MATHEMATICS

BEMERKUNGEN UBER EINIGE KLASSEN VON MODULFORMEN

VON

B. SCHOENEBERG

(Communicated by Prof. T. A. SPRINGER at the meeting of September 24, 1966)

F. VAN DER BLIJ hat einen bemerkenswerten Zusammenhang des unendlichen Produkts $\prod_{n>0}(1-x^n)$ mit den ganzen binären quadratischen Formen der Diskriminante -23 festgestellt und elementar bewiesen ([1], Theorem 1). Ein analoger Zusammenhang besteht, wie hier nach einigen vorbereitenden Bemerkungen (§ 1) – ebenfalls elementar – bewiesen werden soll, für alle negativen Diskriminanten $-q \equiv 1 \bmod 24$ (§ 2, Satz 1). Dieses Ergebnis wird in § 3 im Rahmen der Theorie der ganzen Modulformen höherer Stufe von KLEIN und HECKE [2] diskutiert. Eine dabei auftretende Frage nach dem Verhalten von $\eta(\tau)\,\eta(q\tau)$ –

$$\eta(\tau) = e^{\frac{2\pi i\tau}{24}} \prod_{n>0} (1-e^{2\pi i\tau n})$$

– bei Modultransformationen führt in § 4, Satz 2 zu einer Verallgemeinerung eines Satzes von H. RADEMACHER [3].

§ 1. *Vorbereitende Bemerkungen*

Es sei $K = P(\sqrt{D})$ der quadratische Zahlkörper über dem Körper P der rationalen Zahlen mit der Diskriminante D. Seine ganzen Ideale werden mit $\mathfrak{a}$, seine Primideale mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet, seine Idealklassen mit C, ihre Anzahl mit h und die Charaktere der Idealklassengruppe mit χ. Die Norm von $\mathfrak{a}$ sei $N(\mathfrak{a})$. Es werde $\chi(\mathfrak{a}) = \chi(C)$ gesetzt, wenn $a \in C$. Dann definiert man bei komplexer Variablen $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$,

$$\zeta(s,C) = \sum_{\mathfrak{a}\in C} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \quad , \quad \zeta(s,\chi) = \sum_C \chi(C)\,\zeta(s,C). \tag{1}$$

Schreibt man diese Reihen in der Form

$$\zeta(s,C) = \sum_{n>0} \frac{a(n,C)}{n^s} \quad , \quad \zeta(s,\chi) = \sum_{n>0} \frac{a(n,\chi)}{n^s},$$

so ist $a(n,C)$ die Anzahl der Lösungen $\mathfrak{a} \in C$ von $N(\mathfrak{a}) = n$, und es gilt

$$a(n,\chi) = \sum_C \chi(C)\,a(n,C) \quad , \quad a(n,C) = \frac{1}{h} \sum \chi^{-1}(C)\,a(n,\chi). \tag{2}$$

Aus der Darstellung

$$\zeta(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

folgt auf Grund des Zerlegungsgesetzes in K für rationale Primzahlen

$$\zeta(s,\chi) = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\chi(\mathfrak{p})}{p^s}\right)^{-1}, \; \mathfrak{p}|p, \tag{3}$$

wo das Produkt über alle rationalen Primzahlen zu erstrecken ist und $\mathfrak{p}$ ein Primteiler von p in K ist. (n/m) ist das Legendre-Jacobi-Symbol. Speziell ist jetzt für Primzahlen p

$$a(p,\chi) = \chi(\mathfrak{p}) + \left(\frac{D}{p}\right) \chi(\mathfrak{p}') \;, \; \mathfrak{p}|p,$$

wo $\mathfrak{p}'$ zu $\mathfrak{p}$ konjugiert ist. Mit diesen Koeffizienten erhält man für $\zeta(s,\chi)$ das von E. Hecke so genannte *kanonische Euler-Produkt*

$$\zeta(s,\chi) = \prod_{p} \left(1 - \frac{a(p,\chi)}{p^s} + \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Für den Hauptcharakter $\chi = \chi_0$ ist in (2) wegen (3)

$$a(n,\chi_0) = \sum_{C} a(n,C) = \sum_{t/n} \left(\frac{D}{t}\right)$$

die Anzahl aller Lösungen $\mathfrak{a}$ von $N(\mathfrak{a}) = n$.

