots + a_m = k \\ a_0 \geqslant 0, \dots, a_m \geqslant 0}} \frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma^2(a_0+1) \cdots \Gamma^2(a_m+1)} \, \Gamma(2a_0+1) \cdots \Gamma(2a_m+1).$$

On se sert alors des relations binômiales (8) et (9) pour obtenir:

$$\zeta_E(Q, s) = \begin{cases} 2^s \Gamma\left(\dfrac{s}{2}+1\right) \Gamma\left(\dfrac{s+m+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right) & (m \text{ impair}), \\[2ex] \Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{s}{2}+1\right) \Gamma(s+m) \Big/ \Gamma(m) \, \Gamma\left(\dfrac{s+m}{2}\right) & (m \text{ pair}). \end{cases} \tag{11}$$

En utilisant deux fois la formule de duplication de Legendre:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\, \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

on s'aperçoit que les deux expressions données dans (11) coïncident en fait pour $m$ quelconque.

On a donc démontré le théorème 2.12 dans le cas où $s$ est un entier positif pair. Pour conclure, il nous reste à prouver que la formule (11) reste valide sur $\Re(s) \geqslant 0$. Pour démontrer ce résultat on utilise le

THÉORÈME 2.14 (Carlson). *Toute fonction d'une variable complexe, analytique et bornée sur le demi-plan* $\Re(s) > 0$ *et qui s'annule aux entiers positifs est identiquement nulle.*

*Démonstration.* Voir [Ti], 5.81. On peut également se ramener au cas du disque unité ouvert et utiliser le théorème de Blaschke (cf. [Ru], 15.23). ∎

Le lemme suivant nous sera également utile:

LEMME 2.15. *Si* $b \geqslant a > 0$, *la fonction*:

$$s \mapsto \frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+b)}$$

*est bornée sur* $\Re(s) > 0$.

*Démonstration.* Cela découle directement de la formule de Stirling. ∎

Grâce à ces deux énoncés, nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 2.12. Notons provisoirement:

$$a(s) = \frac{1}{\pi^{m+1}} \int_{\mathbb{C}^{m+1}} e^{-|z|^2}\, |z_0^2 + \cdots + z_m^2|^s \, d\mu, \qquad \text{et}$$

$$b(s) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \Gamma(s+m)\, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)\, \Gamma\left(\frac{s+m}{2}\right)}.$$

On cherche à démontrer que:

$$a(s) = b(s) \qquad \text{sur} \quad \Re(s) \geqslant 0.$$

Pour cela, considérons la différence:

$$\Delta(s)=\frac{a(s)-b(s)}{\Gamma(N+1+s)\ \|P\|_{\mathcal{S}}^{s}}\ ;$$

on a la majoration:

$$\begin{aligned}|\Delta(s)| &= \left|\frac{a(s)-b(s)}{\Gamma(N+1+s)\ \|P\|_{\mathcal{S}}^{s}}\right| \\ &\leqslant \frac{|a(s)|}{|\Gamma(N+1+s)\ \|P\|_{\mathcal{S}}^{s}|}+\frac{|b(s)|}{|\Gamma(N+1+s)|\ \|P\|_{\mathcal{S}}^{\Re(s)}}\end{aligned}$$

ce qui, grâce aux lemmes 2.8 et 2.15, montre que $\Delta(s)$ est analytique et bornée sur le demi-plan ouvert $\Re(s)>1$. Comme de plus $\Delta(2k)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on déduit du théorème de Carlson (théorème 2.14) que:

$$a(s)=b(s)\qquad \text{sur}\quad \Re(s)>1,$$

et finalement, par continuation analytique puis par continuité, que cette égalité reste vraie sur $\Re(s)\geqslant 0$, ce qui termine la démonstration du théorème. ▮

*Remarque* 2.16. Le polynôme $2R(z)=2z_0z_1+\cdots+2z_{2m-2}z_{2m-1}$ est le transformé de $z_0^2+\cdots+z_{2m-1}^2$ par rotation. On déduit facilement du théorème 2.12 l'expression de la fonction $\zeta_E(R,s)$ associée à $R(z)$. On trouve:

$$\zeta_E(R,s)=\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+m\right)}{\Gamma(m)}. \tag{12}$$

*Remarque* 2.17. D'après le corollaire 2.4 on sait que l'égalité (7) du théorème 2.12 reste vraie sur $\Re(s)>-\delta$ pour un certain $\delta$ réel strictement positif. Il en est évidemment de même par prolongement analytique pour l'égalité (12).

D'après la remarque 2.17, on déduit par dérivation des relations (7) et (12) les formules suivantes:

Corollaire 2.18. *On a*:

$$\int_{\mathcal{S}^{4N+1}}\log|z_0^2+\cdots+z_{2N}^2|\,dv=-\tfrac{1}{2}\mathcal{H}_N \tag{13}$$

$$\int_{\mathcal{S}^{4N-1}}\log|z_0z_1+\cdots+z_{2N-2}z_{2N-1}|\,dv=-\mathcal{H}_{2N-1}+\tfrac{1}{2}\mathcal{H}_{N-1} \tag{14}$$

*Remarque* 2.19. Considérons $\mathbf{G}(2,4)$ la grassmannienne sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ paramétrant pour tout corps $\kappa$ les 2-plans de $\kappa^4$. Soit $\overline{\mathscr{Q}}$ le fibré universel quotient sur $\mathbf{G}(2,4)$ muni à l'infini de la métrique quotient. Le plongement de Plücker est le morphisme $\phi$: $\mathbf{G}(2,4)\to\mathbf{P}^5$ associé au fibré inversible très ample $\det(\mathscr{Q})$. L'image de $\mathbf{G}(2,4)$ dans $\mathbf{P}^5$ par $\phi$ est l'hypersurface d'équation $z_0z_1-z_2z_3+z_4z_5=0$ (voir par exemple [GH], section 1.5). D'après les relations (3), (5) et (14), la hauteur relativement à $\overline{\mathscr{O}(1)}$ de $\mathbf{G}(2,4)$ plongée par $\phi$ dans $\mathbf{P}^5$ est donc donnée par:

$$h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(\mathbf{G}(2,4))=\tfrac{43}{6}.$$

Par ailleurs, on sait que:

$$\phi^*(\hat{c}_1(\overline{\mathscr{O}(1)}))=\hat{c}_1(\det(\overline{\mathscr{Q}}))=\hat{c}_1(\overline{\mathscr{Q}}),$$

ce qui, ajouté à la formule précédente, montre que:

$$\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{\mathscr{Q}})^5\mid\mathbf{G}(2,4))=\tfrac{43}{6}\in\mathbb{Q}.$$

Cette dernière égalité a été redémontrée dans [Ma] par une méthode différente.