Bezeichnen wir mit C_1 die Hauptklasse und ist $h=1$, so ist $\zeta(s, C_1) = \zeta(s, \chi_0)$. Ist $h=2$ oder $h=3$, so folgt aus (2) für $\chi \neq \chi_0$:

$$\left\{\begin{array}{ll} a(n, C_1) = \tfrac{1}{2}a(n, \chi_0) + \tfrac{1}{2}a(n, \chi) & \\ & \text{für } h=2, \\ a(n, C_2) = \tfrac{1}{2}a(n, \chi_0) - \tfrac{1}{2}a(n, \chi) & \\ a(n, C_1) = \tfrac{1}{3}a(n, \chi_0) + \tfrac{2}{3}a(n, \chi) & \\ & \text{für } h=3. \\ a(n, C_i) = \tfrac{1}{3}a(n, \chi_0) - \tfrac{1}{3}a(n, \chi),\; i=2,\,3 & \end{array}\right. \tag{5}$$

Für $h=3$ sind nämlich C_2 und C_3 zu einander konjugiert und von einander verschieden. In den beiden Fällen $h=2$ oder 3 besitzt die Dirichlet-Reihe mit den Koeffizienten

$$t(n) = a(n, C_1) - a(n, C_2) \tag{6}$$

ein kanonisches Euler-Produkt. Denn dann sind die $t(n) = a(n, \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, also die Koeffizienten der Dirichlet-Reihe $\zeta(s, \chi)$.

§ 2. *Verallgemeinerung eines Satzes von F. van der Blij*

F. van der Blij [1] beweist für $D = -23$, wo $h=3$ ist: Die durch (6) definierten $t(n)$ sind die Entwicklungskoeffizienten in

$$x \prod_{k>0} (1-x^k)(1-x^{23k}) = \sum_{n>0} t(n)\, x^n.$$

Zum Beweis zieht er die den Klassen C_1, C_2 zugeordneten Formen

$$F_1 = x^2 + xy + 6y^2,\ F_2 = 2x^2 + xy + 3y^2$$

und die Eulersche Identität heran:

$$(7)\qquad \prod_{k>0} (1-x^k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{\frac{1}{2}m(3m+1)} = x^{-\frac{1}{24}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{\frac{1}{24}(6m+1)^2}.$$

Im Folgenden wird in Verallgemeinerung dieses Ergebnisses bewiesen:

Satz 1. *Sei* $D<0$ *und* $D \equiv 1 \pmod{24}$. *Sind dann mit* $q=-D$ *die Zahlen* $t_q(n)$ *die Entwicklungskoeffizienten in*

$$(8)\qquad x^{\frac{q+1}{24}} \prod_{k>0} (1-x^k)(1-x^{qk}) = \sum_{n>0} t_q(n)\, x^n,$$

so ist für gewisse Idealklassen $C^{(1)}, C^{(2)}$ *aus* $P(\sqrt{-q})$

$$(9)\qquad t_q(n) = a(n, C^{(1)}) - a(n, C^{(2)}).$$

Es sind die Klassen $C^{(i)}$ mit den Idealen $\mathfrak{a}_i$ der Basisdarstellung

$$\mathfrak{a}_1 = \left(6, \frac{1+\sqrt{-q}}{2}\right),\quad \mathfrak{a}_2 = \left(6, \frac{5+\sqrt{-q}}{2}\right)$$

und den zugeordneten Formen

$$(10)\qquad F_1 = 6x^2 + xy + \frac{q+1}{24} y^2,\quad F_2 = 6x^2 + 5xy + \frac{q+25}{24} y^2,$$

wo nur noch jede Klasse durch ihre konjugierte Klasse ersetzt werden kann.