## 3. CALCUL DE CERTAINES FONCTIONS ZÊTA

Nous approfondissons dans cette partie l'étude précédente en donnant une expression intégrale « simple » (i.e., comme intégrale d'une fonction rationnelle sur un domaine polyhèdral de $\mathbb{R}^n$) pour $\zeta_E(P,s)$ lorsque $P$ est un polynôme de la forme:

$$P(z)=z_{1,1}z_{1,2}z_{1,3}^{\alpha_3}\cdots z_{1,l}^{\alpha_l}+\cdots+z_{p,1}z_{p,2}z_{p,3}^{\alpha_3}\cdots z_{p,l}^{\alpha_l}$$

Nous commençons par la démonstration de deux identités élémentaires:

LEMME 3.1 (Dirichlet). *Pour tout entier $l\geqslant 2$, soit $\Delta$ le simplexe de $\mathbb{R}^l$ défini par les relations*:

$$x_1+\cdots+x_l=1\qquad(x_i\geqslant 0).$$

*On a l'égalité*:

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_l)}{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_l)}=\int_\Delta x_1^{\alpha_1-1}\cdots x_l^{\alpha_l-1}\,dx_1\cdots dx_{l-1}.$$

*Démonstration.* Pour $l=2$, cette égalité est la relation bien connue:

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}, \tag{15}$$

où $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ désigne la fonction Bêta d'Euler. Pour $l>2$, on démontre le lemme par intégrations successives en utilisant (15). ▮

Lemme 3.2. *Soient $x_1, ..., x_p$ des réels positifs distincts. Pour tout $n$ entier positif, on a l'identité*:

$$\begin{aligned}\Theta_p(n)(x_1, ..., x_p) &:= \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n\\ a_i \geqslant 0}} x_1^{a_1}\cdots x_p^{a_p}\\ &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_p\\ \sigma \text{ circulaire}}} \frac{x_{\sigma(1)}^{n+p-1}}{(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(2)})\cdots(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(p)})}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* On somme successivement sur tous les $a_i$ en utilisant l'égalité bien connue:

$$\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ a_i\geqslant 0}} x_1^{a_1}x_2^{a_2} = \frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}.$$

On peut également procéder de la façon suivante : les deux expressions étant symétriques en les $x_i$, il suffit de démontrer l'égalité pour $x_1 > \cdots > x_p$. On développe alors en série entière chacun des termes du membre de droite pour conclure. ▮

L'énoncé du lemme 3.2 suggère la définition plus générale suivante:

Définition 3.3. Soient $x_1, ..., x_p$ des réels positifs deux à deux distincts; pour tout $s$ vérifiant $\Re(s) \geqslant 0$, on pose:

$$\Theta_p(s)(x_1, ..., x_p) := \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_p\\ \sigma \text{ circulaire}}} \frac{x_{\sigma(1)}^{s+p-1}}{(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(2)})\cdots(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(p)})}. \tag{16}$$

*Remarque* 3.4. Lorsque $s\in\mathbb{N}^*$ la définition (16) coïncide avec celle donnée au lemme 3.2. De plus, si l'on pose:

$$f_p(s)(x_1, ..., x_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1}\, x_k^{s+p-1} \prod_{\substack{i<j\\ i\neq k\\ j\neq k}} (x_i - x_j),$$

alors:

$$\Theta_p(s)(x_1, ..., x_p) = \frac{f_p(s)(x_1, ..., x_p)}{\prod_{i<j} (x_i - x_j)}. \tag{17}$$

Pour $s$ fixé, $f_p(s)(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}^+)^p$ et s'annule sur tous les hyperplans $H_{i,j}$ d'équation $l_{i,j}(x) = x_i - x_j = 0$, $(i<j)$. Les hyperplans $H_{i,j}$ étant deux à deux transverses, on en déduit que $\Theta_p(s)(x)$ se prolonge en une fonction $\tilde{\Theta}_p(s)(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}^+)^p$.

Exemples. Lorsque $p=2$ et $p=3$, l'identité (17) s'écrit:

$$\Theta_2(s)(x_1, x_2) = \frac{x_1^{s+1} - x_2^{s+1}}{x_1 - x_2},$$

$$\Theta_3(s)(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^{s+2}(x_2 - x_3) + x_2^{s+2}(x_3 - x_1) + x_3^{s+2}(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.$$

La proposition suivante nous fournit une borne uniforme en $x$ sur la croissance de la fonction $s \mapsto |\tilde{\Theta}_p(s)(x)|$ lorsque $\Re(s)$ est assez grand. Cette estimée nous sera nécessaire lorsque nous voudrons utiliser dans ce qui suit le théorème de Carlson.

Proposition 3.5. *Soit $K \subset (\mathbb{R}^+)^p$ un compact. Alors il existe $a(K) \in \mathbb{N}$, $M(K) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $s_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que*:

$$\sup_{x \in K} |\tilde{\Theta}_p(s)(x)| \leqslant |s|^{a(K)}\, M(K)^{\Re(s)} \qquad \textit{sur} \quad \Re(s) \geqslant s_0.$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $a(n) \in \mathbb{N}$, $M(n) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $s_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que:

$$\sup_{x \in K} \|D^n f_p(x)\| \leqslant |s|^{a(n)}\, M(n)^{\Re(s)} \qquad \text{sur} \quad \Re(s) \geqslant s_n. \tag{18}$$

Soit $x_0 \in K$ et notons $m(x_0)$ le nombre d'hyperplans $H_{i,j}$ contenant $x_0$. Si $m(x_0) = 0$, pour tout voisinage $V(x_0)$ de $x_0$ dont l'adhérence est d'intersection vide avec chacun des $H_{i,j}$, on peut trouver $a(V(x_0)) \in \mathbb{N}$, $M(V(x_0)) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $s_{x_0} \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que:

$$\sup_{x \in V(x_0)} |\tilde{\Theta}_p(s)(x)| \leqslant |s|^{a(V(x_0))}\, M(V(x_0))^{\Re(s)} \qquad \text{sur} \quad \Re(s) \geqslant s_{x_0}.$$

Si $m(x_0) \geqslant 1$, en appliquant la formule de Taylor–Young à $f_p$ sur un voisinage de $x_0$, on obtient $D^n f_p = 0$ pour $n < m(x_0)$. Notons $H_1, ..., H_{m(x_0)}$ les hyperplans d'équations $l_1(x) = 0, ..., l_{m(x_0)}(x) = 0$ contenant $x_0$. Soit

$V(x_0)$ un voisinage de $x_0$ dans $K$ à distance non nulle des autres hyperplans $H_{i,j}$. Pour chaque $i \in \{1, ..., m(x_0)\}$, on pose:

$$V_i(x_0) = \{x \in V(x_0) : |l_i(x)| = \inf_{j \in \{1, ..., m(x_0)\}} |l_j(x)|\}.$$

Les $V_i(x_0)$ forment un recouvrement de $V(x_0)$. Soit $y \in V(x_0)$, il existe $i \in \{1, ..., m(x_0)\}$ tel que $y \in V_i(x_0)$. Notons $p_i(y)$ le projeté orthogonal de $y$ sur $H_i$. On considère le chemin $\gamma$ allant de $x_0$ à $y$ et composé des segments $[x_0, p_i(y)] \subset H_i$ et $[p_i(y), y]$. En appliquant à $f_p$ la formule de Taylor à l'ordre $m(x_0)$ sur $\gamma$ et en utilisant la majoration de la différentielle d'ordre $m(x_0)$ de $f_p$ donnée par (18), on obtient:

$$\sup_{y \in V_i(x_0)} \left| \frac{f_p(y)}{l_i^{m(x_0)}(y)} \right| \leqslant A_i \, |s|^{a(m(x_0))} \, M(m(x_0))^{\Re(s)} \qquad (A_i \in \mathbb{R}^{+*}),$$

pour $\Re(s)$ assez grand. Comme de plus $|l_i(y)|^{m(x_0)} \leqslant \prod_{j=1}^{m(x_0)} |l_j(y)|$ sur $V_i(x_0)$, on en déduit sur chaque $V_i(x_0)$, et donc sur $V(x_0)$, une majoration de $\widetilde{\Theta}_p(s)(x)$ de la forme:

$$\sup_{x \in V(x_0)} |\widetilde{\Theta}_p(s)(x)| \leqslant A \, |s|^{a(m(x_0))} \, M(m(x_0))^{\Re(s)} \qquad (A \in \mathbb{R}^{+*}),$$

pour $\Re(s)$ assez grand. On conclut en appliquant ce raisonnement en chaque point de $K$, puis en extrayant des voisinages obtenus un recouvrement fini de $K$. On obtient ainsi la majoration désirée. ∎

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le théorème suivant, donnant l'expression de $\zeta_E(P, s)$ sous forme intégrale qui avait été annoncée dans l'introduction à cette partie.

THÉORÈME 3.6. *Pour tout $s$ appartenant au demi-plan fermé* $\Re(s) \geqslant 0$

$$\zeta_E(P, s) = \Gamma^2\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\Gamma\left(\frac{\alpha_3 s}{2}+p\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\alpha_l s}{2}+p\right)\right)$$
$$\times \int_{\Delta_3 \times \cdots \times \Delta_l} \widetilde{\Theta}_p\left(\frac{s}{2}\right)(t_{3,1}^{\alpha_3} \cdots t_{l,1}^{\alpha_l}, ..., t_{3,p}^{\alpha_3} \cdots t_{l,p}^{\alpha_l})$$
$$\times (dt_{3,1} \cdots dt_{3,p-1}) \cdots (dt_{l,1} \cdots dt_{l,p-1}).$$

*Démonstration.* On procède comme pour la démonstration du théorème 2.12. On calcule tout d'abord $\zeta_E(P, s)$ pour $s = 2k$ un entier pair positif; il vient:

$$\zeta_E(P, 2k) = \frac{1}{\pi^{pl}} \int_{\mathbb{C}^{pl}} e^{-|z|^2}(|P(z)|^2)^k \, d\mu.$$

En utilisant deux fois la formule du multinôme, on trouve:

$$(|P(z)|^2)^k = P(z)^k \overline{P(z)}^k$$
$$= \sum_{a_1+\cdots+a_p=k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(a_1+1)\cdots\Gamma(a_p+1)}$$
$$\times (z_{1,1}^{a_1} z_{1,2}^{a_1} z_{1,3}^{\alpha_3 a_1} \cdots z_{1,l}^{\alpha_l a_1}) \cdots (z_{p,1}^{a_p} z_{p,2}^{a_p} z_{p,3}^{\alpha_3 a_p} \cdots z_{p,l}^{\alpha_l a_p})$$
$$\times \sum_{b_1+\cdots+b_p=k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(b_1+1)\cdots\Gamma(b_p+1)}$$
$$\times (\bar{z}_{1,1}^{b_1} \bar{z}_{1,2}^{b_1} \bar{z}_{1,3}^{\alpha_3 b_1} \cdots \bar{z}_{1,l}^{\alpha_l b_1}) \cdots (\bar{z}_{p,1}^{b_p} \bar{z}_{p,2}^{b_p} \bar{z}_{p,3}^{\alpha_3 b_p} \cdots \bar{z}_{p,l}^{\alpha_l b_p}).$$

En remplaçant cette expression dans l'égalité précédente, puis en utilisant la relation (10), on obtient:

$$\zeta_E(P, 2k) = \Gamma^2(k+1) \sum_{a_1+\cdots+a_p=k} (\Gamma(\alpha_3 a_1+1)\cdots\Gamma(\alpha_3 a_p+1))$$
$$\times \cdots \times (\Gamma(\alpha_l a_1+1)\cdots\Gamma(\alpha_l a_p+1)), \tag{19}$$

ce que, d'après le lemme 3.1, on peut écrire sous la forme:

$$\zeta_E(P, 2k) = \Gamma^2(k+1)(\Gamma(\alpha_3 k+p)\cdots\Gamma(\alpha_l k+p))$$
$$\times \sum_{a_1+\cdots+a_p=k} \int_{\Delta_3} \cdots \int_{\Delta_l} (t_{3,1}^{a_1} \cdots t_{3,p}^{a_p})^{\alpha_3} \cdots (t_{l,1}^{a_1} \cdots t_{l,p}^{a_p})^{\alpha_l}$$
$$\times (dt_{3,1} \cdots dt_{3,p-1}) \cdots (dt_{l,1} \cdots dt_{l,p-1}),$$

où pour tout $i \in \{3, ..., l\}$ on a noté $\Delta_i$ le simplexe standard de $\mathbb{R}^p$ défini par:

$$t_{i,1} + \cdots + t_{i,p} = 1 \qquad (t_{i,j} \geqslant 0).$$

Finalement, le lemme 3.2 nous permet de réécrire l'égalité précédente sous la forme recherchée:

$$\zeta_E(P, 2k) = \Gamma^2(k+1)(\Gamma(\alpha_3 k+p)\cdots\Gamma(\alpha_l k+p))$$
$$\times \int_{\Delta_3 \times \cdots \times \Delta_l} \widetilde{\Theta}_p(k)(t_{3,1}^{\alpha_3} \cdots t_{l,1}^{\alpha_l}, ..., t_{3,p}^{\alpha_3} \cdots t_{l,p}^{\alpha_l})$$
$$\times (dt_{3,1} \cdots dt_{3,p-1}) \cdots (dt_{l,1} \cdots dt_{l,p-1}).$$