Ist $a(n, F_i)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von $F_i = n$, so ist wegen $a(n, F_i) = 2a(n, C^{(i)})$ die Aussage (9) gleichbedeutend mit

$$(11)\qquad 2t_q(n) = a(n, F_1) - a(n, F_2).$$

Nun ist offensichtlich

$$F_1 = \frac{1}{24}((12x+y)^2 + qy^2),\quad F_2 = \frac{1}{24}((12x+5y)^2 + qy^2)$$

und nach (7)

$$x^{\frac{q+1}{24}} \prod_{k>0} (1-x^k)(1-x^{qk}) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} x^{\frac{1}{24}((6m+1)^2 + q(6n+1)^2)}.$$

Es gelten also die folgenden beiden Gleichungen

$$(12)\qquad \sum_{n>0} (a(n, F_1) - a(n, F_2))\, x^n = \sum_{m\equiv n} - \sum_{m\equiv 5n}$$

$$(13)\qquad \sum_{n>0} t_q(n)\, x^n = \sum_{m\equiv n\equiv 1} + \sum_{m\equiv n\equiv 5} - \sum_{m\equiv 1, n\equiv 5} - \sum_{m\equiv 5, n\equiv 1},$$

wo in allen Summen der rechten Seiten derselbe Summand $x^{\frac{1}{24}(m^2+qn^2)}$ einzusetzen ist und alle Kongruenzen mod 12 zu rechnen sind.

Wie vergleichen die rechten Seiten in (12) und (13). Mit jedem Zahlenpaar (m, n), das in (13) auftritt, treten die beiden Paare $(\pm m, \pm n)$ in (12) auf, und zwar beide in der ersten oder beide in der zweiten Summe. Die Beiträge der übrigen in (12) auftretenden Zahlenpaare heben sich paarweise auf. Daraus folgt (11).

Zur Eindeutigkeit der Klassen $C^{(i)}$ – abgesehen vom Übergang zu konjugierten Klassen – vgl. § 3.

Wir merken noch an: Die beiden Ideale $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ aus $P(\sqrt{-q})$ besitzen die Primzerlegung

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3' \text{ mit } \mathfrak{p}_2 = \left(2, \frac{1+\sqrt{-q}}{2}\right),\ \mathfrak{p}_3 = \left(3, \frac{1+\sqrt{-q}}{2}\right).$$

§ 3. *Binäre quadratische Formen und Modulfunktionen*

Den Dirichlet-Reihen (1) werden – hier für imaginär-quadratische Zahlkörper $P(\sqrt{D})$ – Potenzreihen in $e^{2\pi i\tau}$, $Im\tau > 0$, zugeordnet:

$$\vartheta(\tau, C) = 1 + w \sum_{\mathfrak{a}\in C} e^{2\pi i\tau N(\mathfrak{a})} = \sum_{\mu\in\mathfrak{m}} e^{2\pi i\tau\mu\mu'/N(\mathfrak{m})},$$

Dabei ist w die Anzahl der Einheiten in $P(\sqrt{D})$, $\mathfrak{m}$ ein Ideal der Klasse C^{-1} und μ' konjugiert zu μ. Ferner definieren wir noch

$$\vartheta(\tau, \chi) = \delta_\chi h + w \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})\, e^{2\pi i\tau N(\mathfrak{a})} = \sum_C \chi(C)\, \vartheta(\tau, C),$$

wo δ_χ für den Hauptcharakter 1 und sonst 0 ist. Die Koeffizienten der Potenzreihen $(1/w)\vartheta(\tau, C)$ und $(1/w)\vartheta(\tau, \chi)$ stimmen – abgesehen von den konstanten Gliedern – mit den entsprechenden Koeffizienten der Dirichlet-Reihen $\zeta(s, C)$ und $\zeta(s, \chi)$ überein. Die Funktionen $\vartheta(\tau, C)$ sind mit den von Hecke [2] so bezeichneten $\vartheta(\tau; 0, \mathfrak{m}, \sqrt{D})$ identisch. Diese sind bekanntlich ganze Modulformen der Dimension -1 zur Stufe $|D|$. Ihr Verhalten bei den Transformationen der Gruppe $\Gamma_0(|D|)$, $\tau \to \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $c \equiv 0 \pmod{|D|}$, ist gegeben durch