On a donc démontré le théorème 3.6 lorsque $s=2k$ un entier pair positif quelconque. On pose alors:

$$c(s)=\int_{\Delta_3\times\cdots\times\Delta_l}\tilde{\Theta}_p\left(\frac{s}{2}\right)(t_{3,1}^{\alpha_3}\cdots t_{l,1}^{\alpha_l},\ldots,t_{3,p}^{\alpha_3}\cdots t_{l,p}^{\alpha_l})$$
$$\times(dt_{3,1}\cdots dt_{3,p-1})\cdots(dt_{l,1}\cdots dt_{l,p-1}),$$

$$d(s)=\frac{\zeta_E(P,s)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\Gamma\left(\frac{\alpha_3 s}{2}+p\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\alpha_l s}{2}+p\right)\right)}.$$

Comme $\Delta_3\times\cdots\times\Delta_l$ est compact et que son image par $f$: $(t_{3,1},\ldots,t_{l,p})\to(t_{3,1}^{\alpha_3}\cdots t_{l,1}^{\alpha_l},\ldots,t_{3,p}^{\alpha_3}\cdots t_{l,p}^{\alpha_l})$ l'est aussi, on déduit de la proposition 3.5 que la fonction $c(s)$ possède la propriété suivante:

$$\exists(a,G,s_0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}:|c(s)|\leqslant|s|^a\,G^{\Re(s)}\qquad\text{sur}\quad\Re(s)\geqslant s_0.\tag{20}$$

On veut démontrer que $c(s)=d(s)$ sur le demi-plan $\Re(s)\geqslant 0$. Soit:

$$\Delta(s)=\frac{c(s)-d(s)}{s^a(\sup(G,1))^s\,\|P\|_{\mathcal{S}}^s\,\Gamma\left(N+1+\frac{ds}{2}\right)}\qquad\text{où}\quad d=\deg P.$$

D'après le lemme 2.8 et (20), $\Delta(s)$ est analytique et bornée sur le demi-plan ouvert $\Re(s)>s_0$. Comme de plus $\Delta(2k)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a bien $c(s)=d(s)$ sur $\Re(s)\geqslant 0$ par le théorème de Carlson (théorème 2.14), puis par continuation analytique et continuité. ∎

## 4. CALCULS EXPLICITES DE HAUTEURS

On utilise les résultats de la partie précédente pour donner de manière explicite la valeur de $\zeta'_E(P,0)$ pour certains polynômes $P$. On retrouvera les résultats obtenus ici comme cas particuliers d'un théorème plus général à la section 5.

### 4.1. *Hypersurfaces d'équation* $z_1\cdots z_k+z_{k+1}\cdots z_{2k}=0$

Posons $P(z)=z_1\cdots z_k+z_{k+1}\cdots z_{2k}$. Lorsque $k\geqslant 3$, on déduit du théorème 3.6 la formule suivante:

$$\zeta_E(P,s) = \Gamma^2\left(\frac{s}{2}+1\right)\Gamma^{k-2}\left(\frac{s}{2}+2\right) \times \int_{[0,1]^{k-2}} \frac{(x_3\cdots x_k)^{s/2+1} - ((1-x_3)\cdots(1-x_k))^{s/2+1}}{(x_3\cdots x_k) - ((1-x_3)\cdots(1-x_k))} \times dx_3\cdots dx_k.$$

En dérivant cette expression en $s=0$, on trouve:

$$\zeta'_E(P,0) = -\frac{k}{2}\gamma + \left(\frac{k}{2}-1\right) + \frac{1}{2}V(k),$$

où:

$$V(k) = \int_{[0,1]^{k-2}} \frac{A(x)\log A(x) - B(x)\log B(x)}{A(x)-B(x)}\, dx_3\cdots dx_k,$$

et où:

$$A(x) = x_3\cdots x_k \qquad \text{et} \qquad B(x) = (1-x_3)\cdots(1-x_k).$$

En théorie, l'intégrale $V(k)$ est explicitement calculable en termes de fonctions polylogarithmes. En pratique, les calculs deviennent extrêmement compliqués lorsque $k$ croît, et le recours à un logiciel de calcul formel s'avère nécessaire.

Le tableau suivant résume les résultats obtenus à l'aide du logiciel *Maple* pour $k$ variant entre 1 et 10. (Les cas particuliers $k=1$ et $k=2$ se déduisent des corollaires 2.10 et 2.18).

Nous retrouverons à la section 5 ces résultats comme cas particuliers du théorème 5.9.

| $k$ | $\int_{\mathscr{S}^{4k-1}} \log\lvert x_1\cdots x_k + y_1\cdots y_k\rvert\, d\mu + \frac{k}{2}\mathscr{H}_{2k-1}$ |
|---|---|
| 1 | $(\log 2)/2$ |
| 2 | $1/2$ |
| 3 | $\pi^2/16$ |
| 4 | $\pi^2/18 + 1/6$ |
| 5 | $-3\pi^4/128 + 5\pi^2/16$ |
| 6 | $-2\pi^4/225 + \pi^2/6 + 1/10$ |
| 7 | $5\pi^6/128 - 259\pi^4/576 + 35\pi^2/48$ |
| 8 | $4\pi^6/735 - 7\pi^4/90 + \pi^2/3 + 1/14$ |
| 9 | $-595\pi^8/4096 + 3229\pi^6/1920 - 329\pi^4/128 + 21\pi^2/16$ |
| 10 | $-32\pi^8/4725 + 164\pi^6/1701 - 91\pi^4/270 + 5\pi^2/9 + 1/18$ |

### 4.2. *Hypersurfaces d'équation* $z_1 z_2 z_3^k + z_4 z_5 z_6^k = 0$

Posons maintenant $P(z) = z_1 z_2 z_3^k + z_4 z_5 z_6^k$, où $k$ est un entier strictement positif. On déduit du théorème 3.6 la formule:

$$\zeta_E(P, s) = \Gamma^2\left(\frac{s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{ks}{2}+2\right)\int_0^1 \frac{(t^k)^{s/2+1} - ((1-t)^k)^{s/2+1}}{t^k - (1-t)^k}\, dt.$$

Par dérivation en $s = 0$, on tire de cette expression l'égalité:

$$\int_{\mathscr{S}^{11}} \log |z_1 z_2 z_3^k + z_4 z_5 z_6^k| \, dv = -\left(\frac{k}{2}+1\right)\mathscr{H}_5 + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} W(k),$$

où l'on a noté:

$$W(k) = \int_0^1 \frac{t^k \log t - (1-t)^k \log(1-t)}{t^k - (1-t)^k}\, dt.$$

De même que précédemment, l'intégrale $W(k)$ est théoriquement calculable en termes de valeurs de fonctions logarithmes et dilogarithmes, mais pratiquement il est préférable d'avoir recours à l'ordinateur. Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus à l'aide du logiciel *Maple* lorsque $k$ varie entre 1 et 5.

Nous retrouverons à la section 5 ces résultats comme cas particuliers du théorème 5.9.

| $k$ | $W(k)$ |
|---|---|
| 1 | $\pi^2/8 - 1$ |
| 2 | $\pi^2/16 - 3/4$ |
| 3 | $17\pi^2/216 - 1$ |
| 4 | $\pi^2/16 - 7/8$ |
| 5 | $(145 - 32\sqrt{5})\,\pi^2/1000 - 1$ |

## 5. UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE MELLIN

Le but de cette section est double. Dans un premier temps, nous donnons une expression intégrale « simple » de la fonction $\zeta_E(P, s)$ lorsque $P$ est un polynôme homogène de la forme:

$$P(z) = z_1 z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n} + z_{n+1} z_{n+2}^{\beta_2} \cdots z_{n+m}^{\beta_m}.$$

Dans un deuxième temps, nous calculons la dérivée de cette expression en $s=0$ puis nous identifions le résultat obtenu comme étant la transformée de Mellin inverse d'un certain produit de facteurs Gamma. Ces considérations nous permettent d'exprimer la dérivée $\zeta'_E(P,0)$ comme une intégrale de chemin dans le plan complexe pour un polynôme de la forme ci-dessus, et même plus généralement pour tout polynôme homogène de la forme:

$$P(z)=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}^{\beta_1}\cdots z_{n+m}^{\beta_m}.$$

Lorsque $\alpha_i=\beta_i$ pour tout $i$, l'intégrale obtenue peut être calculée explicitement, ce qui nous permet entre autres choses de retrouver et d'étendre les résultats de la partie précédente.

5.1. *Fonctions Zêta des hypersurfaces d'équation* $z_1z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}z_{n+2}^{\beta_2}\cdots z_{n+m}^{\beta_m}=0$

Posons $P(z)=z_1z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}z_{n+2}^{\beta_2}\cdots z_{n+m}^{\beta_m}$, où l'on a convenu de plus que:

$$(d-1):=\sum_{2\leqslant i\leqslant n}\alpha_i=\sum_{2\leqslant j\leqslant m}\beta_j.$$

L'objet de cette section est la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME 5.1. *On peut trouver $\delta$ un réel strictement positif tel que sur le demi-plan ouvert $\Re(s)>-\delta$, on ait l'égalité*:

$$\zeta_E(P,s)=\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}}\int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}}e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i+\Sigma_{j=2}^m u_j)}(D(t,u))^{s/2}\,dt\,du,$$

*où l'on a posé*:

$$D(t,u)=t_2^{\alpha_2}\cdots t_n^{\alpha_n}+u_2^{\beta_2}\cdots u_m^{\beta_m},$$

$$dt=dt_2\cdots dt_n\qquad et\qquad du=du_2\cdots du_m.$$

*Démonstration.* On commence comme pour la démonstration des théorèmes 2.12 et 3.6 en supposant dans un premier temps que $s$ est un entier pair positif.

En utilisant deux fois la formule du binôme puis la relation (10) comme pour la démonstration de la formule (19), on obtient l'égalité:

$$\zeta_E(P,s)=\Gamma^2\left(\frac{s}{2}+1\right)\sum_{a+b=s/2}\frac{1}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}$$
$$\times(\Gamma(\alpha_2a+1)\cdots\Gamma(\alpha_na+1))(\Gamma(\beta_2b+1)\cdots\Gamma(\beta_mb+1)),$$

ce que, en utilisant la définition de la fonction Gamma, on peut réécrire sous la forme:

$$\zeta_E(P, s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) \sum_{a+b=s/2} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}$$
$$\times \int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}} e^{-(t_2+\cdots+t_n)} t_2^{\alpha_2 a} \cdots t_n^{\alpha_n a}\, dt_2 \cdots dt_n$$
$$\times \int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(u_2+\cdots+u_m)} u_2^{\beta_2 b} \cdots u_m^{\beta_m b}\, du_2 \cdots du_m.$$

En utilisant de nouveau la formule du binôme, mais dans l'autres sens, on obtient finalement l'égalité:

$$\zeta_E(P, s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) \int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}} \int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i + \Sigma_{j=2}^m u_j)}$$
$$\times (t_2^{\alpha_2} \cdots t_n^{\alpha_n} + u_2^{\beta_2} \cdots u_m^{\beta_m})^{s/2}\, dt\, du, \tag{21}$$

valable pour tout $s$ entier pair positif. Il ne nous reste plus alors qu'à démontrer que l'égalité (21) reste vraie sur le demi-plan $\Re(s) \geqslant 0$.

Pour cela, posons:

$$J(s) := \int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}} \int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i + \Sigma_{j=2}^m u_j)} (D(t, u))^{s/2}\, dt\, du.$$

On déduit des critères de convergence classiques que $J(s)$ est défini sur un demi-plan de la forme $\Re(s) > -\delta$ pour un certain réel $\delta$ strictement positif. D'après le théorème de Morera (cf. [Ru], 10.17), la fonction $s \mapsto J(s)$ est analytique sur ce demi-plan ouvert. On voit donc qu'il nous suffit de démontrer l'égalité (21) pour un certain ouvert du plan, et d'après le corollaire 2.4 le théorème 5.1 en découle par prolongement analytique.

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$, notons $\Delta(\tau)$ le simplexe de $\mathbb{R}^{n+m-2}$ défini par les relations:

$$\sum_{i=2}^n t_i + \sum_{j=2}^m u_j = \tau \qquad (t_i, u_j \geqslant 0),$$

et soit $d\eta$ la mesure induite sur $\Delta(\tau)$ par la mesure de Lebesgue normalisée dans $\mathbb{R}^{n+m-2}$. On peut écrire, grâce au théorème de Fubini et à l'homogénéité de la fonction $D(t, u)$:

$$
\begin{aligned}
J(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \left( \int_{\Delta(\tau)} D(t,u)^{s/2} \, d\eta \right) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \, \tau^{(d-1)(s/2)+n+m-3} \left( \int_{\Delta(1)} (D(t,u))^{s/2} \, d\eta \right) d\tau \\
&= \left( \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^{(d-1)(s/2)+n+m-3} \, d\tau \right) \left( \int_{\Delta(1)} (D(t,u))^{s/2} \, d\eta \right),
\end{aligned}
$$

ce qui, si l'on note:

$$
N(s) = \mathrm{Vol}(\Delta(1)) \, \Gamma\left( (d-1) \frac{s}{2} + n + m - 2 \right)
$$

$$
\text{et} \quad M = \sup_{(t,u) \in \Delta(1)} |D(t,u)|,
$$

montre le:

LEMME 5.2. *La fonction*:

$$
s \mapsto \frac{J(s)}{N(s) \, M^{s/2}}
$$

*est bornée sur* $\Re(s) \geqslant 0$.