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, C\right) = \left(\frac{D}{d}\right)(c\tau+d)\,\vartheta(\tau, C)\ ,\ d > 0. \tag{14}$$

Bezeichnen wir mit $\eta(\tau)$ die Dedekindsche Funktion

$$\eta(\tau) = e^{\frac{2\pi i\tau}{24}} \prod_{n>0} (1 - e^{2\pi i\tau n})$$

und mit $H_q(\tau)$ das Produkt

$$H_q(\tau) = \eta(q\tau)\,\eta(\tau),$$

so folgt aus (8), (9), (14) für $-D = q \equiv -1 \pmod{24}$, $c \equiv 0 \pmod{q}$ und $d > 0$

$$H_q\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{D}{d}\right)(c\tau+d)\, H_q(\tau). \tag{15}$$

Die Maximalzahl linear unabhängiger unter den $\vartheta(\tau, C)$ ist $\frac{1}{2}(h+h^*)$, wo h^* die Anzahl der ambigen Idealklassen ist. Das folgt daraus, daß es in jeder Idealklasse C ein Primideal $\mathfrak{p}$ gibt und daß mit $\mathfrak{p} \in C$ zugleich $\mathfrak{p}' \in C'$ ist. Damit ist auch die Ergänzung zu Satz 1 bewiesen.

Die Funktionen $\vartheta(\tau, \chi)$ sind bei $\chi \neq \chi_0$ Spitzenformen der Stufe $|D|$. Ihr Verschwinden in allen Spitzen des Fundamentalbereichs folgt unmittelbar aus der Transformationsformel ([2], Gleichung (19)). Produkte $\vartheta(\tau, \chi_1)\, \vartheta(\tau, \chi_2)$ sind also wegen (14), wenn nicht $\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ ist, Integranden 1. Gattung zur Kongruenzgruppe $\Gamma_0(|D|)$.

Im Falle $q = 23$ sind $\vartheta(\tau, C_1)$ und $\vartheta(\tau, C_2)$ linear unabhängig. Sie bilden überdies eine Basis für die ganzen Formen mit dem Transformationsverhalten (14). Sonst gäbe es nämlich eine ganze Form, die in der Spitze ∞ in zweiter Ordnung verschwände. Ihr Quadrat würde dort in vierter Ordnung verschwinden und müßte als Integrand zu $\Gamma_0(23)$ auch in der Spitze 0 verschwinden, während eine ganze Form der Dimension -2 zu Γ_0 (23) nur 4 Nulstellen im Fundamentalbereich hat. Daraus und aus (15), das auch auf ganz andere Weise bewiesen werden kann (s. § 4), folgt das Bestehen einer Gleichung

$$H_{23}(\tau) = c_1 \vartheta(\tau, C_1) + c_2 \vartheta(\tau, C_2).$$

Koeffizientenvergleich ergibt $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}$ und damit

$$H_{23}(\tau) = \vartheta(\tau, \chi), \chi \neq \chi_0)$$

und schließlich Gleichung (11) für $q = 23$.

§ 4. *Verallgemeinerung eines Satzes von H. Rademacher*

Der folgende Satz enthält die Gleichung (15) und ist eine Erweiterung eines Satzes von H. RADEMACHER, den dieser im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über Partitionen aufgestellt hat [3].

Satz 2: Es seien q und r ganze positive Zahlen, $q \equiv 1$ (mod 2), ε sei eine der Zahlen ± 1, und es gelte die Kongruenz

$$(q-\varepsilon)\, r \equiv 0 \pmod{24}.$$

Dann hat die Funktion

$$\psi^r_{q,\varepsilon}(\tau) = [\eta(q\tau)\, \eta^{-\varepsilon}(\tau)]^r$$

bei den Modultransformationen $\tau \to \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ der Gruppe $\Gamma_0(q)$ die Transformationsgleichung

$$\psi^r_{q,\varepsilon}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(\frac{d}{q}\right)^r (c\tau + d)^{\frac{1-\varepsilon}{2} r}\, \psi^r_{q,\varepsilon}(\tau). \tag{16}$$

Rademacher hat primes $q > 3$ mit $\varepsilon = 1$ behandelt. Mit $q \equiv -1$ (mod 24) $\varepsilon = -1$, $r = 1$ folgt (15).

Zum Beweise unseres Satzes benutzen wir zweckmäßig die Transformationsformel von $\eta(\tau)$ für beliebige Modultransformationen in der von H. Weber im dritten Band seiner Algebra angegebenen Form. Danach ist:

$$\text{a.)} \qquad \eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) i^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(\frac{\pi i}{12}\left[d(b-c)-(d^2-1)\,ac\right]\right) \sqrt{c\tau+d}\,\eta(\tau)$$

für $d>0$, $d \equiv 1 \pmod 2$ mit $\operatorname{Re}\sqrt{c\tau+d}>0$,

$$\text{b.)} \qquad \eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{d}{c}\right) i^{\frac{1-c}{2}} \exp\left(\frac{\pi i}{12}\left[c(a+d)-(c^2-1)\,bd\right]\right) \sqrt{-i(c\tau+d)}\,\eta(\tau)$$

für $c>0$, $c \equiv 1 \pmod 2$ mit $\operatorname{Re}\sqrt{-i(c\tau+d)}>0$.

Durch ganz einfache Rechnung folgt hieraus

$$\psi_{q,\varepsilon}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{\varepsilon q}{d}\right) e^{\frac{\varepsilon q-1}{12}\pi i g} (c\tau+d)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \psi_{q,\varepsilon}(\tau) \tag{17}$$

für $c \equiv 0 \pmod q$, $d>0$, $d \equiv 1 \pmod 2$ mit ganzem g,

$$\psi_{q,\varepsilon}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{d}{q}\right) i^{\frac{c}{2\varepsilon q}(\varepsilon q-1)} e^{\frac{-\varepsilon q+1}{12}\pi i g'} (c\tau+d)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \psi_{q,\varepsilon}(\tau) \tag{18}$$

für $c \equiv 0 \pmod q$, $c>0$, $c \equiv 1 \pmod 2$ mit ganzem g'.

Sei zunächst $r \equiv 1 \pmod 2$. Dann ist $q \equiv \varepsilon \pmod 8$ und nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz $(\varepsilon q/d)=(d/q)$ für $d>0, d \equiv 1 \pmod 2$. Es ist also für diese d und r

$$\psi^r_{q,\varepsilon}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{d}{q}\right)^r (c\tau+d)^{\frac{1-\varepsilon}{2}r} \psi^r_{q,\varepsilon}(\tau), \tag{16}$$

und hier darf man auch negative d zulassen. Da jetzt auch (18) für negative c richtig bleibt, gilt (16) für *alle* Transformationen aus $\Gamma_0(q)$.

Für gerade Exponenten r fällt das Restsymbol heraus, und es gilt (16) – auch für gerade q, wenn (d/q) durch 1 ersetzt wird.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Mathematisches Seminar
der Universität Hamburg

LITERATUR

1. Blij, F. van der, Binary quadratic forms of discriminant –23. Neder. Akad. Wetensch., **55**, 498–503 (1952).
2. Hecke, E., Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann., **97**, 210–242 (1926) = Werke S. 428–460.
3. Rademacher, H., The Ramanujan identities under modular substitutions. Trans. American Math. Soc., **51**, 609–36 (1942).