Le lemme 5.2 ajouté au lemme 2.8 et au théorème de Carlson (théorème 2.14) nous permet alors de conclure. ∎

## 5.2. *Hauteur des hypersurfaces d'équation* $z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} + z_{n+1}^{\beta_1} \cdots z_{n+m}^{\beta_m} = 0$

Reprenons les notations de la section précédente et calculons la dérivée en $s = 0$ de la fonction $s \mapsto J(s)$, ce qui nous permettra de trouver la valeur de $\zeta'_E(P, 0)$ grâce au théorème 5.1. Il vient:

$$
\begin{aligned}
J'(0) &= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}} \int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i + \Sigma_{j=2}^m u_j)} \log(D(t,u)) \, dt \, du \\
&= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}} \int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i + \Sigma_{j=2}^m u_j)} \log\left( \prod t_i^{\alpha_i} \right) dt \, du \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}} \int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i + \Sigma_{j=2}^m u_j)} \log\left( 1 + \frac{\prod u_j^{\beta_j}}{\prod t_i^{\alpha_i}} \right) dt \, du.
\end{aligned} \tag{22}
$$

La première des deux intégrales obtenues se calcule facilement:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}}\int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i+\Sigma_{j=2}^m u_j)}\log\left(\prod t_i^{\alpha_i}\right) dt\,du\\
&\quad=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i\right)\int_0^{+\infty} e^{-t}\log t\,dt\\
&\quad=-\gamma\,\frac{(d-1)}{2}. \qquad (23)
\end{aligned}$$

Notons:

$$A=\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^+)^{n-1}}\int_{(\mathbb{R}^+)^{m-1}} e^{-(\Sigma_{i=2}^n t_i+\Sigma_{j=2}^m u_j)}\log\left(1+\frac{\prod u_j^{\beta_j}}{\prod t_i^{\alpha_i}}\right) dt\,du$$

la deuxième intégrale intervenant dans l'expression de $J'(0)$ donnée en (22). On va montrer que $A$ est la transformée de Mellin inverse d'un produit de facteurs Gamma.

Pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, on pose:

$$\phi_k(x)=\frac{1}{kx}\,x^{1/k}e^{-x^{1/k}}, \qquad (x>0)$$

et si $f$ est une fonction à valeur réelle, on note à chaque fois que cela a un sens:

$$T_k[f](z)=\int_0^{+\infty} f(z\,u)\,\phi_k(u)\,du \qquad \text{(convolée multiplicative de } f \text{ et de } \phi_k\text{)}.$$

La remarque suivante est alors fondamentale:

*Remarque* 5.3. Si l'on prend $f_0(x)=\log(1+x)$, alors on trouve que:

$$A=\frac{(-1)^{n-1}}{2}(T_{-\alpha_2}\circ\cdots\circ T_{-\alpha_n}\circ T_{\beta_2}\circ\cdots\circ T_{\beta_m})[f_0](1).$$

Définition 5.4. On appelle *transformée de Mellin* d'une fonction $f$ la fonction $M[f]$ définie par:

$$M[f](s)=\int_0^{+\infty} f(x)\,x^{s-1}\,dx.$$

On sait que si $f$ et $g$ sont deux fonctions de transformées de Mellin $M[f]$ et $M[g]$, et si l'on note:

$$f \star g \colon x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x\,u)\,g(u)\,du$$

la convolée multiplicative des deux, alors l'égalité suivante est vérifiée:

$$M[f \star g](s) = M[f](s)\,M[g](1-s).$$

La remarque 5.3 ajoutée à ce qui précède suggère de considérer la fonction $H$ définie par:

$$H(s) = M[(T_{-\alpha_2} \circ \cdots \circ T_{-\alpha_n} \circ T_{\beta_2} \circ \cdots \circ T_{\beta_m})[f_0]](s).$$

La proposition suivante, qui est une conséquence immédiate des définitions, va nous permettre de calculer $H$.

PROPOSITION 5.5. *Soit $k$ un entier strictement positif. On a*:

$$M[f_0](s) = \frac{\pi}{s\,\sin(\pi s)} \qquad \textit{sur} \qquad -1 < \Re(s) < 0,$$

$$M[\phi_k](1-s) = \Gamma(1-ks) \qquad \textit{sur} \qquad \Re(s) < \frac{1}{k},$$

$$M[\phi_{-k}](1-s) = -\Gamma(1+ks) \qquad \textit{sur} \qquad \Re(s) > -\frac{1}{k}.$$

En effet, à la lumière de ce qui précède, on peut maintenant écrire:

$$\begin{aligned} H(s) &= M[f_0](s) \prod_{j=2}^{m} M[\phi_{\beta_j}](1-s) \prod_{i=2}^{n} M[\phi_{\alpha_i}](1-s) \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{s\,\sin(\pi s)} \prod_{j=2}^{m} \Gamma(1-\beta_j s) \prod_{i=2}^{n} \Gamma(1+\alpha_i s), \end{aligned}$$

pour tout $s$ appartenant à l'ouvert $\sup(-1/\alpha_i) < \Re(s) < 0$.

Il ne nous reste plus alors qu'à déduire de l'expression donnant $H$ une formule pour $A$, ce que l'on fait en appliquant une *transformation de Mellin inverse* à $H$ et en utilisant la remarque 5.3. Il vient:

$$A = \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s^2} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \left( \prod_{j=2}^{m} \Gamma(1-\beta_j s) \prod_{i=2}^{n} \Gamma(1+\alpha_i s) \right) ds, \qquad (24)$$

où l'on a choisi le réel $c$ dans l'intervalle $\sup(-1/\alpha_i) < c < 0$. La formule des compléments:

$$\Gamma(1+s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}, \tag{25}$$

nous permet, en convenant que $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, de réécrire l'égalité (24) sous une forme plus compacte:

$$A = \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s^2} \left( \prod_{j=1}^{m} \Gamma(1-\beta_j s) \prod_{i=1}^{n} \Gamma(1+\alpha_i s) \right) ds.$$

Tous calculs faits, on déduit finalement du théorème 5.1 et des égalités (22) et (23) le résultat suivant:

PROPOSITION 5.6. *Soit* $P(z) = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} + z_{n+1}^{\beta_1} \cdots z_{n+m}^{\beta_m}$ *un polynôme homogène de degré d. Si l'on suppose que* $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, *alors on a*:

$$\zeta'_E(P, 0) = -\frac{1}{2}\gamma d + \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s^2} \left( \prod_{j=1}^{m} \Gamma(1-\beta_j s) \prod_{i=1}^{n} \Gamma(1+\alpha_i s) \right) ds$$

*pour tout réel* $c \in \left]\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1/\alpha_i), 0\right[$.

On va montrer maintenant que la proposition 5.6 reste vraie lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse sur les exposants $\alpha_1$ et $\beta_1$. Pour ce faire, on commence par rappeler la factorisation suivante, valable pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$X^k - Y^k = \prod_{0 \leqslant i \leqslant k-1} (X - \varepsilon_k^i Y), \tag{26}$$

où $\varepsilon_k$ est une racine primitive $k$-ème de l'unité. Cette identité, ajoutée à la formule pour $\zeta'_E(P, 0)$ donnée au corollaire 2.4, nous permet d'affirmer que:

$$\zeta'_E(z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} + z_{n+1}^{\beta_1} \cdots z_{n+m}^{\beta_m}, 0) = \frac{1}{k} \zeta'_E(z_1^{k\alpha_1} \cdots z_n^{k\alpha_n} + z_{n+1}^{k\beta_1} \cdots z_{n+m}^{k\beta_m}, 0),$$

et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Cette égalité, combinée de nouveau à la formule donnée au corollaire 2.4, montre que:

$$\zeta'_E(z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}^{\beta_1}\cdots z_{n+m}^{\beta_m},0)$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\zeta'_E(z_1^{k\alpha_1}\cdots z_n^{k\alpha_n}+z_{n+1}^{k\beta_1}\cdots z_{n+m}^{k\beta_m},0)$$

$$=\int_{\mathbb{C}^{n+m}}e^{-|z|^2}\log(\sup(|z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}|,|z_{n+1}^{\beta_1}\cdots z_{n+m}^{\beta_m}|))\frac{d\mu}{\pi^{n+m}},\quad(27)$$

où l'on a noté $d\mu$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{C}^{n+m}$.

Par ailleurs, on déduit du théorème 5.6 l'égalité:

$$\frac{1}{k}\zeta'_E(z_0z_1^{k\alpha_1}\cdots z_n^{k\alpha_n}+z_{n+1}^{k\beta_1}\cdots z_{n+m}^{k\beta_m}z_{n+m+1},0)$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{k}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{s^2}\left(\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-\beta_j s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1+\alpha_i s)\right)$$

$$\times\Gamma\left(1+\frac{s}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{k}\right)ds.\quad(28)$$

Enfin, toujours d'après le corollaire 2.4, on a:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\zeta'_E(z_0z_1^{k\alpha_1}\cdots z_n^{k\alpha_n}+z_{n+1}^{k\beta_1}\cdots z_{n+m}^{k\beta_m}z_{n+m+1},0)$$

$$=\int_{\mathbb{C}^{n+m}}e^{-|z|^2}\log(\sup(|z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}|,|z_{n+1}^{\beta_1}\cdots z_{n+m}^{\beta_m}|))\frac{d\mu}{\pi^{n+m}}.\quad(29)$$

En mettant bout à bout (27) et (29), puis en passant à la limite dans (28), on obtient finalement la formule:

$$\zeta'_E(z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}^{\beta_1}\cdots z_{n+m}^{\beta_m},0)$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma d+\frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{s^2}\left(\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-\beta_j s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1+\alpha_i s)\right)ds.$$

Comme on n'a fait dans ce qui précède aucune hypothèse sur les exposants $\alpha_i$ et $\beta_j$, on a donc démontré le

Théorème 5.7. *Soit* $P(z)=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}^{\beta_1}\cdots z_{n+m}^{\beta_m}$ *un polynôme homogène de degré* $d$. *On a*:

$$\zeta'_E(P,0)=-\frac{1}{2}\gamma d+\frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{s^2}\left(\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-\beta_j s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1+\alpha_i s)\right)ds$$

*pour tout réel* $c\in\,]\sup_{1\leqslant i\leqslant n}(-1/\alpha_i),0[$.

On en déduit grâce à la formule des compléments (25) le

Corollaire 5.8. *Soit* $P(z)=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}^{\alpha_1}\cdots z_{2n}^{\alpha_n}$ *un polynôme de degré* $d$. *On a*:

$$\zeta'_E(P,0)=-\frac{1}{2}\gamma d-\frac{(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i)}{4}\int_{-\infty+bi}^{+\infty+bi}\left(\frac{t^{n-2}}{\prod_{i=1}^{n}\operatorname{sh}(\alpha_i t)}\right)dt,$$

*pour tout réel* $b\in\,]0,\frac{\pi}{\sup_i(\alpha_i)}[$.

Le reste de cette section est consacré au calcul explicite de l'intégrale intervenant dans l'énoncé du corollaire 5.8.

Remarquons tout d'abord que lorsque $n=1$, un calcul direct nous donne:

$$\begin{aligned}\zeta'_E(P,0)&=-\frac{1}{2}\gamma d-\frac{d}{4}\int_{-\infty+bi}^{+\infty+bi}\frac{dt}{t\operatorname{sh}(td)}\\&=-\frac{1}{2}\gamma d-\frac{d}{4}(-2\log 2)\\&=\frac{d}{2}(\log 2-\gamma).\end{aligned}$$

On aurait pu d'ailleurs déduire directement ce résultat des corollaires 2.4 et 2.10 une fois le polynôme $P$ factorisé comme en (26).

Nous pouvons donc supposer pour la suite que $n\geqslant 2$.

Rappelons que si l'on considère le développement en série formelle en $t=0$ de la fonction:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_k(x)}{k!}t^k, \tag{30}$$

les polynômes $\mathrm{B}_k(x)$ ainsi définis sont appelés *polynômes de Bernoulli*. On note $\mathrm{B}_k = \mathrm{B}_k(0)$ le $k$-ème *nombre de Bernoulli*. On déduit directement de la définition (30) les identités:

$$\mathrm{B}_k(x+1) - \mathrm{B}_k(x) = kx^{k-1},$$
$$\mathrm{B}_k(1-x) = (-1)^k\,\mathrm{B}_k(x),$$

valables pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Posons, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{D}_n(x) = \frac{(2\pi i)^{n-2}}{n-1}\,\mathrm{B}_{n-1}\left(\frac{x}{2\pi i}\right).$$

L'identité:

$$\mathrm{D}_n(x+2\pi i) - \mathrm{D}_n(x) = x^{n-2}, \tag{31}$$

valable pour tout $n \geqslant 2$, est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Soit $L$ le contour d'intégration formé de la réunion des deux chemins infinis $\gamma_1(t) = t + bi$ et $\gamma_2(t) = -t + i(b+2\pi)$ et soit $\Omega$ le domaine $b < \Im(z) < b + 2\pi$ (cf. Fig. 1).

En utilisant la relation (31), le fait que les exposants $\alpha_i$ sont entiers, la $2\pi i$-périodicité de la fonction $t \mapsto \operatorname{sh} t$ et enfin le théorème des résidus, on peut écrire:

$$-\int_{-\infty+bi}^{+\infty+bi} \left(\frac{t^{n-2}}{\prod_{i=1}^n \operatorname{sh}(\alpha_i t)}\right) dt = \int_L \frac{\mathrm{D}_n(t)}{\prod_{i=1}^n \operatorname{sh}(\alpha_i t)}\,dt$$
$$= (2\pi i) \sum_{x \in \Omega} \operatorname{Res}_x \frac{\mathrm{D}_n(z)}{\prod_{i=1}^n \operatorname{sh}(\alpha_i z)},$$

ce qui, après un changement de variable, montre le:

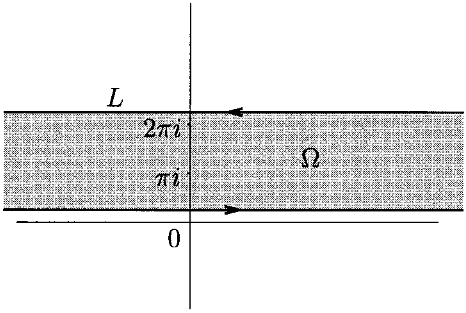


**FIGURE 1**

THÉORÈME 5.9. *Soit $P(z)=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}+z_{n+1}^{\alpha_1}\cdots z_{2n}^{\alpha_n}$ un polynôme de degré $d$ avec $n\geqslant 2$. On a*:

$$\zeta'_E(P,0)=-\frac{1}{2}\gamma d+\frac{(2\pi)^n}{4(n-1)}\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\sum_{x\in\,]0;\,1]}\mathrm{Res}_x\,\frac{\mathrm{B}_{n-1}(z)}{\prod_{i=1}^{n}\sin(2\pi\alpha_i z)}.$$

Les résultats exposés aux sections 4.1 et 4.2 sont des cas particuliers de ce théorème.

Par exemple si $P(z)=z_1\cdots z_n+z_{n+1}\cdots z_{2n}$, on obtient:

$$\zeta'_E(P,0)=-\frac{1}{2}\gamma n+\frac{(2\pi)^n}{4(n-1)}\,\mathrm{Res}_0\,\frac{\mathrm{B}_{n-1}(z)+(-1)^n\,\mathrm{B}_{n-1}(z+1/2)}{(\sin(2\pi z))^n},$$

ce qui, en utilisant le développement en série de Laurent:

$$\frac{1}{\sin x}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}\,(2^{2k-1}-1)\,\mathrm{B}_{2k}}{(2k)!}\,x^{2k-1},$$

permet de retrouver les calculs effectués à la section 4.1. En particulier, l'expression ci-dessus montre (lorsque $n\geqslant 2$) que la hauteur de l'hypersurface définie par l'annulation de $P(z)=z_1\cdots z_n+z_{n+1}\cdots z_{2n}$ s'exprime comme la valeur en $\pi$ d'un polynôme pair à coefficients rationnels et de degré $n-2$ ou $n-1$ selon respectivement que $n$ est pair ou impair. Ce résultat semble difficile à déduire directement de l'expression intégrale pour $V(k)$ donnée à la section 4.1.

De même si $P(z)=z_1z_2z_3^n+z_4z_5z_6^n$ avec $n\geqslant 1$, on déduit après quelques simplifications du théorème 5.9 l'égalité:

$$\zeta'_E(P,0)=-\frac{1}{2}\gamma(n+2)+\frac{1}{8}\left((1+(-1)^n)+\pi^2\,\frac{(n^2+2)(2+(-1)^{n+1})}{18}\right)$$
$$+\pi^2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\,\frac{\mathrm{B}_2(k/2n)}{(\sin(k\pi/n))^2},$$

la dernière somme étant prise nulle lorsque $n=1$. On retrouve comme cas particuliers les résultats donnés à la section 4.2 en utilisant la relation:

$$\sin^2(\pi/5)=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

lorsque $n=5$.

## REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier J.-B. Bost, P. Cartier, D. Ruelle et plus particulièrement C. Soulé pour leur aide.

## RÉFÉRENCES


[At] M. F. Atiyah, Resolution of singularities and division of distributions, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 145–150.

[Be] I. N. Bernšteĭn, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **6**, n° 4 (1972), 26–40.

[BG] I. N. Bernšteĭn et S. I. Gel'fand, Meromorphy of the function $P^{\lambda}$, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **3**, n° 1 (1969), 84–85.

[BGY] C. A. Berenstein, R. Gay, et A. Yger, Analytic continuation of currents and division problems, *Forum Math.* **1**, n° 1 (1989), 15–51.

[BY1] C. A. Berenstein et A. Yger, Green currents and analytic continuation, *J. Anal. Math.* **75** (1998), 1–50.

[BY2] C. A. Berenstein et A. Yger, Analytic residue theory in the non-complete intersection case, Math. CV/9905051, 1999.

[Bo] J.-B. Bost, Théorie de l'intersection et théorème de Riemann–Roch arithmétiques, Séminaire Bourbaki n° 731, 1990–1991, *Astérisque* **201/203** (1991), 43–88.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet, et C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 903–1027.

[CM] J. Cassaigne et V. Maillot, Hauteurs des hypersurfaces et fonctions Zêta d'Igusa, Prépublication LMENS 94–5, 1994.

[Da1] N. Dan, La hauteur des quadriques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324**, n° 12 (1997), 1323–1326.

[Da2] N. Dan, "Courants de Green et prolongement méromorphe," Thèse, Univ. Paris Nord (Paris 13), 1998.

[Fa] G. Faltings, Diophantine approximation on Abelian varieties, *Ann. of Math.* **133** (1991), 549–576.

[GH] P. Griffiths et J. Harris, "Principles of Algebraic Geometry," Wiley, 1978.

[GS] H. Gillet et C. Soulé, Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metrics, I, II, *Ann. of Math.* **131** (1990), 163–203, 205–238.

[Hi] H. Hironaka, On the resolution of singularities, *Ann. of Math.* **79** (1964), 109–203, 205–326.

[Ig] J.-I. Igusa, Complex powers and asymptotic expansions, I, II, *J. Reine Angew. Math.* **268/269** (1974), 110–130; **278/279** (1975), 307–321.

[Ma] V. Maillot, Un calcul de Schubert arithmétique, *Duke Math. J.* **80**, n° 1 (1995), 195–221.

[Ru] W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw–Hill, 1966.

[Ti] E. C. Titchmarsh, "The Theory of Functions," Oxford Univ. Press, 1939.

[Zh] S. Zhang, Positive line bundles on arithmetic varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 187–221.